МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ЕЁ ПРЕПОДАВАНИЯ

И.А. Елецких, Н.В. Черноусова

ПЛАНИМЕТРИЯ (ТЕОРИЯ)

Елец – 2016

УДК 51
ББК 22.1
Е 50

И.А. Елецких, Н.В. Черноусова
Е 50 Планиметрия (теория: электронное учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2016. – 66 с.

Учебное пособие «Планиметрия (теория)» написано в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлениям подготовки 44.03.01 – Педагогическое образование (профиль подготовки – Начальное образование, квалификация выпускника – бакалавр) и 44.03.05 – Педагогическое образование (профили подготовки – Начальное образование и Информатика, квалификация выпускника – бакалавр) с целью оказания помощи в систематизации знаний по планиметрии и воспитания определенной математической культуры будущего учителя.

Пособие может быть использовано выпускниками школ для подготовки к единому государственному экзамену по математике.

УДК 51
ББК 22.1

ВВЕДЕНИЕ

Математическая подготовка бакалавров по направлению Педагогическое образование должна быть достаточно глубокой, ибо учитель начальных классов создает у младших школьников определенную базу знаний, необходимых им для дальнейшего углубленного и расширенного изучения курса математики. Главная цель пособия – не только в передаче определенной системы знаний по обоснованию начального курса математики, но и в воспитании определенной математической культуры будущего учителя.

Курс математики призван обеспечить студентам необходимую подготовку для успешного обучения и воспитания младших школьников, для дальнейшей работы по углублению и расширению математических знаний.

Учебное пособие состоит из двух тем «Из истории возникновения и развития геометрии» и «Планиметрия». Материал темы 1 носит познавательный характер и направлен на знакомство читателя с зарождением и развитием геометрии как науки. Изучение темы 2 имеет целью не только обобщение и систематизацию геометрических знаний и умений, совершенствование определенных навыков (в частности, построения фигур), но и формирование умений определять геометрические понятия, классифицировать их, находить логические ошибки в рассуждениях и определениях, т.е. умений, необходимых учителю начальных классов в его практической деятельности. Теоретический материал, представленный в учебном пособии, даст возможность рассмотреть примеры аксиоматического построения теории на основе неопределяемых понятий (точка, прямая и т.д.) и теоретико-множественных отношений между ними, а также показать независимость геометрических понятий от понятия величины и её измерения.

Пособие «Планиметрия (теория)» составлено с учетом сокращения количества обязательных аудиторных занятий и усилением роли самостоятельной работы обучающихся.

Тема 1. ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. *Возникновение геометрии*[1]

Геометрия зародилась в Древнем Египте как набор правил решения практических задач, возникавших в строительстве, при распределении земельных участков, измерении площадей, объемов и других величин. Свидетельством этому являются египетские пирамиды, построенные около 4800 лет назад. Их строительство требовало достаточно сложных и точных геометрических расчетов. Однако особенно важной была задача распределения земельных наделов. Этим занимались специальные люди – землемеры, которых греки называли гарпедонаптами, т.е. натягивателями веревок, так как при распределении земли использовались веревки. Чтобы знать, где и как их натягивать, надо было иметь план полей. Так практическая задача распределения участков земли привела к возникновению науки о землемерии.

Обширные сведения о свойствах фигур, накопленные египтянами, были заимствованы греками. Произошло это в VII – V вв. до н. э. А так как особенно важной задачей было землемерие, то греки назвали науку о фигурах *геометрией* (с греческого «*геос*» – *земля*, а «*метрио*» – *измеряю*).

К сказанному можно добавить, что многие геометрические понятия возникли в результате многократных наблюдений реальных предметов той или иной формы, т.е. познавая окружающий мир, люди знакомились и с простейшими геометрическими формами. Овладению этим знанием способствовало изготовление орудий, имеющих сравнительно правильную геометрическую форму, строительство жилья, шитьё одежды, изготовление посуды, украшений.

[1] ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Огромное влияние на развитие геометрических представлений оказали систематические астрономические наблюдения. Они способствовали возникновению понятий шара, окружности, угла, угловой меры.

Развитие землемерия, обобщение накопленного опыта наблюдений привело к созданию практических правил измерения земельных участков, нахождения площадей и объемов простейших фигур, правил, необходимых для строительства, и др. Так, формулы для вычисления площадей земельных участков, имеющих форму треугольника, трапеции, встречаются у древних египтян, вавилонян. К XVII –XVI вв. до н. э. были установлены такие ее факты, как теорема Пифагора, найдено выражение для подсчета объема шара и многие другие. Но выступали они не как логически доказанные утверждения, а как выводы из опыта.

Таким образом, геометрия возникла как прикладная наука, как собрание правил, необходимых для решения практических задач: сравнения фигур, нахождения геометрических величин, простейших геометрических построений.

Практические правила постепенно приводились в систему. Кроме того, одни правила стали выводиться из других, обосновываться посредством рассуждений. Возникло доказательство, правила стали превращаться в теоремы, которые доказывались без прямых ссылок на опыт. Вообще совершенствование геометрических знаний шло по пути их отделения от опыта – в результате, предметом геометрии стали не реальные, а идеальные фигуры, т.е. фигуры, являющиеся образами предметов, в которых абстрагируются от всего, корме формы. Более того, эти фигуры стали дополняться свойствами, которыми реальные предметы не обладают.

Например, понятие прямой, возникшее как отражение такого свойства реальных предметов, как протяженность, было дополнено представлением о ее бесконечности.

Получение новых геометрических утверждений при помощи рассуждений относится к VI в. до н. э. и связано с именем древнегреческого математика Фалеса. Считают, что им доказаны свойства равнобедренного треугольника, равенство вертикальных углов и ряд других фактов.

К III в. до н. э. геометрия становится дедуктивной наукой, одновременно решая многие практические задачи: дает точно обоснованные правила для построения фигур с заданными свойствами, позволяет различными способами сравнивать фигуры, по одним свойствам фигуры делать выводы о других ее свойствах и т.д.

Основные достижения в области математики были систематизированы около 300 лет до н. э. греческим ученым Евклидом и изложены в его знаменитом труде «Начала», состоящем из тринадцати книг. Это сочинение является первым дошедшим до нас строгим логическим построением геометрии.

Каждая книга «Начал» начинается с определений основных понятий. Так, в книге по геометрии 35 определений. Среди них определения точки, линии, прямой, поверхности.

- *Точка есть то, что не имеет частей.*
- *Линия есть длина без ширины.*
- *Прямая есть та, которая одинаково лежит относительно всех своих точек.*
- *Поверхность есть то, что имеет длину и ширину.*

Кроме перечисленных даются определения плоского и прямого углов, перпендикуляра, тупого и острого углов, круга, окружности, треугольника и его видов, четырехугольника и его видов и др.

Завершает этот список определение параллельных прямых.

- *Параллельные прямые суть те, которые лежат в одной плоскости и, будучи продолженными в обе стороны, нигде не встречаются.*

За определениями следуют пять постулатов следующего содержания. Требуется, чтобы:

1) *от каждой точки до каждой другой можно было провести прямую;*
2) *ограниченную прямую можно было продолжить неопределенно;*
3) *из любого центра можно было описать окружность любым радиусом;*
4) *все прямые углы были равны;*
5) *если две прямые при пересечении с третьей образуют с одной стороны внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекались бы при достаточном продолжении с этой стороны.*

Затем формулировались аксиомы:

1) *равные одному и тому же третьему также равны и между собой;*
2) *если к равным прибавить равные, то целые будут равны;*
3) *если от равных отнять равные, то полученные остатки будут равны;*
4) *совмещающиеся друг с другом равны;*
5) *целое больше своей части.*

Видим, что начальные определения евклидовой геометрии – это описания ее основных объектов: точки, прямой, плоскости, угла и т.д.

Постулаты выражают возможность основных построений. При этом прямая мыслится как непрерывная, неограниченно делимая, но не состоящая из точек, что соответствует наглядному представлению – прямую проводят по линейке, а не строят по точкам.

Аксиомы, сформулированные Евклидом, относятся к величинам: длине отрезка, величине угла, площади фигуры. У Евклида «равные» понимались как «равновеликие».

За постулатами и аксиомами, которые рассматривались как утверждения, принимаемые без доказательств, формулировались теоремы и задачи на построение. Они располагались в строгой последовательности так, что каждое последующее опирается на предыдущее, а также на постулаты и аксиомы.

Определения, постулаты, аксиомы и дальнейшие выводы в геометрии Евклида имели наглядный, опирающийся на практику смысл, хотя выражали его в идеализированном, абстрактном виде.

Таким образом, геометрия сложилась как наука о пространственных формах и отношениях, рассматриваемых отвлеченно от их математического содержания. В Древней Греции она сформировалась в абстрактную логическую систему, в основе которой лежат первоначальные понятия и аксиомы, новые факты формулируются в виде теорем и выводятся дедуктивным способом, а каждое новое понятие вводится с помощью определения на основе ранее введенных понятий.

«Начала» Евклида оставили глубокий след в истории и в течение многих веков служили образцом научного изложения математики.

§ 2. *О геометрии Лобачевского и аксиоматике евклидовой геометрии*

После III в. до н. э. геометрия как наука развивалась медленно – требовались новые идеи и методы, необходимо было развитие понятия числа и алгебры.

Первые шаги в этом направлении были сделаны в Греции (работы Диофанта, III в.), а затем в Индии, где были открыты десятичная система счисления, отрицательные и иррациональные числа.

В IX веке, благодаря работам Мухаммеда Аль Хорезми, дальнейшее развитие получила алгебра.

Позже таджикский поэт и ученый Омар Хайям (конец XI в. – начало XII в.) дал определение числа как отношения любых величин. Через 600 лет это же определение было дано Ньютоном во “Всеобщей арифметике”.

В геометрии новые идеи и методы появились в XVII в. Они были обусловлены развитием алгебры и созданием математического анализа. Принадлежали эти идеи французскому философу и математику Рене Декарту. В своем сочинении «Геометрия» он впервые представил метод координат на плоскости, установив тем самым взаимосвязь геометрии с алгеброй.

Важным направлением в развитии геометрии был поиск логически безупречного построения геометрии. Дело в том, что аксиоматически построенная теория должна удовлетворять определенным требованиям математической строгости. Они не абсолютны и в разные периоды истории были различными. Эти требования заставили обратить особое внимание на пятый постулат геометрии Евклида – его трудно было принять очевидным, как остальные аксиомы и постулаты. Поэтому возникло стремление вывести его из остальных постулатов и аксиом. Однако попытки, которые длились более двух тысяч лет, были безуспешными, хотя и сыграли положительную роль в развитии геометрии, так как были сформулированы и доказаны теоремы, раскрывающие новые свойства геометрических фигур.

Переворот в геометрии произошел в начале XIX в., когда несколько ученых пришли к мысли о существовании геометрии, отличной от евклидовой.

Первым, кто построил эту геометрию, был Н.И. Лобачевский, профессор Казанского университета. Его рассуждения сводились к следующему.

Рассмотрим в плоскости прямую ***a*** и проведем из точки **A** перпендикуляр **AC** к прямой ***a*** и луч **AB**, перпендикулярный **AC** (рис.1).

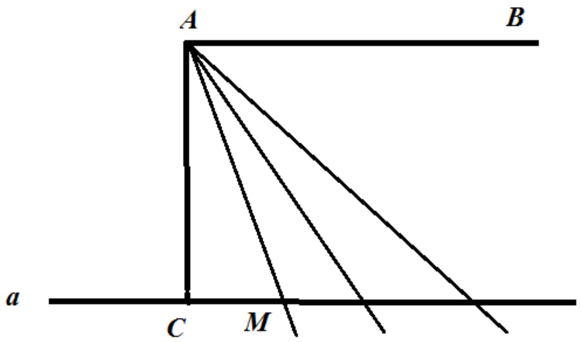


Рисунок 1.

