МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ЕЁ ПРЕПОДАВАНИЯ

**И.А. Елецких, Т.М. Сафронова,
Н.В. Черноусова**

МАТЕМАТИКА

(Часть II)

**Рекомендовано УМО РАЕ (Международной ассоциацией ученых, преподавателей и специалистов) по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:
44.03.01 – «Педагогическое образование»,
44.03.05 – «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**

Елец – 2016

УДК 51
ББК 22.1
Е 50

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 29.01. 2016, протокол №1

Рецензенты:

О.В. Тарасова, доктор педагогических наук, профессор
(Орловский государственный университет),

Г.А. Симоновская, кандидат педагогических наук, доцент
(Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина)

И.А. Елецких, Т.М.Сафронова, Н.В.Черноусова

Е 50 Математика: учебное пособие. (Часть II). – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2016. – 144 с.
ISBN 978-5-94809-896-8 (ч. 2)
ISBN 978-5-94809-817-3

Учебное пособие «Математика (Часть II)» написано в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования по направлениям подготовки Педагогическое образование (уровень бакалавриата).

Пособие содержит теоретический материал, изложение которого сопровождается разбором типовых примеров (задач). Завершается каждый параграф списком заданий для самостоятельной работы. Кроме того, в пособии имеются образцы контрольных работ по темам.

Учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения и может быть использовано для подготовки к практическим занятиям, написанию курсовых и выпускных квалификационных работ. Материал данного пособия может быть использован преподавателями для организации самостоятельной работы обучающихся и контроля знаний студентов по каждой из представленных тем.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-94809-896-8 (ч. 2)
ISBN 978-5-94809-817-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Математика (Часть II)» написано в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (уровень бакалавриата) и 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки, уровень бакалавриата). Представленное учебное пособие является логическим продолжением части I, изданной в 2014 году, и нацелено на решение задачи обеспечения будущего учителя начальных классов математической подготовкой, необходимой ему для грамотного, творческого обучения и воспитания младших школьников, для дальнейшей работы по углублению и расширению математических знаний.

Основными задачами изучения дисциплины «Математика» являются: овладение необходимыми математическими знаниями, на основе которых строится начальный курс математики; формирование умений, необходимых для глубокого овладения его содержанием; формирование умения использовать математический аппарат для решения типовых задач по курсу математики начальной школы; формирование умения содержательно интерпретировать полученные результаты; раскрытие студентам мировоззренческого значения математики; углубление их представления о роли и месте математики в изучении окружающего мира; развитие мышления, речи. Поэтому в круг задач учебного пособия входят: оказание практической помощи в овладении математическим аппаратом; управление познавательной деятельностью обучающихся; стимулирование потребности в саморазвитии и самообучении.

Структура пособия аналогична структуре части I: весь материал разбит на темы, темы – на параграфы. В содержании каждого параграфа представлен структурированный теоретический материал, сопровождающийся разбором типовых примеров. В конце каждой темы приводится список заданий для самостоятельной работы, образцы контрольных работ, варианты тестового контроля знаний.

Отличие пособия от ранее изданных состоит в том, что в нем учтены и особенности преподавания дисциплины «Математика» в рамках классического университета с учетом реализации ФГОС ВО, и разнообразие методических подходов к изложению учебного материала в учебниках математики, соответствующих требованиям школьных образовательных стандартов, для начальной школы.

ТЕМА 9. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

§1. Краткие исторические сведения из истории возникновения и развития понятия числа

Понятие числа является стержневым понятием школьного курса математики. Число служит фундаментом, на котором строится изучение функций, тождественных преобразований, уравнений и т.д.

Возникло понятие числа из потребностей практической деятельности людей. Надо было сравнивать различные множества предметов, устанавливать существующие между ними отношения; объединять два множества предметов в одно множество или удалять из множества некоторое подмножество. Далеко не всегда решение таких задач оказывалось простым. Но в результате усилий многих поколений, по мере развития способности людей к абстрагированию, возникавшие трудности успешно преодолевались.

С появлением натуральных чисел и операций над ними решение упомянутых задач существенно упростилось. Например, сравнение множеств стало сводиться к подсчету и сравнению чисел элементов в этих множествах.

Овладение «числовым аппаратом», т.е. не только понятием числа, но и алгоритмами выполнения операций над числами, а также структурными особенностями числовых систем, является основой всего математического образования.

В теоретической арифметике последовательно определяют натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа. Множества, элементами которых являются числа, называют ***числовыми*** множествами.

При этом всякое новое числовое множество является расширением предыдущего, так что обобщение понятия числа идет по следующей *логической схеме*:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Каждое из рассматриваемых числовых множеств есть множество с отношениями и операциями для его элементов, т.е. структура определенного типа.

При любой схеме обобщения понятия числа мы строим расширения, обладающие следующими свойствами:

Множество A является ***расширением*** множества B, если выполняются следующие ***условия (принципы перманентности и минимальности)*:**

1) Множество B есть подмножество множества A.
2) Все отношения и операции, которые выполняются во множестве B, определяются и во множестве A, при этом их смысл остается неизменным.

3) В множестве A выполнима операция, которая невыполнима в B или не всегда выполнима (в этом условии заключена основная цель расширения).
4) Расширение A должно быть «минимальным» среди всех возможных расширений множества A, удовлетворяющих условиям 1) – 3).

Большинство применений математики сводится к двум основным задачам:

- подсчету числа элементов конечного множества;
- измерению величин.

Однако, для этих целей натуральных чисел недостаточно: не всегда единица величины укладывается целое число раз в измеряемой величине. Чтобы в такой ситуации точно выразить результат измерения, необходимо расширить запас чисел, введя числа, отличные от натуральных.

К этому вопросу люди пришли еще в глубокой древности: измерение длин, площадей, масс и других величин привело сначала к возникновению дробных чисел. С практикой решения уравнений и теоретическими исследованиями связано возникновение понятия отрицательного числа. Нуль, который вначале обозначал отсутствие числа, после введения отрицательных чисел, стал полноправным числом во множестве Z целых чисел, а также во множестве Q рациональных чисел.

В V в. до н.э. математиками школы Пифагора было установлено, что существуют отрезки, длину которых при выбранной единице длины нельзя выразить рациональным числом. Позднее, в связи с решением этой проблемы, появились иррациональные числа. Рациональные и иррациональные числа назвали действительными числами. Строгое определение действительного числа и обоснование его свойств было дано в XIX в.

Действительные числа – не последние в ряду различных чисел. Процесс, начавшийся с расширения множества натуральных чисел, продолжается и сегодня – этого требует развитие различных наук и самой математики.

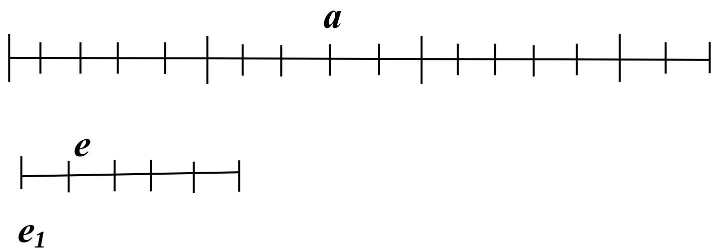
Первое знакомство учащихся с дробными числами происходит в начальных классах. Затем понятие дроби уточняется и расширяется в средней школе. В связи с этим учителю начальных классов необходимо знать определение дроби и рационального числа, правила выполнения действий над рациональными числами, законы этих действий, а также уметь видеть взаимосвязи множеств рациональных и действительных чисел с множеством натуральных чисел. Без этого невозможно решить проблему преемственности в обучении математике в начальных и последующих классах школы.

Расширение множества N натуральных чисел будем проводить по следующей схеме: $\mathrm{N} \to \mathrm{Q}_+ \to \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$.

§ 2. *Дробь как результат измерения длины отрезка. Отношение равенства дробей*

Исторически появление дробей связано с измерением величин. Выясним, как, например, могут появиться дроби при измерении длины отрезка.

Пусть дан отрезок a. Выберем в качестве единицы длины отрезок e и найдём длину отрезка a.



При измерении оказалось, что длина отрезка a больше $3e$, но меньше $4e$. Поэтому её нельзя выразить натуральным числом (при единице длины e). Но если разбить отрезок e на 5 равных частей, каждая из которых рана e_1 , то длина отрезка a окажется равной $17e_1$: $ma=17e_1$. Чтобы вернуться к первоначальной единице длины e, надо 17:5. В такой ситуации условились считать $ma = \frac{17}{5}e$, а символ $\frac{17}{5}$ называть дробью.

Определение 1. *Пусть даны отрезок a и единичный отрезок e, причём отрезок e является суммой n отрезков, равных* e_1 *. Если отрезок a состоит из m отрезков, равных* e_1*, то его длина может быть представлена в виде* $\frac{m}{n}e$*. Символ* $\frac{m}{n}$ *называют* ***дробью*** $(m,\ n \in N)$. *Число m называют* ***числителем****, а число n –* ***знаменателем****.*

Символ $\frac{m}{n}$ читается «эм энных».

В задаче измерения длины отрезка a выбор отрезка e_1 можно осуществить не единственным образом. Можно взять десятую часть отрезка e, тогда отрезок a будет состоять из 34 таких долей и его длина $ma = \frac{34}{10}e$. Можно взять пятнадцатую часть отрезка e, тогда $ma = \frac{51}{15}e$. Если представить этот процесс неограниченным, то получим, что длина отрезка a может быть выражена бесконечным множеством различных дробей $\frac{17}{5}, \frac{34}{10}, \frac{51}{15}, \ldots$

То есть если при единице длины e длина отрезка a выражается добью $\frac{m}{n}$, то она может быть выражена любой дробью вида $\frac{m \cdot k}{n \cdot k}$, где $k \in N$.

Определение 2. *Дроби, выражающие длину одного и того же отрезка при единице длины е, называют* ***равными*** *дробями.*

Если дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ равны, то пишут $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Например, дроби $\frac{17}{5}$ и $\frac{34}{10}$ выражают длину одного и того же отрезка при единице длины *е*, следовательно, $\frac{17}{5} = \frac{34}{10}$.

Существует признак, пользуясь которым определяют, равны ли данные дроби.

Теорема 1. *Для того чтобы дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы $m \cdot q = n \cdot p$.*

Доказательство.

Покажем сначала, что из того, что $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ следует, что $m \cdot q = n \cdot p$.

Действительно, так как $(\forall q \in N)\colon \frac{m}{n} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q}$ и $(\forall n \in N)\colon \frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n}$, то из равенства дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ следует равенство $\frac{m \cdot q}{n \cdot q} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n}$, из которого в свою очередь вытекает, что $m \cdot q = n \cdot p$.

Докажем теперь, что из равенства $m \cdot q = n \cdot p$ следует, что $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Если разделить обе части истинного равенства $m \cdot q = n \cdot p$ на натуральное число $n \cdot q$, то получим истинное равенство $\frac{m \cdot q}{n \cdot q} = \frac{n \cdot p}{n \cdot q}$. Но $\frac{m \cdot q}{n \cdot q} = \frac{m}{n}$, а $\frac{n \cdot p}{n \cdot q} = \frac{p}{q}$. Следовательно, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Теорема доказана.

Пример 1. *Определить, равны ли дроби $\frac{17}{19}$ и $\frac{23}{27}$.*

Решение.

Сравним произведения 17·27 и 19·23. 17·27=459; 19·23=437. Так как $459 \neq 437$, то $\frac{17}{19} \neq \frac{23}{27}$.

Теорема 2. *Отношение равенства дробей является отношением эквивалентности.*

Доказательство.

Действительно, равенство дробей рефлексивно: $\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$, так как равенство $m \cdot n = n \cdot m$ справедливо для любых натуральных чисел *m* и n.

Равенство дробей симметрично: если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то и $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, так как их равенства $m \cdot q = n \cdot p$ следует равенство $p \cdot n = q \cdot m$ $(m,\ n,\ p,\ q \in N)$.

Отношение равенства транзитивно: если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ и $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, то $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$. В самом деле, так как $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то $m \cdot q = n \cdot p$, а так как $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, то $p \cdot s = q \cdot r$.

$$\left.\begin{array}{r} m \cdot q = n \cdot p | \cdot s \\ p \cdot s = q \cdot r | \cdot n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} m \cdot q \cdot s = n \cdot p \cdot s \\ p \cdot s \cdot n = q \cdot r \cdot n \end{array}\right\} \Rightarrow m \cdot q \cdot s = q \cdot r \cdot n \Rightarrow m \cdot s = r \cdot n \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{r}{s}.$$

Итак, равенство дробей рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, оно является отношением эквивалентности.

Из рассмотренных фактов вытекает основное свойство дроби: *если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.*

На этом свойстве основано сокращение дробей и приведение дробей к общему знаменателю.

Определение 3. ***Сокращение дробей*** *– это замена данной дроби другой дробью, равной данной, но с меньшими числителем и знаменателем.*

Пример 2. *Сократить дробь* $\frac{36}{48}$.

Решение.

Разложим числитель и знаменатель данной дроби на множители, выделив общий множитель, на который произведём сокращение, получим

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 12} = \frac{3}{4}.$$

В общем случае сокращение дробей возможно всегда, если числитель и знаменатель не являются взаимно простыми числами. Если числитель и знаменатель – взаимно простые числа, то дробь называется несократимой. Например, $\frac{5}{17}$ – несократимая дробь.

В общем случае сокращение дробей возможно всегда, если числитель и знаменатель не являются взаимно простыми числами. Если числитель и знаменатель взаимно простые числа, то дробь называется ***несократимой***. Например, $\frac{5}{17}$ - несократимая дробь.

Определение 4. ***Приведение дробей к общему знаменателю*** *– это замена дробей равными им дробями, имеющими одинаковые знаменатели.*

Общим знаменателем двух дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ является общее кратное чисел n и q, а наименьшим общим знаменателем – их наименьшее общее кратное.

Пример 3. *Привести к общему знаменателю дроби* $\frac{4}{9}$ *и* $\frac{1}{35}$.

Решение.

$9=3^2$, $35=5\cdot 7$. Поэтому НОК(9, 35)= $3^2\cdot 5\cdot 7=315$.

$\frac{4}{9}=\frac{4\cdot 35}{9\cdot 35}=\frac{140}{315}$; $\frac{1}{35}=\frac{1\cdot 9}{35\cdot 9}=\frac{9}{315}$

Приведение дробей к общему знаменателю возможно не только для двух дробей, но и для любого конечного числа данных дробей.

§ 3. *Понятие положительного рационального числа. Арифметические действия с положительными рациональными числами*

Отношение равенства является отношением эквивалентности на множестве дробей, поэтому оно порождает на нём классы эквивалентности. В каждом таком классе содержатся равные между собой дроби. Например, множество дробей $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \frac{4}{8}; \dots\right\}$ – это один класс, множество дробей $\left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{6}; \frac{3}{9}; \frac{4}{12}; \dots\right\}$ – это другой класс и так далее.

Дроби одного класса выражают длину одного и того же отрезка. Но длина отрезка должна представляться единственным числом. Поэтому считают, что равные дроби – это различные записи одного и того же положительного рационального числа.

Определение 1. ***Положительным рациональным*** *числом называется класс равных дробей, а каждая дробь, принадлежащая этому классу, есть запись (представление) этого числа.*

Таким образом, множество $\left\{\frac{4}{3}; \frac{8}{6}; \frac{12}{9}; \frac{16}{12}; \dots\right\}$ есть некоторое положительное рациональное число, а дроби $\frac{4}{3}; \frac{8}{6}; \frac{12}{9}; \frac{16}{12}; \dots$ – это различные записи этого числа. Множество $\left\{\frac{2}{7}; \frac{4}{14}; \frac{6}{21}; \frac{8}{28}; \dots\right\}$ определяет другое положительное рациональное число.

Среди всех значений некоторого положительного рационального числа выделяют несократимую дробь, т.е. дробь, в которой числитель и знаменатель – взаимно простые числа. Например, среди дробей $\frac{2}{7}$; $\frac{4}{14}$; $\frac{6}{21}$; $\frac{8}{28}$; ..., определяющих рациональное число, такой дробью является $\frac{2}{7}$. Вообще, для любого положительного рационального числа существует одна и только одна несократимая дробь, являющаяся записью этого числа.

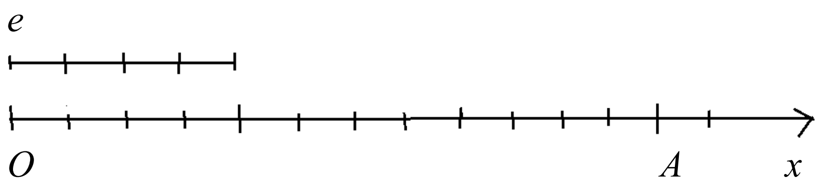
Ранее было установлено, что необходимость измерения длин отрезков привела к появлению положительных рациональных чисел. Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть $\frac{m}{n}$ – запись некоторого рационального числа. Требуется найти такой отрезок, длина которого выражается этим числом. Можно доказать, что для любого положительного рационального числа, представленного дробью $\frac{m}{n}$, существует отрезок, длина которого выражается этим числом при выбранной единице длины.

Пример. *Построить отрезок, длина которого выражается числом* $\frac{13}{4}$.

Решение.

Для решения поставленной задачи:

1) выбираем единицу длины *e*;
2) делим отрезок *e* на 4 равные части;
3) откладываем на луче *Ox* 13 отрезков, каждый из которых равен четвёртой доле отрезка *e*.



Получаем отрезок *OA*, длина которого выражается числом $\frac{13}{4}$.

Множество всех положительных рациональных чисел принято обозначать Q_+. На множестве Q_+ можно ввести отношение равенства.

Определение 2. *Если положительное рациональное число a представлено дробью* $\frac{m}{n}$, *а положительное рациональное число* b *– другой дробью* $\frac{p}{q}$, *то* $a = b \Leftrightarrow m \cdot q = n \cdot p$.

Из определения 2 следует, что равные рациональные числа представляются равными дробями.

Выясним теперь, как определяются арифметические операции над положительными рациональными числами.

Пусть при некотором единичном отрезке e длина отрезка x выражается дробью $\frac{m}{n}$, а длина отрезка y – дробью $\frac{p}{n}$, и пусть отрезок z состоит из отрезков x и y. Тогда n-ная часть отрезка e укладывается в отрезке z ровно $m+p$ раз, т.е. длина отрезка z выражается дробью $\frac{m+p}{n}$. Поэтому полагают, что $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$.

Определение 3. *Если положительное рациональное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, а положительное рациональное число b – дробью $\frac{p}{n}$, то их суммой называется число $a+b$, которое представляется дробью $\frac{m+p}{n}$.*

Таким образом, по определению 3

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n} \qquad (1)$$

В определении 3 использовано представление рациональных чисел в виде дробей с одинаковыми знаменателями. Если же числа a и b представлены дробями с разными знаменателями, то сначала надо привести их к одному знаменателю, а затем применять правило (1).

Можно доказать, что сумма любых двух положительных рациональных чисел существует и единственна.

Теорема 1. *Сложение положительных рациональных чисел подчиняется коммутативному и ассоциативному законам:*

1) $(\forall a,b\in Q_+): a+b=b+a$;
2) $(\forall a,b,c\in Q_+): (a+b)+c=a+(b+c)$.

Доказательство.

1) Пусть $a=\frac{m}{n}$; $b=\frac{p}{n}$, тогда по определению суммы имеем

$$a+b=\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}.$$

Но $m\in N$ и $p\in N$, поэтому $m+p=p+m$, т.е. $\frac{m+p}{n}=\frac{p+m}{n}$.

Применяя опять определение сложения, получаем:

$$\frac{p+m}{n}=\frac{p}{n}+\frac{m}{n}=b+a.$$

Таким образом, $a+b=b+a$.

2) Доказывается аналогично.

Различают правильные и неправильные дроби.

Определение 4. *Дробь $\frac{m}{n}$ называют **правильной**, если её числитель меньше знаменателя, и **неправильной**, если её числитель больше знаменателя или равен ему.*

Пусть $\frac{m}{n}$ - неправильная дробь. Тогда $m \geq n$. Если *m* кратно *n*, то в этом случае дробь $\frac{m}{n}$ является записью натурального числа. Например, $\frac{15}{3} = 5$.

Если *m* не кратно *n*, то разделим *m* на *n* с остатком:

$$m = n \cdot q + r, \text{ где } r < n .$$

Тогда

$$\frac{m}{n} = \frac{n \cdot q + r}{n} = \frac{n \cdot q}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n}$$

Поскольку $r < n$, то дробь $\frac{r}{n}$ – правильная. Следовательно, дробь $\frac{m}{n}$ оказалась представленной в виде суммы натурального числа q и правильной дроби $\frac{r}{n}$. Это действие называют ***выделением целой части*** из неправильной дроби. Например,

$$\frac{13}{4} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{4} = \frac{4 \cdot 3}{4} + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}.$$

Принято сумму натурального числа и правильной дроби записывать без знака сложения, т.е. вместо $3 + \frac{1}{4}$ пишут $3\frac{1}{4}$ и называют такую запись ***смешанным числом***.

Справедливо и обратное утверждение: всякое смешанное число можно записать в виде неправильной дроби. Например,

$$3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{4} = \frac{13}{4}.$$

Определение 5. ***Разностью*** *двух данных дробей называется такая третья дробь, которая будучи сложена со второй из них, дает первую.*

Из определения 5 следует, что

если $a = \frac{m}{n}$; $b = \frac{p}{n}$, то $a - b = \frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}$, так как

$$\frac{p}{n} + \frac{m-p}{n} = \frac{p + m - p}{n} = \frac{m}{n}.$$

Это определение применимо и к дробям с разными знаменателями. Надо лишь предварительно заменить данные дроби равными им дробями с одним и тем же знаменателем.

Пример. $\frac{7}{8} - \frac{1}{3} = \frac{7 \cdot 3}{24} - \frac{1 \cdot 8}{24} = \frac{21-8}{24} = \frac{13}{24}$

Разность положительных рациональных чисел имеет все те же свойства, какие имеет разность натуральных чисел.

Прежде чем сформулировать определение умножения положительных рациональных чисел, рассмотрим задачу: «Известно, что длина отрезка x выражается дробью $\frac{m}{n}$ при единице длины e , а длина единичного отрезка измерена при помощи единицы e_1 и выражается дробью $\frac{p}{q}$. Как найти число, которым будет представлена длина отрезка x, если измерить её при помощи единицы длины e_1?»

Так как $x = \frac{m}{n}e$, то $nx = me$, а из того, что $e = \frac{p}{q}e_1$ следует, что $qe = pe_1$. Умножим первое полученное равенство на q, а второе – на m. Тогда $(nq)x = (mq)e$ и $(mq)e = (mp)e_1$, откуда $(nq)x = (mp)e_1$. Это равенство показывает, что длина отрезка x при единице длины e_1 выражается дробью $\frac{m \cdot p}{n \cdot q}$, а значит $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$, т.е. умножение дробей связано с переходом от одной единицы длины к другой при измерении длины одного и того же отрезка.

Определение 6. *Если положительное рациональное число а представлено дробью* $\frac{m}{n}$*, а положительное рациональное число* b *– дробью* $\frac{p}{q}$ *, то их **произведением** называется число* $a \cdot b$*, которое представляется дробью* $\frac{m \cdot p}{n \cdot q}$.

Таким образом, по определению

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} \tag{2}$$

Можно доказать, что произведение двух дробей всегда существует и единственно. Это следует из того, что умножение дробей сводится к умножению натуральных чисел, которые этим свойством обладают.

Теорема 2. *Умножение положительных рациональных чисел подчиняется коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному законам:*

1) $(\forall a, b \in Q_+): a \cdot b = b \cdot a$ *;*
2) $(\forall a, b, c \in Q_+): (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
3) $(\forall a, b, c \in Q_+): (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Доказательство.

1) Пусть $a = \frac{m}{n}$; $b = \frac{p}{q}$, тогда по определению произведения имеем

$$a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}.$$

Но $m,\ n,\ p,\ q \in N$, поэтому $m \cdot p = p \cdot m$ и $n \cdot q = q \cdot n$. Следовательно, $\frac{m \cdot p}{n \cdot q} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = b \cdot a$.

Таким образом, $a \cdot b = b \cdot a$.

2) и 3) доказывается аналогично.

Из (2) вытекает правило умножения дробей.

Правило. *Чтобы умножить дробь на дробь, надо числитель первой дроби умножить на числитель второй, знаменатель первой дроби умножить на знаменатель второй и первый результат разделить на второй.*

Примеры: **1)** $\frac{\cancel{3}}{7} \cdot \frac{5}{\cancel{21}_{7}} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 21} = \frac{5}{49}$;

2) $7\frac{8}{33} \cdot \frac{11}{13} = \frac{239}{\cancel{33}_{3}} \cdot \frac{\cancel{11}}{13} = \frac{239 \cdot 11}{33 \cdot 13} = \frac{239}{39} = 6\frac{5}{39}$.

Дистрибутивность умножения позволяет обойтись без предварительного представления множимого в виде неправильной дроби. Если множимое – смешанная дробь, то можно умножать отдельно целое и отдельно дробь, что иногда быстрее приводит к цели:

$$7\frac{8}{33} \cdot \frac{11}{13} = \left(7 + \frac{8}{33}\right) \cdot \frac{11}{13} = 7 \cdot \frac{11}{13} + \frac{8}{\cancel{33}_{3}} \cdot \frac{\cancel{11}}{13} = \frac{77}{13} + \frac{8}{39} = \frac{239}{39} = 6\frac{5}{39}$$

Определение 7. ***Частным*** *двух положительных рациональных чисел a и b называется такое число c, что a=b·c.*

Пусть требуется найти частное от деления $a = \frac{m}{n}$ на $b = \frac{p}{q}$, где $m,\ n,\ p,\ q \in N$. Допустим, что частное существует и единственно. Запишем его в виде $\frac{x}{y}$. Тогда согласно определению частного

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} = \frac{x}{y} \cdot \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} = \frac{x \cdot p}{y \cdot q}.$$

Умножим последнее равенство на q и разделим на p, получим

$$\frac{m \cdot q}{n \cdot p} = \frac{x \cdot p \cdot q}{y \cdot q \cdot p} \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot q}{n \cdot p} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}.$$

Таким образом, получаем правило деления дроби на дробь.

Правило. *Чтобы разделить дробь на дробь нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, знаменатель первой дроби умножить на числитель второй и первый результат сделать числителем, а второй – знаменателем.*

Пример. $\frac{3}{4} : \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 8} = \frac{27}{32}$

Определение 8. ***Числом обратным для данного числа*** *называется частное от деления 1 на данное число.*

Так для дроби $\frac{m}{n}$ обратным числом является дробь $\frac{n}{m}$. Два числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$ называются ***взаимно обратными***. С учётом этого правило деления дробей можно сформулировать так.

Правило. *Чтобы разделить дробь на дробь надо делимое умножить на дробь обратную делителю.*

§ 4. *Упорядоченность множества положительных рациональных чисел*

Определение сложения положительных рациональных чисел дает возможность определить отношение порядка на множестве Q_+.

Определение. *Пусть a и b – положительные рациональные числа. Тогда **a меньше b** (a < b), если существует такое положительное рациональное число c, что a + c=b. В этом же случае говорят, что b больше a (b > a).*

Данное определение позволяет сформулировать необходимые и достаточные условия существования разности во множестве положительных рациональных чисел.

Теорема. *Для того чтобы разность положительных рациональных чисел a и b существовала, необходимо и достаточно, чтобы $b < a$.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы о существовании разности во множестве натуральных чисел.

Из введённого определения отношения «меньше» можно вывести практические приёмы установления этого отношения.

1). Если $a = \frac{m}{n},\ b = \frac{p}{n}$, то $a < b \ \Leftrightarrow\ m < p$.

Например, $\frac{3}{14} < \frac{9}{14}$, т. к. $3 < 9$.

2). Если $a = \frac{m}{n},\ b = \frac{p}{q}$, то $a < b \ \Leftrightarrow\ m \cdot q < p \cdot n$.

Действительно, приведём дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ к общему знаменателю:

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q}, \quad \frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n}.$$

В результате сравнение данных дробей свелось к сравнению их числителей: если $m \cdot q < p \cdot n$, то $a < b$; если $m \cdot q > p \cdot n$, то $a > b$.

Например, $\frac{7}{8} > \frac{11}{13}$, так как 7·13=91, 11·8=88 и 91>88.

Можно показать, что введённое таким образом отношение «меньше» транзитивно и антисимметрично, т.е. *является отношением порядка на множестве положительных рациональных чисел, а само это множество является упорядоченным.*

Отношение порядка во множестве положительных рациональных чисел обладает свойствами, которые отличают его от отношения порядка во множестве натуральных чисел. Как известно, в множестве N есть наименьшее число – 1 и множество N дискретно, т.е. между соседними натуральными числами нет других натуральных чисел.

Во множестве Q_+ положительных рациональных чисел:

1) *нет наименьшего числа;*
2) *между любыми двумя положительными рациональными числами заключено бесконечно много чисел множества Q_+.*

Докажем, что во множестве Q_+ нет наименьшего числа. Предположим, что число $\frac{m}{n}$ наименьшее во множестве положительных рациональных чисел. Образуем число $\frac{m}{n+1}$. Легко убедиться в том, что $\frac{m}{n+1} < \frac{m}{n}$ $(m \cdot n < m \cdot n + m)$, т.е. нашлось такое положительное рациональное число, которое меньше $\frac{m}{n}$. Следовательно, сделанное предположение неверно. Во множестве Q_+ нет наименьшего числа.

Второе свойство проиллюстрируем на примере. Возьмём два рациональных числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Существует ли такое рациональное число, которое больше $\frac{1}{3}$ и меньше $\frac{2}{3}$?

Существует. Для его отыскания достаточно найти среднее арифметическое данных чисел:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) : 2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}.$$

Можно найти рациональное число, находящееся между $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Для этого достаточно найти среднее арифметическое этих чисел:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) : 2 = \frac{5}{12}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}.$$

Ясно, что описанный процесс можно продолжать: между двумя любыми различными числами из Q_+ заключено бесконечно много чисел того же множества. Это свойство множества Q_+ ***называют свойством плотности***.

§ 5. *Множество положительных рациональных чисел как расширение множества натуральных чисел*

Чтобы множество Q_+ положительных рациональных чисел являлось расширением множества N натуральных чисел, необходимо выполнение ряда условий.

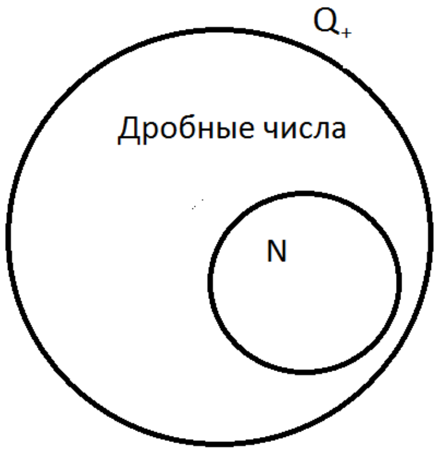
Первое условие – это существование между N и Q_+ отношения включения. Докажем, что $N \subset Q_+$.

Пусть длина отрезка x при единичном отрезке e выражается натуральным числом. Разобьём единичный отрезок на n равных частей. Тогда n-ная часть единичного отрезка будет укладываться в отрезке x точно $m \cdot n$ раз, т.е. длина отрезка x будет выражена дробью $\frac{m \cdot n}{n}$. Значит, длина отрезка x выражается и натуральным числом m, и положительным рациональным числом $\frac{m \cdot n}{n}$. Но это должно быть одно и то же число. Поэтому целесообразно считать, что дроби вида $\frac{m \cdot n}{n}$ являются записями натурального числа m. Следовательно, $N \subset Q_+$.

Так, например, натуральное число 6 можно представить в виде следующих дробей:

$$\frac{6}{1}; \frac{12}{2}; \frac{18}{3}; \frac{24}{4}; \ldots$$

Отношения между множествами N и Q_+ можно представить с помощью диаграмм Эйлера-Венна.



Числа, которые дополняют множество натуральных чисел до множества положительных рациональных чисел, называются ***дробными***.

Второе условие, которое должно быть выполнено при расширении множества натуральных чисел – это согласованность операций, т.е. результаты арифметических действий, произведённых по правилам, существующим для натуральных чисел, должны совпадать с результатами действий над ними, но выполненных по правилам, сформулированным для положительных рациональных чисел. Нетрудно убедиться в том, что и это условие выполняется.

Пусть a и b – натуральные числа, $a+b$ – их сумма, полученная по правилам сложения в множестве N . Вычислим сумму чисел a и b по правилу сложения в Q_+. Так как

$$a=\frac{a}{1}\,,\;\; b=\frac{b}{1},\;\; \text{то}\; a+b=\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a+b}{1}=a+b\,.$$

Убедиться в том, что второе условие выполняется и для других операций, можно аналогично.

Третье условие, которое должно быть выполнено при расширении множества натуральных чисел – это выполнимость в Q_+ операции, не всегда осуществимой в N. И это условие соблюдено: деление, которое не всегда выполняется в множестве N, в множестве Q_+ выполняется всегда.

Черту в записи дроби $\dfrac{m}{n}$ можно рассматривать как знак деления. Действительно, пусть m и n – натуральные числа. Найдём их частное по правилу деления положительных рациональных чисел:

$$m:n=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=\frac{m\cdot 1}{1\cdot n}=\frac{m}{n}.$$

Обратно, если дана дробь $\dfrac{m}{n}$, то её можно рассматривать как частное натуральных чисел m и n:

$$\frac{m}{n}=\frac{m\cdot 1}{1\cdot n}=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=m:n\,.$$

§ 6. *Запись положительных рациональных чисел в виде десятичных дробей*

В практической деятельности широко используются дроби, знаменатели которых являются степенями 10. Их называют десятичными.

Определение 1. ***Десятичной*** *называется дробь вида* $\frac{m}{10^n}$*, где* m *и* n *– натуральные числа.*

Десятичные дроби принято записывать без знаменателя. Например, дробь $\frac{341}{10^2}$ записывают в виде 3,41, а дробь $\frac{7}{10^3}$ – в виде 0,007.

Выясним, как образуется такая запись.

Пусть дана дробь $\frac{m}{10^n}$, где m и n – натуральные числа. Представим её числитель в следующем виде:

$$m=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0\,.$$

Тогда по правилам действий над степенями при $n<k$, получим:

$$\frac{m}{10^n}=\frac{a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0}{10^n}$$
$$=a_k\cdot 10^{k-n}+a_{k-1}\cdot 10^{k-n-1}+\cdots+a_n+\frac{a_{n-1}}{10}+\cdots+\frac{a_0}{10^n}$$

Сумма $a_k\cdot 10^{k-n}+a_{k-1}\cdot 10^{k-n-1}+\cdots+a_n$ является записью целого неотрицательного числа (обозначим его A), а сумма $\frac{a_{n-1}}{10}+\cdots+\frac{a_0}{10^n}$ представляет дробную часть числа.

Таким образом, десятичная дробь – это форма записи числа в десятичной позиционной системе счисления:
$$A,a_{n-1}\dots a_0=A+\frac{a_{n-1}}{10}+\cdots+\frac{a_0}{10^n}.$$
В дальнейшем будем пользоваться следующим обозначением десятичной дроби:
$$A,a_1a_2\dots a_k=A+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}.$$
Целое число A называется целой частью десятичной дроби. О цифре a_1 , стоящей в десятичной дроби на первом месте после запятой, говорят, что она стоит в разряде десятых долей единицы; о цифре a_2 , стоящей на втором месте после запятой, говорят, что она стоит в разряде сотых долей единицы и т.д.

Сравнение десятичных дробей и арифметические действия над ними легко выполнять, т.к. легко приводить их к общему знаменателю.

В основе приведения десятичных дробей к общему знаменателю лежит следующее утверждение: *если к десятичной дроби $A,a_1a_2\dots a_k$ приписать справа любое число нулей, то получится десятичная дробь, равная данной.*

Это свойство позволяет приводить десятичные дроби к общему знаменателю следующим образом: *если у одной дроби после запятой стоит n цифр, а у другой p цифр, причем $n<p$, то для приведения их к общему знаменателю, достаточно к первой дроби приписать справа p - n нулей; тогда у обеих дробей после запятой будет стоять поровну цифр, а это значит, что они имеют один и тот же знаменатель.*

Пользуясь этим правилом, легко выполнять сравнение десятичных дробей, т.к. оно сводится к сравнению натуральных чисел: *чтобы сравнить две десятичные дроби, надо уровнять в них число десятичных знаков после запятой, отбросить запятые и сравнить получившиеся натуральные числа.*

Например, 4,62517 > 4, 623, т.к. 4,623=4,62300, а 462517 > 462300.

Как известно, для дробей, имеющих одинаковые знаменатели, сложение и вычитание сводится к соответствующим операциям над их числителями. Это позволяет свести сложение и вычитание десятичных дробей к действиям над натуральными числами.

Например, $2{,}54 + 3{,}7126 = 2{,}5400 + 3{,}7126 = \frac{25400}{10000} + \frac{37126}{10000} = \frac{62526}{10000} = 6{,}2526$.

Коротко эти вычисления записывают так

$$\begin{array}{r@{}l} + & \begin{array}{ccccc} 2, & 5 & 4 & & \\ 3, & 7 & 1 & 2 & 6 \\ \hline 6, & 2 & 5 & 2 & 6 \end{array} \end{array}$$

Необходимо записывать каждый разряд одной дроби под разрядом того же наименования второй дроби.

Умножение и деление десятичных дробей не требует приведения их к общему знаменателю, но они также сводятся к соответствующим действиям над натуральными числами.

Умножение производится следующим образом: *не обращая внимания на запятые, конечные дроби перемножают как натуральные числа; в получившемся произведении отделяют число знаков, равное сумме числа знаков после запятой у всех сомножителей.*

Например,

$$\begin{array}{cccc} & 2, & 1 & \\ \times & 0, & 2 & 7 \\ \hline & 1 & 4 & 7 \\ + & 4 & 2 & \\ \hline 0, & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

Деление десятичной дроби на натуральное число производится следующим образом.

1). *Если делимое меньше делителя, пишем в целой части частного 0 и ставим после него запятую. Затем, не обращая внимания на запятую в делимом, присоединяем к целой части делимого первую цифру его дробной части. Если после такого присоединения, получается число, меньшее делителя, ставим после запятой в частном 0 и присоединяем к полученному ранее числу следующую цифру делимого. Если и после этого получаем число, меньшее делителя, ставим ещё 0 и т.д., пока не получим число превосходящее делитель. В дальнейшем деление совершается также как с натуральными числами. Причем делимое можно неограниченно «расширять» вправо от запятой, приписывая в конце нули.*

Например,

$$
\begin{array}{r|l}
0,525 & 2 \\ \cline{2-2}
-\,5 & 0,2625 \\
4 & \\ \cline{1-1}
-\,12 & \\
12 & \\ \cline{1-1}
-\,5 & \\
4 & \\ \cline{1-1}
10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Может оказаться, что описанный процесс деления никогда не закончится. В таком случае частное нельзя выразить конечной десятичной дробью.

2). *Если делимое больше делителя, делим сначала целую часть, записываем в частном результат деления и ставим запятую. После чего деление продолжается как в предыдущем случае.*

Деление конечной десятичной дроби на конечную десятичную дробь производится по следующему правилу.

Чтобы разделить десятичную дробь (или целое число) на десятичную дробь, опускаем запятую в делителе; в делимом же переносим запятую вправо на столько знаков, сколько их было в дробной части делителя (в случае необходимости к делимому в конце приписываем нули). После этого выполняем деление десятичной дроби на натуральное число, как указано выше.

Например, 5,256 : 0,12

$$
\begin{array}{r|l}
-\,525,6 & 12 \\ \cline{2-2}
48 & 43,8 \\ \cline{1-1}
-\,45 & \\
36 & \\ \cline{1-1}
-\,96 & \\
96 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Простота сравнения и выполнения действий над десятичными дробями приводит к следующему вопросу: любую ли дробь вида $\frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$ можно записать в виде конечной десятичной дроби? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы несократимая дробь* $\frac{m}{n}$ *была равна конечной десятичной дроби, необходимо и достаточно, чтобы в разложении её знаменателя n на простые множители входили лишь простые числа 2 и 5.*

Доказательство.

Пусть несократимая дробь $\frac{m}{n}$ равна некоторой десятичной дроби $\frac{b}{10^r}$ т.е. $\frac{m}{n} = \frac{b}{10^r}$. По определению равенства дробей имеем $m \cdot 10^r = n \cdot b$.

Если бы в разложение n на простые множители входило простое число p, отличное от 2 и 5, то $m \cdot 10^r$ делилось бы на p. Но в разложение 10^r на простые множители входят лишь 2 и 5. Следовательно, $\overline{10^r \vdots p}$. Тогда $m \vdots p$, а значит дробь $\frac{m}{n}$ можно было бы сократить на p , что противоречит предположению о том, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Полученное противоречие и доказывает, что n не может иметь простых множителей кроме 2 и 5.

Пусть разложение n на простые множители имеет вид:

$$n = 2^r \cdot 5^s, \text{ где } r \geq s.$$

Тогда

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^r \cdot 5^s} = \frac{m \cdot 5^{r-s}}{2^r \cdot 5^s \cdot 5^{r-s}} = \frac{m \cdot 5^{r-s}}{2^r \cdot 5^r} = \frac{m \cdot 5^{r-s}}{10^r} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{m \cdot 5^{r-s}}{10^r},$$

т.е. дробь $\frac{m}{n}$ равна конечной десятичной дроби.

Теорема доказана.

Из теоремы вытекает правило обращения обыкновенной дроби в десятичную.

Правило. 1). *Данную обыкновенную дробь сокращают.*

2). *Разлагают знаменатель обыкновенной дроби на произведение простых множителей.*

3). *Умножают числитель и знаменатель обыкновенной дроби на одно и то же число, представляющее собой произведение стольких двоек и пятёрок, чтобы в состав знаменателя входило их поровну.*

4). *Вычисляют произведения в числителе и знаменателе.*

5). *Записывают полученную дробь в виде десятичной дроби.*

Примеры:

$$\frac{193}{250} = \frac{193}{2 \cdot 5^3} = \frac{193 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{772}{10^3} = \frac{772}{1000} = 0{,}772;$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = \frac{5 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{625}{10^3} = \frac{625}{1000} = 0{,}625;$$

$$\frac{3}{200} = \frac{3}{2^3 \cdot 5^2} = \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{15}{10^3} = \frac{15}{1000} = 0{,}015.$$

В общем случае, чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную дробь, надо разделить числитель на знаменатель. Несократимая обыкновенная дробь обращается в конечную десятичную дробь тогда, когда её знаменатель не содержит ни одного простого множителя кроме 2 и 5. При этом полученная дробь будет иметь столько десятичных знаков, сколько раз в знаменателе повторяются двойки и пятёрки.

Примеры.

1) $\frac{312}{625} = \frac{312}{5^4}$. Следовательно, дробь обращается в конечную десятичную дробь, имеющую 4 цифры после запятой.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
-3 & 1 & 2 & 0 & & & & & 6\ 2\ 5 \\ \cline{9-9}
2 & 5 & 0 & 0 & & & & & 0,\ 4\ 9\ 9\ 2 \\ \cline{1-4}
 & -6 & 2 & 0 & 0 & & & & \\
 & 5 & 6 & 2 & 5 & & & & \\ \cline{2-5}
 & & -5 & 7 & 5 & 0 & & & \\
 & & 5 & 6 & 2 & 5 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & -1 & 2 & 5 & 0 & & \\
 & & & 1 & 2 & 5 & 0 & & \\ \cline{4-7}
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

2) $\frac{13}{20} = \frac{13}{2^2 \cdot 5}$. Следовательно, дробь обращается в конечную десятичную дробь с двумя знаками после запятой.

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & 3 & 0 & & 2\ 0 \\ \cline{5-5}
1 & 2 & 0 & & 0,\ 6\ 5 \\ \cline{1-3}
 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 1 & 0 & 0 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Среди десятичных дробей выделяют и часто используют дробь $\frac{1}{100} = 0{,}001$. Её называют ***процентом*** и обозначают 1%. На практике в процентах выражают части величины. Так, говорят, что сахарный тростник содержит 15% сахара. Зная это, можно найти, например, сколько сахара содержится в 10 тоннах тростника. Для этого
0,15·10 = 1,5 (т). Следовательно, 15% от 10т составляют 1,5т.

Таким образом, *чтобы найти a% от числа* b, *надо* $b \cdot \frac{a}{100}$.

Если известно, что a% числа x равно b, *то число x можно найти по формуле* $x = \frac{b}{a} \cdot 100$.

Например, если 3% вклада в сберкассу составляют 150 рублей, то этот вклад равен $\frac{150}{3} \cdot 100 = 5000$ (р.).

Чтобы найти процентное отношение двух чисел a и b, *надо отношение этих чисел умножить на 100%, т.е. вычислить* $\frac{a}{b} \cdot 100\%$.

Пусть, например, при плановом задании 60 автомобилей в день завод выпустил 66 автомобилей. Тогда завод выполнил план на $\frac{66}{60} \cdot 100\% = 110\%$.

§ 7. *Бесконечные десятичные периодические дроби*

Рассмотрим дробь $\frac{6}{7}$. Так как её знаменатель число 7, то эту дробь нельзя записать в виде конечной десятичной дроби. Говорят, что дробь $\frac{6}{7}$ равна бесконечной десятичной дроби. При делении 6 на 7 обнаруживается, что в частном группа цифр повторяется:

$$\frac{6}{7} = 0,\underbrace{857142}\,\underbrace{857142}\,857142\,\ldots$$

Такая последовательно повторяющаяся группа цифр после запятой в десятичной записи числа называется ***периодом***, а бесконечная десятичная дробь, имеющая период в своей записи, называется ***периодической***. Период принято записывать один раз в круглых скобках:

$$\frac{6}{7} = 0,(857142)\,.$$

Различают ***чисто периодические дроби*** – в них период начинается сразу после запятой, и ***смешанно периодические дроби*** – в них между запятой и периодом есть десятичные знаки.

Например, 0,(857142) – чисто периодическая дробь, а 3,27(316) – смешанно периодическая дробь.

Возникает вопрос: в каком случае дробь $\frac{m}{n}$ представляется периодической десятичной дробью? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Если дробь* $\frac{m}{n}$ *несократима и в разложении её знаменателя есть простой множитель, отличный от 2 и 5, то дробь* $\frac{m}{n}$ *представляется бесконечной десятичной периодической дробью.*

Доказательство.

Так как в разложении знаменателя есть простой множитель, отличный от 2 и 5, то процесс деления *m* на *n* бесконечен. Кроме того, при делении *m* на *n* получаются остатки, меньшие *n*, т.е. числа 1, 2, …, *n* – 1. Поскольку множество различных остатков конечно, то, начиная с некоторого шага, какой-то остаток повториться, что повлечет за собой повторение знаков частного. Следовательно, бесконечная десятичная дробь, представляющая число $\frac{m}{n}$, будет обязательно периодической.

Доказанная теорема позволяет сделать **вывод**: *любое положительное рациональное число представимо либо бесконечной десятичной периодической дробью, либо конечной десятичной дробью.*

Этот вывод может быть более коротким, если условиться считать конечную десятичную дробь бесконечной с периодом, равным 0. Например, 7,82 = 7,82(0). Такое соглашение позволяет говорить, что *любое положительное рациональное число представимо бесконечной десятичной периодической дробью.*

Справедливо и обратное утверждение: *любая положительная бесконечная десятичная периодическая дробь выражает некоторое положительное рациональное число.*

Чтобы записать положительное рациональное число $\frac{m}{n}$ в виде бесконечной десятичной периодической дроби, нужно числитель m делить на знаменатель n.

Рассмотрим теперь обратную задачу: как записать бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной?

Пусть дана бесконечная десятичная периодическая дробь 0,(37) = 0,3737…37…. Обозначим соответствующее ей рациональное число через a, тогда

$$a = 0{,}3737\ldots37\ldots|\cdot100 \Rightarrow$$

$$100\cdot a = 37{,}37\ldots37\ldots \Rightarrow 100\cdot a = 37+0{,}37\ldots37\ldots \Rightarrow 100\cdot a = 37+a$$

Решим последнее уравнение относительно a, получим

$$99a = 37 \Rightarrow a = \frac{37}{99}.$$

Можно заметить, что 37 – одновременно период дроби и числитель обыкновенной дроби. Таким же образом можно обратить любую чисто периодическую дробь в обыкновенную.

Правило. *При обращении чисто периодической десятичной дроби в обыкновенную получается дробь, числитель которой равен периоду, а знаменатель состоит из такого числа девяток, сколько цифр в периоде дроби.*

Примеры. $1{,}391391\ldots = 1{,}(391) = 1\frac{391}{999}$

$0{,}8585\ldots = 0{,}(85) = \frac{85}{99}$

Пусть дана смешанная периодическая дробь 0,8(61) = 0,86161…61…. Обозначим соответствующее ей рациональное число через a, тогда

$a = 0{,}86161\ldots61\ldots|\cdot10 \Rightarrow 10a = 8{,}6161\ldots61\ldots$ (1) - чисто периодическая дробь.

Дальнейшие преобразования проводятся аналогично выполненным выше. Положим $x = 8{,}6161\ldots61\ldots|\cdot100 \Rightarrow$

$100x = 861{,}61\ldots61\ldots \Rightarrow 100x = 861+0{,}61\ldots61\ldots$

Прибавим к обеим частям последнего равенства по 8, получим

$100x + 8 = 861+8{,}61\ldots61\ldots \Rightarrow 100x + 8 = 861 + x \Rightarrow 99x = 861 - 8 \Rightarrow$

$$x = \frac{861-8}{99} \qquad (2)$$

Из (1), (2) следует, что

$$10a = \frac{861-8}{99} \Rightarrow a = \frac{861-8}{990} = \frac{853}{990}$$

Правило. *Если целая часть смешанной периодической десятичной дроби равна 0, то в результате обращения этой дроби в обыкновенную получается дробь, числитель которой равен разности* *между числом, записанным цифрами, стоящими до начала второго периода, и числом, записанным цифрами, стоящими до первого периода; знаменатель состоит из такого числа девяток, сколько цифр в периоде, и такого числа нулей, сколько цифр стоит до начала первого периода.*

Примеры. 0,7(15)$= \frac{715-7}{990} = \frac{708}{990} = \frac{118}{165}$;

$$0{,}34(42) = \frac{3442-34}{9900} = \frac{3408}{9900} = \frac{284}{825}.$$

§ 8. *Множество действительных чисел как расширение множества рациональных чисел*

Множество всех рациональных чисел представляет собой множество, замкнутое относительно операций сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на 0) – сумма, произведение, разность и частное двух рациональных чисел будет рациональным числом. Однако оказывается, что существуют алгебраические и геометрические задачи, которые не имеют решения во множестве рациональных чисел.

Задача 1. *Докажем, что не существует рационального числа, квадрат которого равнялся бы 2.*

Доказательство.

Предположим противное. Предположим, что $(\exists r \in Q): r^2 = 2$.

Так как $r \in Q$,то $r = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. Тогда по предположению

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \qquad (1)$$

Правая часть равенства (1) делится на 2, т.е.

$$(2n^2) \vdots 2 \Rightarrow m^2 \vdots 2 \Rightarrow m \vdots 2 \Rightarrow m = 2p \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1), получим:

$$(2p)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4p^2 = 2n^2 \Rightarrow 2p^2 = n^2$$

Из последнего равенства следует

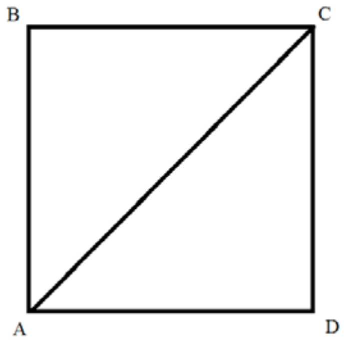
$$(2p^2) \vdots 2 \Rightarrow n^2 \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2 \Rightarrow n = 2q \qquad (3)$$

(2) и (3) подставим в выражение для r, получим:

$$r = \frac{m}{n} = \frac{2p}{2q} = \frac{p}{q},$$

т.е. дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит предположению. Следовательно, не существует рационального числа, квадрат которого равнялся бы 2.

Задача 2. *Докажем, что диагональ квадрата не соизмерима с его стороной, т.е. если за единицу длины взять длину стороны, то* *длина диагонали не может быть выражена никаким рациональным числом.*



Доказательство.

Из ΔADC по теореме Пифагора имеем $AC^2 = AD^2 + DC^2$, но $AD = DC$ $=> AC^2 = 2AD^2 \Rightarrow \left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = 2,$ но в соответствии с задачей 1 не существует рационального числа, квадрат которого равнялся бы 2. Следовательно, диагональ квадрата не соизмерима с его стороной.