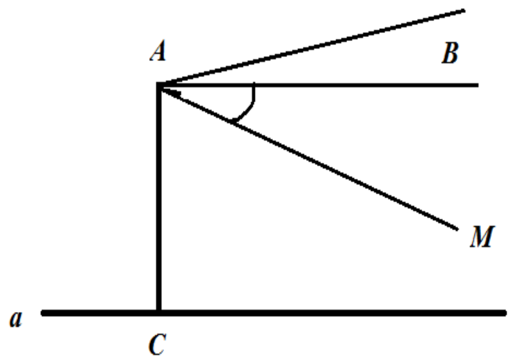


Рисунок 2.

Возьмем некоторую прямую **AM**, пересекающую прямую ***a*** в точке **M**. При неограниченном удалении точки **M** по прямой ***a*** прямая **AM** будет приближаться к некоторому предельному положению. Логически могут представиться две возможности:

1) луч **AM** совпадет с лучом **AB**;

2) луч **AM** составит с лучом **AB** некоторый острый угол.

Случай 1) соответствует аксиоме параллельности: **AB** – единственная прямая, проходящая через точку **A** и не пересекающая прямую ***a***.

Допуская, что имеет место случай 2), Лобачевский начал выводить различные следствия из этого допущения, надеясь, что рано или поздно придет к противоречию, чем и завершится доказательство. Однако, доказав несколько десятков теорем, он так и не обнаружил логических противоречий. И тогда Лобачевский высказал мысль: если заменить пятый постулат его отрицанием (т.е. принять, что через точку вне прямой можно провести более одной прямой, ей параллельной) и сохранить все остальные аксиомы евклидовой геометрии, то получим новую геометрию, которую он назвал «воображаемой», а позднее она была названа его именем – *геометрией Лобачевского*.

Все теоремы, доказываемые в евклидовой геометрии без использования пятого постулата, сохраняются и в геометрии Лобачевского. Например:

- вертикальные углы равны;
- углы при основании равнобедренного треугольника равны;
- из данной точки можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр.

Теоремы же, при доказательстве которых применяется пятый постулат, в геометрии Лобачевского видоизменяются.

Например:

- сумма величин внутренних углов любого треугольника меньше 180°;
- не существует подобных треугольников;
- если углы двух треугольников соответственно равны, то эти треугольники равны.

Так как в геометрии Лобачевского сумма внутренних углов четырехугольника меньше 360^0, то в ней не существует прямоугольников. Позже было доказано, что аксиоматика, предложенная им, независима и непротиворечива.

Открытие, сделанное Н.И. Лобачевским, сыграло огромную роль в развитии математики и физики. В его работах была не только полностью решена проблема независимости аксиомы параллельности от других аксиом евклидовой геометрии, но и было показано, что аксиомы могут подвергаться изменению, что привлекло внимание ученых к вопросам аксиоматики геометрии. Кроме того, было установлено, что геометрия Лобачевского точно описывает взаимосвязь пространства и времени, открытую А. Эйнштейном в теории относительности.

После открытия Н.И. Лобачевского стало ясно, что пятый постулат (аксиома параллельности) не может быть исключена из списка аксиом и постулатов, сформулированных Евклидом. Общая тенденция к повышению строгости построения математических теорий во второй половине XIX в. сказалась и в геометрии. Она выразилась в стремлении дополнить систему аксиом евклидовой геометрии, включив в нее все предложения, которые неявно использовались при доказательстве теорем.

Итог всем исследованиям в этой области подвел крупнейший немецкий математик Д. Гильберт. Произошло это в конце XIX столетия. В своей книге «Основания геометрии» он дает полный список аксиом евклидовой геометрии и доказывает непротиворечивость этой аксиоматики. Сформулированные им аксиомы относятся к точкам, прямым, плоскостям и отношениям между ними, которые выражаются словами «принадлежит», «лежать между», «конгруэнтен». Что такое точка, прямая и плоскость и каков конкретный смысл указанных отношений, Гильберт не уточняет. Все это предполагается известным о них, выражено в аксиомах. Они разбиты на пять групп.

Первая группа – *аксиомы принадлежности*. В них устанавливаются отношения между точками, прямыми и плоскостями.

1. Через две точки проходит одна и только одна прямая.

2. На каждой прямой лежат, по меньшей мере, две точки.
3. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

В связи с данными тремя аксиомами сделаем одно замечание. Известно, что на прямой находится бесконечное множество точек, но в аксиоме 2 отмечается, что их, по меньшей мере, две. Поэтому бесконечность множества точек на прямой надо будет доказывать, исходя из аксиом первой и последующей групп.

Для построения планиметрии ограничиваются указанными аксиомами принадлежности. Для построения стереометрии к ним присоединяются следующие:

4. Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.
5. Если две точки прямой принадлежат некоторой плоскости, то и все точки прямой принадлежат указанной плоскости.
6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют, по крайней мере, еще одну общую точку.
7. Существует, по крайней мере, 4 точки, не лежащие в одной плоскости.

Вторая группа – *аксиомы порядка*. Они определяют понятие «лежать между» и выражают свойства взаимного расположения точек на прямой и плоскости.

1. Если точка **B** лежит между точками **A** и **C**, то она лежит между точками **C** и **A**.
2. Для любых двух точек прямой **A** и **B** существует на этой прямой такая точка **C**, что точка **B** лежит между точками **A** и **C**.
3. Из трех точек на прямой не более чем одна лежит между двумя другими.
4. Пусть точки **A**, **B** и **C** не лежат на одной прямой, и прямая не проходит ни через одну из этих точек. Если при этом прямая ***a*** пересекает

отрезок **AB** (то есть проходит через точку, лежащую между точками **A** и **B**), то она пересекает один из отрезков **BC** или **AC**.

Аксиомы первых двух групп позволяют определить понятие отрезка, луча, угла.

Отрезок – это система двух точек **A** и **B**, принадлежащих прямой ***a***. Точки, расположенные между **A** и **B**, называются точками, лежащими внутри отрезка **AB**, точки **A** и **B** называются концами отрезка **AB**.

Луч с началом **O** – это совокупность всех точек прямой, лежащих с одной стороны от точки **O**.

Угол – это совокупность двух лучей с общим началом, лежащих на разных прямых.

Третья группа – *аксиомы равенства (конгруэнтности)*. Они определяются равенством отрезков и углов.

1. На данной прямой по данную сторону от данной на ней точки можно отложить отрезок, равный данному, и притом только единственным образом.
2. Два отрезка, порознь равные третьему, равны между собой.
3. Пусть на некоторой прямой точка **B** лежит между точками **A** и **C** и на некоторой другой или той же прямой точка $\mathbf{B_1}$ лежит между двумя точками $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{C_1}$. Если при этом отрезок **AB** равен отрезку $\mathbf{A_1B_1}$ и отрезок **BC** равен $\mathbf{B_1C_1}$, то $\mathbf{AC = A_1C_1}$.
4. По данную сторону от данного луча можно отложить данный угол и притом единственным образом
5. Два угла, порознь равные третьему, равны между собой.
6. Пусть **A, B, C** – три точки, не лежащие на одной прямой, $\mathbf{A_1, B_1, C_1}$ – тоже три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом: $\mathbf{AB = A_1B_1}$, $\angle \mathbf{BAC} = \angle \mathbf{B_1A_1C_1}$, то $\angle \mathbf{ABC} = \angle \mathbf{A_1B_1C_1}$.

Четвертая группа состоит из ***аксиомы непрерывности***:

1. Если все точки прямой произвольным образом разбить на два класса так, что каждая точка первого класса лежит левее каждой точки второго класса, тогда непременно либо в первом классе есть самая правая точка (и во втором нет самой левой), либо во втором классе есть самая левая точка (и в первом нет самой правой).

Образно говоря, в этой аксиоме утверждается, что прямая не имеет проколов, что она непрерывна. Действительно, если на числовой прямой выколоть только одну точку – нуль, то числа, соответствующие оставшимся точкам, разделятся на два класса: отрицательные и положительные. И в первом классе (среди отрицательных чисел) нет самого правого (самого большого), а во втором – самого левого.

Пятая группа состоит из единственной аксиомы – ***аксиомы параллельности***.

1. В плоскости через точку вне данной прямой нельзя провести более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Совокупность всех теорем, выводимых из пяти групп аксиом, составляет евклидову геометрию.

Вообще в основу этой геометрии могут быть положены разные аксиоматики (система основных понятий и аксиом), но, несмотря на их различия, в геометрии изучают одни и те же фигуры и получают одни и те же свойства.

Аксиоматическое построение геометрии осуществляется по одним и тем же правилам:

1. Выделяются основные понятия геометрии, которые принимаются без определений.

2. Формулируются аксиомы, в которых раскрываются свойства основных понятий, нужные для построения геометрии, т.е. аксиомы по существу являются неявными определениями основных понятий (в остальном природа

основных понятий безлична). Система аксиом должна удовлетворять ряду условий.

3. Дальнейшее построение геометрии ведется в соответствии со следующими требованиями:

а) всякое геометрическое понятие (термин), если оно не основное, определяется через основные или ранее определенные понятия;

б) всякое геометрическое предложение (теорема, признак, следствие) доказывается на основе аксиом или ранее доказанных теорем.

Чертежи при таком построении играют вспомогательную роль.

Тема 2: ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Аксиоматика планиметрии

Определение 1. Часть геометрии, в которой изучаются плоские фигуры, называется *планиметрией*.

(Слово *планиметрия* произошло от латинского слова «*планум*» – *плоскость* и греческого «*метрио*» – *измеряю*).

Определение 2. *Геометрической фигурой* называется любое множество точек.

Отрезок, прямая, круг, шар – геометрические фигуры.

Определение 3. Геометрическая фигура называется *плоской*, если все ее точки принадлежат одной плоскости.

Например, отрезок, прямоугольник – это плоские фигуры.

Важнейшими составляющими современной геометрии являются геометрические понятия и утверждения. Понятия определяются, а утверждения (теоремы) доказываются.

Обычное определение состоит в том, что одно понятие разъясняется с помощью других, которые считаются известными. Допустим, эти известные понятия также можно определить через другие. Но так продолжать без конца невозможно. Мы придем к понятиям, определить которые через другие уже нельзя; их можно только пояснить, показать на примерах. Сами же эти понятия будут служить для определения других понятий. Они в этом смысле будут исходными, основными.

Доказывая какое-нибудь утверждение, теорему, мы опираемся на некоторые предпосылки, на то, что уже считается известным. Но и эти предпосылки тоже нужно обосновывать и т.д. Так продолжать до бесконечности невозможно, и мы придем к предпосылкам, которые должны быть приняты за исходные. Эти исходные положения – *аксиомы* – принимаются без доказательства и составляют основу для доказательства теорем.

Список основных понятий и формулировки аксиом составляют *основания планиметрии* (или ее *аксиоматику*).

З а м е ч а н и е. Системы неопределяемых понятий и аксиом можно подбирать по-разному. Получаются разные основания геометрии, но все они дают одни те же результаты. Примеры таких различных построений планиметрии вы получите, если сравните, например, разные школьные учебники геометрии.

Для школьной геометрии удачные системы аксиом и неопределяемых понятий разработали известные математики: А.Н. Колмогоров, А.Д. Александров, А.В. Погорелов.

Основные понятия, которые выделяют при строгом построении геометрии, делятся на два вида: одни обозначают *объекты*, которыми занимается геометрия, другие обозначают *отношения* между ними. Основные объекты на плоскости – *точка* и *прямая.* Точки принято обозначать прописными латинскими буквами: ***A, B, C***, … . Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: ***a, b, c, d***, … .За основные отношения между этими объектами принимаются следующие: *принадлежать, лежать между.*

Аксиомы планиметрии делятся на несколько групп.

I. Аксиомы принадлежности точек и прямых на плоскости:

1.1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

1.2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

II. Аксиомы расположения точек на прямой и на плоскости:

II.1. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

II.2. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

III. Аксиомы измерения отрезков и углов:

III.1. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

III.2. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180^0. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

IV. Аксиомы простейших фигур:

IV.1. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

IV.2. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой и только один.

IV.3. *Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.*

V. Аксиома параллельных:

V. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

Приняв перечисленные выше основные понятия и десять аксиом, можно построить всю планиметрию.