Приведённые задачи показывают, что существуют числа, которые нельзя представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Бесконечные десятичные непериодические дроби являются записью новых чисел, получивших название ***положительных иррациональных чисел***. Так как часто понятие числа и его записи отождествляют, то говорят, что бесконечные десятичные непериодические дроби – это и есть положительные иррациональные числа.

Иррациональные числа получаются при извлечении корней из некоторых рациональных чисел. Так, $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{24}$ – это иррациональные числа. Иррациональными числами являются также $\lg 5$, $\sin 31^o$, числа π=3,14…, *e* = 2,7828… и др.

Множество положительных иррациональных чисел обозначают символом I^+.

Свойства иррациональных чисел

Свойство 1. *Множество I^+не обладает свойством замкнутости ни для одной из арифметических операций.*

Чтобы убедиться в не замкнутости множества иррациональных чисел, например, относительно операции сложения, достаточно указать лишь одну пару иррациональных чисел, сумма которых рациональна. В качестве пары таких чисел могут быть взяты, например, числа 0,1010010001… и 0, 0101101110…, первое из которых образовано последовательностью единиц, разделенных соответственно одним нулем, двумя нулями, тремя и т.д., второе – последовательностью нулей, между которыми поставлены одна единица, две единицы, три и т.д. Каждое из этих чисел будет иррациональным числом, в то время как их сумма будет рациональным числом, десятичное представление которого имеет вид 0,111…1… = 0,(1) = $\frac{1}{9}$.

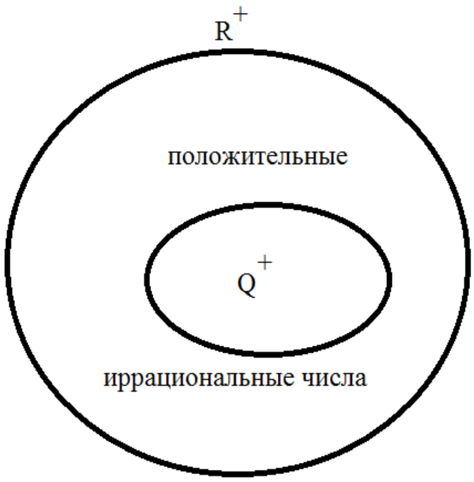
Свойство 2. *Сумма, разность, произведение и частное иррационального числа и рационального числа есть иррациональное число.*

Из этого свойства иррациональных чисел, в частности, следует, что, имея лишь одно иррациональное число, с помощью рациональных чисел можно получить бесконечно много иррациональных чисел.

Определение. *Объединение множества положительных рациональных чисел и множества положительных иррациональных чисел называют множеством положительных действительных чисел и обозначают* R^{+}.

Таким образом, по определению $Q^{+} \cup I^{+} = R^{+}$.

При помощи диаграмм Эйлера – Венна данная зависимость изображена на рисунке.



Следовательно, любое положительное действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью: периодической, если оно является рациональным, либо непериодической, если оно является иррациональным.

§ 9. *Аксиоматическое построение множества действительных чисел*

Множество всех действительных чисел R может быть описано, как множество, элементы которого удовлетворяют перечисленным ниже свойствам I – VI . Элементы этого множества будем называть числами.

I. Свойство упорядоченности. *Для любых двух чисел* a *и* b *определено отношение порядка, т.е. для любых двух действительных чисел* a *и* b*: либо* $a = b$*, либо* $a < b$*, либо* $b < a$*.*

Причем, если $a < b$ *и* $b < c$*, то* $a < c$*.*

II. Свойства операции сложения. *В множестве действительных чисел определена бинарная операция сложения, т.е. любой упорядоченной паре чисел* (a, b) *ставится в соответствие число, обозначаемое* $a + b$ *и называемое суммой чисел* a *и* b*. При этом:*

1) $(\forall a,\ b,\ c \in R)$: $(a+b)+c = a+(b+c)$;
2) $(\forall a, b\ \in R)$: $a+b = b+a$;
3) $(\forall a \in R)\ (\exists 0 \in R)$: $a+0 = a$;
4) $(\forall a \in R)\ (\exists -a \in R)$: $a+(-a) = 0$;
число $-a$ *называется* ***противоположным*** *числу a;*
5) *если a < b, то для любого числа c справедливо a + c < b + c.*

Число a > 0 называется ***положительным****, а число a < 0 называется* ***отрицательным****.*

Для любой упорядоченной пары чисел (a, b) число $a+(-b)$ *называется* ***разностью*** *чисел a и b и обозначается a – b.*

III. Свойства операции умножения. *В множестве действительных чисел определена бинарная операция умножения, т.е. любой упорядоченной паре чисел (a, b) ставится в соответствие число, обозначаемое a · b и называемое произведением чисел a и b. При этом:*
1) $(\forall a,\ b,\ c \in R)$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2) $(\forall a, b\ \in R)$: $a \cdot b = b \cdot a$;
3) $(\forall a \in R)\ (\exists 1 \in R)$: $a \cdot 1 = a$;
4) $(\forall a \in R \wedge a \neq 0)\ \left(\exists \frac{1}{a} \in R\right)$: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$;
число $\frac{1}{a}$ *называется* ***обратным*** *числу a;*
5) *если a < b и c > 0, то a · c < b · c;*
если a < b и c < 0, то a · c > b · c.

Для любой упорядоченной пары чисел (a, b), где b≠0, число $a \cdot \frac{1}{b}$ *называется частным от деления a на b и обозначается* $\frac{a}{b}$: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

IV. Связь операций сложения и умножения. *Операции сложения и умножения действительных чисел связаны свойством дистрибутивности:*

$$(\forall a, b, c \in R):\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\ .$$

V. Свойство Архимеда. *Для любого действительного числа a существует такое целое число n, что* $n > a$.

Из этого свойства, в частности, следует, что для любых чисел *a* и b при $a > 0$ существует такое натуральное число *n*, что $n \cdot a > b$.

VI. Свойство непрерывности. Свойства I –V присущи и некоторым другим числовым множествам (например, множеству рациональных чисел). Множество действительных чисел, в отличие от множества рациональных чисел, имеет ещё одно, существенно новое свойство – свойство непрерывности.

Существует несколько различных формулировок свойства непрерывности множества действительных чисел. Одна из них называется принципом вложенных отрезков или аксиомой непрерывности множества действительных чисел по Кантору.

Если заданы два числа a и b ($a \leq b$), то множество всех чисел x, таких что $a \leq x \leq b$, называется ***числовым отрезком*** и обозначается $[a;\ b]$. Число $b - a$ называется ***длиной числового отрезка***. Множество числовых отрезков

$$[a_1;\ b_1], [a_2;\ b_2], [a_3;\ b_3], \dots , [a_n;\ b_n]$$

называется ***системой вложенных отрезков***, если

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 .$$

Относительно системы вложенных отрезков $[a_n; b_n]$ ($n = 1, 2, \dots$) говорят, что длина этих отрезков стремится к нулю с возрастанием n, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n \geq n_0$ выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$.

Принцип вложенных отрезков. *Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы.*

Из принципа вложенных отрезков, в частности, вытекает, что *для всякой системы вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю, существует единственное число, принадлежащее всем отрезкам данной системы*. Это утверждение носит название теоремы Кантора.

§ 10. *Представление действительных чисел десятичными дробями*

По свойству Архимеда для любого $a \in R^+$ найдется такое целое неотрицательное число n, что $n \leq a < n + 1$.

Разобьём отрезок $[n; n + 1]$ на 10 равных частей и рассмотрим отрезки $[n; n,1], [n,1; n,2], \dots , [n,9; n + 1]$.

Возможны два случая: либо a не совпадает ни с одной из точек деления, либо a является точкой деления. В первом случае a принадлежит только одному из перечисленных отрезков, который обозначим Δ_1: $\Delta_1 = \left[n,n_1; n,n_1 + \frac{1}{10}\right]$, где n_1 – одна из цифр 0, 1, 2,…, 9. Если a – точка деления, то в качестве отрезка Δ_1 выберем тот, для которого a является левым концом.

Разобьём отрезок Δ_1 на 10 равных частей и выберем из 10 полученных отрезков, тот, который содержит точку a и для которого a не является правым концом.

Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков $\Delta_k = \left[n,n_1 n_2 \dots n_k;\ n,n_1 n_2 \dots n_k + \frac{1}{10^k}\right]$, где n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) –

одна из цифр 0, 1, 2,…, 9. Каждый из этих отрезков Δ_k содержит точку a и ни для какого из этих отрезков точка a не является правым концом.

Длина полученных вложенных отрезков стремится к нулю. Следовательно, на основании теоремы Кантора существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой системы. Этой точкой и является число a, так как она единственная точка, принадлежащая всем отрезкам Δ_k с длинами, стремящимися к нулю.

Таким образом, числу a поставлена в соответствие десятичная дробь $n, n_1 n_2 \dots n_k \dots$, которую называют десятичной записью (или десятичным представлением) числа a, и пишут $a = n, n_1 n_2 \dots n_k \dots$.

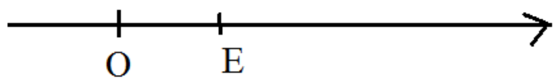
Можно доказать обратное: если взять произвольную бесконечную десятичную дробь $n, n_1 n_2 \dots n_k \dots$, то существует действительное число a, для которого именно эта дробь служит его представлением.

Соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех десятичных дробей не является взаимно однозначным: разным десятичным дробям может соответствовать одно число. Например, рациональное число $\frac{1}{4}$ допускает запись в виде двух различных десятичных дробей: 0,25 и 0,24(9) в чём нетрудно убедиться, используя алгоритм перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь.

Если рассмотреть множество десятичных дробей, не имеющих периода, состоящего только из цифры 9 (такие дроби называются допустимыми), то между множеством всех действительных чисел и множеством всех допустимых десятичных дробей можно установить взаимно однозначное соответствие и отождествлять число и его десятичное представление.

§ 11. *Геометрическое изображение множества действительных чисел. Модуль действительного числа*

Рассмотрим прямую линию (которую будем называть осью) с выбранной на ней произвольной точкой *O*. Выберем любую другую точку *E*, лежащую на прямой справа от точки *O*.



Точка *O* делит прямую на два луча: луч, которому принадлежит точка *E* и который называют ***положительной полуосью***, и второй луч, который называют ***отрицательной полуосью***. Точку *O* называют ***началом координат***.

Пусть нулю соответствует точка *O*: $0 \to O$, а единице соответствует точка *E*: $1 \to E$. Теперь легко установить соответствие между натуральными числами и точками прямой. Например, числу 5 соответствует точка, лежащая справа от начала координат на расстоянии, равном пяти длинам отрезка OE; отрицательному числу -3 будем ставить в соответствие точку, лежащую слева от точки O на расстоянии трех длин отрезка OE.

Отрезок OE разделим на n равных частей. Точка, ближайшая к точке O, будет изображать число $\frac{1}{n}$. Если взять m таких отрезков, то получим изображение числа $\frac{m}{n}$. Аналогично можно построить точки, соответствующие отрицательным числам.

Пусть положительное число a – иррациональное. Построим последовательности десятичных дробей для иррационального числа a: $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ и $a_1^/, a_2^/, \dots, a_k^/, \dots$ таких, что $a_k = n, n_1 n_2 \dots n_k$, $a_k^/ = n, n_1 n_2 \dots n_k + \frac{1}{10^k}$. Члены этих последовательностей – рациональные числа, которым отвечают соответствующие точки прямой. Построим систему отрезков $[a_1;\ a_1^/], [a_2;\ a_2^/], \dots, [a_k;\ a_k^/], \dots$, вложенных друг в друга. Длина отрезков стремится к нулю с возрастанием k. Эти отрезки имеют только одну общую точку, а именно точку, отвечающую иррациональному числу a.

Таким образом, можно отобразить множество всех действительных чисел R на множество точек прямой. Верно и обратное: каждой точке прямой можно поставить в соответствие единственное действительное число. Между множеством действительных чисел и множеством точек прямой существует взаимно однозначное соответствие.

Определение. *Расстояние от начала отсчета до точки, координатой которой является число a, называется **модулем (абсолютной величиной)** числа a и обозначается* $|a|$.

Из определения следует, что

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a > 0, \\ 0, \text{если } a = 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Например, $|-7| = 7$; $|5{,}5| = 5{,}5$; $|0| = 0$.

Свойства модуля

Свойство 1. $(\forall a \in R)$: $|-a| = |a|$.

Доказательство.

В соответствии с (1)

$$|-a| = \begin{cases} -a, \text{если } -a > 0 \Rightarrow a < 0, \\ 0, \text{если } -a = 0 \Rightarrow a = 0, \\ a, \text{если } -a < 0 \Rightarrow a > 0. \end{cases}$$

Сравнивая с (1), получим требуемое.

Свойство 2. $(\forall a \in R)$: $-|a| \le a \le |a|$.

Справедливость этого свойства вытекает из равенства (1).

Свойство 3. $(\forall a, b \in R)$: $|a| \le b \;\Leftrightarrow\; -b \le a \le b$.

Доказательство.

1). Пусть $|a| \le b$. Докажем, что $-b \le a \le b$.

Умножим обе части неравенства

$$|a| \le b \tag{2}$$

на -1, получим

$$-|a| \ge -b \;. \tag{3}$$

По свойству 2:

$$(\forall a \in R): -|a| \le a \le |a| \;. \tag{4}$$

Из (2) – (4) следует, что $-b \le -|a| \le a \le |a| \le b$, а значит $-b \le a \le b$.

2). Пусть $-b \le a \le b$. Докажем, что $|a| \le b$.

Неравенство $-b \le a \le b$ можно записать в виде системы неравенств: $\begin{cases} a \ge -b, \\ a \le b. \end{cases}$ Первое неравенство системы умножим на -1, получим $\begin{cases} -a \le b, \\ a \le b, \end{cases}$ но тогда по определению (1) $|a| \le b$.

Свойство 4. *Модуль суммы нескольких чисел не превосходит суммы модулей этих чисел, т.е.*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \tag{5}$$

Доказательство.

Доказательство проведем методом математической индукции.

1). При *n* = 2 требуется доказать, что $|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|$.

По свойству 2: $-|a_1| \le a_1 \le |a_1|$ и $-|a_2| \le a_2 \le |a_2|$. Складывая почленно эти неравенства, получим

$$-(|a_1| + |a_2|) \le a_1 + a_2 \le |a_1| + |a_2| \;.$$

Применяя свойство 3, получим $|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|$.

Таким образом, для *n* = 2 неравенство (5) справедливо.

2). Предположим, что неравенство (5) справедливо для $n = k$, т.е. $|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$. Докажем справедливость (5) для $n = k$ +1. Используя справедливость неравенства (5) для *n* = 2 и предположение, получим:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| \le |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|.$$

Следовательно, для $n = k$ +1 неравенство (5) справедливо.

Из 1) и 2) следует справедливость неравенства для любого натурального *n*.

Свойство 5. $(\forall a_1, a_2 \in R)$: $|a_1 - a_2| \ge |a_1| - |a_2|$.

Для доказательства свойства 5 используются свойства 2 и 3. Читателю предлагается провести доказательство самостоятельно.

Свойство 6. $(\forall a, b \in R): |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Свойство 7. $(\forall a, b \in R \ \wedge b \neq 0): \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Доказательство свойств 6 и 7 вытекает из определения корня квадратного из квадрата действительного числа: $\sqrt{a^2} = |a|$. Например, докажем свойство 6:

$$|a \cdot b| = \sqrt{(a \cdot b)^2} = \sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|$$
$$\Rightarrow |a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

§ 12. *Арифметические операции над действительными числами*

12.1. *Арифметические операции над действительными числами, представленными конечными десятичными дробями*

В этом случае арифметические действия над действительными числами сводятся к действиям над десятичными дробями по правилам, описанным в § 6. Так как на основании свойства II действительных чисел в рассмотрение вводятся отрицательные действительные числа, то остановимся на правилах арифметических действий, учитывающих знак действительного числа.

Пусть a и b – действительные числа. Под ***суммой*** чисел a и b понимается действительное число x $(x = a + b)$, вычисляемое по правилу:

- если $a > 0$ и $b > 0,$ то $x = a + b$;
- если $a < 0$ и $b < 0,$ то $x = -(|a| + |b|)$;
- если $a > 0,\ b < 0$ и $|a| > |b|,$ то $x = |a| - |b|$;
- если $a > 0,\ b < 0$ и $|a| > |b|,$ то $x = |a| - |b|$;
- если $a > 0,\ b < 0$ и $|a| = |b|,$ то $x = 0$;
- если $a > 0,\ b < 0$ и $|a| < |b|,$ то $x = -(|b| - |a|)$;
- если $a < 0,\ b > 0$ и $|a| > |b|,$ то $x = -(|a| - |b|)$;
- если $a < 0,\ b > 0$ и $|a| = |b|,$ то $x = 0$;
- если $a < 0,\ b > 0$ и $|a| < |b|,$ то $x = |b| - |a|$;
- если $a = 0,$ то $x = b$;
- если $b = 0,$ то $x = a$.

Пример 1. $a = 6{,}2$; $b = -8{,}4$; найти $a + b$.

Решение.

$6{,}2 > 0, -8{,}4 < 0$ и $|6{,}2| < |-8{,}4| \Rightarrow \; a + b = -(|-8{,}4| - |6{,}2|) = -(8{,}4 - 6{,}2) = -2{,}2$.

Таким образом, суммой двух действительных чисел называется число, которое удовлетворяет условиям:

1) сумма двух положительных чисел есть число положительное и находится по правилам, определённым в множестве положительных действительных чисел (см. §6);
2) сумма двух отрицательных чисел есть число отрицательное; чтобы найти модуль суммы, надо сложить модули слагаемых;
3) сумма двух чисел, имеющих разные знаки, есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с большим модулем; чтобы найти модуль суммы надо из большего модуля вычесть меньший.

Под ***произведением*** чисел a и b понимается действительное число y $(y = a \cdot b)$, вычисляемое по правилу:

- если $a > 0$ и $b > 0,$ то $y = a \cdot b$;
- если $a < 0$ и $b < 0,$ то $y = |a| \cdot |b|$;
- если $a > 0,\ b < 0$ или $a < 0,\ b > 0,$ то $y = -(|a| \cdot |b|)$;
- если $a = 0$ или $b = 0,$ то $y = 0$.

Пример 2. $a = -6{,}2;\ \ b = -8{,}4$; найти $a \cdot b$.

Решение.

$-6{,}2 < 0, -8{,}4 < 0,$ т.е. данная пара чисел удовлетворяет второму условию правила умножения действительных чисел. Следовательно,

$a \cdot b = |-8{,}4| \cdot |-6{,}2| = 8{,}4 \cdot 6{,}2 = 52{,}08.$

Таким образом, произведением двух действительных чисел называется число, которое удовлетворяет условиям:

1) произведение двух положительных чисел есть число положительное и находится по правилам, определенным в множестве положительных действительных чисел;
2) произведение двух отрицательных чисел есть число положительное; произведение двух чисел, имеющих разные знаки, есть число отрицательное; чтобы найти модуль произведения, надо перемножить модули этих чисел.

Под ***разностью*** чисел a и b понимается действительное число r $(r = a - b)$, вычисляемое по правилу $r = a + (-b)$, т.е. разность двух действительных чисел a и b есть сумма числа a и числа $-b$, противоположного числу b. Следовательно, разность вычисляется по правилу вычисления суммы двух действительных чисел. О числе r говорят, что оно получено в результате вычитания числа b из числа a, и пишут

$r = a - b$. При этом число a называется уменьшаемым, а число b – вычитаемым.

Пример 3. $a = 6{,}2$; $b = -8{,}4$; найти $a - b$.

Решение.

Число, противоположное числу $-8{,}4$, равно 8,4, а поэтому по правилу вычисления разности r = 6,2 + 8,4 = 14,6.

Деление действительных чисел определяется как действие, обратное умножению. ***Частным*** от деления действительного числа a на действительное число b называется действительное число p, которое удовлетворяет равенству $a = b \cdot p$. О числе p говорят, что оно получено в результате деления числа a на число b, и пишут $p = a : b$ или $p = \frac{a}{b}$.

Во множестве действительных чисел операция деления числа a на число b существует и единственна только в случае, когда $b \neq 0$. Действительно, пусть a – произвольное действительное число, а b = 0, тогда из определения частного следует, что $a = 0 \cdot p$. Найдем такое число p, при котором это равенство выполняется. Здесь могут быть две возможности:

если $a \neq 0$, то не существует такого действительного числа p, при котором это равенство выполняется;

если $a = 0$, то p может быть любым действительным числом.

Таким образом, частное от деления действительного числа на число нуль либо не существует, либо определяется не единственным образом. Чтобы избежать такой неопределенности, необходимо запретить деление действительного числа на число нуль.

12.2. *Арифметические операции над действительными числами, представленными бесконечными десятичными дробями*

В этом случае бесконечную десятичную дробь, представляющую запись данного действительного числа, приходится обрывать на некоторой цифре после запятой и оперировать с полученной конечной десятичной дробью. Такая конечная десятичная дробь называется ***приближенным значением*** данного числа.

Пусть $a = n, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$ – некоторое действительное число.

Определение 1. ***Приближенным значением числа a по недостатку*** *с точностью до* $\frac{1}{10^k}$ *называется число*

$$a_k = n, n_1 n_2 \ldots n_k.$$

Из определения 1 следует, что приближенное значение числа a по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ получится, если взять целую часть числа и первые k цифр после запятой, а все остальные цифры отбросить.

Определение 2. ***Приближенным значением числа а по избытку*** *с точностью до* $\frac{1}{10^k}$ *называется число*

$$a_k{}' = n, n_1 n_2 \dots n_k + \frac{1}{10^k}.$$

Из определения 2 следует, что приближенное значение числа a по избытку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ получится, если в записи $n, n_1 n_2 \dots n_k$ последнюю цифру увеличить на 1.

Для любого действительного числа a справедливо неравенство $a_k \leq a < a_k'$.

Пример 1. Десятичным приближением числа $\sqrt{3} = 1{,}73205\dots$ по недостатку с точностью до 0,001 $\left(\frac{1}{10^3}\right)$ является число 1,732, а по избытку – число 1,733.

Видим, что десятичные приближения действительного числа являются конечными десятичными дробями. На этом основывается определение арифметических действий над положительными действительными числами, представленными бесконечными десятичными дробями.

Пусть даны действительные числа a и b, a_k и b_k – их приближенные значения по недостатку, a_k' и b_k' – их приближенные значения по избытку.

Определение 3. ***Суммой*** *положительных действительных чисел а и* b *называется такое число* $a + b$, *которое удовлетворяет неравенству* $a_k + b_k \leq a + b < a_k' + b_k'$.

Пример 2. Найти сумму $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ с точностью до 0,001.

Решение.

Возьмем десятичные приближения данных чисел с точностью до 0,0001:

$1{,}4142 \leq \sqrt{2} < 1{,}4143$; $\quad 1{,}7320 \leq \sqrt{3} < 1{,}7321$.

Тогда $3{,}1462 \leq \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}1464$, а $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}146\dots$. С точностью до 0,001 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}146$.

Определение 4. ***Произведением*** *положительных действительных чисел a и b называется такое число $a \cdot b$, которое удовлетворяет неравенству $a_k \cdot b_k \leq a \cdot b < a_k^/ \cdot b_k^/$.*

Пример 3. Найти $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ с точностью до 0,1.

Решение.

Возьмем десятичные приближения данных чисел с точностью до 0,01: $1{,}41 \leq \sqrt{2} < 1{,}42$; $1{,}73 \leq \sqrt{3} < 1{,}74$.

Тогда $2{,}4393 \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} < 2{,}4708$, а $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2{,}4\ldots$. С точностью до 0,1 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2{,}4$.

Вычитание и деление действительных чисел определяются как действия, обратные сложению и умножению соответственно.

Приближенные значения чисел могут появиться не только в результате обрыва записи числа в виде десятичной дроби. При решении любой практической задачи мы используем числа, полученные в результате некоторых измерений. Однако при всяких измерениях появляется ошибка, связанная с несовершенством измерительных инструментов, геометрической неправильностью измеряемого предмета и т.п.

Пусть x – данное число, a – его приближенное значение.

Определение 5. ***Абсолютной погрешностью*** *приближенного значения a называется модуль разности числа x и его приближенного значения a: $|x - a|$.*

Абсолютная погрешность является одной из характеристик приближенного значения числа. Часто она представляет только теоретический интерес, т.к. в большинстве случаев числа x мы можем и не знать. В ряде случаев можно указать границы, в которых изменяется абсолютная погрешность. Эти границы обычно определяются способом получения приближенного значения числа. Например, производя измерения длины с помощью линейки с метками, расставленными на расстоянии 1 мм, мы можем гарантировать, что абсолютная погрешность измерений не будет превышать 1 мм.

Определение 6. ***Предельной абсолютной погрешностью*** *приближенного значения числа называют такое число A, что $|x - a| < A$.*

Заметим, что ни абсолютная погрешность, ни предельная абсолютная погрешность сами по себе еще не характеризуют, с какой точностью мы заменяем число x его приближенным значением. Например, пусть предельная абсолютная погрешность результата некоторого измерения равна 10 км. Если измерялось расстояние между двумя домами одного и того же города, то такая точность, вообще говоря, неудовлетворительна. Если же измерялось расстояние между полюсами Земли, то указанная точность очень хороша.

Характеристиками точности результата измерения, в которых кроме погрешности участвует сам результат измерения, являются величины, называемые относительной погрешностью и предельной относительной погрешностью.

Определение 7. ***Относительной погрешностью*** *называется отношение абсолютной погрешности к абсолютной величине приближенного значения числа:* $\frac{|x-a|}{|a|}$.

Определение 8. ***Предельной относительной погрешностью*** *приближенного значения числа называется отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютной величине приближенного значения числа:* $\frac{A}{|a|}$.

Пример 4. Число 3,14 является приближенным значением числа π=3,14159… . Абсолютная погрешность этого приближенного значения равна 0,00159…; предельной абсолютной погрешностью можно считать число 0,0016; предельную относительную погрешность $\frac{0{,}0016}{3{,}14}$=0,000509… можно положить равной 0,00051.

Определение 9. ***Значащими цифрами*** *в десятичной записи числа называют все его цифры кроме нулей, записанных слева от первой цифры, отличной от нуля.*

Пример 5. Число 20,7 имеет три значащие цифры: 2, 0 и 7; число 1050 имеет четыре значащие цифры: 1, 0, 5, 0; число 0,0015104 содержит пять значащих цифр: 1, 5, 1, 0 и 4.

Говорят, что *n* первых значащих цифр приближенного значения числа являются ***верными***, если абсолютная погрешность приближенного значения числа не превышает половины единицы разряда *n*-й значащей цифры, считая разряды слева направо.

Пример 6. Для числа 121,57 число 122,00 является приближенным значением с тремя верными цифрами, так как

$$|121{,}57 - 122| = 0{,}43 < 0{,}5\cdot 10^0.$$

Результат арифметических действий над приближенными значениями чисел представляет собой также приближенное значение некоторого числа. При выполнении арифметических действий над приближенными значениями производят предварительное округление компонентов действий.

Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все его цифры, стоящие после n-го разряда или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

1) если за последней сохраняемой цифрой следует цифра 0, 1, 2, 3 или 4, то при округлении сохраняются все цифры до последней сохраняемой включительно;
2) если за последней сохраняемой цифрой следует 9, 8, 7, 6 или 5, то к последней сохраняемой цифре прибавляется единица.

Пример 7. Округление числа 219,364 до четырех значащих цифр дает число 219,4. Последняя цифра округленного числа увеличена на 1, так как первая отбрасываемая цифра больше 5.

Пример 8. Округление числа 6,4502 до трех значащих цифр дает число 6,45. Последняя цифра округленного числа не увеличена, так как первая отбрасываемая цифра равна 0.

При использовании правил округления абсолютная погрешность округления не превосходит половины единицы разряда последней оставленной значащей цифры, то есть все значащие цифры приближенного значения числа, полученного с помощью правил округления, являются верными цифрами.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

9.1. Равны ли дроби: 1) $\frac{13}{125}$ и $\frac{15}{124}$; 2) $\frac{216}{313}$ и $\frac{135}{326}$; 3) $\frac{7}{192}$ и $\frac{187}{1620}$; 4) $\frac{5}{133}$ и $\frac{60}{1596}$; 5) $\frac{17}{325}$ и $\frac{187}{3575}$.

9.2. Докажите или опровергните утверждение:

1) правильная дробь уменьшится, если из её числителя и знаменателя вычесть одно и то же натуральное число, меньшее числителя;

2) неправильная дробь уменьшится, если к её числителю и знаменателю прибавить одно и то же натуральное число;

3) правильная дробь увеличится, если к её числителю и знаменателю прибавить одно и то же натуральное число.

9.3. Каждую из следующих дробей преобразуйте в равносильную ей несократимую дробь:

1) $\frac{15}{20}$; 2) $\frac{15}{225}$; 3) $\frac{648}{964}$; 4) $\frac{9379}{2573}$; 5) $\frac{9108}{924}$; 6) $\frac{792}{1782}$; 7) $\frac{7350}{11319}$.

9.4. Докажите:

1) если дробь $\frac{m}{n}$ сократима, то дробь $\frac{4m}{2m+3n}$ тоже сократима;

2) если дробь $\frac{a}{b}$ сократима, то дроби $\frac{a+b}{b}$ и $\frac{a-b}{b}$ тоже сократимы;

3) если дробь $\frac{m+2n}{3m}$ несократима, то дробь $\frac{m}{n}$ тоже несократима.

9.5. Сравните дроби:

1) $\frac{19}{34}$ и $\frac{28}{51}$; 2) $\frac{39}{8513}$ и $\frac{26}{5675}$; 3) $\frac{13}{24}$ и $\frac{17}{36}$; 4) $\frac{5}{16}$ и $\frac{135}{927}$; 5) $\frac{15}{133}$ и $\frac{375}{3325}$.

9.6. Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби:

1) $\frac{17}{24}$ и $\frac{7}{36}$; 2) $\frac{7}{60}$ и $\frac{9}{40}$; 3) $\frac{17}{52}$ и $\frac{31}{54}$; 4) $\frac{7}{36}$ и $\frac{51}{54}$; 5) $\frac{14}{105}$ и $\frac{13}{48}$.

9.7. Найдите три рациональных числа, заключенных между числами:

1) $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$; 3) $\frac{6}{11}$ и $1\frac{1}{7}$; 4) $2\frac{1}{5}$ и $3\frac{1}{4}$.

9. 8. Вычислите рациональным способом значения следующих выражений; выполненные преобразования обоснуйте:

1) $\frac{73}{15}-\left(\frac{11}{15}+\frac{1}{5}\right)$; 2) $\frac{3}{5}:\left(\frac{9}{10}-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{9}\right)$; 3) $\frac{17}{13}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{26}{51}$;

4) $\left(\frac{7}{8}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{8}{13}$; 5) $\frac{31}{80}+\left(\frac{3}{16}+\frac{39}{80}\right)$; 6) $\left(4\frac{5}{9}+\frac{11}{36}\right)-2\frac{7}{9}$.

9.9. Решите задачу арифметическим способом.

1) Девочка прочитала книгу в 324 страницы за 4 дня. В первый день она прочла $\frac{2}{9}$ всей книги, во второй и третий дни – по $\frac{3}{7}$ того, что осталось после первого дня. Сколько страниц прочла девочка в четвертый день?

2) В трех гаражах помещаются 460 машин. Число машин в первом гараже составляет $\frac{3}{4}$ числа машин, помещающихся во втором гараже, а в третьем гараже в $1\frac{1}{2}$ раза больше машин, чем в первом. Сколько машин в каждом гараже?

3) Из двух пунктов, расстояние между которыми 25 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Один из них проходил в час на $\frac{3}{4}$ км больше другого. С какой скоростью шел каждый, если через 2 часа после выхода расстояние между ними стало $7\frac{1}{2}$ км?

4) Турист прошел в первый день $\frac{3}{8}$ всего маршрута, во второй день – 40% остатка, после чего ему осталось пройти на 6,5 км больше, чем он прошел во второй день. Какова длина маршрута?

5) На уборке улицы работают две машины. Первая из них может убрать всю улицу за 40 мин, второй для этого требуется 75% времени первой. Обе машины начали работу одновременно. После совместной работы в течение 0,25 часа вторая машина прекратила работу. За сколько времени после этого первая машина закончила уборку улицы?

6) На заводе 35% всех рабочих – женщины, а остальные мужчины, которых на заводе на 252 человека больше, чем женщин. Определить общее число рабочих.

9.10. Запишите числа 7,11; 0,45; 13,745 в виде несократимых обыкновенных дробей.

9.11. Какие из следующих чисел можно записать в виде конечных десятичных дробей: $\frac{7}{352}$; $\frac{12}{56}$; $\frac{21}{75}$; $\frac{12}{96}$?

9.12. Запишите в виде десятичных дробей следующие дроби $\frac{7}{8}$; $\frac{19}{40}$; $\frac{137}{50}$; $\frac{253}{160}$.

9.13. Что больше 35% от 40 или 40% от 35?

9.14. Найдите число, 3,6% которого составляют $\frac{3+4,2:0,1}{\left(1:0,3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0,3125}$.

9.15. Обратите в бесконечную десятичную дробь следующие обыкновенные дроби: $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{5}{22}$; $\frac{10}{99}$.

9. 16. Запишите в виде обыкновенной дроби: 0,(43); 0,(306); 0,24(144); 5,7(27).

9.17. Вычислить:

1) $215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$; 2) $1,7:\frac{\left(4,5\cdot 1\frac{2}{3}+3,75\right)\cdot\frac{7}{135}}{\frac{5}{9}}-\left(0,5+\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\right)$;

3) $\frac{\left[\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10\frac{9}{10}+\left(\frac{7}{8}-\frac{7}{30}\right)\cdot 1\frac{9}{11}\right]\cdot 4\frac{1}{5}}{0,008}$;

4) $\frac{2,045\cdot 0,033+10,518395-0,464774:0,0562}{0,003092:0,0001-5,188}$;

5) $0,4(3)+0,6(2)\cdot 2\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{0,5(8)}:\frac{50}{53}$; 6) $\frac{0,8(5)+0,17(1)}{0,8(5)-0,17(1)}+\frac{0,8(3)+0,1(6)}{0,8(3)-0,1(6)}$

9. 18. Доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равнялся бы 3 (5, 7, 11).

9.19. Пусть a и b – несоизмеримые отрезки. Будут ли соизмеримыми отрезки a и $\frac{b}{2}$; $\frac{a}{3}$ и b; $\frac{a}{5}$ и $\frac{b}{6}$?

9.20.Доказать, что в равнобедренном треугольнике, угол при вершине которого равен 108^0, основание несоизмеримо с боковой стороной.

9.21. Привести примеры , показывающие, что квадратный корень из рационального числа может быть: a) целым числом; b) конечной десятичной дробью; c) бесконечной десятичной периодической дробью.

9.22. Установите, соизмеримы или несоизмеримы два отрезка, если при одной и той же единице измерения их длины выражаются числами:

1) 3 и $\frac{3}{5}$; 2) 3 и $\sqrt{3}$; 3) $0,3\sqrt{3}$ и $\frac{2}{7}\sqrt{3}$; 4) 0,2(3) и $3\frac{2}{3}$.

9.23. Доказать иррациональность числа $\sqrt{5}-\sqrt[3]{7}$.

9.24. На числовой прямой отметьте точку с координатой:

1) $x=\frac{0{,}5\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{4}$; 2) $x=\frac{\frac{3}{4}\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}$.

9.25. Произвести округление чисел 4375,5494 и 5497,1857 последовательно до тысячных, сотых, десятых долей, единиц, десятков, сотен, тысяч.

9.26. Произвести последовательное округление дробей $\frac{3}{7}$; $\frac{7}{99}$; $\frac{5}{6}$ до тысячных, сотых, десятых долей.

9.27. С точностью до 0,1; 0,01; 0,001 по недостатку и по избытку написать рациональные приближения следующих чисел: 2,3883…; 0,8343703…; 8,00374…; 4, 99998…

9.28. Выполнить указанные действия над действительными числами с точностью до 0,01:

$\frac{1}{3}+2{,}17374\ldots$; $\sqrt{5}+\sqrt{3}$; 10,7373…– 9,0354…; $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}$.

Образец контрольной работы по теме

В заданиях А1 – А5 выберите правильный ответ или ответы.

А1. Число 2,17345345… является

1) рациональным 2) иррациональным 3) чисто периодической дробью 4) смешанно периодической дробью

А2. Среди перечисленных дробей выберите те, которые находятся между числами $\frac{3}{2}$ и $\frac{5}{4}$

1) $\frac{11}{8}$ 2) $\frac{11}{4}$ 3) $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{21}{16}$

А3. Число $\frac{42}{1344}$ можно записать следующей десятичной дробью

1) 0,03(125) 2) 0,03125 3) 0,3125 4) 0,31(25)

А4. Значение выражения $\frac{\left(15\frac{4}{45}-14{,}2(6)\right)\cdot 1\frac{10}{17}}{\left(4-2{,}(3)\right):4{,}(4)}+\frac{4{,}25:0{,}85+1:0{,}5}{\left(10\frac{14}{25}-9{,}06\right)\cdot 0{,}(3)}$ равно

1) 17 2) $17\frac{41}{85}$ 3) $17\frac{1}{85}$ 4) $17\frac{41}{80}$

А5. Как изменится дробь, если ее числитель разделить на 2,5, а знаменатель умножить на 0,2?

1) увеличится в 5 раз 2) уменьшится в 5 раз 3) уменьшится в 2 раза 4) не изменится

В заданиях В1 – В2 привести полное решение.

В1. Решите задачу арифметическим способом: «При продаже товара за 1386 руб. получено 10% прибыли. Определить себестоимость товара.»

В2. Установить, соизмеримы или несоизмеримы два отрезка при одной и той же единице измерения, если их длины выражаются числами $3\sqrt{2}$ и $0{,}2\sqrt{0{,}125}$.

ТЕМА 10.

ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ. ТОЖДЕСТВА

§1. *Об алфавите математического языка*

Математический язык искусственно возник в связи с необходимостью в точных, сжатых и однозначно понимаемых формулировках математических законов, правил, доказательств. Отметим лишь некоторые математические символы, которые будут использоваться в дальнейшем.

В алфавит математического языка входят:

1) знаки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры);
2) буквы латинского алфавита: $a, b, c, \ldots ,z, A, B, C, \ldots ,Z$ для обозначения переменных, множеств и их элементов;
3) знаки $+, -, \cdot, :, \sqrt{}, \cap, \cup$ и др. для записи действий;
4) знаки отношений (между числами, множествами и их элементами): $=, <, >, \|, \perp$ и др. для записи предложений;
5) скобки (круглые, фигурные и др.); их называют техническими знаками;
6) запятая.

Из знаков математического алфавита по определенным правилам конструируют слова и предложения. При этом слово в математике понимается также как и в русском языке, т.е. это такая конечная последовательность (набор) букв алфавита этого языка, которая имеет смысл. Например, запись 7 – : 8 + смысла не имеет и, значит, словом ее назвать нельзя.

Исторически символика математики складывалась веками при участии многих выдающихся ученых. Так, считают, что обозначение неизвестных величин буквами использовал еще Диофант (III в.). Широкое применение прописных букв латинского алфавита в алгебре началось с Виета (XVI в.), строчные буквы этого алфавита ввел для обозначения Р. Декарт (XVII в.). Знак равенства впервые появился в работах английского ученого Рекорда (XVI в.), но стал он общеупотребительным только в XVIII веке. Знаки неравенства (<, >) появились в начале XVII в., ввел их английский математик Гариот.

§2. *Числовые выражения и выражения с переменной*

Рассмотрим, как из алфавита математического языка образуются числовые выражения и выражения с переменными. Как известно, записи 3+7, 24:8, (25+3)·2–17 называют числовыми выражениями. Они состоят из чисел, знаков действий и скобок. Однако, описание из каких знаков алфавита математического языка образуются числовые выражения не является определением этих понятий.

Например, (3+2)) - ·12 составлено из чисел, знаков действий и скобок, но числовым выражением не является. Поэтому дадим точное определение понятия числового выражения в общем виде.

Определение 1. *а) Каждое число является числовым выражением.*

б) Если (А) и (В) – числовые выражения, то (А)+(В), (А) – (В), (А)·(В) и (А):(В) тоже являются числовыми выражениями.

Если точно следовать определению 1, то пришлось бы писать слишком много скобок. Например, (7)+(5) или (6)·(2). Для сокращения записи условились не писать скобки, если несколько выражений складываются или вычитаются, причем эти операции выполняются слева направо. Точно также не пишут скобок и тогда, когда перемножаются или делятся несколько чисел, причем эти операции выполняются по порядку слева направо. Например, пишут 37–12+62–17 или 120:15·7:12.

Определение 2. *Число, полученное в результате последовательного выполнения действий, указанных в выражении, называется* ***значением*** *числового выражения.*

Например, значением числового выражения 3·2 – 4 является 2. Существуют выражения, которые не имеют числового значения. Про такие выражения говорят, что они не имеют смысла.

Например, 8:(4 – 4).

Действия при вычислении значения числового выражения выполняют в определенном порядке. Этот порядок таков:

1) Если числовое выражение не содержит скобок, то надо разделить его на части, отделенные друг от друга знаками сложения и вычитания, и вычислить значение каждой такой части, выполняя умножения и деления по порядку слева направо. После этого, заменив каждую часть ее значением, найти значение выражения, выполняя операции сложения и вычитания по порядку слева направо.

2) Если числовое выражение содержит скобки, то надо взять части выражения, заключенные между левой и правой скобками, не содержащие иных скобок. Найти их значения по правилу 1) и заменить полученным значением, опустив скобки. Если после этого после этого получится выражение без скобок, вычислить его по правилу 1). В противном случае снова применить правило 2).

Пример. ((36:2 – 14)·(42·2 –14) + 20):2 = (4·70+20):2 = 300:2 = 150

Некоторые условия задач содержат буквы.

Например, $(a - 3\cdot20) : (20+70)$, $(a-3b) : (b+c)$.

Говорят, что имеют место выражения с переменными. В первое выражение входит одна переменная a, а во второе – три переменные a, b, c. Придавая этим буквам различные значения, получают различные числовые выражения. Общее понятие выражения с переменными определяется точно также как понятие числового выражения, только кроме чисел выражения с переменными содержат буквы.

Определение 3. *Числа, которые разрешается подставлять вместо переменной в выражение, называются **значениями** переменной, а множество таких чисел – **областью определения** данного выражения.*

Например, область определения выражения $5:(x-7)$ состоит из всех действительных чисел, кроме числа 7.

Замечание. *Вместо переменной в выражение разрешается подставлять такие ее значения, при которых получаются числовые выражения, имеющие смысл.*

Примеры. 1) Областью определения выражения $3 - 4y$ является множество всех действительных чисел ($y \in R$).

2) Для выражения $\frac{4}{x-3}$ $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

3) Выражение $\sqrt{x-2}$ определено для всех $x \in [2;\ +\infty)$.

§3. *Тождественные преобразования выражений*

Рассмотрим задачу.

Задача. Найти значение выражения $3x(x-2)+4(x-2)$ при $x=6$.

Решение.

I способ. Подставим число 6 вместо переменной и выполним указанные действия:

$$3\cdot6\cdot(6-2)+4\cdot(6-2)=18\cdot4+4\cdot4=72+16=88.$$

II способ. Упростим данное выражение:

$$3x(x-2)+4(x-2)=(x-2)(3x+4),$$

а затем вместо x подставим 6 и выполним действия:

$$(6-2)\cdot(3\cdot6+4)=4\cdot22=88.$$

Обратим внимание, что и при первом и при втором способе решения задачи мы выражение заменяли другим. Например, $18\cdot4+4\cdot4$ заменяли на $72+16$, а $3x(x-2)+4(x-2)$ на $(x-2)(3x+4)$. Причем эти замены привели к одному и тому же результату. В математике такие замены называются тождественными преобразованиями выражений.

Определение 1. *Два выражения называются **тождественно равными**, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны.*

Определение 2. *Равенство, верное при любых значениях переменных, называется **тождеством**.*

Примеры. 1) $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ – тождество.

2) $a+b=b+a$ – тождество.

3) $\frac{x}{4} = \frac{x^2}{4x}$ не является тождеством, т.к. при $x = 0$ $\frac{x}{4} = \frac{0}{4} = 0$**,** а $\frac{x^2}{4x}$ при $x = 0$ не существует.

Определение 3. *Замена выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называется **тождественным преобразованием** данного выражения на этом множестве.*

Примерами тождественных преобразований могут служить следующие задания:

1. Разложить на множители $ax - bx + ab - b^2$.
2. Упростить выражение $\frac{1-2x}{2x-3} - \frac{1-5x}{3-2x}$.

При выполнении тождественных преобразований возможно изменение области определения. Так, приводя подобные члены при упрощении выражения

$$x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-3x+2}, \tag{1}$$

мы расширяем его область определения: данное выражение определено лишь при $x \neq 1$ и $x \neq 2$, тогда как получившийся после упрощения многочлен

$$x^2 + 2x - 1 \tag{2}$$

определен при любых значениях x. Выражения (1) и (2) тождественны при $x \neq 1$ и $x \neq 2$.

Область определения выражения может уменьшиться, например, после сокращения дроби. Так, дробь $\frac{x^4-1}{(x^2-1)(x+4)}$ определена при $x \neq \pm 1$ и $x \neq -4$. После сокращения на $x^2 - 1$ получается дробь $\frac{x^2+1}{x+4}$, определенная при $x \neq -4$. В этом случае выражения тождественны при $x \neq \pm 1$ и $x \neq -4$.

§4. *Числовые равенства и неравенства*

Пусть *(A)* и *(B)* – два числовых выражения. Соединим их знаком равенства. Получим предложение *(A) = (B)*, которое называется числовым равенством.

Возьмем, например, числовые выражения 3+2 и 6–1 и соединим их знаком = : 3+2=6–1. Получим истинное равенство. Если же соединить знаком = выражения 3+2 и 7–3, то получим ложное числовое равенство 3+2=7–3. Таким образом, с логической точки зрения числовое равенство – это высказывание, истинное или ложное. Числовое равенство истинно, если значения числовых выражений, стоящих в левой и правой частях равенства совпадают.

Свойства числовых равенств

1. Рефлексивность: *(А)= (А).*
2. Симметричность: если *(А) = (В)*, то *(В) = (А).*
3. Транзитивность: если *(А) = (В)* и *(В) = (С)*, то *(А) = (С).*
4. Если к обеим частям истинного числового равенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получится также истинное числовое равенство.
5. Если обе части истинного числового равенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получится также истинное числовое равенство.

Если числовые выражения *(А)* и *(В)* соединить знаком > или < , получим предложение *(А) > (В)* или *(А) < (В)*, которое называют числовым неравенством. С логической точки зрения числовое неравенство – это высказывание, истинное или ложное.

Свойства числовых неравенств

1. Если *(А) > (В)*, то *(В) < (А).*
2. Если *(А) > (В)* и *(В) > (С)*, то *(А) > (С).*
3. Если *(А) > (В), с* – любое число, то *(А)+с > (В)+с.*
4. Если *(А)>(В), (С)* > 0, то *(А)·(С) > (В)·(С).* Если *(А) > (В), (С)* < 0, то *(А)·(С)< (В)·(С).*
5. Если *(А) > (В), (С) > (D)*, то *(А)+(С) > (В)+(D).*
6. Если *(А) > (В), (С) < (D)*, то *(А) - (С) > (В) - (D).*
7. Если *(А)·(В)* >0 и *(А) < (В)*, то $\frac{1}{(A)} > \frac{1}{(B)}$.
8. Если *(А)* >0, *(В)* >0 и *(А) > (В)*, то $(A)^n > (B)^n$, где $n \in N$.
9. Если *(А)* >0, *(В)* >0 и *(А) >(В)*, то $\sqrt[n]{(A)} > \sqrt[n]{(B)}$, где $n \in N, n \neq 1$.
10. Если *(А) > (В), (С) > (D)* и *(А)* >0, *(В)* >0, *(С)* >0, *(D)* >0, то *(А)·(С) > (В)·(D).*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

10.1. Выполните действия, применяя формулы сокращенного умножения:

1) $\left(20\frac{1}{2}\right)^2$; 2) 52^2; 3) 198·202; 4) $\left(8\frac{1}{4}\right)^2$; 5) $(x^4+4)^3$;
6) $(1+2u)\cdot(1-2u)\cdot(1-4u^2)$; 7) $(0{,}5x^2-0{,}2y)^3$;
8) $(2mn+1)\cdot(4m^2n^2-2mn+1)\cdot(8m^3n^3-1)$;

9) $[(m-n)^3-p^3]:(m-n-p)$;

10) $\left(\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{27}y^3\right):\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)$;

11) $\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2-xy\right]:(2-xy)$;

12) $(a^{2x}-b^{2x}):(a^x+b^x)$.

10.2. Разложите на множители:

1) $(a^2-b^2)\cdot(a^2+ab+b^2)-a^3+b^3$;

2) $a^3-5a^2-4a+20$; 3) $a^2+4ab+4b^2-1$;

4) $2ab^3+6a^2b^2+8a^4b^4$; 5) $a^5-4a^3+8a^2-32$;

6) $3x^3(x^2-x+1)+2x^2(x-x^2-1)+x(-x^2+x-1)$;

7) $x^2-7xy+12y^2$; 8) x^3-3x+2; 9) x^4+6x^2+25;

10) a^4+4; 11) $a^4-a^2(b^2+1)+b^2$.

10.3. Найдите значение выражения, предварительно его упростив:

1) $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$ при $a=3,\ b=-\frac{1}{2}$;

2) $9m^2+24mn+16n^2$ при $m=4,\ n=-2$;

3) $(a^6+8):(a^4-2a^2+4)$ при $a=-4$;

4) $(4x^2+12xy+9y^2-4):(2x+3y+2)$ при $x=4,\ y=-3$;

5) $(x^4+x^3y+7xy^3-3y^4):(3y^2+x^2-xy)$ при $x=4, y=-4$.

10.4. Сократите дроби:

1) $\frac{x^2+2x-8}{(x-1)^2-1}$; 2) $\frac{(x-1)^3-8}{x-3}$; 3) $\frac{9-12x+4x^2}{2x-3}$.

10.5. При каких значениях x следующие дроби не имеют смысла:

1) $\frac{2x+1}{x-1}$; 2) $\frac{3x^2-2}{x^2-1}$; 3) $\frac{x}{x^3-1}$;

4) $\frac{x^2}{x^3+1}$; 5) $\frac{2x-1}{3x+1}$; 6) $\frac{3}{3x^2+5}$?

10.6. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{6a^2-2b^2-ab}{b^2-4a^2}+\frac{3a+1}{5a-1}\cdot\frac{5a^2-a}{6a^2-3ab-b+2a}+1\right):\frac{a-b}{2b}$;

2) $\left(\frac{m-n}{mn}-\frac{3m+n}{mn-m^2}+\frac{3n+m}{mn-n^2}\right):\frac{2m+2n}{mn}$;

3) $\left(\frac{1}{a^2-9}:\frac{x-a}{3a^2+9a}-\frac{3a}{9-3x-3a+ax}\right)\cdot\frac{x^3-27}{3a}$.

10.7. Докажите тождество:

1) $\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right):\left(2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{y}{x}+1\right)=\frac{x}{x-y}$;

2) $\frac{x}{(x-y)\cdot(x-z)}+\frac{y}{(y-x)\cdot(y-z)}+\frac{z}{(z-x)\cdot(z-y)}=0$;

3) $\left[\left(\frac{3a}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{3}{b-a}\right):\frac{2a+b}{a^2+ab+b^2}\right]\cdot\frac{3}{a+b}=\frac{9}{a-b}$;

4) $\frac{3y^2}{x^4-xy^3}+\frac{y}{x^3+x^2y+xy^2}-\frac{1}{x^2-xy}=-\frac{x+y}{x(x^2+xy+y^2)}$.

Образец контрольной работы по теме

В заданиях 1 – 3 вместо точек вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось истинное утверждение

1. Значением числового выражения называется …

2. Областью определения выражения с переменной называется …

3. Два выражения называются тождественно равными …

В заданиях 4 – 5 выберите правильный ответ

4. Значение числового выражения

$\left(\frac{0{,}216}{0{,}15}+\frac{2}{3}:\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{196}{225}-\frac{7{,}7}{24\frac{3}{4}}\right)+0{,}695:1{,}39$ равно

1) 5 ; 2) $\frac{1}{5}$; 3) 2 ; 4) $\frac{1}{2}$

5. Результат упрощения выражения $\frac{x}{x^2+4}-\frac{2(x-2)^2}{x^4-16}$ равен

1) $\frac{2}{x+2}$; 2) $\frac{1}{x^2+4}$; 3) $\frac{1}{x+2}$; 4) $\frac{x}{x^2+4}$

В задании 6 приведите полное решение

6. Доказать тождество $\frac{14-a^2}{4-a}-\left(\frac{a-3}{7a-4}-\frac{a-3}{a-4}\right)\cdot\frac{7a-4}{9a-3a^2}=a+4$.