§2. Свойства геометрических фигур на плоскости

Так как понятие геометрической фигуры определено через понятие множества, то можно говорить о том, что одна фигура включена в другую (или содержится в другой), можно рассматривать объединение, пересечение и разность фигур.

Определение 1. *Пересечением* двух или нескольких данных фигур называется фигура, состоящая из точек, которые принадлежат каждой из данных фигур.

Обозначение: $\boldsymbol{F = F_1 \cap F_2}$.

Определение 2. Объединением двух или нескольких данных фигур называется фигура, состоящая из точек, которые принадлежат хотя бы одной из данных фигур.

Обозначение: $\boldsymbol{F = F_1 \cup F_2}$.

Например, объединением двух лучей ***AB*** и ***MK*** является прямая ***KB***, а их пересечением отрезок ***AM*** (рис.3).

Рисунок 3.

Различают выпуклые и невыпуклые фигуры.

Определение 3. Фигура называется *выпуклой*, если она вместе с любыми двумя своими точками содержит также соединяющий их отрезок.

Фигура $\boldsymbol{F_1}$, изображенная на рисунке 4, выпуклая, а фигура $\boldsymbol{F_2}$ – невыпуклая.

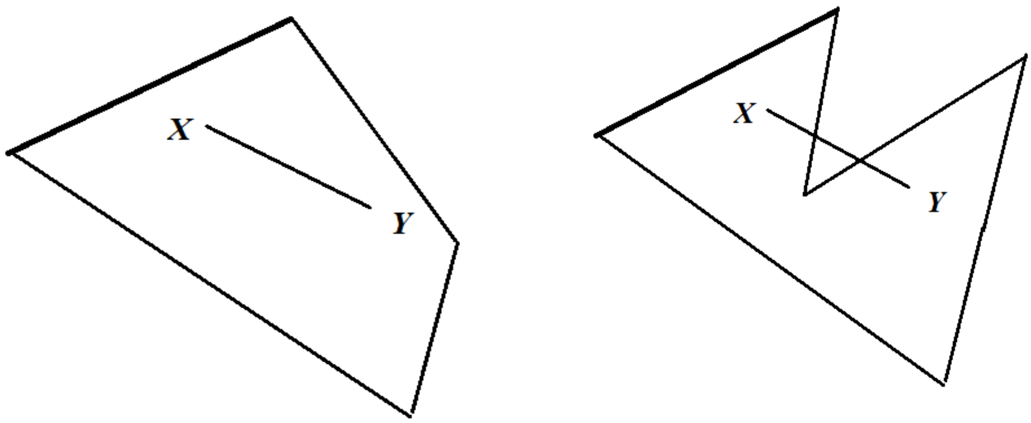


Рисунок 4.

Выпуклыми фигурами являются плоскость, прямая, луч, отрезок, точка. Нетрудно убедиться в том, что выпуклой фигурой является круг (рис. 5).

Если продолжить отрезок XY до пересечения с окружностью, то получим хорду AB. Так как хорда содержится в круге, то отрезок XY тоже содержится в круге и, значит, круг – выпуклая фигура.

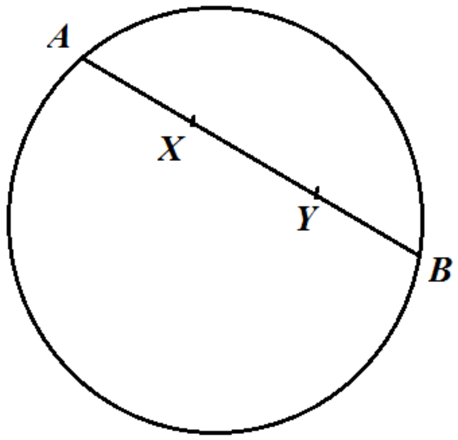


Рисунок 5.

Для многоугольников известно другое определение.

Определение 4. Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

Так как равносильность этого определения и данного выше для многоугольника доказана, то можно пользоваться и тем, и другим.

Определение 5. Две геометрические фигуры называются *равными*, если их можно совместить наложением.

Рассмотрим определения и основные свойства геометрических фигур, изучаемых в школьном курсе планиметрии. Знание этого материала и умение применять к решению несложных геометрических задач является той основой, на которой можно строить методику обучения младших школьников элементам геометрии.

§ 3. Отрезок. Луч

Рассмотрим прямую ***a*** и три точки ***A, B, C*** на этой прямой (рис.6). Точка ***B*** лежит между точками ***A*** и ***C***, она разделяет точки ***A*** и ***C***. Можно также сказать, что точки ***A*** и ***C*** лежат по разные стороны от точки ***B***. Точки ***B*** и ***C*** лежат по одну сторону от точки ***A***.

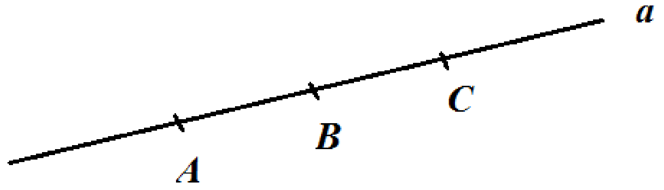


Рисунок 6.

Определение 1. *Отрезком* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками. Эти данные точки называются *концами отрезка*, а все остальные точки отрезка – его *внутренние* точки.

Отрезок обозначается указанием его концов, например, «отрезок **AB**». Говорят, что два отрезка пересекаются, если они имеют только одну общую точку.

Определение 2. Длину отрезка **AB** называют также *расстоянием* между точками **A** и **B**.

На практике часто приходится измерять отрезки, т.е. находить их длины. Для измерения отрезков применяются различные измерительные инструменты. Простейшим из них является линейка. Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за *единицу измерения* (его называют *масштабным отрезком*).

Если два отрезка *равны*, то единица измерения (и ее части) укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т.е. *равные отрезки имеют равные длины*.

Определение 3. *Лучом* (или *полупрямой)* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной точки. Эта точка называется *начальной точкой* (или *началом)*.

Определение 4. Два луча с общим началом, дополняющие друг друга до прямой, называются *дополнительными*.

Лучи, так же как и прямые, обозначаются строчными латинскими буквами. Можно обозначать полупрямую двумя точками: начальной и какой-нибудь еще точкой, принадлежащей полупрямой. При этом начальная точка ставится на первом месте.

§ 4. Углы

Определение 1. *Угол* – это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называют *сторонами угла*, а их общее начало – его *вершиной*.

На рисунке 7 изображен угол с вершиной ***O*** и сторонами ***h*** и ***k***. На сторонах отмечены точки ***A*** и ***B***.

Этот угол обозначают так: ∠ **(*h k*),** или ∠ ***AOB***, или ∠ ***O*.**

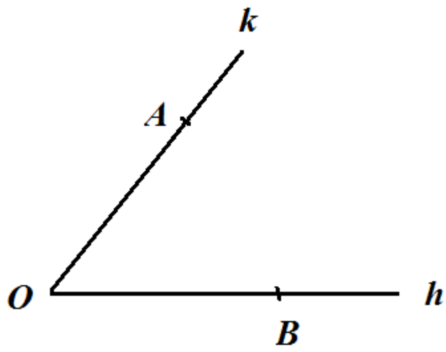


Рисунок 7.

Определение 2. Угол называют *развернутым*, если его стороны лежат на одной прямой.

Любой луч разделяет плоскость на две части.

Если угол неразвернутый, то одна из частей называется внутренней, другая – внешней областью этого угла (рис.8).

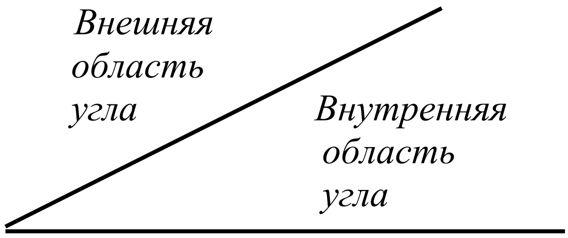


Рисунок 8.

Если угол развернутый, то любую из двух частей, на которые он разделяет плоскость, можно считать внутренней областью угла.

Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют *углом*.

Определение 3. Угол, составляющий половину развернутого угла, называется *прямым*. Угол, меньший прямого, называется *острым*. Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется *тупым*.

Определение 4. Два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие стороны составляют прямую.

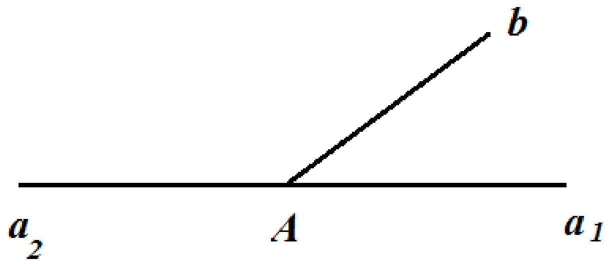


Рисунок 9.

$\angle(a_1 b)$ и $\angle(a_2 b)$ – смежные углы (рис. 9).

В объединении смежные углы дают развернутый угол.

Теорема 1. *Сумма смежных углов равна 180^0.*

Справедливость этого свойства вытекает из определения смежных углов.

Определение 5. Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется *биссектрисой* угла.

Кроме понятия угла, данного выше, в геометрии рассматривают понятие *плоского угла*.

Определение 6. *Плоский угол* – это часть плоскости, ограниченная двумя различными лучами, исходящими из одной точки.

Определение 7. Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

На рисунке 10 углы ***AOD*** и ***COB***, а также углы ***AOC*** и ***DOB*** – вертикальные.

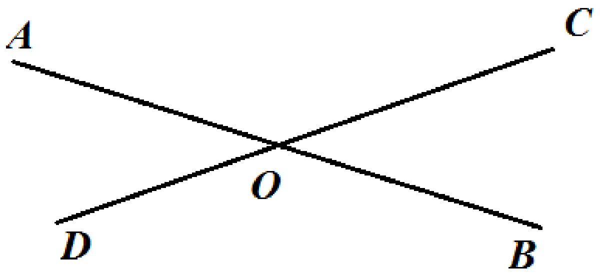


Рисунок 10.

Теорема 2. *Вертикальные углы равны.*

Справедливость этого свойства вытекает из определения вертикальных углов и теоремы 1.

Пусть даны две прямые ***MB*** и ***CD*** и ***NC*** – третья прямая, пересекающая прямые ***MB*** и ***CD*** (рис. 11).

Прямая ***NC*** по отношению к прямым ***MB*** и ***CD*** называется *секущей*.

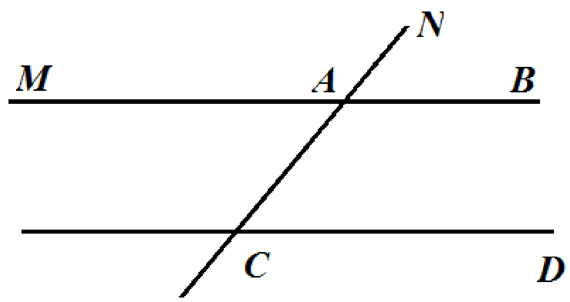


Рисунок 11.

Пары углов, которые образуются при пересечении прямых ***MB*** и ***CD*** секущей ***NC***, имеют специальные названия.

Углы BAC и DCA называются *внутренними односторонними*. Углы MAC и DCA - *внутренними накрест лежащими*. Углы NAB и ACD называют *соответственными*.

З а м е ч а н и е. Если внутренние накрест лежащие углы равны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

И обратно: если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то внутренние накрест лежащие углы равны.

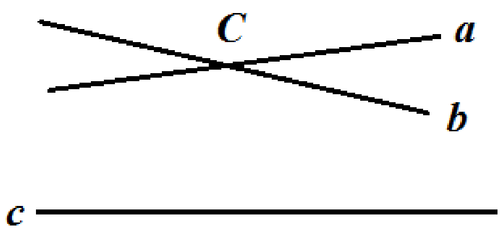
§ 5. Параллельность и перпендикулярность на плоскости

Определение 1. Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Если прямая a параллельна прямой b, то пишут $a || b$.

Рассмотрим некоторые свойства параллельных прямых.

Теорема 1. *Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.*



Дано: $a || c$, $b || c$.

Доказать: $a || b$.

Рисунок 12.

📖 Предположим противное, т.е. допустим, что прямые a и b не параллельны (рис.12). Тогда они пересекаются в некоторой точке C. Значит, через точку C проходят две прямые, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной. Пришли к противоречию, следовательно, сделанное предположение неверно. Остается принять: $\boldsymbol{a} \| \boldsymbol{b}$. ◆

Важное свойство параллельных прямых раскрывается в теореме, носящей имя древнегреческого математика Фалеса.

Теорема 2. *Если на одной прямой отложить несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные отрезки* (рис.13).

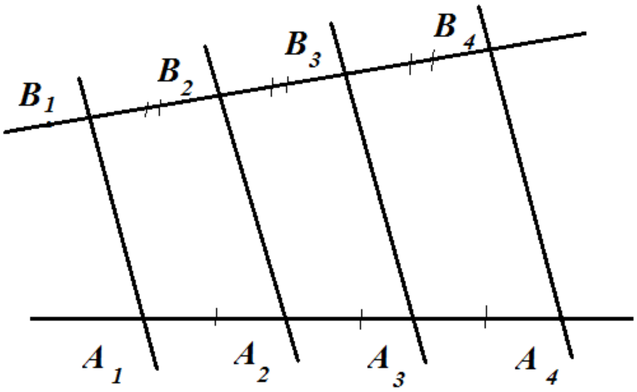


Рисунок 13.

Рассмотрим признаки параллельности прямых. Признаками называются теоремы, в которых устанавливается наличие какого-либо свойства объекта, находящегося в определенной ситуации. В частности, необходимость рассмотрения признаков параллельности прямых вызвана тем, что нередко в практике требуется решить вопрос о взаимном расположении двух прямых, но в тоже время нельзя непосредственно воспользоваться определением.

Теорема 3. *Если при пересечении двух прямых* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *параллельны.*

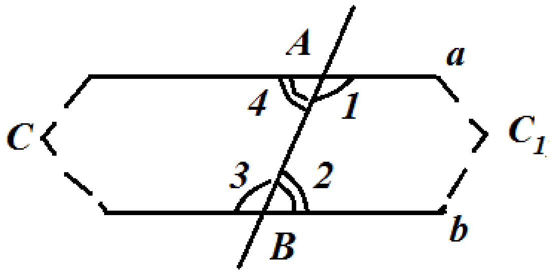


Рисунок 14.

Дано: ***a, b, c*** – прямые

$a \cap c = A; b \cap c = B;$

$\angle 1 = \angle 3;\ \angle 2 = \angle 4.$

Доказать: $a \parallel b$.

🕮 Допустим, что прямые ***a*** и ***b*** не параллельны, тогда $a \cap b = C$.

Секущая ***AB*** разбивает плоскость на две полуплоскости. В одной из них лежит точка ***C***. Построим треугольник BAC_1 , равный треугольнику ***ABC***, с вершиной C_1 в другой полуплоскости. Так как соответствующие углы треугольников ***ABC*** и BAC_1 с вершинами ***A*** и ***B*** равны, то они совпадают с внутренними накрест лежащими углами. Значит, прямая AC_1 совпадает с прямой ***a***, а прямая BC_1 совпадает с прямой ***b***.

Получается, что через точки ***C*** и C_1 проходят две различные прямые ***a*** и ***b***. Это невозможно. Значит, прямые ***a*** и ***b*** параллельны. ◆

Теорема 4. *Если при пересечении двух прямых **a** и **b** третьей прямой соответственные углы равны, то прямые **a** и **b** параллельны.*

Справедливость теоремы следует из того, что из равенства внутренних накрест лежащих углов следует равенство соответственных углов и наоборот.

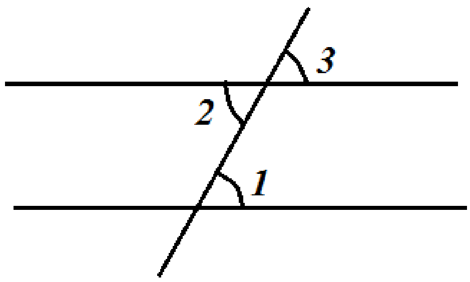


Рисунок 15.

Углы 1 и 2 – внутренние накрест лежащие, а углы 1 и 3 – соответственные (рис. 15).

Теорема 5. *Если при пересечении двух прямых **a** и **b** третьей прямой, сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые **a** и **b** параллельны*

Определение 2. Две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Если прямая $\boldsymbol{a}$ перпендикулярна прямой $\boldsymbol{b}$, то пишут $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

Основные свойства перпендикулярных прямых нашли отражение в двух теоремах.

Теорема 6. *Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую, и только одну.*

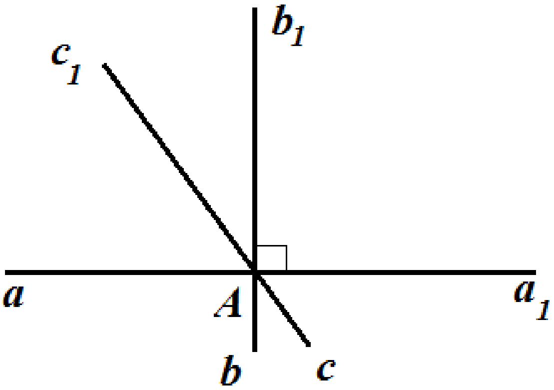


Рисунок 16.

Дано: $A \in a$;

$b_1 \cap a = A$;

$\angle(a_1 b_1) = 90°$

Доказать: 1) $a \perp b$;

2) $c = b$.

1) По условию $\boldsymbol{a}$ – данная прямая и $\boldsymbol{A}$ – данная точка на ней. Обозначим через $\boldsymbol{a_1}$ одну из полупрямых прямой $\boldsymbol{a}$ с начальной точкой $\boldsymbol{A}$ (рис. 16). Отложим от полупрямой $\boldsymbol{a_1}$ угол $(\boldsymbol{a_1 b_1})$ равный 90°. Тогда по определению: прямая, содержащая луч $\boldsymbol{b_1}$, будет перпендикулярна прямой $\boldsymbol{a}$.

2) Допустим, что существует другая прямая, тоже проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a. Обозначим через c_1 полупрямую этой прямой, лежащую в одной полуплоскости с лучом b_1.

Углы (a_1b_1) и (a_1c_1), равные каждый 90°, отложены в одну полуплоскость от полупрямой a_1. Но от полупрямой a_1 в данную полуплоскость можно отложить только один угол, равный 90°. Поэтому не может быть другой прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a, следовательно $c = b$. ◆

Теорема 7. *Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.*

Определение 3. *Перпендикуляром* к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, имеющий концом их точку пересечения. Конец этого отрезка называется *основанием перпендикуляра*.

Определение 4. Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется *расстоянием от точки до прямой*.

Определение 5. *Расстоянием между параллельными прямыми* называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой.

§ 6. Треугольник

Треугольник – одна из простейших геометрических фигур. Но его изучение породило целую науку – тригонометрию, которая возникла из практических потребностей при измерении земельных участков, составлении карт местности, конструировании различных механизмов.

Первые упоминания о треугольнике и его свойствах содержатся в египетских папирусах. Например, в них предлагается находить площадь равнобедренного треугольника, как произведение половины основания на боковую сторону, хотя для любого равнобедренного треугольника с малым углом при вершине, противоположной основанию, такой способ дает приближенное значение площади.

Многие свойства треугольников были открыты и доказаны математиками Древней Греции. Среди них – знаменитая теорема Пифагора.

Рассмотрим основные понятия, связанные с треугольником.

Определение 1. *Треугольником* называется геометрическая фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков.

Любой треугольник разделяет плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю.

З а м е ч а н и е. Фигуру, состоящую из треугольника и его внутренней области, также называют треугольником (или плоским треугольником).

В любом треугольнике выделяют следующие элементы: стороны, углы, высоты, биссектрисы, медианы, средние линии.

Стороны треугольника обозначают буквами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$; соответственно углы, противолежащие этим сторонам - α, β, γ.

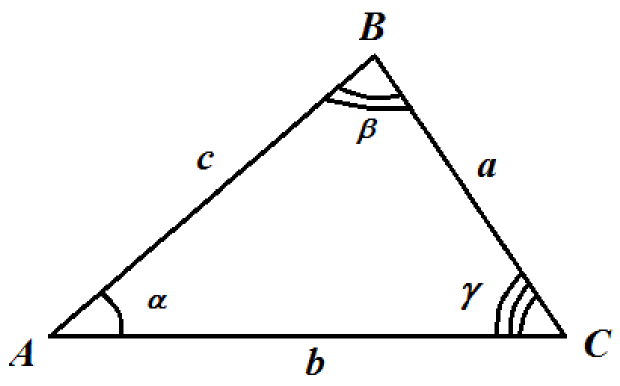


Рисунок 17.

Определение 2. *Высотой* треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону.

Высоту треугольника, проведенную из вершины A обозначают h_a, из вершины B – h_b и из вершины C – h_c.

Определение 3. *Биссектрисой* треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне.

Обозначают биссектрисы соответственно l_a, l_b, l_c .

Основные свойства биссектрис углов треугольника.

- Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника.
- Биссектриса треугольника есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.
- Биссектриса угла треугольника делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим к ней сторона (рис. 18), т.е. $b_1 : c_1 = b : c$.

- Биссектриса треугольника делит площадь треугольника в отношении, пропорциональном прилежащим сторонам, т.е. $\frac{S_{\Delta\, ABD}}{S_{\Delta\, ACD}} = \frac{c}{b}$.

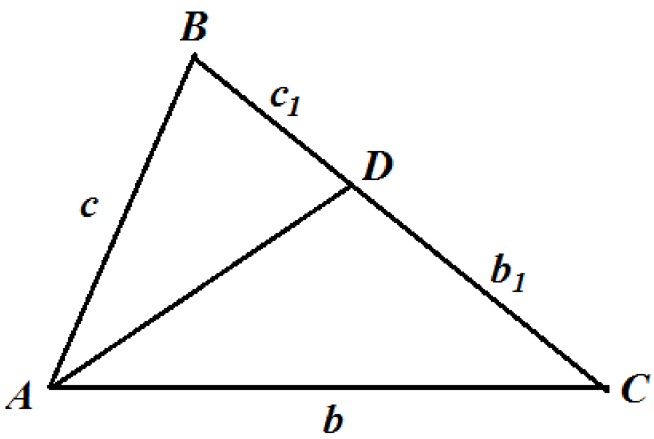


Рисунок 18.

Определение 4. *Медианой* треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны.

Обозначение медиан треугольника: m_a, m_b, m_c.

Основные свойства медиан треугольника.

- Медиана треугольника есть геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков прямых, заключенных внутри треугольника и параллельных той его стороне, к которой проведена медиана.
- Медиана треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.
- Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

Определение 5. *Средней линией* треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника.

- Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Отметим еще несколько важных *свойств треугольников*.

- Сумма углов треугольника равна 180^0.
- Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним (рис.19).

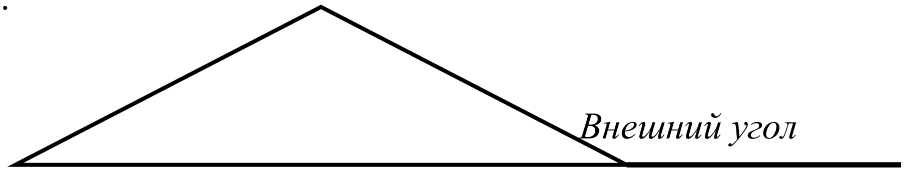


Рисунок 19.

- В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон, т.е.

$$a < b + c.$$

Определение 6. Треугольники называются *равными*, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.
(При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон).

На практике и в теоретических построениях часто используются *признаки равенства треугольников*, обеспечивающие более быстрое решение вопроса об отношениях между ними. Таких признаков три.

- Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
- Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

- Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Докажем в качестве примера второй признак равенства треугольников.