ТЕМА 11. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

§1. Определение числовой функции

Определение 1. *Пусть X – некоторое числовое множество. На множестве X определена* ***числовая функция****, если каждому элементу множества X поставлено в соответствие действительное число.*

Множество X при этом называется ***областью определения функции****.*

Произвольный элемент области определения обычно обозначается буквой x и называется ***аргументом*** *функции или независимой переменной.*

Примеры: **1.** *Числовая функция определена следующим образом: каждому числу x отрезка* $[0,1]$ *ставится в соответствие число 2x+1. Тогда* $[0,1]$ *– область определения, закон соответствия записывается так* $x\to 2x+1$.

2. *Каждому рациональному числу ставится в соответствие число 1, а каждому иррациональному числу – число 0 (функция Дирихле). Область определения этой функции – множество всех действительных чисел.*

Обычно функцию записывают в виде $y = f(x)$. Здесь x означает аргумент, y – соответствующее ему значение функции, f – закон соответствия.

Примеры: **1.** *В примере 1 функция имеет вид* $y=2x+1$, *где* $x\in[0,1]$.

2. *В примере 2 функцию можно записать в виде*

$$y=\begin{cases}1, \text{если } x - \text{рационально}\\ 0, \text{если } x - \text{иррационально.}\end{cases}$$

Если число a принадлежит области определения функции f, то говорят что функция f определена в точке a. Обозначение: $f(a)$.

Пример. *Рассмотрим функцию* $y=2x+1$, *заданную для всех* $x\in[0,1]$ *.Найдем её значения при* $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 3/4$, $x = 1$. *Подставляя указанные значения x в формулу* $y=2x+1$, *получим* $y(0)=1$, $y(1/2)=2$, $y(3/4)=5/2$, $y(1)=3$.

Определение 2. *Множество всех значений функции f(x), когда аргумент x пробегает область определения функции, называется множеством значений функции f.*

Замечание. *В дальнейшем область определения функции y=f(x) будем обозначать D(y) или D(f), а множество значений E(y) или E(f).*

Примеры: 1. *Для функции* $y=2x+1,\ x\in[0,1]$ *область определения* $D(y)=[0,1]$ *, а множество значений* $E(y)=[1,3]$.

2. *Для функции Дирихле* $y=\begin{cases}1, \text{если } x-\text{рационально}\\ 0, \text{если } x-\text{иррационально.}\end{cases}$

$D(y)=R, \quad E(y)=\{0,1\}.$

Множество всех значений функции является подмножеством множества R действительных чисел. Поэтому иногда говорят, что функция есть отображение одного подмножества (области определения) на другое подмножество (множество значений) множества действительных чисел.

Две функции считаются равными, если у них одна область определения и каждому числу из области определения они сопоставляют одно и тоже значение.

§2. Способы задания функций

Аналитический способ задания. Этот способ является самым распространенным в математике. Он состоит в том, что функциональную зависимость между величинами изображают в виде аналитического выражения (формулы), указывающего какие действия надо произвести над аргументом, чтобы получить соответствующее значение функции. Например, $y=\dfrac{\sin 4x}{10^x+\sqrt{x}}$.

Одно и то же аналитическое выражение может определять различные функции в зависимости от области задания. Если область определения X не указана явно, то функция считается заданной для тех значений аргумента, для которых указанные действия выполнимы. Множество этих значений аргумента называется областью определения аналитического выражения.

Следует помнить, что область определения функции и её аналитического выражения могут быть разными. Например, формула $S=\pi R^2$ определяет площадь круга, как функцию его радиуса. Эта функция определена на множестве положительных действительных чисел R_+ , т.к. радиус всегда положителен. В то же время область определения аналитического выражения πR^2 – множество всех действительных чисел.

Словесный способ задания. Этот способ употребляется тогда, когда другим способом функцию задать невозможно или затруднительно. Так функция Дирихле задается словесным способом.

Табличный способ задания. Функция *y=f(x)* может быть задана табличным способом, т.е. таблицей, в которой значениям аргумента x соответствуют значения зависимой переменной y. Табличным способом пользуются тогда, когда функциональную зависимость между переменными x и y изучают опытным путем. Пользуясь таблицей по значению аргумента x можно быстро найти соответствующее ему значение функции. Недостатком табличного способа является то, что таблица не может охватить все значения функции, если область определения есть бесконечное множество. Примерами табличного способа задания функции могут служить таблицы логарифмов, тригонометрические таблицы.

Графический способ задания. Этот способ основан на геометрическом изображении функции с помощью графика.

Определение. ***Графиком функции*** *y=f(x) называется множество точек плоскости с координатами (x, f(x)), где* $x \in X$*.Само равенство y=f(x) называется уравнением этого графика.*

Обычно графиком функции является некоторая линия. Однако не всякая линия может служить графиком функции. Линия является графиком функции в том и только том случае, если каждому значению $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$.

Для построения графиков функций обычно составляют таблицу её значений для некоторых значений аргумента. Полученные точки на координатной плоскости соединяют плавной линией. Однако встречаются функции, графики которых обычно не удается изобразить. Например, функция Дирихле

$$y(x) = \begin{cases} 1, \text{\textit{если } } x - \text{\textit{рационально}} \\ 0, \text{\textit{если } } x - \text{\textit{иррационально.}} \end{cases}$$

Область определения этой функции – множество действительных чисел. Так как на сколь угодно малом участке числовой прямой есть как рациональные, так и иррациональные точки, то график функции Дирихле не есть линия. Он состоит из точек прямой $y=1$ с рациональными абсциссами и точек оси абсцисс с иррациональными абсциссами. Построить такой график невозможно.

§3. Общие свойства числовых функций

Определение 1. *Числовое множество X называется* ***симметричным относительно начала координат****, если вместе с каждым своим элементом x оно содержит и противоположный элемент –x.*

Примеры. 1. *Отрезок* [–5, 5] *является симметричным множеством относительно начала координат.*

2. *Интервал* (–∞, +∞) *– симметричное множество;*
3. *Промежутки* [–5, 4] *и* [–2, 2) *являются несимметричными множествами относительно начала координат.*

Определение 2. *Функция y=f(x), заданная на симметричном относительно начала координат множестве X, называется* ***чётной****, если для всех* $x \in X$ *выполняется равенство f(–x) = f(x).*

Пример 4. *Функция* $y = x^2$ *определена на множестве* $D(y) = (-\infty, +\infty)$*, симметричном относительно начала координат.* $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. *Следовательно,* $y = x^2$ *– четная функция.*

Определение 3. *Функция y=f(x), заданная на симметричном относительно начала координат множестве X, называется* ***нечётной****, если для всех* $x \in X$ *выполняется равенство f(–x) = – f(x).*

Пример 5. *Функция* $y = x^3$ *определена на множестве* $D(y) = (-\infty, +\infty)$*, симметричном относительно начала координат.* $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. *Следовательно,* $y = x^3$ *– нечетная функция.*

Следует отметить, что график чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

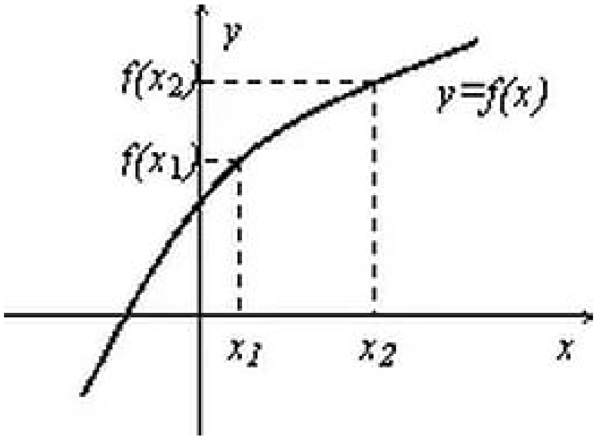
Свойства чётных и нечётных функций

1. Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций – чётная функция.
2. Сумма и разность нечетных функций – нечётная функция, а произведение и частное – четная функция.

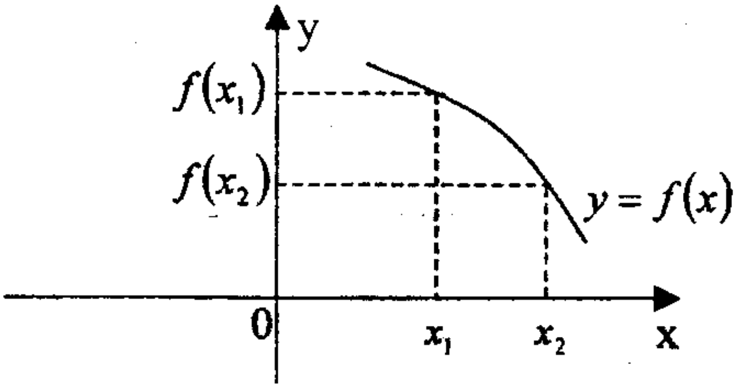
Доказательство чётности или нечётности функции *y=f(x)* проводится следующим образом. Устанавливают, симметрична ли заданная или естественная область определения функции. Если эта область – несимметричное множество, то функция не является ни чётной, ни нечётной. Если же эта область симметричное множество, то в аналитическом выражении *f(x)* нужно заменить *x* на *–x*, выполнить упрощения и сравнить результат с *f(x)*: если окажется, что *f(–x)=f(x)*, то функция чётная; если окажется, что *f(–x)= –f(x)*, то функция нечётная; если же *f(–x)* отличается от *f(x)* и от *–f(x)*, то функция не является ни чётной, ни нечётной.

Определение 4. *Функция y=f(x) называется* ***возрастающей*** *на промежутке X, если для любых двух точек* x_1 *и* x_2 *этого промежутка таких, что* $x_1<x_2$*, выполняется неравенство* $f(x_1)<f(x_2)$*; иными словами, если большему значе-*

нию аргумента соответствует большее значение функции.



Определение 5. *Функция $y=f(x)$ называется* ***убывающей*** *на промежутке X, если для любых двух точек x_1 и x_2 этого промежутка таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$; иными словами, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.*



Возрастающие и убывающие функции объединяются термином монотонные функции.

Определение 6. *Функция $y=f(x)$ называется* ***постоянной****, если для любых двух точек x_1 и x_2 ,взятых из области определения функции имеет место равенство $f(x_1)=f(x_2)$ и обозначается $f(x) = c$ или $f(x) = const$.*

§4. Прямая пропорциональность

Определение. ***Прямой пропорциональностью*** *называется функция, заданная формулой $y=k\cdot x$, где $k \neq 0$. Число k называется* ***коэффициентом пропорциональности****. О переменной y говорят, что она пропорциональна переменной x.*

Приведем свойства функции $y=kx$.

1). *Область определения* – множество всех действительных чисел.

2). Исследуем на ***чётность.***

Множество действительных чисел является симметричным множеством относительно начала координат и $f(-x) = k\cdot(-x)= - k\cdot x=-f(x)$, т.е. функция $y=k\cdot x$ – нечётная и её график симметричен относительно начала координат.

3). При $k > 0$ функция ***возрастает***, а при $k < 0$ – ***убывает***.

Действительно, пусть $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ и $x_1 < x_2$, тогда $f(x_1) - f(x_2)= kx_1 - kx_2= k(x_1 - x_2)$. Т.к. $x_1 - x_2<0$, то при $k>0$ $f(x_1) - f(x_2)<0$ и, следовательно, $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. функция возрастает. В случае, когда $k>0$ $f(x_1) - f(x_2)>0$ и, следовательно, $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. функция убывает.

4). Найдем точки ***пересечения*** с осями координат. Очевидно, что $y=0$ при $x=0$, т.е. график функции проходит через начало координат.

5). Найдем ***интервалы знакопостоянства функции***:

При $y > 0$, $kx > 0$. Поэтому, если $k > 0$, то $x > 0$; если $k < 0$, то $x < 0$.

При $y < 0$, $kx < 0$. Поэтому, если $k > 0$, то $x < 0$; если $k < 0$, то $x > 0$.

6). Если функция f – прямая пропорциональность и (x_1,y_1), (x_2,y_2) – пары соответственных значений x и y, причем $x_2 \neq 0$, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Действительно, если f – прямая пропорциональность, то она может быть задана формулой $y=k\cdot x$, и тогда для двух различных значений x_1 и x_2 имеем, что $y_1=k\cdot x_1$ и $y_2=k\cdot x_2$.

Так как $x_2 \neq 0$ и $k \neq 0$, то $y_2 \neq 0$. Следовательно, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{kx_1}{kx_2} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$.

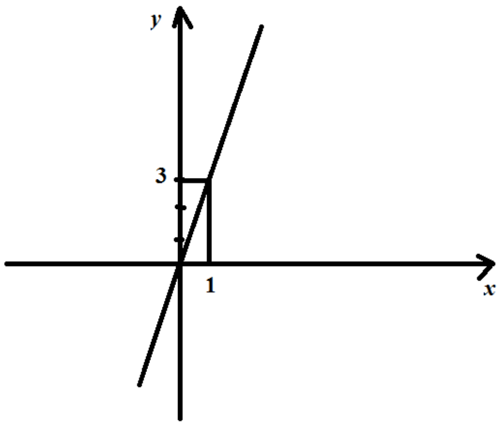
Если значениями переменных x и y являются положительные числа, то доказанное свойство прямой пропорциональности можно сформулировать так: *с увеличением (уменьшением) значений переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.*

Графиком прямой пропорциональности является **прямая**, проходящая через начало координат. Из свойства 4 следует, что для построения графика прямой пропорциональности достаточно найти лишь одну точку, принадлежащую ему и не совпадающую с началом координат, а затем через эту точку и начало координат провести прямую.

Пример. *Построить график функции $y=3x$.*

Решение.

Найдем координаты точки, лежащей на данной прямой. Для этого дадим x произвольное значение, удобное для построения, например, x=1. Найдем соответствующее ему значение y: y=3·1=3. Значит искомая прямая пройдет через начало координат и точку (1; 3).



§5. Линейная функция

Определение. ***Линейной функцией*** *называется функция, которую можно задать формулой* $y=kx+b$, где k и b *– действительные числа.*

Если $k=0$, то получаем постоянную функцию $y=b$; если $b=0$, то получаем прямую пропорциональность $y=kx$.Перечислим свойства линейной функции $y=kx+b$ при $k \neq 0,\ b \neq 0$.

1). ***Область определения*** – множество R всех действительных чисел.

2). Исследуем на ***чётность***. Найдем:

$f(-x) = k \cdot (-x) + b = -kx + b$ и $-f(x) = -(kx+b) = -kx - b$.

Очевидно, что $f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x)$. Функция $y=kx+b$ ***ни чётна, ни нечётна.***

3). При $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ функция убывает на всей числовой прямой.

Действительно, пусть $x_1<x_2$. Тогда $y_1=kx_1+b,\ y_2=kx_2+b$. Сравним y_1 и y_2:

$$y_2 - y_1=(kx_2 +b)-(kx_1+b)=k(x_2 - x_1).$$

По условию $x_2 - x_1>0$, значит, знак разности $y_2 - y_1$ зависит от знака коэффициента k.

4). Найдем ***точки пересечения с осями координат***:

С осью Ox: $y=0, \quad kx+b=0, \quad x=-\frac{b}{k}$. График функции пересекает ось Ox в точке $\left(-\frac{b}{k};0\right)$.

С осью Oy: $x=0, \quad y=b$. График функции пересекает ось Oy в точке $(0;b)$.

5). Найдем ***интервалы знакопостоянства функции***:

При $y>0, \quad kx+b>0, \quad kx>-b$;

$$\text{если } k>0,\ \text{то } x>-\frac{b}{k};\quad \text{если } k<0,\ \text{то } x<-\frac{b}{k}.$$

При $y<0, \quad kx+b<0, \quad kx<-b;$

$$\text{если } k>0,\ \text{то } x<-\frac{b}{k};\quad \text{если } k<0,\ \text{то } x>-\frac{b}{k}.$$

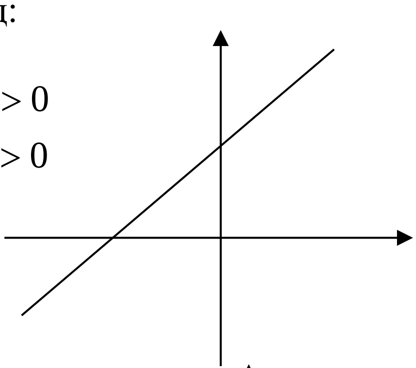
Графиком линейной функции $y=kx+b$ является **прямая линия.** Так как прямая определяется двумя ее точками, то для построения графика функции $\boldsymbol{y = kx + b}$ достаточно построить две точки этого графика. (Заметим, что удобнее для построения графика использовать точки пересечения с осями $\left(-\frac{b}{k};0\right)$ и $(0;b)$).

Число k называют ***угловым коэффициентом*** прямой, так как $k=tg\alpha$, где α - угол, который составляет прямая с положительной полуосью Ox. При $k>0$ прямая образует острый угол с положительной полуосью Ox, а при $k<0$ – тупой.

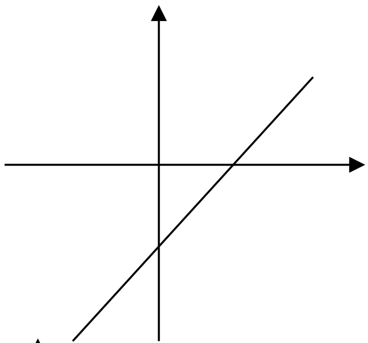
Число b называют ***начальной ординатой***. Оно показывает: какой отрезок отсекает прямая на оси Oy (если $b>0$, то прямая отсекает на оси Oy отрезок, расположенный выше начала координат, а если $b<0$, то отрезок будет расположен ниже начала координат).

График функции $y = kx + b$ при различных значениях k и b имеет вид:

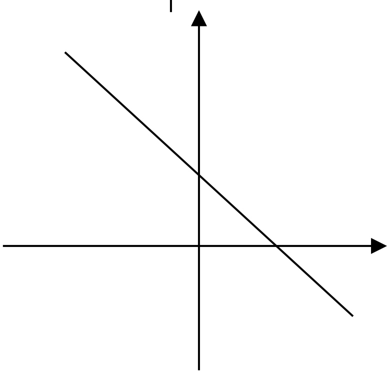
1) $\begin{cases} k>0 \\ b>0 \end{cases}$



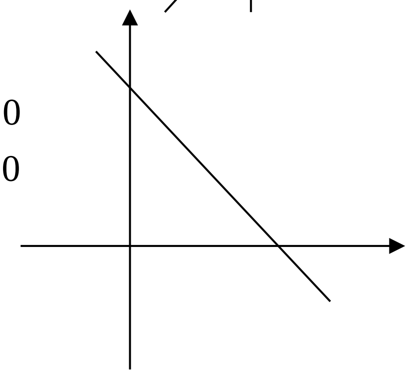
2) $\begin{cases} k>0 \\ b<0 \end{cases}$



3) $\begin{cases} k<0 \\ b>0 \end{cases}$



4) $\begin{cases} k<0 \\ b<0 \end{cases}$



§6. Обратная пропорциональность

Определение. ***Обратной пропорциональностью*** *называют функцию, заданную формулой* $y=\frac{k}{x}$, *где* $k \neq 0$. *Число* k *называют* ***коэффициентом*** *обратной пропорциональности.*

Приведем свойства обратной пропорциональности.

1). ***Область определения***: $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2). Исследуем на ***чётность***.

$y=\dfrac{k}{x}$ - нечетная функция, т.к. $f(-x)=\dfrac{k}{-x}=-\dfrac{k}{x}=-f(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

3). Если $k>0$, то функция ***убывает*** на $D(y)$. Если $k<0$, то функция ***возрастает*** на $D(y)$.

Действительно, докажем, например, что при $k>0$ функция убывает.

Пусть $x_1,x_2\in D(y)$ и $x_1<x_2$, найдем $f(x_1)-f(x_2)$.

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{k}{x_1}-\frac{k}{x_2}=\frac{kx_2-kx_1}{x_1x_2}=\frac{k(x_2-x_1)}{x_1x_2}.$$

Так как $x_1<x_2$, то $x_2-x_1>0$ и $k>0$, следовательно, $k(x_2-x_1)>0$.

Если $x_1,x_2\in(-\infty,0)$, то $x_1<0$, $x_2<0$, но $x_1\cdot x_2>0$; если же $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, то $x_1>0$, $x_2>0$ и $x_1\cdot x_2>0$.

Таким образом, $f(x_1)-f(x_2)>0 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, если $x_1<x_2$. Следовательно, функция убывает при $k>0$. Случай $k<0$ доказывается аналогично.

4). Функция ***не имеет точек пересечения с осями координат***.

С осью Ox: $y=0,\quad \dfrac{k}{x}=0,\quad k=0$ - невозможно по определению функции, т.е. график функции не пересекает ось Ox.

С осью Oy: $x=0$ - невозможно, так как на нуль делить нельзя. Значит, график функции не пересекает ось Oy.

Оси координат являются *асимптотами* графика функции.

5). Найдем ***интервалы знакопостоянства функции***:

При $y>0,\quad \dfrac{k}{x}>0$: если $\mathrm{k}>0$, то $x>0$, если же $\mathrm{k}<0$, то $x<0$.

При $y<0,\quad \dfrac{k}{x}<0$: если $\mathrm{k}>0$, то $x<0$; если $\mathrm{k}<0$, то $x>0$.

Следовательно, при $k>0$ ветви графика расположены в первой и третьей четвертях, а при $k<0$ – во второй и четвертой.

6). Если функция f – обратная пропорциональность и (x_1,y_1), (x_2,y_2) – пары соответственных значений x и y, причем $x_2\neq 0, y_1\neq 0$, то $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_2}{y_1}$.

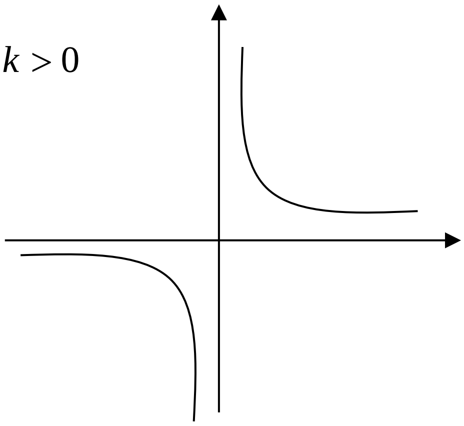
Действительно, если f – обратная пропорциональность, то она может быть задана формулой $y=\dfrac{k}{x}$, и тогда двум различным значениям x_1 и x_2 соответствуют различные значения y $y_1=\dfrac{k}{x_1}$ и $y_2=\dfrac{k}{x_2}$.

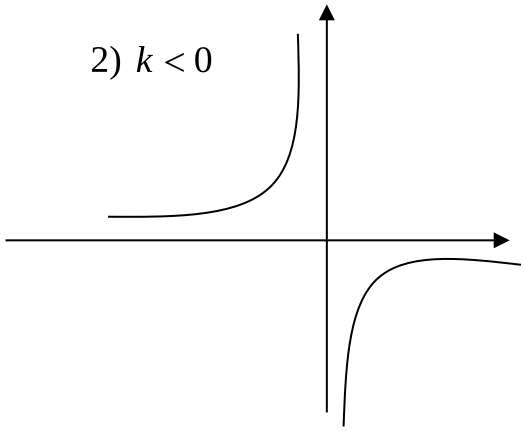
Тогда, $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{k}{x_2}:\dfrac{k}{x_1}=\dfrac{k\cdot x_1}{k\cdot x_2}=\dfrac{x_1}{x_2}$, т.е. $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_2}{y_1}$.

Если значениями переменных x и y являются положительные числа, то доказанное свойство обратной пропорциональности можно сформулировать так: *с увеличением (уменьшением) значений переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y уменьшается (увеличивается) во столько же раз.*

График обратной пропорциональности называется **гипербола.**

1) $k > 0$ 2) $k < 0$





§7. Квадратичная функция

Определение. *Квадратичной называют функцию, которую можно задать формулой вида $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c – действительные числа, $a\neq 0$.*

Свойства функции $y=ax^2+bx+c$

1). *Область определения*: $D(y)=(-\infty,+\infty)$.

2). *Графиком* квадратичной функции является ***парабола***, вершина которой имеет координаты $\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

3). При $a>0$ ветви параболы направлены вверх; при $a<0$ - вниз.

4). При $a>0$ $y\in\left[\frac{4ac-b^2}{4a};+\infty\right)$; при $a<0$ $y\in\left(-\infty;\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.

5). При $b\neq 0$ функция не является ни четной, ни нечетной, а при $b=0$ – функция четная.

6). *а*) Если $D=b^2-4ac<0$, то функция не имеет нулей. В этом случае все её значения имеют один и тот же знак – знак коэффициента a.

***б*)** Если $D>0$, то функция имеет два нуля $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Если $a>0$, то $f(x)>0$ при $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(x_1,x_2)$.

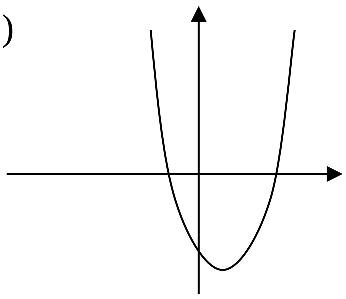
Если $a<0$, то $f(x)>0$ при $x\in(x_1,x_2)$; $f(x)<0$ *при* $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$.

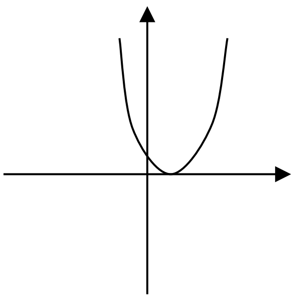
в) Если $D=0$, то функция имеет нуль $x = -\frac{b}{2a}$. При всех значениях $x \neq -\frac{b}{2a}$ она сохраняет один и тот же знак – знак коэффициента a.

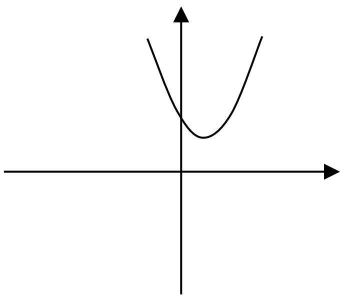
7). В случае, когда $a>0$ функция монотонно убывает для всех $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и монотонно возрастает для всех $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. При $a<0$ функция монотонно убывает для всех $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ и монотонно возрастает для всех $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$.