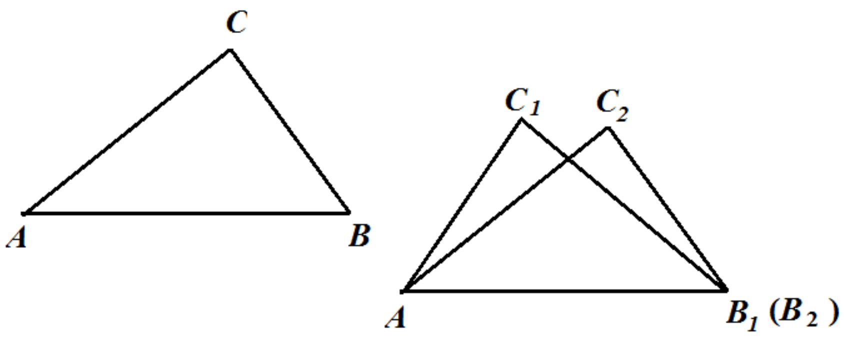


Рисунок 20.

Д а н о:

$\Delta ABC; \Delta A_1B_1C_1$;

$AB = A_1B_1$;

$\angle A = \angle A_1$;

$\angle B = \angle B_1$.

Доказать:

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

📖 Пусть $A_1B_2C_2$ – треугольник, равный треугольнику ABC, с вершиной B_2 на луче A_1B_1 и вершиной C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, где лежит вершина C_1 (рис.20).

Так как $A_1B_2 = A_1B_1$, то вершина B_2 совпадает с вершиной B_1.

Так как $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1$, то луч A_1C_2 совпадает с лучом A_1C_1, а луч B_1C_2 совпадает с лучом B_1C_1. Отсюда следует, что вершина C_2 совпадает с вершиной C_1.

Итак, треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником $A_1B_2C_2$, а значит, равен треугольнику ABC. ◆

Определение 7. Треугольники называются *подобными,* если они переводятся друг в друга преобразованием подобия.

Существует *три признака подобия треугольников*.

- Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
- Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

- Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Решение треугольников состоит в нахождении неизвестных сторон, углов и замечательных линий треугольника по известным его сторонам и углам. Для этого необходимо знание следующих теорем и соотношений в треугольнике.

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними, т.е.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma.$$

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, т.е.:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

- В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.
- Площадь треугольника может быть вычислена по формулам:

$$S = \frac{1}{2}a\cdot h_a = \frac{1}{2}b\cdot h_b = \frac{1}{2}c\cdot h_c;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ - *формула Герона*;

$$S = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha; \qquad S = \frac{abc}{4R}; \qquad S = pr.$$

Здесь a, b, c – стороны треугольника; h_a, h_b, h_c – высоты, пущенные на стороны a, b, c соответственно; $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ - полупериметр; R – радиус окружности, описанной около треугольника; r – радиус окружности, вписанной в треугольник.

Определение 8. Два треугольника называются *равновеликими*, если их площади равны.

Рассмотрим в следующих параграфах треугольники специальных видов: равнобедренный, равносторонний и прямоугольный треугольники.

§ 7. Равнобедренный треугольник. Равносторонний треугольник. Прямоугольный треугольник

Определение 1. Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны.

Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием* треугольника.

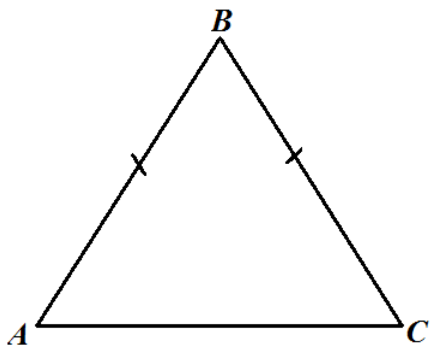
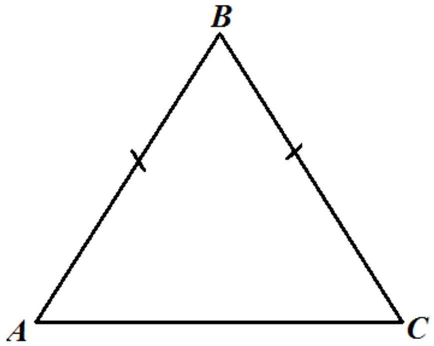


Рисунок 21.

В треугольнике ABC стороны AB и BC являются боковыми сторонами, а сторона AC – основанием (рис. 21).

Свойства равнобедренного треугольника:

- В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.



Дано: Δ ***ABC***;

AB* = *BC

Доказать: $\angle$***A*** = $\angle$***C***.

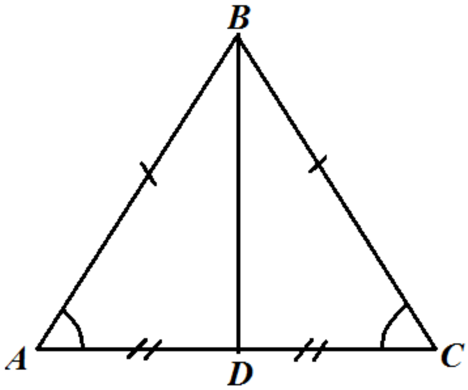
Рисунок 22.

🕮 Треугольники ***BAC*** и ***BCA*** равны по первому признаку равенства треугольников (***AB* = *BC***, ***AC* = *CA***, $\angle$***BAC*** = $\angle$***BCA***). Из равенства треугольников следует равенство соответственных углов, т.е. $\angle$***A*** = $\angle$***C***. ◆

➢ Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

З а м е ч а н и е. Обратную теорему называют *признаком равнобедренного треугольника*.

➢ В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.



Дано: Δ ***ABC***;

AB* = *BC*; *AD* = *DB

Доказать: 1) $\angle$***ACD*** = $\angle$***BCD;***

2) ***CD*** $\perp$ ***AB***.

Рисунок 23.

🕮

1) Треугольники ***CAD*** и ***CBD*** равны по первому признаку равенства треугольников (***AC* = *BC*** – по условию, $\angle$***CAD*** = $\angle$***CBD*** – по первому свой-

ству равнобедренных треугольников; $AD = DB$ – т.к. по условию CD – медиана).

Из равенства треугольников следует равенство соответственных углов:

$$\angle ACD = \angle BCD, \angle ADC = \angle BDC.$$

Так как $\angle ACD = \angle BCD$, то CD – биссектриса угла ACB.

2) Так как углы ADC и BDC смежные и равные, то они прямые, поэтому CD - высота треугольника. ◆

Определение 2. Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним*.

Свойства равностороннего треугольника:

- Все углы равны (и равны 60°).
- Каждая из трех медиан является также биссектрисой и высотой.
- Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в него.
- Основные формулы равностороннего треугольника:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$R = \frac{2}{3}\cdot h = 2\cdot r = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \qquad r = \frac{1}{3}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot R = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

где a – сторона равностороннего треугольника, h – высота равностороннего треугольника; r – радиус окружности, вписанной в треугольник; R – радиус окружности, описанной около треугольника; S – площадь равностороннего треугольника.

Определение 3. Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются *катетами*.

Признак равенства прямоугольных треугольников: Если гипотенуза и катет прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны.

Признак подобия прямоугольных треугольников. Для подобия двух прямоугольных треугольников достаточно, чтобы у них было по равному острому углу.

Свойства прямоугольного треугольника:

- Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу:

$$\frac{b_c}{b}=\frac{b}{c}, \qquad \frac{a_c}{a}=\frac{a}{c}$$

или $b^2=b_c\cdot c$, $a^2=a_c\cdot c$, где a_c и b_c – проекции катетов на гипотенузу c.

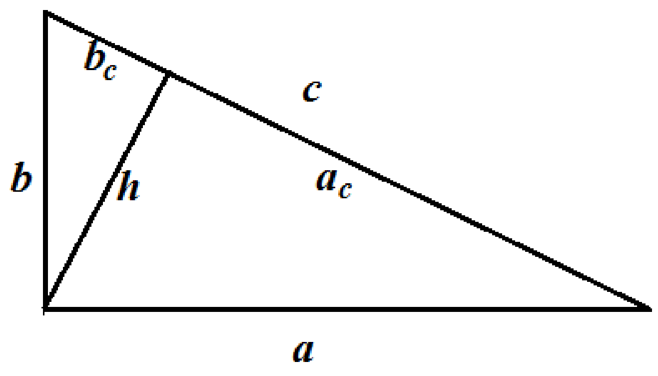


Рисунок 24.

- Высота, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу:

$$\frac{b_c}{h}=\frac{h}{a_c} \text{ или } h^2=a_c\cdot b_c.$$

- Катет, противолежащий углу в 30°, равен половине гипотенузы.

- Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, т.е. $\boldsymbol{R = \frac{c}{2}}$.
- Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, может быть найден по формуле: $\boldsymbol{r = \frac{a + b - c}{2}}$.
- Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$ ***- теорема Пифагора.***

- Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ab}$.

§ 8. Четырехугольники.

Определение 1. *Четырехугольником* называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков, причем никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.

Данные точки называются *вершинами* четырехугольника, а соединяющие их отрезки – его *сторонами*.

Любой четырехугольник разделяет плоскость на две части: *внутреннюю* и *внешнюю*.

Фигуру, состоящую из четырехугольника и его внутренней области, также называют четырехугольником (или *плоским четырехугольником*).

Вершины четырехугольника называют *соседними*, если они являются концами одной из его сторон.

Вершины, не являющиеся соседними, называют *противолежащими*.

Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются его *диагоналями*.

Стороны четырехугольника, исходящие из одной вершины, называют *соседними*. Стороны, не имеющие общего конца, называются *противолежащими*. У четырехугольника $ABCD$ вершины A и B – соседние, а вершины A и C – противолежащие; стороны AB и BC – соседние, BC и AD – противолежащие; отрезки AC и BD – диагонали четырехугольника (рис.25).

Четырехугольники бывают *выпуклые* и *невыпуклые*. Так, четырехугольник $ABCD$ – выпуклый, а четырехугольник $KPTM$ – невыпуклый (рис.25, 26).

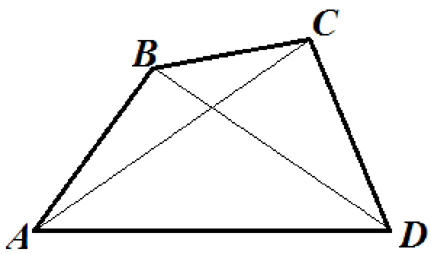


Рисунок 25.

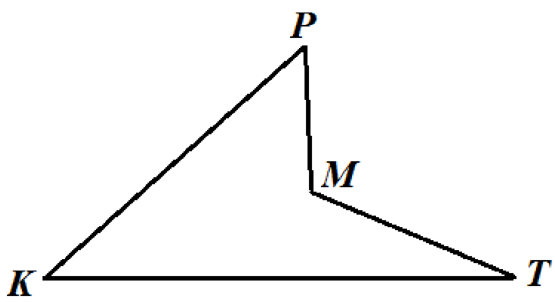


Рисунок 26.

Среди выпуклых четырехугольников выделяют параллелограммы и трапеции.

Определение 2. *Параллелограммом* называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Свойства параллелограмма:

- Противоположные стороны параллелограмма равны.
- Противоположные углы параллелограмма равны.
- Каждая диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.
- Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма (d_1 и d_2) равна сумме квадратов его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$.
- Площадь параллелограмма равна: $S = a \cdot h_a$ или $S = ab \cdot \sin\alpha$ (рис. 27):

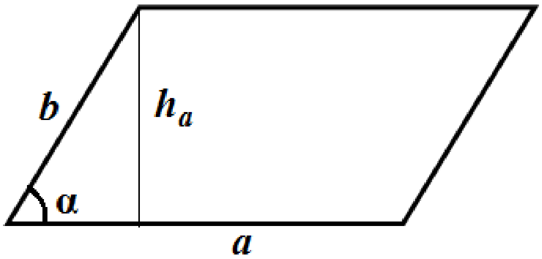


Рисунок 27.

Признаки параллелограмма:

- Если в четырехугольнике противоположные стороны равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
- Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
- Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то данный четырехугольник – параллелограмм.

Докажем, например, второй признак.

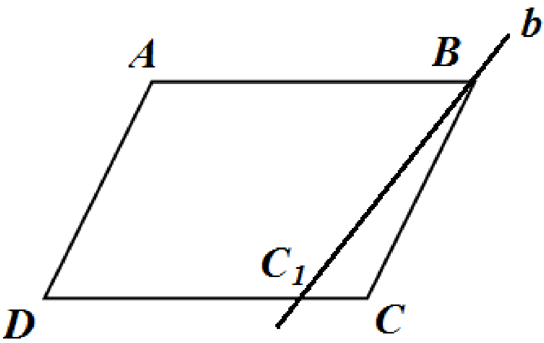


Рисунок 28.

Дано: $ABCD$ - четырехугольник,

$AB = CD, AB \parallel CD.$

Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

🕮 Проведем через вершину B прямую b, параллельную AD: $b \cap BC = C_1$. Четырехугольник ABC_1D – параллелограмм. Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то $AB = C_1D$, а по условию $AB = CD$, значит, $C_1D = CD$. Следовательно, точки C и C_1 – совпадают.

Таким образом, четырехугольник $ABCD$ совпадает с параллелограммом ABC_1D, а значит и сам является параллелограммом. ◆

Определение 3. Параллелограмм, все стороны которого равны, называется *ромбом*.

Помимо всех свойств параллелограмма,

ромб обладает следующими свойствами:

- Прямая, содержащая диагональ ромба, является его осью симметрии.
- Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
- Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.
- Площадь ромба может быть вычислена по формуле:

$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2}$, где $\boldsymbol{d_1}$ и $\boldsymbol{d_2}$ – диагонали ромба.

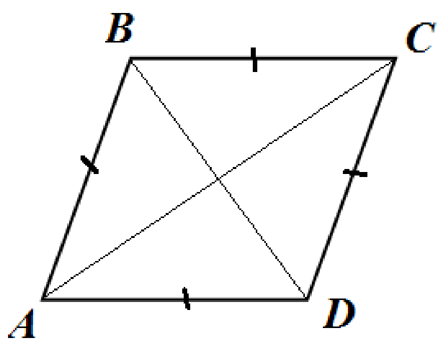


Рисунок 29.

Определение 4. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется *прямоугольником*.

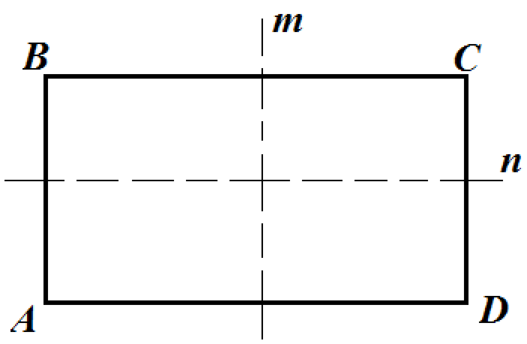


Рисунок 30.

Помимо всех свойств параллелограмма, прямоугольник обладает следующими свойствами:

- Перпендикуляр, проходящий через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии (на рис. 30 прямые $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ – оси симметрии прямоугольника).

➢ Прямоугольник имеет две оси симметрии.

➢ Диагонали прямоугольника равны.

➢ Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = a \cdot b$, где a и b – смежные стороны прямоугольника.

Определение 5. Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется *квадратом*.

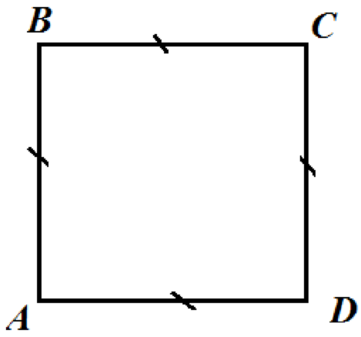


Рисунок 31.

Из определений квадрата и ромба следует, что квадрат является ромбом, у которого все углы прямые. Так как квадрат является и параллелограммом, и прямоугольником, и ромбом, то все свойства этих фигур присущи и квадрату.

➢ Площадь квадрата вычисляется по формуле $S = a^2$, где a – сторона квадрата.

Определение 6. *Трапецией* называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

Эти параллельные стороны называют *основаниями* трапеции.

Две другие стороны называют *боковыми*.

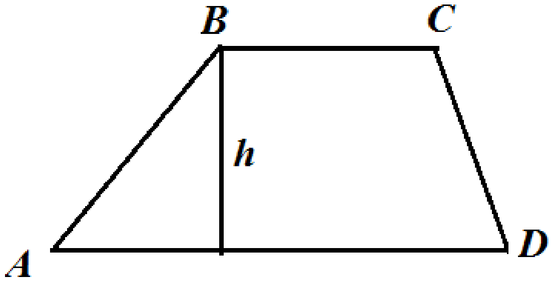


Рисунок 32.

Определение 7. Трапеция, боковые стороны которой равны, называется *равнобедренной* (или *равнобочной*).

На рисунке 32 $ABCD$ – трапеция, BC и AD – основания, AB и CD – боковые стороны.

Определение 8. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией* трапеции.

Свойства средней линии трапеции:

- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

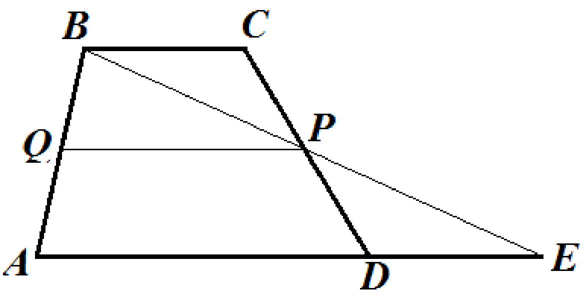


Рисунок 33.

Дано: $ABCD$ – трапеция

PQ – средняя линия

Доказать: 1) $PQ \parallel BC, PQ \parallel AD,$

2) $PQ = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

📖 Через середину P проведем прямую BP: $BP \cap AD = E$.

Треугольники BCP и DPE равны по второму признаку равенства треугольников ($CP = PD$ – по построению; $\angle PCB = \angle PDE$ – как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AE и секущей CD; $\angle CPB = \angle DPE$ – как вертикальные). Из равенства треугольников следует равенство соответственных сторон: $PB = PE$, $BC = DE$. Значит, средняя линия PQ трапеции является средней линией треугольника ABE. По свойству средней линии треугольника имеем: $PQ \parallel AE$ и

$$PQ = \frac{1}{2}AE = (BC + AD).$$ ◆

- Площадь трапеции вычисляется по формуле: $S = \frac{a+b}{2}h$, где a, b – основания трапеции, h – высота.

§ 9. Окружность. Круг.

Определение 1. *Окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, которая называется центром.

Расстояние от точек до ее центра называется *радиусом*.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*.

Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*.

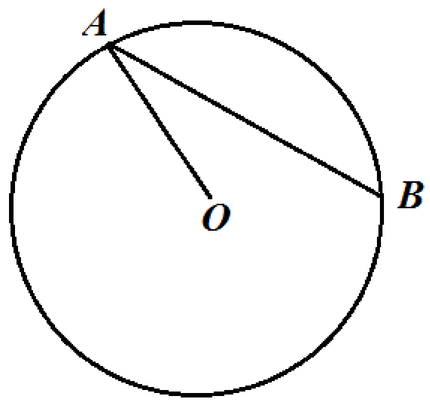


Рисунок 34.

OA – радиус окружности, ***AB*** – хорда окружности (рис. 34).

<u>*Свойства хорд окружности:*</u>

- Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.
- Равные хорды равноудалены от центра окружности и, наоборот, равноудаленные от центра хорды равны.
- Из двух неравных хорд окружности большая хорда расположена ближе к центру окружности, и наоборот.
- Диаметр равен удвоенному радиусу окружности (обозначается обычно ***d*** или ***D***).
- Если через точку, взятую внутри окружности, проведены две хорды, то произведения длин отрезков хорд равны, т.е. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ (рис. 35).

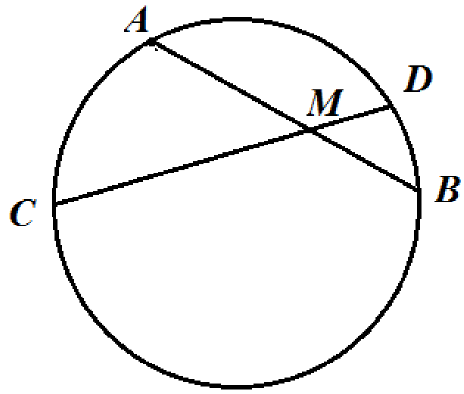


Рисунок 35.

Определение 2. Прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярно ее радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной*.

Теорема 1. *Для того, чтобы прямая была касательной к окружности необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна радиусу окружности и проходила через его конец.*

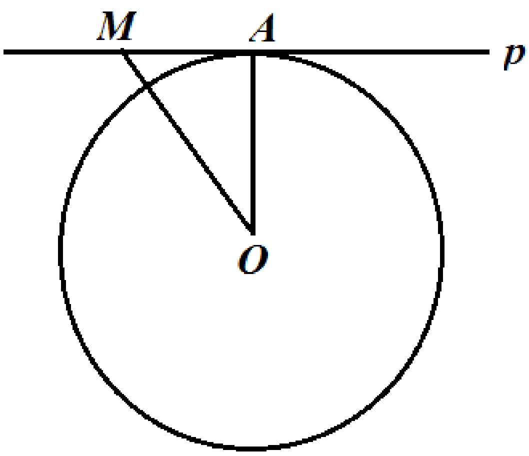


Рисунок 36.

1) Необходимость условия:

Дано: ***Окр.(O; r)***

$\boldsymbol{r = OA, p}$ – касательная, $\boldsymbol{A \in p}$.

Доказать: $\boldsymbol{OA \perp p}$.

2) Достаточность условия:

Дано: ***Окр.(O; r)***

$\boldsymbol{A \in p, A \in}$ ***Окр.*** $\boldsymbol{(O; r), OA \perp p}$.

Доказать: $\boldsymbol{p}$ – касательная.

📖 *1) Необходимость условия.*

Пусть $\boldsymbol{M}$ – некоторая точка прямой $\boldsymbol{p}$, т.е. $\boldsymbol{M \in p}$, и $\boldsymbol{M \neq A}$.

Так как по условию точка $\boldsymbol{A}$ лежит на окружности и $\boldsymbol{A \in p}$ (где $\boldsymbol{p}$ – касательная к окружности), то точка **M** не принадлежит окружности и выполняется неравенство $\boldsymbol{OM > OA}$.

Значит, OA меньше любого отрезка, соединяющего точку O с произвольной точкой прямой p, отличной от точки A.

Следовательно, по теореме о сравнении перпендикуляра и наклонной, $OA \perp p$.

2) Достаточность условия.

Для любой точки M, принадлежащей прямой p, выполнятся неравенство: $OM > OA$, где OA – радиус данной окружности.

Следовательно, точка M не принадлежит окружности, т.е. прямая p имеет с окружностью только одну общую точку A, значит по определению 2 p - касательная к окружности. ◆

Определение 3. Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется *секущей*.

Свойство касательной и секущей:

- Если через точку А, не принадлежащую окружности, провести касательную и секущую, то квадрат касательной будет равен произведению секущей на ее внешнюю часть, т.е. $AB^2 = AD \cdot AC$ (рис. 37).

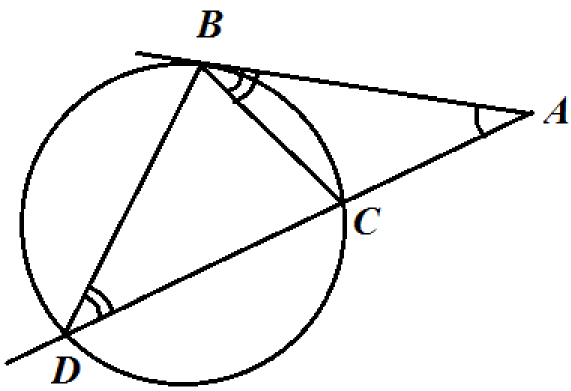


Рисунок 37.

Определение 4. *Центральным углом* окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется *дугой* окружности, соответствующей этому центральному углу.

Определение 5. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее, называется *вписанным* в эту окружность.