График функции $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ при различных значениях a и D имеет вид:

$a > 0$

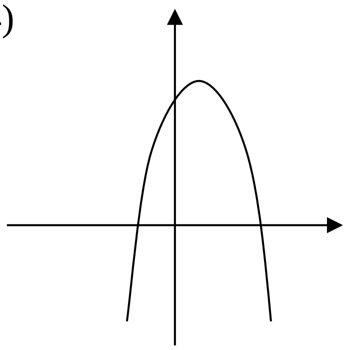
1) 

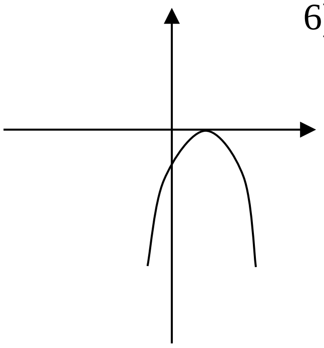
2) 

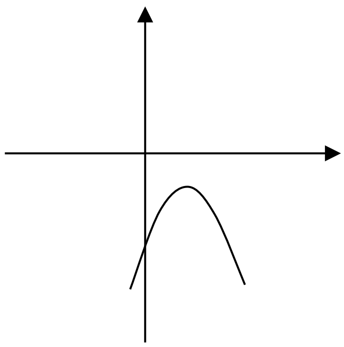
3) 

$D > 0$ $\quad D = 0$ $\quad D < 0$

$a < 0$

4) 

5) 

6) 

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

11.1. Функция задана в виде $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$. Найти $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(2)$; $f(-1)$; $f\left(\frac{a}{2}\right)$; $f\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$.

11.2. Дана функция $f(x) = |x| - x$. Найти значения $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(-2)$; $f(2)$ и построить её график.

11.3. Дана функция $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 \text{ при } -1\le x<0, \\ \sin x \text{ при } 0\le x\le \pi, \\ \frac{1}{x-5} \text{ при } \pi<x<5. \end{cases}$ Найти $f(-1); f\left(-\frac{1}{2}\right); f(0); f\left(\frac{\pi}{4}\right); f(4)$.

11.4. Известно, что $f(x)=arctg\ 2x$. Найти:
1) $f^2(x)-3f(x)+2$; 2) $f(x^2-3x+2)$; 3) $10^{f(x)}$.

11.5. Найти область определения функции:
1) $y=\frac{3x-1}{2x^2-3x+1}$; 2) $y=\sqrt{16-x^2}$; 3) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$;
4) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}$.

11.6. Исследовать на чётность функции
1) $y=3-x^2+2x^4$; 2) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 3) $y=\sqrt{1-x^2}$; 4) $y=\frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}$.

11.7. Построить график функции и указать свойства этой функции (область определения, исследование на чётность, возрастание (убывание), пересечение с осями координат):
1) $y=\frac{x}{2}+4$; 2) $y=-2x+6$; 3) $y=6x+3$; 4) $y=-x-3$;
5) $y=\frac{x}{3}-2$; 6) $y=-\frac{2}{x}$; 7) $y=\frac{3}{x}$; 8) $y=-\frac{1}{2x}$; 9) $y=\frac{1}{4x}$;
10) $y=\frac{4}{x-1}$; 11) $y=\frac{1}{x-2}$; 12) $y=\frac{1}{x+3}$; 13) $y=\frac{1}{x}+3$; 14) $y=\frac{1}{x}-2$.

11.8. Построить график квадратной функции. Указать промежутки знакопостоянства, возрастания и убывания.
1) $y=2x^2+3x-5$; 2) $y=-x^2+3x+4$;
3) $y=2x^2-5x+2$; 4) $y=-x^2+6x-9$;
5) $y=(x-1)^2-1$; 6) $y=4x^2-16$.

Образец контрольной работы по теме

1. Исследовать на четность функцию $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$
2. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x^3-1}}$
3. Построить график функции $y=-2x-3$ и доказать ее убывание в области определения.
4. Построить график функции $y=x^2+x-6$, указать промежутки знакопостоянства, убывания и возрастания.
5. Доказать, что функция $y=\frac{4}{x}$ убывает в области определения, постройте её график.

ТЕМА 12. УРАВНЕНИЯ

§1. Уравнения с одной переменной. Теоремы о равносильности уравнений

Пусть $f(x)$ и $g\ (x)$ – два выражения с переменной x и областью определения X.

Определение 1. *Высказывательная форма вида $f(x)=g(x)$ называется **уравнением с одной переменной.***

Определение 2. *Значение переменной x из множества X, при котором уравнение $f(x)=g(x)$ обращается в истинное числовое равенство, называется его **решением** (или **корнем**).*

Прежде, чем решать уравнение $f(x)=g(x)$ надо найти множество, на котором выражения $f(x)$ и $g(x)$ определены. Это множество называется *областью допустимых значений переменной x* или *областью определения уравнения.*

Чтобы решить заданное уравнение, его, как правило, преобразовывают, заменяя последовательно другими, более простыми. Этот процесс замены продолжают до тех пор, пока не получат уравнение, решение которого можно найти известным способом. Но для того, чтобы эти решения были и решениями заданного уравнения, необходимо, чтобы в процессе преобразований получались уравнения, множества корней которых совпадают. Такие уравнения называют равносильными.

Определение 3. *Два уравнения называются **равносильными**, если их множества решений равны, т.е. если каждое решение первого уравнения является решением второго уравнения и обратно.*

Определение 4. *Если множество решений уравнения $f(x)=g(x)$ является подмножеством множества решений уравнения $F(x)=G(x)$, то уравнение $F(x)=G(x)$ называют **следствием** уравнения $f(x)=g(x)$.*

Например, уравнение $(x+1)^2=16$ является следствием уравнения $x+1=4$.

Определение 5. *Два **уравнения равносильны** в том и только в том случае, когда каждое из них является следствием другого.*

Выясним теперь, какие преобразования позволяют получать уравнения, равносильные данному.

Теорема 1. *Пусть уравнение $f(x)=g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ выражение, определённое на том же множестве. Тогда уравнения*

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

и

$$f(x)+ h(x) = g(x) + h(x) \qquad (2)$$

равносильны на множестве X.

Иначе: если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определённое на том же множестве X, получим новое уравнение, равносильное данному.

Доказательство.

Обозначим через T_1 множество решений уравнения (1), а через T_2 – множество решений уравнения (2). Тогда уравнения (1) и (2) будут равносильны, если $T_1 = T_2$. Чтобы убедиться в этом, необходимо показать, что любой корень из множества T_1 является корнем уравнения (2) и, наоборот, любой корень из множества T_2 является корнем уравнения (1).

Пусть число a – корень уравнения (1). Тогда $a \in T_1$ и при подстановке в уравнение (1) обращает его в истинное числовое равенство $f(a)=g(a)$, а выражение $h(x)$ обращает в числовое выражение $h(a)$. Прибавим к обеим частям истинного равенства $f(a)=g(a)$ числовое выражение $h(a)$. Получим согласно свойству истинных числовых равенств истинное числовое равенство: $f(a) + h(a) = g(a) + h(a)$. Но из этого равенства следует, что число a является корнем и уравнения (2). Итак: <u>каждый корень уравнения (1) является корнем и уравнения (2), следовательно, $T1 \subset T2$.</u>

Пусть теперь b – корень уравнения (2). Тогда $b \in T_2$ и при подстановке в уравнение обращает его в истинное числовое равенство: $f(b) + h(b) = g(b) + h(b)$. Прибавим к обеим частям этого равенства числовое выражение $(- h(b))$. Получим истинное числовое равенство $f(b)=g(b)$, которое показывает, что число b – корень уравнения (1). Итак: <u>каждый корень уравнения (2) является и корнем уравнения (1), т.е. $T_2 \subset T_1$.</u>

Т.к. $T_1 \subset T_2$, $T_2 \subset T_1$, то по определению равных множеств $T_1=T_2$, а значит, уравнения (1) и (2) равносильны на множестве *X*.

Теорема 2. *Пусть уравнение $f(x)=g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определённое на том же множестве и не обращающееся в нуль ни при каких значениях x из множества X. Тогда уравнения:*

$$f(x)=g(x) \qquad (3)$$

и

$$f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x) \qquad (4)$$

равносильны на множестве X.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

При решении уравнений чаще используют не сами эти теоремы, а следствия из них.

Следствия к теоремам:

1) *если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному уравнению*;
2) *если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному уравнению*;
3) *любое уравнение равносильно уравнению вида F(x)=0;*
4) *если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от 0, то получим уравнение, равносильное исходному уравнению*.

При решении алгебраических уравнений используют **метод разложения на множители**.

Предположим, что выражения $f_1(x),\ f_2(x),\dots,\ f_n(x)$ имеют значения при всех x из множества X. Тогда число a из множества X может быть корнем уравнения

$$f_1(x)\cdot\ f_2(x)\cdot\ldots\cdot\ f_n(x)=0 \qquad (5)$$

в том и только в том случае, когда хотя бы одно из выражений $f_1(x),\ f_2(x),\dots,\ f_n(x)$ обращается в нуль при $x=a$. Это значит, что уравнение (5) равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \quad\ldots, \\ f_n(x)=0., \end{array}\right.$$

§2. Виды алгебраических уравнений и их решение

Определение 1. ***Алгебраическим уравнением*** *степени n с одной неизвестной x называют уравнение вида:*

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0 \qquad (1),$$

где $a_n\neq 0, n-$ *целое неотрицательное число, степень уравнения.*

Для алгебраических уравнений принято ставить задачу отыскания всех корней уравнения. Остановимся подробно на уравнениях первой и второй степеней и некоторых частных видах уравнений степени выше второй.

Определение 2. *Уравнение вида* $ax+b=0\ (a\neq 0)$ (2)

называют ***уравнением первой степени с одной переменной x,*** *или иначе –* ***линейным уравнением***.

Линейное уравнение (2) получается из общего уравнения (1) в случае, когда $n = 1$.

Замечание. *Коэффициент* a *называют* ***старшим коэффициентом*** *уравнения,* b *– его свободным членом.*

Уравнение (2) имеет единственный корень: $x = -\frac{b}{a}$.

Корень будет положителен, если числа a и b разного знака и отрицательным, если числа a и b одного знака. Корень равен нулю, если $b=0$.

Определение 3. *Алгебраическое уравнение вида*

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (3)$$

($a \neq 0$) называют ***уравнением второй степени*** *или* ***квадратным уравнением***.

Коэффициенты уравнения называют:

a – первым (или старшим) коэффициентом;

b – вторым (или средним) коэффициентом;

c – третьим коэффициентом (или свободным членом).

Выведем формулу для вычисления корней квадратного уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Разделим обе части уравнения на первый коэффициент $a \neq 0$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Выделим полный квадрат:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называют ***дискриминантом*** и обозначают буквой D: $D = b^2 - 4ac$.

Следовательно, формула корней принимает вид:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

По определению арифметического корня $D \geq 0$, в противном случае уравнение (3) действительных корней не имеет.

Замечание. Если $D > 0$, то уравнение (3) имеет два различных действительных корня, если $D = 0$, то уравнение (3) имеет два равных действительных корня, если $D < 0$, то уравнение (3) не имеет действительных корней.

Определение 4. ***Приведенным квадратным уравнением*** *называют алгебраическое уравнение вида* $x^2 + px + q = 0.$ (4)

Теорема (Виета). *Если* x_1 и x_2 *– корни приведенного квадратного уравнения* $x^2 + px + q = 0$*, то выполняется система условий:* $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p. \end{cases}$

Замечание. Для не приведённого квадратного уравнения (3) выполняется расширенная теорема Виета:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Кроме того, выводят частную формулу корней квадратного уравнения, у которого второй коэффициент b – четное число:

$$x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Определение 5. *Квадратное уравнение* $ax^2 + bx + c = 0$ *называется неполным, если хотя бы один из коэффициентов* b *или* c *равен 0.*

Замечание. Иначе это условие можно записать так: $b \cdot c = 0$.

Любое квадратное уравнение можно решить по формулам для корней квадратного уравнения. Однако, неполные квадратные уравнения рациональнее решать без их применения.

Рассмотрим возможные случаи.

I. ***Второй коэффициент квадратного уравнения равен 0***: b=0.

Уравнение (3) принимает вид: $ax^2 + c = 0$, тогда $x^2 = -\frac{c}{a}$.

Если $-\frac{c}{a} > 0$, то $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$; если $-\frac{c}{a} = 0$, то $x = 0$;если $-\frac{c}{a} < 0$, то решений нет.

II. ***Свободный член квадратного уравнения равен 0***: *c=0.*

Уравнение (3) принимает вид: $ax^2 + bx = 0$. Можно записать: $x(ax + b) = 0$.

Произведение двух сомножителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю, т.е. выполняется совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ ax + b = 0, \end{array}\right.$ следовательно: $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\frac{b}{a}. \end{array}\right.$

III.*Второй и третий коэффициенты квадратного уравнения равны 0*: $b=0$ и $c=0$.

Уравнение (3) принимает вид: $ax^2 = 0$. Оно имеет только «нулевое» решение: $x = 0$.

Определение 6. *Уравнение вида* $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$*, называется **биквадратным** уравнением.*

Решение биквадратного уравнения сводится введением подстановки $x^2 = t$ к решению квадратного уравнения: $at^2 + bt + c = 0$.

Определение 7. ***Рациональным алгебраическим уравнением** называется уравнение вида:* $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$*, где P(x),Q(x) – многочлены от одной переменной x.*

Множество допустимых значений рационального уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ определяется условием: $Q(x) \neq 0$.

Метод решения уравнений вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ заключается в следующем: уравнение заменяют равносильной системой $\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$ Другими словами: решают уравнение $P(x) = 0$, а затем «отбрасывают» те корни, которые обращают в нуль знаменатель $Q(x)$.

Определение 8. *Уравнение, содержащее неизвестную под знаком радикала, называют **иррациональным уравнением**.*

Область допустимых значений иррационального уравнения состоит из тех значений переменной x, при которых неотрицательны все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

Всякое иррациональное уравнение с помощью элементарных преобразований может быть сведено к рациональному алгебраическому уравнению. При этом следует иметь в виду, что полученное рациональное алгебраическое уравнение может оказаться неравносильным данному иррациональному уравнению, а именно: может содержать «лишние» корни, которые не будут корнями исходного иррационального уравнения. Поэтому необходимо выполнять проверку найденных корней или ограничивать область допустимых значений при выполнении соответствующих преобразований.

Стандартными методами решения иррациональных уравнений считают следующие:

- метод освобождения от радикала путем последовательного возведения обеих частей уравнения в натуральную степень, соответствующую степени радикала. При этом следует учитывать, что возведение в четную степень возможно лишь тогда, когда обе части уравнения неотрицательны.
- метод введения новых переменных.

Пример 1. Решить уравнение: $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \Rightarrow x \geq 1.$

Обе части уравнения неотрицательны, возведем в квадрат:

$$x+2\sqrt{x(x-1)}+x-1=1$$
$$2\sqrt{x(x-1)}=2-2x$$
$$\sqrt{x(x-1)}=1-x$$

Для того чтобы еще раз возвести в квадрат, следует потребовать: $1-x \geq 0$, получим:

$$x(x-1)=1-2x+x^2$$
$$x=1.$$

Найденное значение переменной x удовлетворяет ОДЗ и дополнительному условию.

Ответ: $x=1$.

Пример 2. Решить уравнение: $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}=2$.

Решение.

Введем подстановку: $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=t$, тогда уравнение принимает вид: $t+\frac{1}{t}=2$.

Решаем дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{t^2-2t+1}{t}=0 \Rightarrow t^2-2t+1=0 \Rightarrow (t-1)^2=0 \Rightarrow$$
$$t-1=0 \Rightarrow t=1$$

Учитывая введенную подстановку, получим: $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=1 \Rightarrow$

$$\frac{3-x}{x-1}=1 \Rightarrow \frac{3-x-x+1}{x-1}=0 \Rightarrow 4-2x=0 \Rightarrow x=2.$$

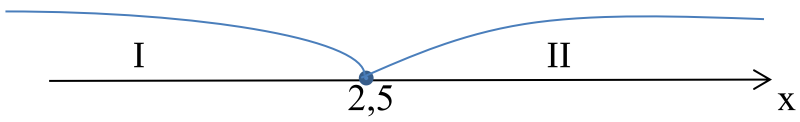
Ответ: $x=2$.

Определение 9. *Уравнение, содержащее неизвестную под знаком абсолютной величины, называют* ***уравнением с модулем****.*

Стандартный способ решения уравнений с модулем заключается в следующем: чтобы освободиться от знаков абсолютной величины, необходимо рассмотреть исходное уравнение отдельно на каждом из промежутков знакопостоянства выражений, записанных под знаком абсолютной величины.

Пример 3. Решить уравнение: $|2x-5|=x-1$.

Решение.



I. Если $x\le 2{,}5$, то $2x-5\le 0$, а значит $|2x-5|=5-2x$ и уравнение принимает вид: $5-2x=x-1$, т.е. $x=2$. Однако число 2 не удовлетворяет неравенству $x\le 2{,}5$, а значит, не является корнем уравнения.

II. Если $x>2{,}5$, то $2x-5>0$, а значит $|2x-5|=2x-5$ и уравнение принимает вид: $2x-5=x-1$, т.е. $x=6$. Число 6 удовлетворяет неравенству $x>2{,}5$, а значит, является корнем уравнения.

Ответ: $x=6$.

§3. Уравнения с двумя переменными

Определение 1. *Двухместная высказывательная форма вида*

$$f(x;y)=g(x;y) \qquad (1),$$

где $x\in X, y\in X$, называется ***уравнением с двумя переменными*** *x и y.*

Выражение $f(x;y)$ называют левой частью уравнения, а $g(x;y)$ – правой.

Определение 2. ***Решением уравнения*** *(1) называется упорядоченная пара чисел $(a;b)$, при подстановке которых в обе части уравнения (1) соответственно вместо x и y получается верное числовое равенство.*

Определение 3. *Множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями уравнения (1), называется* ***графиком*** *этого уравнения.*

Определение 4. *Уравнение вида* $ax + by + c = 0$*, где* a, b, c *−некоторые числа, называется* ***линейным***.

Графиком линейного уравнения, у которого $a \neq 0$ или $b \neq 0$ является прямая. Если $a = b = c = 0$, то любая пара чисел является решением линейного уравнения, а если $a = b = 0$, но $c \neq 0$, то уравнение решения не имеет.

Определение 5. *Если каждое решение уравнения (1) является решением уравнения*

$$f_1(x; y) = g_1(x; y) \qquad (2),$$

то уравнение (2) называется ***следствием*** *уравнения (1).*

В этом случае график уравнения (1) является частью графика уравнения (2) (в частности они могут совпадать). Если графики уравнений совпадают, то уравнения являются равносильными.

Теорема 1. *Если выражение* $\varphi(x; y)$ *определено для всех значений* x *и* y*, то уравнения*

$$f(x; y) = g(x; y) \text{ и } f(x; y) + \varphi(x; y) = g(x; y) + \varphi(x; y)$$

равносильны.

Доказательство.

1) Пусть $(a; b)$ – решение уравнения $f(x; y) = g(x; y)$, следовательно, $f(a; b) = g(a; b)$ – верное числовое равенство. Если к обеим частям этого равенства прибавить одно и то же число $\varphi(a; b)$, то получим равенство $f(a; b) + \varphi(a; b) = g(a; b) + \varphi(a; b)$.

Но из этого равенства следует, что $(a; b)$ – решение уравнения $f(x; y) + \varphi(x; y) = g(x; y) + \varphi(x; y)$, а значит:
каждый корень уравнения $f(x; y) = g(x; y)$ является корнем и уравнения $f(x; y) + \varphi(x; y) = g(x; y) + \varphi(x; y)$.

2) Аналогично доказывается, что и каждый корень уравнения $f(x; y) + \varphi(x; y) = g(x; y) + \varphi(x; y)$ является корнем уравнения $f(x; y) = g(x; y)$.

Из пунктов 1) -2) доказательства следует, что эти уравнения равносильны.

Следствие. *Уравнения* $f(x; y) = g(x; y)$ и $f(x; y) - g(x; y) = 0$ *равносильны.*

Теорема 2. *Если выражение* $\varphi(x; y)$ *определено для всех значений* x и y *и ни при каких значениях* x и y *не обращается в 0, то уравнение* $f(x; y) = g(x; y)$ *и* $f(x; y)\varphi(x; y) = g(x; y)\varphi(x; y)$ *равносильны.*

Следствие. *Для любого числа* $\kappa \neq 0$ *уравнения* $f(x;y) = g(x;y)$ *и* $\kappa f(x;y) = \kappa g(x;y)$ *равносильны.*

Теорема 3. *Уравнение* $f_1(x;y)f_2(x;y) \cdot \ldots \cdot f_n(x;y) = 0$ *равносильно дизъюнкции уравнений*
$f_1(x;y) = 0$ и $f_2(x;y) = 0$ и ... и $f_n(x;y) = 0$.

§4. Системы уравнений

Определение 1. *Конъюнкцию любого конечного множества уравнений называют* ***системой уравнений****.*

В общем случае можно рассмотреть систему m уравнений с n переменными, причем возможны все три случая:

$$m = n, m < n, m > n.$$

Определение 2. ***Решением системы уравнений*** *с* n *переменными называется упорядоченный набор из* n *чисел, являющийся решением каждого уравнения системы.*
Решить систему – значит найти все её решения или доказать, что их нет.

Справедливы следующие ***правила преобразования систем уравнений:***

1. Если в системе заменить какое-либо из уравнений на ему равносильное, а остальные оставить без изменения, то вновь полученная система равносильна исходной.
2. Пусть $f = g$ и $\varphi = \psi$ – какие-нибудь два уравнения системы. Тогда если в системе уравнение $f = g$ заменить на уравнение $f + \varphi = g + \psi$, а остальные оставить без изменения, то полученная система равносильна исходной.
3. Пусть система содержит уравнение $x = \varphi$, где x – некоторая переменная, а φ – некоторая функция, независимая от x. Тогда если во все уравнения системы, кроме уравнения $x = \varphi$, вместо переменной x подставить φ, то полученная система равносильна исходной.
4. Если система содержит уравнение $fg = 0$, то она распадается на две системы, в одной из которых уравнение $fg = 0$ заменено на $f = 0$, а в другой – $g = 0$. При этом каждое решение данной системы является решением одной из полученных систем. Если же функции f и g определены на одном и том же множестве, то каждое решение полученных систем является решением исходной системы. В этом случае говорят, что данная система равносильна совокупности полученных систем.

Рассмотрим системы двух уравнений с двумя переменными.

Определение 3. *Системой двух уравнений* $f(x;y)=0$ *и* $g(x;y)=0$ *с двумя переменными* x *и* y *называют конъюнкцию этих уравнений и обозначают*

$$\begin{cases} f(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Определение 4. *Решить систему уравнений (1) значит найти множество пар* $(a;b)$, *при подстановке которых в эти уравнения получаются истинные равенства* $f(a;b)=0$ *и* $g(a;b)=0$.

Способы решения систем уравнений

На правиле 3 основан способ решения систем, который называется ***способом подстановки*** или ***способом исключения неизвестных***.

С его помощью решение данной системы сводят к решению системы меньшего числа уравнений с меньшим числом переменных.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x=1+y \\ (1+y)^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y \\ 1+2y+2y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ y^2+y-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3 \\ x=4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=-4 \\ x=-3 \end{cases}$$

Ответ: $\{(4;3);(-3;-4)\}$

На правиле 4 основан способ решения систем, называемый ***способом разложения на множители***.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$$

Решение.

Умножим первое уравнение системы на 7, второе – на (- 5) и сложим их:

$$\begin{cases} x^2-y^2=5|\cdot 7 \\ x^2-xy+y^2=7|\cdot(-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2x^2-12y^2+5xy=0 \end{cases}$$

Теперь разложим левую часть второго уравнения на два сомножителя. Для этого решим его, например, относительно y как квадратное уравнение.

$$12y^2-2x^2-5xy=0$$

$$y=\frac{5x\pm\sqrt{25x^2+96x^2}}{24}=\frac{5x\pm 11x}{24}$$

Следовательно, $y=\frac{2}{3}x$ и $y=-\frac{1}{4}x$

$$\begin{cases}x^2-y^2=5\\ y=\frac{2}{3}x\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x^2-y^2=5\\ y=-\frac{1}{4}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-\frac{4}{9}x^2=5\\ y=\frac{2}{3}x\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x^2-\frac{1}{16}x^2=5\\ y=-\frac{1}{4}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=9\\ y=\frac{2}{3}x\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x^2=\frac{16}{3}\\ y=-\frac{1}{4}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm 3\\ y=\frac{2}{3}x\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}\\ y=-\frac{1}{4}x\end{cases}$$

Ответ: $\left\{(-3;-2);(3;2);\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right);(\frac{4\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Часто при решении систем применяется ***способ введения новых переменных.***

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+y-xy=1\\ x^2+y^2-xy=3\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}x+y-xy=1\\ x^2+y^2-xy=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y-xy=1\\ (x+y)^2-3xy=3\end{cases}$$

Обозначим: $\begin{cases}x+y=u\\ xy=v\end{cases}$

$$\begin{cases}u-v=1\\ u^2-3v=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=1+v\\ 1+2v+v^2-3v=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=1+v\\ v^2-v-2=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}v=2\\ u=3\end{cases}\\ \begin{cases}v=-1\\ u=0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=0\\ xy=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3-y\\ 3y-y^2-2=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-y\\ -y^2=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3-y\\ y^2-3y+2=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-y\\ y^2=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 - y \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 - y \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(2;1);(4;-1);(-1;1);(1;-1)\}$

Также при решении систем уравнений с двумя переменными используется **графический способ.**

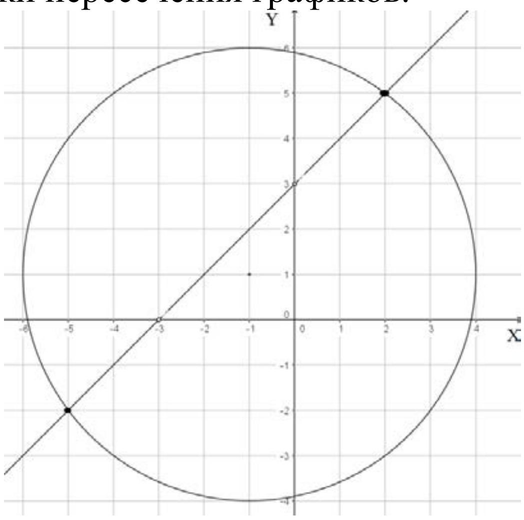
Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = x + 3, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5^2 \end{cases}$$

Для решения необходимо в одной координатной плоскости построить графики линейной функции $y = x + 3$ и окружности с центром в точке с координатами (- 1;1) и радиуса 5. Решением системы будут являться точки пересечения графиков.