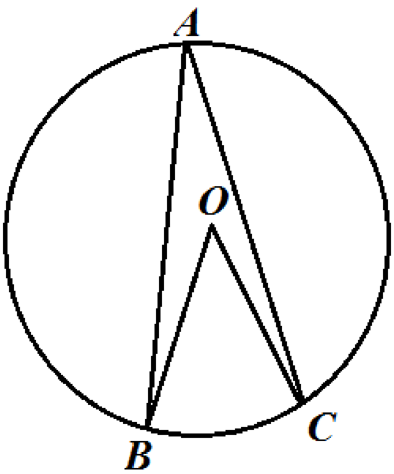


Рисунок 38.

Угол $\boldsymbol{BAC}$ на рис.38 вписан в окружность. Угол $\boldsymbol{BOC}$ называется центральным углом, соответствующим вписанному углу $\boldsymbol{BAC}$.

Свойства углов, вписанных в окружность:

- Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла, т.е. $\angle \boldsymbol{BAC} = \frac{1}{2} \angle \boldsymbol{BOC}$ (рис. 38).
- Вписанные углы, стороны которых проходят через точки $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$, принадлежащие окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой $\boldsymbol{BC}$, равны (рис.39).
- Углы, опирающиеся на диаметр, прямые.
- Величина угла, образованного касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине угловой величины дуги, заключенной между его сторонами (рис. 40):

$$\angle \boldsymbol{NAB} = \frac{1}{2} \cup \boldsymbol{AB}.$$

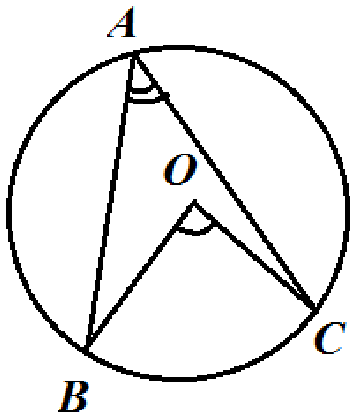


Рисунок 39.

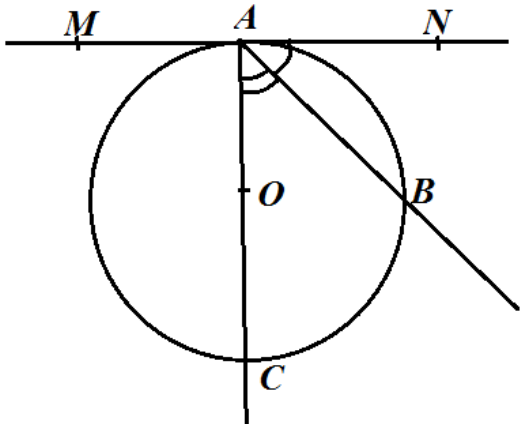


Рисунок 40.

Определение 6. Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается его сторон.

Теорема 2. *Центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения биссектрис углов треугольника.*

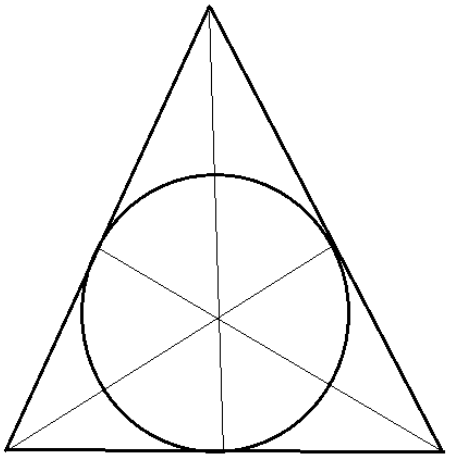


Рисунок 41.

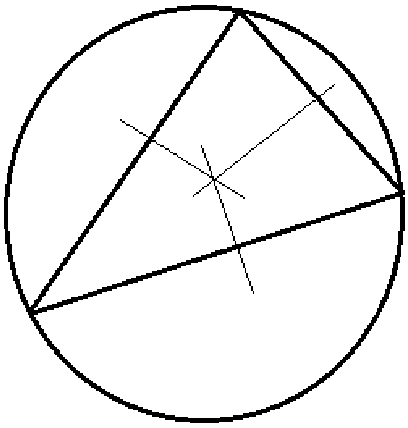


Рисунок 42.

З а м е ч а н и . Радиус r вписанной окружности находят по формуле:

$$r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Определение 7. Окружность называется *описанной* около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Теорема 3. *Центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения перпендикуляров к его сторонам, проведенных через середины этих сторон.*

З а м е ч а н и е: радиус R описанной окружности находят по формуле:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Во всяком треугольнике существует четыре замечательные точки:

- *центр тяжести* – точка пересечения медиан треугольника;
- *центр вписанной окружности* – точка пересечения биссектрис углов треугольника,
- *центр описанной окружности* - точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;
- *ортоцентр* – точка пересечения медиан треугольника.

Теорема 4. *Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т.е. одно и то же для любых двух окружностей.*

Отношение длины окружности к диаметру принято обозначать греческой буквой π: $\frac{l}{2R} = \frac{l}{D} = \pi$.

Определение 8. *Кругом* называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного.

Эта точка называется *центром* круга, а данное расстояние – *радиусом* круга.

Определение 9. *Круговым сектором* называется часть круга, ограниченная двумя радиусами (рис.43 а).

Определение 10. *Круговым сегментом* называется часть круга, ограниченная хордой и стягиваемой ею дугой (рис.43 б).

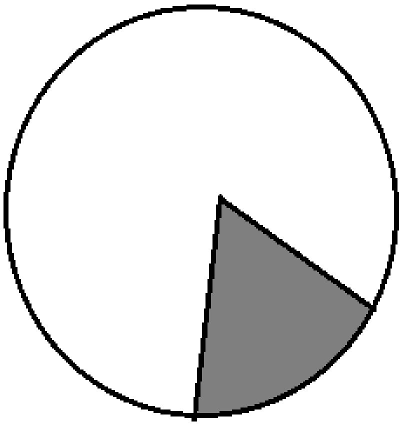


Рисунок 43, а.

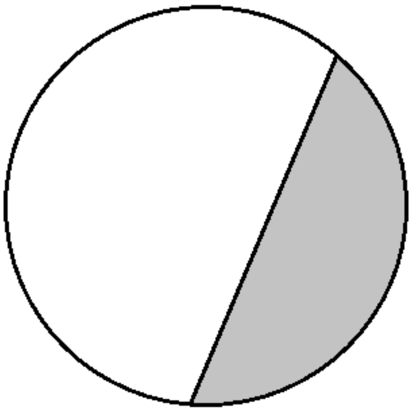


Рисунок 43, б.

З а м е ч а н и е.

- Площадь круга вычисляют по формуле: $S = \pi R^2$.
- Площадь сектора с угловой величиной дуги α° вычисляется по формуле: $S = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360^0}$;
- Площадь сегмента вычисляется как разность площади сектора, ограниченного радиусами OA и OB и площади треугольника AOB (рис. 44).

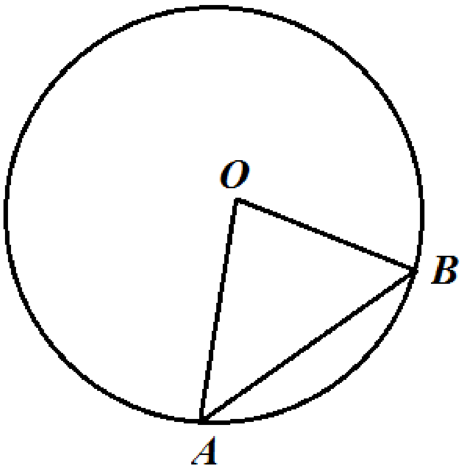


Рисунок 44.

§ 10. Многоугольники

Обобщением понятия треугольника и четырехугольника является понятие многоугольника. Определяется оно через понятие ломаной.

Определение 1. *Ломаной* $A_1A_2A_3\ldots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек A_1, A_2, A_3, …, A_n и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$.
Точки A_1, A_2, A_3, …, A_n называются *вершинами* ломаной, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ – ее *звеньями*.

Если ломаная не имеет самопересечений, то она называется *простой*. Если ее концы совпадают, то она называется *замкнутой*. О ломаных, изображенных на рисунке 45 можно сказать, что: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – простая ломаная; $A_1A_2A_3$ – простая замкнутая ломаная; $A_1A_2A_3A_4$ – замкнутая ломаная, но она не является простой, так как имеет самопересечения.

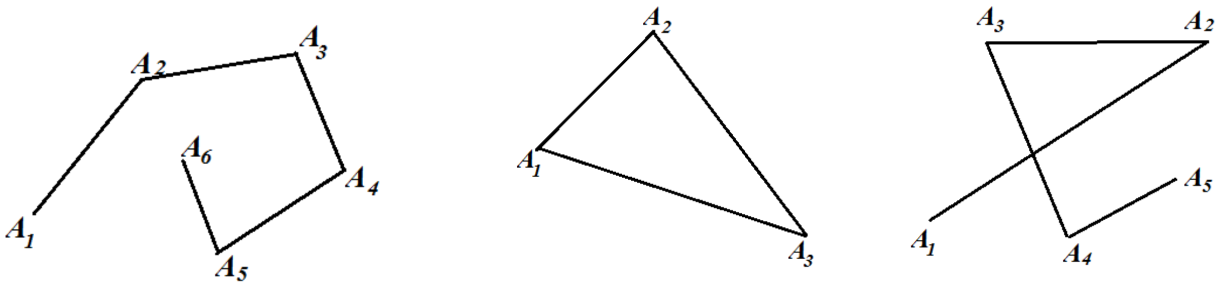


Рисунок 45.

Определение 2. *Длиной ломаной* называется сумма длин ее звеньев.

Теорема 1. *Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего его концы.*

Определение 3. *Многоугольником* называется простая замкнутая ломаная, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой.

Вершины ломаной называются *вершинами многоугольниками*, а ее звенья – его *стонами*. Отрезки, соединяющие не соседние вершины, называются *диагоналями* многоугольника.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Различают *выпуклые* и *невыпуклые* многоугольники.

Определение 4. Выпуклый многоугольник называют *правильным*, если у него все стороны и все углы равны.

Определение 5. *Углом выпуклого многоугольника* при данной вершине называется угол, образуемый его сторонами, сходящимися в этой вершине.

Теорема 2. *Сумма углов выпуклого многоугольника равна* $180^{\circ}\cdot(n-2)$.

Определение 6. *Внешним углом выпуклого n-угольника* при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине.

Определение 7. Многоугольник называется *вписанным* в окружность, если все его вершины лежат на окружности.

Многоугольник называется *описанным* около окружности, если все его стороны касаются окружности.

В связи с тем, что во всякий треугольник можно вписать окружность и около всякого треугольника можно описать окружность, возникает вопрос: обладают ли аналогичным свойством все многоугольники?

Оказывается, для того, чтобы в многоугольник можно было вписать или около него описать окружность, необходимо чтобы он был правильным.

Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность и во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность, причем центры вписанной и описанной окружностей совпадают. Эту точку называют центром многоугольника.

<u>Формулы радиусов вписанных и описанных окружностей для правильных многоугольников.</u>

Правильный (равносторонний) треугольник: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Для правильного четырехугольника (квадрата): $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{a}{2}$.

Для правильного шестиугольника: $R = a$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

З а м е ч а н и е.

- У правильных многоугольников отношения периметров, радиусов вписанных и радиусов описанных окружностей равны.
- Площадь правильного ***n*** – угольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности: $S_n = \frac{1}{2}pr$.
- Площадь правильного ***n*** – угольника вычисляется через радиус описанной окружности ***R*** и число сторон ***n*** по формуле: $S_n = \frac{1}{2}R^2 n \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}$.

<u>Дополнительные соотношения в многоугольниках.</u>

➢ Длина медианы треугольника выражается формулой:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

➢Длина стороны треугольника выражается формулой***:***

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}.$$

- Длина биссектрисы треугольника выражается формулой: $l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1}$,
  где a и b – длины двух сторон треугольника, a_1, b_1 – отрезки стороны.
- Длина биссектрисы треугольника выражается через длины сторон по формуле:

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

- Для всякого треугольника зависимость между его высотами и радиусом вписанной окружности выражается формулой:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

- Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность является средним геометрическим ее оснований, т.е. $h^2 = a \cdot b$.

§ 11. *Построение геометрических фигур*

Задачи на построение – это, пожалуй, самые древние задачи, они помогают лучше понять свойства геометрических фигур, способствуют развитию графических умений. Учителю начальных классов эти знания и умения необходимы, так как при изучении геометрического материала можно приобщать детей к построению фигур с помощью циркуля и линейки, но делать это надо грамотно, с учетом правил решения задач на построение в геометрии.

Задача на построение состоит в том, что требуется построить заранее указанными инструментами некоторую фигуру, если дана некоторая другая фигура и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данной фигуры.

Каждая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, называется **решением** этой **задачи**.

Найти решение задачи на построение, – значит, свести ее к конечному числу основных построений, т.е. указать конечную последовательность основных построений, после выполнения которых, искомая фигура будет уже считаться построенной в силу принятых аксиом конструктивной геометрии.

Перечень допустимых основных построений, а, следовательно, и ход решения задачи, существенно зависит от того, какие именно инструменты употребляются для построений.

Решить задачу на построение – значит найти все ее решения.

Условие задачи часто дает известный простор в выборе данных. Может оказаться, что фигуры, обладающей указанными в задаче свойствами, не существует. Так, например, нельзя построить окружность, вписанную в данный прямоугольник, если он не является квадратом. В таких случаях решить задачу на построение – значит доказать, что искомая фигура не существует или, соответственно, что она не может быть построена данными средствами.

Набор инструментов либо определяется условием задачи, либо ученик свободен в их выборе. В конструктивной геометрии использование каждого инструмента сопровождается полным описанием его возможностей. Это описание приводится в виде соответствующих аксиом.

Сформулируем эти аксиомы.

Аксиома линейки.

Линейка позволяет выполнить следующие геометрические построения:

- построить отрезок, соединяющий две точки;
- построить прямую, проходящую через две точки;
- построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

Аксиома циркуля.

Циркуль позволяет выполнить следующие геометрические построения:

- построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности;
- построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг.

Аксиома прямого угла.

Прямой угол позволяет:

- выполнить построения, перечисленные в аксиоме линейки;
- через данную точку плоскости провести прямую, перпендикулярную некоторой построенной прямой;
- если построен отрезок ***AB*** и некоторая фигура ***Ф***, то установить, содержит ли фигура ***Ф*** точку, из которой этот отрезок виден под прямым углом, и если такая точка существует, то построить такую точку.

Как правило, решение любой задачи на построение состоит из следующих четырех этапов:

- *анализ;*
- *построение;*
- *доказательство;*
- *исследование.*

Конечно, эта схема не является, безусловно, необходимой и неизменной, не всегда удобно и целесообразно строго разделять ее этапы и в точности осуществлять их в указанном порядке.

Анализ. Это подготовительный и в то же время наиболее важный этап решения задачи на построение, так как именно он дает ключ к решению задачи. Цель анализа состоит в установлении таких зависимостей между элементами искомой фигуры и элементами данных фигур, которые позволили бы построить искомую фигуру. Это достигается с помощью построения чертежа – наброска, изображающего данные и искомые примерно в том расположении, как это требуется по условию задачи. Этот чертеж можно выполнять «от руки». На вспомогательном чертеже следует выделить данные элементы и важнейшие искомые элементы.

Построение. Данный этап решения состоит в том, чтобы указать последовательность основных построений, которые достаточно произвести, чтобы искомая фигура была построена.

Доказательство. Доказательство имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям. Доказательство обычно проводится в предположении, что каждый шаг построения действительно может быть выполнен.

Исследование. При построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, причем предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно еще выяснить следующие вопросы:

1) всегда ли можно выполнить построение избранным способом?
2) Можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить?
3) Сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных?

Рассмотрение этих всех вопросов и составляет исследование.

Таким образом, исследование имеет целью установить условия разрешимости задачи и определить число решений.

Элементарные задачи на построение.

Выделяют ряд простейших геометрических задач на построение, которые особенно часто входят в качестве составных частей в решение более сложных задач. Их обычно называют элементарными геометрическими задачи на построение. Выбор элементарных задач является условным.

В нашем пособии рассмотрим 9 элементарных задач на построение.

Задача № 1. *Построение на данной прямой отрезка, равного данному отрезку.*

Дано:

A ——— B

Требуется построить:

$CD = AB$.

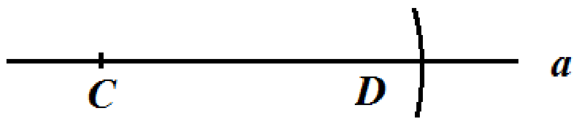
1. Отмечаем на прямой a точку C.

2. Измеряем циркулем длину отрезка AB.

3. Строим окружность $w\ (C;\ AB)$.

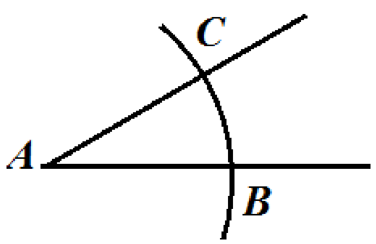
4. $w \cap a = D$.

5. CD – искомый отрезок.



Задача № 2. *Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.*

Дано:

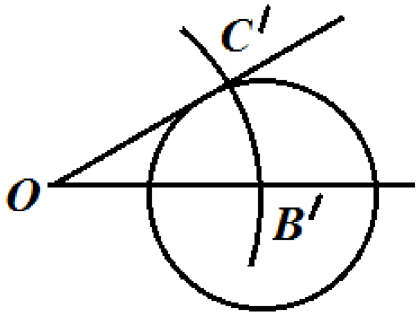


Требуется построить:

$\angle B'OC' = \angle BAC$.

1. Проведем окружность $w_1(A;\ r)$, r – произвольный радиус.
2. $w_1 \cap \angle A = \{B, C\}$.
3. $w_2\ (O;\ AB)$.
4. w_2 пересекает полупрямую в точке B'.
5. $w_3\ (B';\ BC)$.
6. $w_2 \cap w_3 = C'$.

$\angle B'OC' = \angle BAC$.

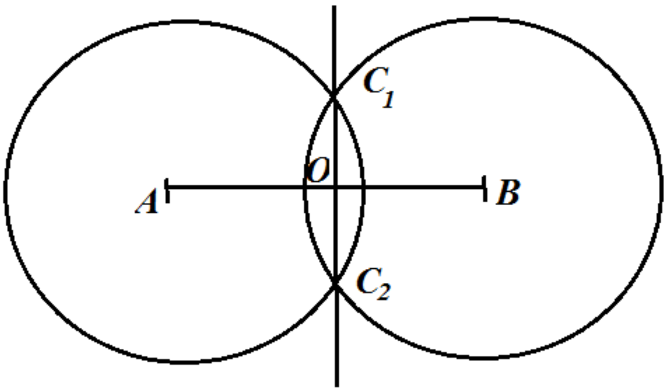


Задача № 3. *Построение середины отрезка.*

Дано: 

Требуется построить: точку $\boldsymbol{O}$ - середину отрезка $\boldsymbol{AB}$.

1. Строим окружность $\boldsymbol{w_1}$ $\boldsymbol{(A;\ r)}$, $\boldsymbol{r}$ – произвольный радиус, причем $\boldsymbol{r} > \frac{1}{2}\boldsymbol{AB}$.
2. Строим окружность $\boldsymbol{w_2}$ $\boldsymbol{(B;\ r)}$.
3. $w_1 \cap w_2 = \{C_1, C_2\}$.
4. Проводим прямую $\boldsymbol{C_1C_2}$.
5. $C_1C_2 \cap AB = O$.



Задача № 4. *Построение биссектрисы данного угла.*

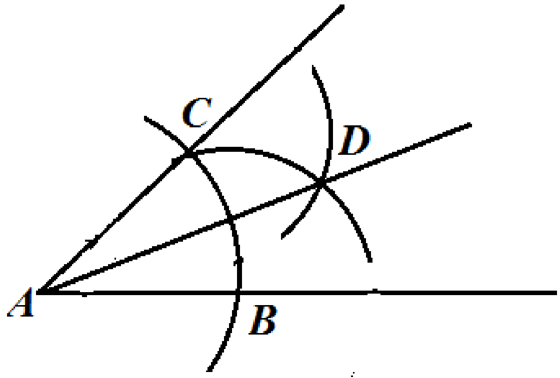
Дано: $\angle \boldsymbol{A}$

Требуется построить: $\boldsymbol{AD}$ – биссектрису $\angle \boldsymbol{A}$.

1) Строим окружность $\boldsymbol{w_1}$ $\boldsymbol{(A;\ r)}$,

r - произвольный радиус.

2) $w_1 \cap \angle A = \{B,C\}$.



3) Строим окружность $w_2(B, r')$, где r' произвольный радиус, не равный r.

4) Строим окружность $w_3(C, r')$.

5) $w_2 \cap w_3 = D$.

6) AD - искомая биссектриса.

Задача № 5. *Построение прямой перпендикулярной данной прямой.*

Дано: прямая a.

Требуется построить прямую b перпендикулярную прямой a.

Возможны два случая: 1) точка O лежит на прямой a;

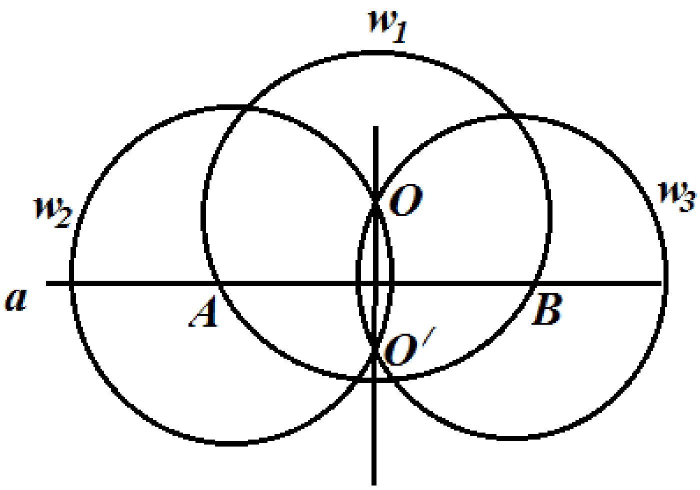
2) точка O не лежит на прямой a.

В первом случае построение выполняется так же, как и в задаче № 4, потому что перпендикуляр из точки O, лежащей на прямой, - это биссектриса развернутого угла.

Во втором случае:

1) Строим окружность $w_1(O; r)$.

2) $w_1 \cap a = \{A, B\}$.



3) Строим окружность $w_2(A; r)$.

4) Строим окружность $w_3(B; r)$.

5) $w_2 \cap w_3 = O'$.

6) Прямая $OO' \perp a$.

.**Задача № 6.** *Построение прямой, параллельной данной*.

Дано: ***a, A*** $\notin$ ***a***

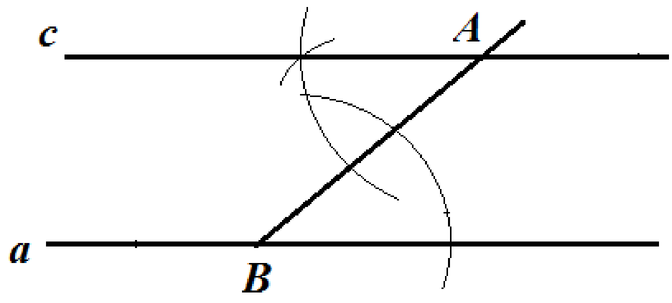
Требуется построить: ***c***$||$ ***a***.

1) На прямой ***a*** выберем произвольно точку ***B***.

2) Проведем луч ***BA***.

3) От прямой ***AB*** отложим угол, равный углу, который составляет прямая ***AB*** с прямой ***a***.

4) ***c***$||$ ***a***.



СОДЕРЖАНИЕ