Ответ: $\{(-5;-2);(2;5)\}$.

§5. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Если все числа $a_1; b_1;\ c_1; a_2; b_2; c_2$ равны 0, то любая пара чисел является решением данной систему. Если же $a_1; b_1; a_2; b_2$ равны 0, а хотя бы одно из чисел $c_1; c_2$ отлично от 0, то система не имеет ни одного решения.

Рассмотрим случай, когда хотя бы одно из чисел $a_1; b_1; a_2; b_2$ отлично от 0. Пусть $a_1 \neq 0$. Тогда система (1) равносильна системе:

$$\begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1}y = \frac{c_1}{a_1} \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Прибавим ко второму уравнению первое уравнение, умноженное на $(-a_2)$, получим:

$$\left(b_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2\right)y = c_2 - \frac{c_1}{a_1}a_2$$

Если $b_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2 \neq 0$, т.е. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$.

Представив это значение y в первое уравнение системы (2), находим

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, тогда если $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, то любая пара чисел $(x; y)$ является решением системы (1).

Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, а $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$, то система решений не имеет.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$.

Решение.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3x + 2y = 9 | \cdot (-\frac{2}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3y - \frac{4}{3}y = 11 - 6 \end{cases}$$

$$3y - \frac{4}{3}y = 11 - 6 \Leftrightarrow \frac{5}{3}y = 5 \Leftrightarrow y = 3.$$

Зная y, найдем x:

$$x = \frac{11 - 3 \cdot 3}{2} = 1$$

Ответ: $\{(1;\ 3)\}$.

Рассмотрим еще один метод решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными: **метод Крамера**.

Пусть дана система уравнений (1).

Вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$, который называют *главным определителем системы*.

Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечно много решений или **несовместна** (не имеет решений).

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, и для нахождения корней надо вычислить еще два определителя: $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$.

Корни находим по формулам: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение.

1. Вычисляем главный определитель системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 4 - 9 = -5.$

2. Вычисляем Δ_x и Δ_y:

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 11 \cdot 2 - 9 \cdot 3 = 22 - 27 = -5,$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 11 = 18 - 33 = -15.$

3. Находим корни:

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-15}{-5} = 3.$

Ответ: $\{(1;\ 3)\}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

12.1. Какие из следующих записей являются уравнениями с одной переменной:

a) $(3x - 5) \cdot 2 = 6x$;
b) $(3x - 5) \cdot 2 - 6x$;
c) $(3x - 5) \cdot 2 = 6$;
d) $(3 - 5) \cdot 2 = 6$;
e) $(3x - 5) \cdot 2 = 6y$.

12.2. Уравнение $3x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ задано на множестве целых неотрицательных чисел. Является ли число 1 корнем этого уравнения? Число (- 1)? Число 2? Объясните.

12.3. Сформулируйте, при каких условиях число 3 является корнем уравнения $f(x)=g(x)$.

12.4. Решите уравнения, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий:

a) $(x - 31) + 27 = 63$;
b) $33 - (3 + x) = 20$;
c) $(x - 20) : 3 = 24$;
d) $20 \cdot (x + 9) = 200$.

12.5. Найдите корень уравнения:

a) $2 - 5x = 11 - 2x$;
b) $-4(3 - x) = 2x + 7$;
c) $\frac{7}{8}x = 19\frac{1}{4}$;
d) $\frac{1}{5x-5} = 2$;
e) $\frac{x-40}{x-4} = -5$.

12.6. Решите уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней:

a) $x^2 - 4x - 45 = 0$;
b) $\frac{1}{11}x^2 = 9\frac{1}{11}$;
c) $\frac{2}{5}x^2 = 4{,}9$.

12.7. Решите уравнения:

a) $(2x - 7)^2 = (2x - 1)^2$;
b) $(x - 7)^3 = -216$;
c) $\frac{x}{x-2} - \frac{5}{x^2-4} = 2$;
d) $\sqrt{x + 7} = 5 - x$;
e) $\sqrt[3]{2x - 3} = 10 + \sqrt[6]{2x - 3}$;
f) $x^4 + x^2 - 2 = 0$;
g) $x^3 - 7x + 6 = 0$.

12.8. Решите системы уравнений:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = 3, \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

Образец контрольной работы по теме

К каждому заданию даны 4 варианта ответа, из которых верный только один. При выполнении этих заданий в ответе выполняемого вами задания запишите цифру, которая соответствует номеру выбранного вами ответа.

1

Произведение абсцисс точек пересечения прямой $x + y = 1$ и окружности $x^2 + y^2 = 17$ равно

1) 4 2) – 8 3) 7 4) - 7

2

Найти абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = \sqrt{x - 1}$ и $g(x) = 3 - x$

1) 2; 5 2) 5 3) нет 4) 2

3

Приведите уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$ к виду $y = kx + b$

1) $y = 2{,}4x + 7$ 2) $y = 11 - \frac{5}{12}x$ 3) $y = \frac{12}{5}x - 13$ 4) $y = -\frac{1}{7}x + 12{,}5$

4

Сумма корней или корень (если он единственный) уравнения $\frac{5x^2+7x-6}{x+2} = x + 4$ принадлежит промежутку

1) (1,7; 1,8) 2) (-0,3; -0,2) 3) (-0,9; -0,8) 4) [-2,0; -1,9]

5

Составить квадратное уравнение с корнями $x_1 + 5$ и $x_2 - 5$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + 7x + 6 = 0$

1) $x^2 - 6x - 7 = 0$ 2) $x^2 + 7x - 44 = 0$ 3) $x^2 + 2x - 4 = 0$ 4) $x^2 + 5x - 2 = 0$

6

Вычислите $x^3 + 2x$, где x – корень уравнения $3 + \sqrt{x+2} = 4$

1) – 3 2) – 2 3) 0 4) – 5

7

Решите уравнение: $|x-5| - |x-3| = 8$

1) 10 2) 8 3) нет решения 4) $[11 + \infty)$

8

Произведение корней уравнения $(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) = 3$ равно

1) $\sqrt{10}$ 2) – 2 3) 8 4) – 8

В заданиях 9 – 10 вместо точек вставьте пропущенные слова так, чтобы получились истинные утверждения

9

Два уравнения называются **равносильными, …**

10

Приведенным квадратным уравнением называют алгебраическое уравнение вида …

ТЕМА 13. НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Понятие неравенства. Неравенства с переменной. Равносильные неравенства. Теоремы о равносильности неравенств

При сравнении двух действительных чисел x и y возможны три случая: $x = y$ (x равно y); $x > y$ (x больше y) ; $x < y$ (x меньше y). Число x равно числу y, если разность $x–y$ равна нулю; число x больше числа y, если разность $x–y$ является положительным числом; число x меньше числа y, если разность $x–y$ является отрицательным числом.

Запись $x \geq y$ ($x \leq y$) означает, что либо $x > y$, либо $x = y$ и читается «x больше или равен y» или «x не меньше y».

Определение 1. *Запись, в которой два числа или два выражения соединены знаком $>, <, \geq$ или $\leq$, называется **неравенством**.*

Неравенства, составленные с помощью знаков $>$ или $<$, называются ***строгими***; неравенства, составленные с помощью знаков $\geq$ или $\leq$, называются ***нестрогими***. Неравенство вида $a < x < b$ называется ***двойным*** неравенством и означает, что $x > a$ и $x < b$.

Неравенства вида $a > b$ и $c > d$ называются ***неравенствами одинакового смысла***. Неравенства вида $a < b$ и $c > d$ называются ***неравенствами противоположного смысла***.

Неравенства, содержащие числа (числовые выражения), называются ***числовыми***. Числовые неравенства являются высказываниями, которые могут быть истинными или ложными.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два выражения с одной переменной x и областью определения X.

Определение 2. ***Неравенством с одной переменной*** *называется одноместный предикат вида $f(x) > g(x)$, или $f(x) < g(x)$, или $f(x) \geq g(x)$, или $f(x) \leq g(x)$.*

Решением неравенства с одной переменной $x \in X$ является любое значение этой переменной, которое обращает неравенство в истинное числовое неравенство (т.е., в истинное высказывание). ***Решить неравенство*** – значит ***найти множество его решений***.

В основе решения неравенств лежит понятие равносильности и теоремы о равносильности неравенств.

Определение 3. *Если два неравенства имеют одно и то же множество решений, то они называются **равносильными.***

Теорема 1. *Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$, заданного на множестве X, прибавить одно и то же выражение $\varphi(x)$, определенное на том же множестве, то получим неравенство $f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)$, равносильное данному.*

Доказательство.

Пусть число a является решением неравенства

$$f(x) > g(x)\ . \tag{1}$$

Тогда при подстановке числа a в неравенство (1) получим истинное числовое неравенство (истинное высказывание) $f(a) > g(a)$. Прибавив к обеим частям этого истинного высказывания число $\varphi(a)$, получим истинное числовое неравенство $f(a) + \varphi(a) > g(a) + \varphi(a)$. Следовательно, число a является решением и неравенства

$$f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)\ . \tag{2}$$

Пусть теперь число b является решением неравенства (2). Тогда при подстановке числа b в неравенство (2) получим истинное высказывание $f(b) + \varphi(b) > g(b) + \varphi(b)$. Прибавив к обеим частям этого истинного числового неравенства число $-\varphi(b)$, получим истинное числовое неравенство $f(b) > g(b)$. Следовательно, число b является решением и неравенства (1).

Таким образом, неравенства (1) и (2) имеют одно и то же множество решений. Значит, неравенства (1) и (2) равносильны. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же действительное число, то получим неравенство, равносильное данному.*

Следствие 2. *Если любой член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив без изменения знак неравенства, то получим неравенство, равносильное данному.*

Теорема 2. *Если обе части неравенства*

$$f(x) > g(x) \qquad (1),$$

заданного на множестве X, умножить на одно и то же выражение $\varphi(x)$, определенное на том же множестве и положительное при всех значениях $x \in X$, и знак неравенства оставить без изменения, то получим неравенство

$$f(x) \times \varphi(x) > g(x) \times \varphi(x), \tag{2}$$

равносильное данному.

Доказательство.

Пусть число a является решением неравенства (1). Тогда при подстановке числа a в неравенство (1) получим истинное высказывание $f(a) > g(a)$. Умножив обе части этого истинного числового неравенства на положительное число $\varphi(a)$, получим истинное числовое неравенство $f(a) \times \varphi(a) > g(a) \times \varphi(a)$. Следовательно, число a является решением и неравенства (2).

Пусть теперь число b является решением неравенства (2). Тогда при подстановке числа b в неравенство (2) получим истинное высказывание $f(b) \times \varphi(b) > g(b) \times \varphi(b)$. Умножив обе части этого истинного числового неравенства на положительное число $\frac{1}{\varphi(b)}$, получим истинное числовое неравенство $f(b) > g(b)$. Следовательно, число b является решением и неравенства (1).

Таким образом, неравенства (1) и (2) имеют одно и то же множество решений. Значит, неравенства (1) и (2) равносильны. Теорема доказана.

Следствие 3. *Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное действительное число, и знак неравенства оставить без изменения, то получим неравенство, равносильное данному.*

Теорема 3. *Если обе части неравенства*

$$f(x) > g(x), \tag{1}$$

заданного на множестве X, умножить на одно и то же выражение $\varphi(x)$, определенное на том же множестве и отрицательное при всех значениях $x \in$ X, и знак неравенства изменить на противоположный, то получим неравенство

$$f(x) \times \varphi(x) < g(x) \times \varphi(x) \tag{2}$$

равносильное данному.

Доказательство.

Пусть число a является решением неравенства (1). Тогда при подстановке числа a в неравенство (1) получим истинное высказывание $f(a) > g(a)$. Умножим обе части неравенства $f(a) > g(a)$ на отрицательное число $\varphi(a)$ и поменяем знак неравенства на противоположный. Получим истинное числовое неравенство $f(a) \times \varphi(a) < g(a) \times \varphi(a)$. Следовательно, число a является решением и неравенства (2).

Пусть теперь число b является решением неравенства (2). Тогда при подстановке числа b в неравенство (2) получим истинное высказывание $f(b) \times \varphi(b) < g(b) \times \varphi(b)$. Умножим обе части этого истинного числового неравенства на отрицательное число $\frac{1}{\varphi(b)}$ и изменим знак неравенства на противоположный. Получим истинное числовое неравенство $f(b) > g(b)$. Следовательно, число b является решением и неравенства (1).

Таким образом, неравенства (1) и (2) имеют одно и то же множество решений. Значит, неравенства (1) и (2) равносильны. Теорема доказана.

Следствие 4. *Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное действительное число, и знак неравенства изменить на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.*

Пример 1. *Указать множество, на котором равносильны неравенства*

$$x^2 - 4 > 3(2x^2 + 5) \ \text{и} \ \frac{x^2-4}{2x^2+5} > 3.$$

Решение.

Неравенство $x^2 - 4 > 3(2x^2 + 5)$ можно получить из неравенства $\frac{x^2-4}{2x^2+5} > 3$ умножив обе части последнего на выражение $2x^2 + 5$. При этом для всех $x \in R$: $x^2 \geq 0$, $2x^2 \geq 0$, и значит, выражение $2x^2 + 5 > 0$. Знак неравенства не меняется. Таким образом, данные неравенства равносильны (по теореме 2) на множестве R.

Пример 2. *Решить неравенство $-4x + 2 > -x - 7$.Отметить теоретические положения, которые использовались при решении неравенства.*

Решение.

Перенесем $-x$ в левую часть неравенства с противоположным знаком, а число 2 в правую часть с противоположным знаком. Воспользуемся следствием 2 из теоремы 1 и получим неравенство $-4x + x > -7 - 2$, равносильное исходному.

Приведем подобные члены в обеих частях неравенства – выполним тождественные преобразования выражений в обеих частях неравенства (они не нарушат равносильности неравенств), получим $-3x > -9$.

Теперь умножим обе части неравенства на $-\frac{1}{3}$, изменив знак неравенства на противоположный. Воспользуемся следствием 4 из теоремы 3 и получим неравенство $x < 3$, равносильное исходному.

Решением неравенства $x < 3$ является промежуток $(-\infty, 3)$.

§ 2. Линейные неравенства. Квадратные и дробно-линейные неравенства. Метод интервалов

Определение 1. ***Линейным неравенством*** *называется неравенство вида* $ax + b > 0$ *(или* $ax + b < 0$*), где* $a, b -$ *некоторые числа, x – переменная.*

Если $a > 0$, то неравенство $ax + b > 0$ равносильно неравенству $x > -\frac{b}{a}$. Если $a < 0$, то неравенство $ax + b > 0$ равносильно неравенству $x < -\frac{b}{a}$.

Определение 2. ***Квадратным неравенством*** *называется неравенство вида* $ax^2 + bx + c > 0$ *(или* $ax^2 + bx + c < 0$*), где* $a,\ b,\ c\ -$ *некоторые числа, причем* $a \neq 0$*; x – переменная.*

Решим неравенство $ax^2 + bx + c > 0$. В зависимости от дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ могут представиться три следующих случая.

1. Если дискриминант $D < 0$, то график квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось *Ox*. При $a > 0$ график лежит выше оси *Ox* и множеством решений неравенства является вся числовая прямая (рис. 1). При $a < 0$ график лежит ниже оси *Ox* и множество решений неравенства пусто (рис. 2).

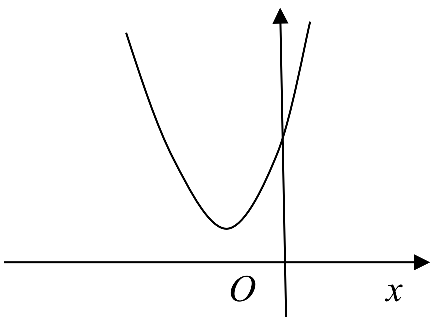


Рис. 1

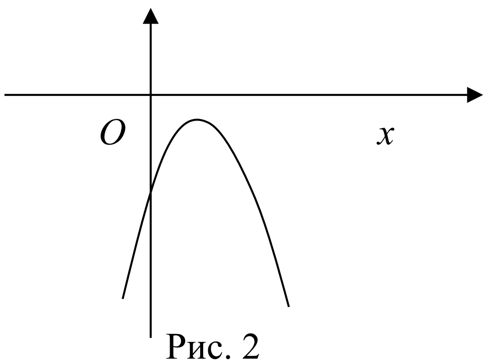


Рис. 2

2. Если $D > 0$, то график квадратного трехчлена пересекает ось *Ox* в двух точках x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), где x_1 и $x_2 -$ корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty; x_1)$, (x_1, x_2), $(x_2, +\infty)$. В этом случае знак квадратного трехчлена совпадает со знаком коэффициента a во всех точках промежутков $(-\infty; x_1)$, $(x_2, +\infty)$ и противоположен знаку коэффициента a во все точках промежутка (x_1, x_2) (рис. 3, рис. 4).

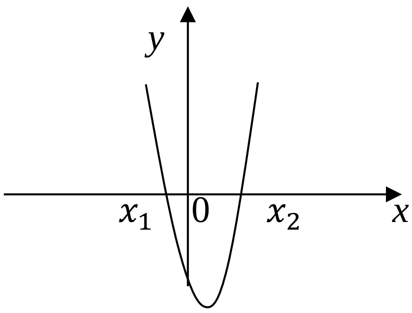


Рис. 3

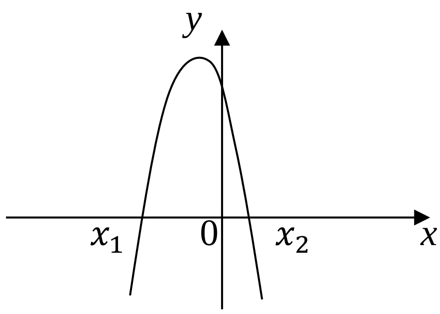


Рис. 4

3. Если $D = 0$, то график квадратного трехчлена касается оси *Ox* в точке x_1, где x_1 – единственный корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Точка x_1 разбивает числовую прямую на два промежутка $(-\infty; x_1)$, $(x_1, +\infty)$. При этом знак квадратного трехчлена совпадает со знаком коэффициента a во всех точках $x \neq x_1$ (рис. 5, рис. 6).

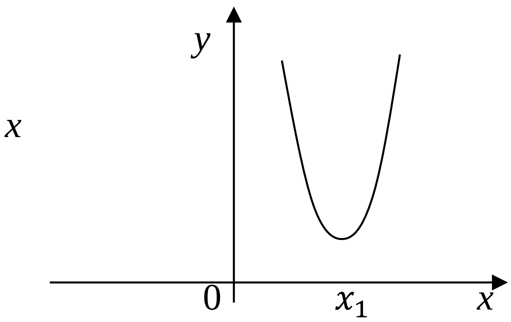


Рис. 5

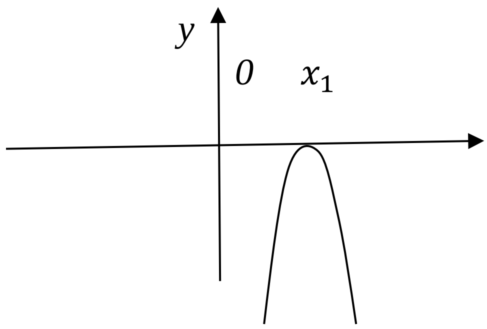


Рис. 6

Пример 1. *Решить неравенство* $24 + 8x < 0$.

Решение.

Перенесем число 24 в правую часть неравенства с противоположным знаком, получим неравенство $8x < -24$, равносильное исходному. Теперь умножим обе части неравенства на положительное число $\frac{1}{8}$. Знак неравенства оставим без изменения, получим неравенство $x < -3$, равносильное исходному.

Таким образом, множеством решений данного неравенства является промежуток $(-\infty; -3)$.

Пример 2. *Решить неравенство* $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} > 0$.

Решение.

Рассмотрим функцию $y = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх ($a = 1 > 0$).

Решим уравнение $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Получим корни уравнения: $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 1$.

Значит, парабола пересекает ось абсцисс в точках $x_1 = -0{,}5$ и $x_2 = 1$.

Изобразим схематично параболу $y = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ (рис.7), получим, что $y > 0$, если $x \in (-\infty; -0{,}5)$ и $x \in (1; +\infty)$. Тогда множеством решений исходного неравенства является объединение указанных промежутков, т.е. $x \in (-\infty; -0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

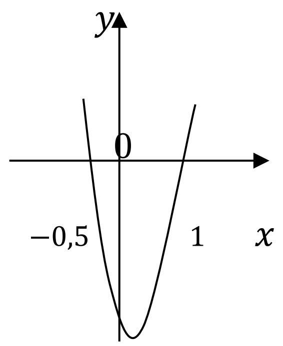


Рис. 7

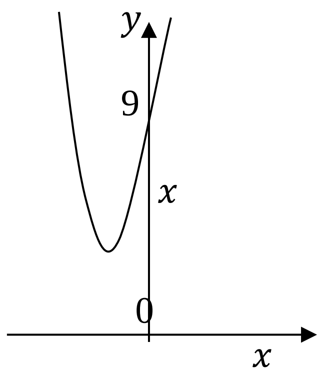


Рис. 8

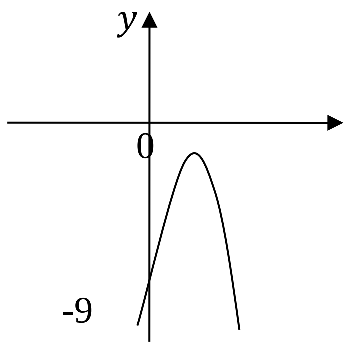


Рис. 9

Пример 3. *Решить неравенство* $x^2 + 2x + 9 > 0$.

Решение.

Рассмотрим функцию $y = x^2 + 2x + 9$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх ($a = 1 > 0$).

Решим уравнение $x^2 + 2x + 9 = 0$. $D = 4 - 36 = -32 < 0$, следовательно, уравнение корней не имеет, а значит, парабола не имеет общих точек с осью абсцисс.

Изобразим схематично параболу $y = x^2 + 2x + 9$ (рис. 8), получим, что $y > 0$ при любом действительном значении x.

Пример 4. *Решить неравенство* $-x^2 + 2x - 9 > 0$.

Решение.

Рассмотрим функцию $y = -x^2 + 2x - 9$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз ($a = -1 < 0$).

Решим уравнение $-x^2 + 2x - 9 = 0$. $D = 4 - 36 = -32 < 0$, следовательно, уравнение корней не имеет, а значит, парабола не имеет общих точек с осью абсцисс.

Изобразим схематично параболу $y = -x^2 + 2x - 9$ (рис. 9), получим, что $y < 0$ при любом действительном значении x. Следовательно, исходное неравенство не имеет решений.

Рассмотрим неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), где $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ – дробно-линейная функция.

Определение 3. *Неравенство вида* $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ *(или* $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$), *где* $a, b, c, d -$ *некоторые числа, а x – переменная, называется* ***дробно-линейным****.*

Решение неравенств вида $P(x) > 0$ ($P(x) < 0$), $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ($\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$), где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, основано на следующем *свойстве непрерывной функции*: если на интервале $(x_1;\ x_2)$ функция f непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак. Метод решения неравенств, в основе которого лежит указанное свойство непрерывной функции, называется ***методом интервалов.***

Алгоритм решения неравенств* вида $\boldsymbol{P(x)} > 0$ ($\boldsymbol{P(x)} < 0$), $\frac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{Q(x)}} > 0$ $\left(\frac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{Q(x)}} < 0\right)$ *методом интервалов:

1. Найти точки, в которых функция $f(x) = P(x)$ ($f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$) обращается в нуль или терпит разрыв.
2. Найденные точки отметить на координатной прямой. Определить интервалы знакопостоянства.
3. На каждом полученном интервале найти знак функции (для этого достаточно найти знак функции в какой-либо точке рассматриваемого интервала координатной прямой).
4. Записать ответ.

Пример 5. *Решить неравенство* $-x^2 + 7x - 12 > 0$.

Решение.

Разложим квадратный трехчлен $-x^2 + 7x - 12$ на множители:

$$-x^2 + 7x - 12 = -(x - 3)(x - 4) = (3 - x)(x - 4).$$

Решим неравенство $(3-x)(x-4) > 0$ методом интервалов:

Рассмотрим функцию $f(x) = (3-x)(x-4)$ и найдем множество значений x, при которых $f(x) > 0$.

Функция $f(x)$ обращается в нуль в точках $x = 3; x = 4$. Эти точки разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty;\ 3), (3; 4), (4;\ +\infty)$ (рис.10), внутри каждого из которых функция $f(x)$ сохраняет свой знак:

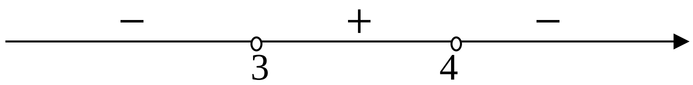


Рис. 10

Найдем множество значений x, при которых $f(x) > 0$. В результате получаем ответ: $x \in (3; 4)$.

Пример 6. *Решить неравенство* $\frac{x+3}{x-4} < 2$.

Решение.

Приведем неравенство к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$:

$$\frac{x+3}{x-4} - 2 < 0 \iff \frac{x+3-2x+8}{x-4} < 0 \iff \frac{-x+11}{x-4} < 0 \iff \frac{x-11}{x-4} > 0$$

Множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Решим неравенство $\frac{x-11}{x-4} > 0$ методом интервалов:

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x-11}{x-4}$ и найдем множество значений x, при которых $f(x) > 0$.

1. Нули функции: $x = 11$. Точки разрыва функции: $x = 4$ (при $x = 4$ функция не существует).
2. Интервалы знакопостоянства: $(-\infty;\ 4), (4;\ 11), (11;\ +\infty)$ (рис. 11).
3. Расставим знаки на интервалах:

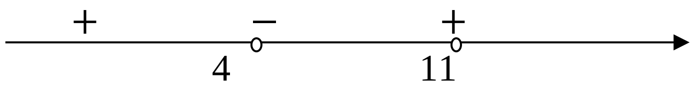


Рис. 11

4. Выберем интервалы, удовлетворяющие неравенству $\frac{x-11}{x-4} > 0$, а значит и исходному неравенству:

$$x \in (-\infty; 4) \cup (11;\ +\infty)$$

Пример 7. *Решить неравенство* $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} \le 0$.

Решение.

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, получим: $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \le 0$.

Множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Решим полученное неравенство методом интервалов:

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ и найдем множество значений x, при которых $f(x) \le 0$.

1. Нули функции: $x = 1, x = 2$. Точки разрыва функции: $x = 3, x = 4$ (при $x = 3$, $x = 4$ функция не существует).
2. Интервалы знакопостоянства:

$(-\infty;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ 3)$, $(3; 4)$, $(4;\ +\infty)$ (рис. 12).

3. Расставим знаки на полученных интервалах:

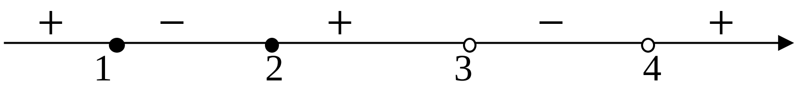


Рис. 12

4. Выберем интервалы, удовлетворяющие неравенству

$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \le 0$, а значит и исходному неравенству: $x \in [1;\ 2] \cup (3;\ 4)$.

§ 3. Системы и совокупности неравенств с одной переменной

Определение 1. ***Системой неравенств*** $f_1(x) > g_1(x)$ *и* $f_2(x) > g_2(x)$ *с одной переменной называют конъюнкцию этих неравенств*$(f_1(x) > g_1(x) \wedge f_2(x) > g_2(x))$.

Записывают систему неравенств $f_1(x) > g_1(x)$ *и* $f_2(x) > g_2(x)$ *следующим образом:*

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы неравенств с одной переменной является всякое значение переменной x, которое обращает каждое из неравенств в истинное числовое неравенство. Пересечение множеств решений неравенств, образующих данную систему, является ***множеством решений системы неравенств***.

Замечание 1. *Неравенство* $|x| < a$, *где* $a > 0$, *равносильно двойному неравенству* $-a < x < a$ *или системе неравенств* $\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$

Пример 1. *Найти множество решений системы неравенств*

$$\begin{cases} 1 + 5x \geq -12, \\ 6x - 18 < 0. \end{cases}$$

Решение.

Найдем множество решений каждого из неравенств, а затем пересечение найденных множеств решений.

$$\begin{cases} 1 + 5x \geq -12, \\ 6x - 18 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq -13, \\ 6x < 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{13}{5}, \\ x < 3. \end{cases}$$

Множество решений неравенства $x \geq -\frac{13}{5}$ есть числовой промежуток $[-\frac{13}{5};\ +\infty)$. Множество решений неравенства $x < 3$ есть числовой промежуток $(-\infty; 3)$.

Множество решений системы неравенств:

$(-\infty; 3) \cap \left[-\frac{13}{5};\ +\infty\right) = \left[-\frac{13}{5}; 3\right)$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{13}{5}; 3\right)$.

Пример 2. *Найти множество решений системы неравенств*

$$\begin{cases} 5x - 2 \leq 2x - 1, \\ 3x + 1 < 18x - 4. \end{cases}$$

Решение.

Найдем множество решений каждого из неравенств, а затем пересечение найденных множеств решений.

$$\begin{cases} 5x - 2 \leq 2x - 1, \\ 3x + 1 < 18x - 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2x \leq -1 + 2, \\ 3x - 18x < -4 - 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \leq 1, \\ -15x < -5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3}, \\ x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Множество решений неравенства $x \leq \frac{1}{3}$ есть числовой промежуток $(-\infty;\ \frac{1}{3}]$. Множество решений неравенства $x > \frac{1}{3}$ есть числовой промежуток $(\frac{1}{3}; +\infty)$.

Множество решений системы неравенств: $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right] \cap \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) = \emptyset$.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Определение 2. ***Совокупностью неравенств*** *$f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ с одной переменной называют дизъюнкцию этих неравенств ($f_1(x) > g_1(x) \vee f_2(x) > g_2(x)$).*

Записывают совокупность неравенств $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{array}\right. \qquad (2)$$

Решением совокупности неравенств с одной переменной является всякое значение переменной x, которое обращает в истинное числовое неравенство хотя бы одно из неравенств совокупности. Объединение множеств решений неравенств, образующих данную совокупность, является ***множеством решений совокупности неравенств***.

Замечание 2. *Неравенство $|x| > a$, где $a > 0$, равносильно совокупности неравенств* $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a. \end{array}\right.$

Замечание 3. *Неравенство вида $f(x) \times g(x) > 0$ ($\frac{f(x)}{g(x)} > 0$) равносильно совокупности систем* $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 3. *Найти множество решений совокупности неравенств*

$$\left[\begin{array}{l} 1 - 5x > 12, \\ 4x - 16 > 0. \end{array}\right.$$

Решение.

Найдем множество решений каждого из неравенств, а затем объединение найденных множеств решений.

$$\left[\begin{array}{l} 1 - 5x > 12, \\ 4x - 16 > 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5x > 11, \\ 4x > 16; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{11}{5}, \\ x > 4. \end{array}\right.$$

Множество решений неравенства $x < -\frac{11}{5}$ есть числовой промежуток $(-\infty; -\frac{11}{5})$. Множество решений неравенства $x > 4$ есть числовой промежуток $(4; +\infty)$.

Множество решений совокупности неравенств: $\left(-\infty; -\frac{11}{5}\right] \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right] \cup (4; +\infty)$.

Пример 4. *Найти множество решений совокупности неравенств* $\left[\begin{array}{l} 5x - 2 \leq 2x - 1, \\ 3x + 1 < 18x - 4. \end{array}\right.$

Решение.

Найдем множество решений каждого из неравенств, а затем объединение найденных множеств решений.

$$\left[\begin{array}{l} 5x - 2 \leq 2x - 1, \\ 3x + 1 < 18x - 4. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x \leq 1, \\ -15x < -5. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{1}{3}, \\ x > \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Множество решений неравенства $x \leq \frac{1}{3}$ есть числовой промежуток $(-\infty; \frac{1}{3}]$. Множество решений неравенства $x > \frac{1}{3}$ есть числовой промежуток $(\frac{1}{3}; +\infty)$. Множество решений совокупности неравенств: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) = R$.

Ответ: $x \in R$.

§ 4. Неравенства с двумя переменными. Геометрическое изображение множества решений неравенства с двумя переменными

Определение 1. ***Неравенством с двумя переменными*** *называется двухместный предикат вида* $f(x, y) > g(x, y)$, *или* $f(x, y) < g(x, y)$, *или* $f(x, y) \geq g(x, y)$, *или* $f(x, y) \leq g(x, y)$.

Решением неравенства с двумя переменными x *и* y является упорядоченная пара чисел $(a; b)$, если при замене переменной x на число a и переменной y на число b получается истинное числовое неравенство (истинное высказывание). *Решить неравенство с двумя переменными* – значит ***найти множество его решений***, т.е. множество, состоящее из всех упорядоченных пар чисел $(a; b)$, при подстановке которых в неравенство получается истинное числовое неравенство.

Множество решений неравенства с двумя переменными можно изобразить графически на координатной плоскости. Каждой упорядоченной паре чисел $(a; b)$ из множества решений неравенства поставим в соответствие точку координатной плоскости. Получим некоторое множество точек на координатной плоскости, задаваемое этим неравенством. Его называют *графиком данного неравенства.* Например, геометрическим изображением множества решений линейного неравенства $ax+by+c\leq 0$ является полуплоскость, расположенная под прямой $ax+by+c=0$, и сама эта прямая, а геометрическим изображением множества решений неравенства $(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2$ – круг с центром в точке с координатами $(a;b)$ и радиусом r.

Чтобы построить график неравенства с двумя переменными $f(x,y)>0$ надо:

1. Заменить знак неравенства знаком равенства.
2. Построить линию, имеющую уравнение $f(x,y)=0$ (линия разделит координатную плоскость на некоторые части – области).
3. В каждой полученной части координатной плоскости взять по одной точке и проверить выполнимость неравенства $f(x,y)>0$ в ней. (Если неравенство выполняется в выбранной точке, то будет выполняться и во всей той части, где находится точка.)
4. Объединить те части плоскости, в которых выполняется неравенство $f(x,y)>0$. (Это и есть множество решений данного неравенства – график неравенства.)

Если неравенство нестрогое, то точки, лежащие на графике уравнения $f(x,y)=0$, удовлетворяют исходному неравенству. В этом случае график уравнения изображается сплошной линией. Если же неравенство строгое, то точки, лежащие на графике ния $f(x,y)=0$, не удовлетворяют исходному неравенству. В таком случае график уравнения изображается пунктирной линией.

Пример 1. *Построить график неравенства*

$$(x-1)^2+(y-1)^2\leq 9$$

Решение.

Заменим знак неравенства знаком равенства, получим уравнение $(x-1)^2+(y-1)^2=9$. Графиком этого уравнения является окружность с центром в точке с координатами $(1;1)$ и радиусом 3. Окружность разделила координатную плоскость на две части (области) – одна лежит внутри окружности, а другая – вне окружности (рис. 13).

Возьмем точку с координатами $(1;1)$. Подставим координаты выбранной точки в неравенство $(x-1)^2+(y-1)^2\leq 9$, получим истинное числовое неравенство $0\leq 9$. Это значит, что вся внутренняя область принадлежит множеству решений исходного неравенства. Возьмем точку с координатами $(4;4)$. Подставим координаты выбранной точки в неравенство $(x-1)^2+(y-1)^2\leq 9$, получим ложное числовое неравенство $18 \leq 9$. Это значит, что вся область вне окружности не принадлежит множеству решений исходного неравенства. Заметим, что точки, лежащие на самой окружности, удовлетворяют исходному неравенству (так как неравенство нестрогое). Таким образом, получаем, что графиком данного неравенства является круг с центром в точке с координатами $(1; 1)$ и радиусом 3. Геометрически это означает, что график неравенства $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 9$ состоит из точек, расстояние которых до точки с координатами $(1; 1)$ не больше (меньше или равно) 3.

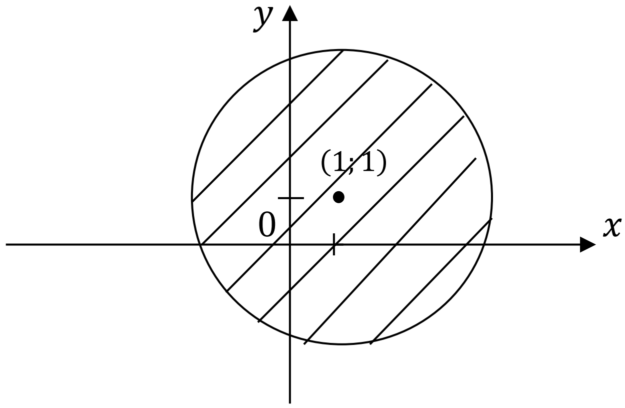


Рис. 13

Пример 2. *Построить график неравенства* $x^2 - 4x + 4 - y > 0$.

Решение.

Заменим знак неравенства знаком равенства, получим уравнение $x^2 - 4x + 4 - y = 0$, откуда $y = x^2 - 4x + 4$. Графиком этого уравнения является парабола с вершиной в точке с координатами $(2; 0)$. Ветви параболы направлены вверх. Парабола разделила координатную плоскость на две части (области) – одна лежит внутри параболы, а другая – вне ее (рис. 14).

Возьмем точку с координатами $(2; 2)$. Подставим координаты выбранной точки в неравенство $x^2 - 4x + 4 - y > 0$, получим ложное числовое неравенство $-2 > 0$. Это значит, что вся внутренняя область не принадлежит множеству решений исходного неравенства. Возьмем точку с координатами $(0; 0)$. Подставим координаты выбранной точки в неравенство $x^2 - 4x + 4 - y > 0$, получим истинное числовое неравенство $4 > 0$. Это значит, что вся область вне параболы принадлежит множеству решений исходного неравенства. Заметим, что точки, лежащие на самой параболе, не удовлетворяют исходному неравенству (так как неравенство строгое). Поэтому параболу изображаем пунктирной линией. Таким образом, получаем, что графиком данного неравенства является множество точек, расположенных вне параболы $y = x^2 - 4x + 4$.

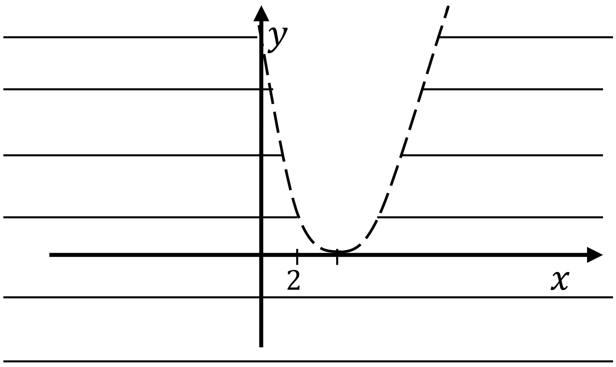


Рис. 14

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

13.1. Какие из следующих неравенств истинны:
1) $5 \le 8$; 2) $-13 > -4$; 3) $0 \ge 0$; 4) $\sqrt{5} < 3$; 5) $\sqrt{7} \ge \sqrt{11}$?

13.2. Изобразите на числовой оси множество точек, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:
1) $X = \{x/x < 4\}$; 2) $X = \{x/-5 \le x < 4\}$;
3) $X = \{x/2{,}1 < x < 15{,}8\}$; 4) $X = \left\{x/-\frac{3}{7} \le x \le \frac{5}{7}\right\}$.

13.3. Равносильны ли следующие неравенства на множестве действительных чисел:
1) $-24x < 96$ и $x > -4$;
2) $15x - 3 > -18$ и $x < 1$;
3) $\frac{48-2x}{2} < 0$ и $24 - x < 0$;
4) $x > 4$ и $8x^2 > 32x$;
5) $x - 15 < 0$ и $\frac{x-15}{x^2+125} < 0$;
6) $7 + 4x + 3x^2 > 0$ и $-3x^2 - 4x - 3 < 4$.

13.4. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:
1) $x - 7{,}5 < 10$; 2) $\frac{-2x-4}{4} > 8$.

13.5. Сравните значения числовых выражений и поставьте один из знаков «<», «>» так, чтобы получилось истинное числовое неравенство:
1) $0{,}53 - \frac{1}{5} : \frac{5}{8} + 3{,}108$ и $2{,}85 + 1{,}2 \cdot 0{,}3 - \frac{2}{8} : \frac{5}{16}$;
2) $15\frac{1}{4} + 38{,}12 : 0{,}4$ и $57{,}9 + 14{,}6 - (15{,}1 + 3{,}8)$;
3) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{15} + \frac{15}{90}\right)$ и $0{,}75 + 0{,}4 \cdot (0{,}2 + 0{,}7)$.

13.6. Умножьте обе части неравенства на указанный в скобках множитель:
1) $35 > 18$ (2); 2) $17 < 29$ (-3); 3) $-12 < 3$ (-4);

4) $-14{,}8 < 0$ $(-4{,}2)$; 5) $\frac{3}{8} > \frac{3}{16}$ $(-\frac{1}{2})$; 6) $2{,}3 > 1{,}4$ $(3{,}1)$.

13.7. Решите следующие неравенства и объясните, какими теоремами о равносильных неравенствах вы пользовались:

1) $-3x + 4 < 25$;
2) $3(x-2) + 2(x-1) > 3(1-x) + 6$;
3) $4{,}5 + 2{,}2x - 3{,}4(x-4) < 8{,}25 + 2x$.

13.8. При каких значениях переменной x дроби $\frac{x-2}{4}$; $\frac{4}{x+3}$; $\frac{2x-6}{x^2}$; $\frac{4x^2+1}{x-6}$ принимают: а) отрицательные значения, б) положительные значения?

13.9. Решите неравенства:

1) $x^2 - 9x > 0$;
2) $x(x+1) < 4(1-2x-x^2)$;
3) 3) $x^2 + 4x - 5 < 0$;
4) $(0{,}8x - 2) - (1{,}6x + 2) \geq 4{,}6 + (-2x + 0{,}2) - 1{,}8$;
5) $2x^2 + 4 > 6x - \frac{1}{4}x^2$;
6) $\frac{1}{4}x + 0{,}25 \leq 24\frac{3}{16} - 8\frac{1}{16}x$;
7) $\frac{14-18x}{8} + \frac{3}{2}x - 2 \geq \frac{x-1}{16} + 3$;
8) $(x-5)^2 < 37 + (x-10)^2$;
9) $2x^2 + 6x + 4{,}5 \leq 0$;
10) $(x^2 - 25)(x^2 + 5) > 0$;
11) $(x^2 - 16)(9 - x^2) < 0$.

13.10. Одна сторона прямоугольника на *7 м* больше другой. Какой может быть эта сторона, если площадь прямоугольника меньше *60* $м^2$?

13.11. Решите системы неравенств с одной переменной:

1) $\begin{cases} x - 6 > 0, \\ 2x - 6 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 30 - 3x \geq 0, \\ 8x - 16 < 32; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{6-4x}{30} \leq \frac{2x-4}{6} + \frac{x}{5}, \\ \frac{3-9x}{36} \geq \frac{10x-2}{6} - \frac{14x}{8}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - \frac{4}{3} < \frac{8}{3}x + 2, \\ 2x - 1 > 5x - 4, \\ 22x - 18 \leq 30x + 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x > 0, \\ 8x^2 + 10x - 12 > 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x^2 + 2x - 8 > 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (4 - x^2)(x^2 - 9)(x^2 + 3) \geq 0, \\ x - 4 < 0. \end{cases}$

13.12. Найдите множество решений неравенств:

1) $|x - 7| \leq 2$; 2) $|2x - 16| > 3$;
3) $|9x - 3| < 0$; 4) $|x + 14| \geq 0$;
5) $|7x + 1| > -2$; 6) $|3x - 2| < -7$;
7) $-14 < x - 5 < 19$; 8) $-2 \leq \frac{x-3}{4} < 4{,}5$.

13.13. Укажите допустимые значения переменной:

1) $\sqrt{3x-9}$; 2) $\sqrt{a-16}$; 3) $\sqrt{\frac{x-4}{2}}$; 4) $\sqrt{-3(x+7)}$; 5) $\sqrt{x^2}$; 6) $\sqrt{x^3}$;

7) $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-9}$; 8) $\sqrt{x-7}+\sqrt{\frac{x^2-4}{x+2}}$.

13.14. Найдите множество решений совокупности неравенств с одной переменной:

1) $\left[\begin{array}{l}4x-8\le 3x+1,\\ 3x+2<9x+4;\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}15x-3\le 2x-1,\\ 3x+1<24-4x;\end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l}\frac{5}{3}x-2\le\frac{7}{6}x-\frac{1}{6},\\ x+1<\frac{5x-2}{9}-\frac{4}{18};\end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l}5-2x\le 0,\\ 3x+1<0.\end{array}\right.$

13.15. Докажите, что при любых значениях переменной верно неравенство $(7-x)(x+11)>(x+8)(4-x)$.

13.16. Изобразите множество решений неравенства с двумя переменными на координатной плоскости:

1) $x-2+y\le 0$, 2) $y>0$, 3) $x<5$, 4) $x+4y-1\le 2$.

13.17. Постройте графики неравенств:

1) $y<x$; 2) $(x-9)^2+(x+4)^2\ge 25$; 3) $y>x+7$.

Образец контрольной работы по теме

1) Решите неравенство $-3x+4<25$ и объясните, какими теоремами о равносильных неравенствах вы пользовались

2) Сравните значения числовых выражений и поставьте один из знаков «<», «>» так, чтобы получилось истинное числовое неравенство $0{,}53-\frac{1}{5}:\frac{5}{8}+3{,}108$ и $2{,}85+1{,}2\cdot 0{,}3-\frac{2}{8}:\frac{5}{16}$.

3) Решите неравенства: $а)2x^2+4>6x-\frac{1}{4}x^2$; б)$|7x+1|>-2$.

4) Решите систему неравенств с одной переменной $\begin{cases}x^2-4x-5<0,\\ x^2+2x-8>0.\end{cases}$

5) Постройте график неравенства $(x-4)^2+(x+9)^2\le 25$.

ТЕМА 14. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

§1. Понятие текстовой задачи. Структура текстовых задач

В любом математическом курсе кроме понятий, предложений, доказательств есть задачи. Их роль в обучении младших школьников математике велика. Решая задачи, учащиеся приобретают новые математические знания, готовятся к практической деятельности. Главное задачи являются средством формирования умений строить математические модели реальных явлений, а также средством развития мышления детей. Эти задачи сформулированы на естественном языке, поэтому их называют текстовыми. Они представляют собой задачи на нахождение искомого и сводятся к вычислению неизвестного значения некоторой величины, поэтому их иногда называют вычислительными. В дальнейшем мы будем употреблять термин «текстовая задача».

Определение 1. ***Текстовая задача*** *есть описание некоторой ситуации (ситуаций) на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между её компонентами или определить вид этого отношения.*

Любая текстовая задача состоит из двух частей: условия и требования (вопроса).

В условии сообщаются сведения об объектах и некоторых величинах, характеризующих данные объекты, об известных и неизвестных значениях этих величин, об отношениях между ними.

Требование задачи – это указание того, что нужно найти. Оно может быть выражено предложением в повелительной форме (например, найти расстояние между пунктами A и B) или вопросительной форме (чему равно расстояние между пунктами A и B?).

Рассмотрим задачу «На перепечатывание рукописи одна машинистка затрачивает 10 дней, а другая – 12 дней. Обе машинистки приступили к работе. За сколько дней будет перепечатана вся рукопись?».

Условие этой задачи: «На перепечатывание рукописи одна машинистка затрачивает 10 дней, а другая – 12 дней. Обе машинистки приступили к работе». В нем описываются отношения между тремя величинами: объемом работы, производительностью труда и временем выполнения работы, причем в трех различных ситуациях.

Требование (вопрос) задачи: «За сколько дней будет перепечатана вся рукопись?». В нем указывается, что нужно найти время совместной работы. Это же требование может быть сформулировано в повелительной форме: «Найти количество дней, которое потребуется для перепечатывания рукописи двумя машинистками при совместной работе».

Определение 2. *Неизвестное значение величины, заключенное в требовании задачи называется* ***искомым****.*

Иногда задачи формулируются таким образом, что часть условия или все условие включены в одно предложение с требованием задачи. Например, «За сколько дней будет перепечатана вся рукопись при совместной работе машинисток, если одна машинистка может перепечатать рукопись за 10 дней, а другая – 12 дней?».

Задачные ситуации, взятые из реальной жизни, могут содержать избыточную или недостаточную информацию. Например, в задаче «Маша нашла 10 подосиновиков и 7 подберезовиков, а Саша нашел 5 подберезовиков. Сколько подберезовиков нашли дети?» содержится избыточная информация о подосиновиках. А в задаче «Найти площадь участка прямоугольной формы, если его длина на 3 метра больше ширины.» недостаточно данных для ответа на вопрос.

Одна и та же задача может рассматриваться как задача с избыточными (недостаточными) данными и как задача с достаточным количеством данных в зависимости от имеющихся у решающего знаний. Например, ученик, не имеющих знаний о дробях и действиях с ними, воспримет приведенную выше задачу о перепечатывании рукописи как задачу с недостающей информацией. Решить эту задачу он сможет, если, например, ввести количество страниц рукописи.

Определение 3. ***Решить задачу*** *– это значит через логически верную последовательность действий и операций с имеющимися в задаче явно или косвенно числами, величинами, отношениями выполнить требование задачи (ответить на вопрос).*

Термином «решение задачи» обозначают разные понятия:

1) решением задачи называют результат, т.е. ответ на требование задачи;

2) решением задачи называют процесс нахождения этого результата, причем этот процесс рассматривают двояко: и как метод нахождения результата и как последовательность тех действий, которые выполняет решающий, применяя тот или иной метод, т.е. в данном случае под решением задачи понимается вся деятельность человека, решающего задачу.

§2. Классификация текстовых задач

Классификацию текстовых задач можно проводить по-разному. В зависимости от целей классификации текстовые задачи можно объединять в группы либо по методу решения, либо по количеству действий, которые необходимо выполнить для решения задачи, либо по схожести сюжетов.

Например, по числу действий текстовые задачи можно разделить на простые и составные. Задачу, для решения которой нужно выполнить одно арифметическое действие, называют ***простой***.

Пример 1. *Саше 7 лет, он на 3 года младше Тани. Сколько лет Тане?*

Задачу, для которой нужно выполнить два или большее число действий, называют ***составной***.

Пример 2. *Число 80 разделить на две неравные части, так, чтобы половина большей части была на 10 больше меньшей части. Чему равна каждая часть?*

Разделение задач на простые и составные не может быть проведено строго. Например, задача на сложение нескольких слагаемых может быть решена одним действием сложения или несколькими действиями сложения, т.е. может быть причислена к простым или составным. Задачи на нахождение числа по его части могут решаться одним действием – делением на дробь, как задачи простые, или двумя действиями (деление на числитель дроби и умножением на ее знаменатель), т. е. могут быть отнесены к составным задачам.

Задачи можно разделить на стандартные и нестандартные.

Нестандартная задача – это задача, решение которой не является для решающего известной цепью производимых действий.

Пример 3. *Всем членам одной семьи сейчас 73 года. Состав семьи: муж, жена, дочь и сын. Муж старше жены на 3 года, дочь старше сына на 2 года. Четыре года тому назад всем членам семьи было 58 лет. Сколько лет сейчас каждому члену семьи?*

В каждой нестандартной задаче, как в клубке ниток, можно обнаружить ту ниточку, потянув за которую, можно распутать весь клубок.

Классификацию текстовых задач можно проводить по фабуле задачи: «на движение», «на работу», «на смеси и сплавы»; «на проценты», «на части», «на время», «на покупку и продажу» и т. п. Классифицировать задачи, исходя из фабулы условия, очень сложно, так как тематика условий задач бывает порой очень разнообразной.

Наиболее часто используемой является классификация по способу решения задач:

- задачи на тройное правило;
- задачи на нахождение неизвестных по результатам действий;
- задачи на пропорциональное деление;
- задачи на исключение одного из неизвестных;
- задачи на среднее арифметическое;
- задачи на проценты и части;
- задачи, решаемые с конца, или «обратным ходом».

При решении задач различными методами используют, как правило, «свою» классификацию задач. Так, при алгебраическом методе решения чаще всего в качестве основания классификации берут фабулу задачи, а при решении арифметическим методом задачи классифицируют по способам их решения. Однако следует отметить, что такое разбиение задач на группы не является строгой классификацией, так как в этих случаях, с одной стороны, появляются задачи, которые не могут быть отнесены ни к одной из образовавшихся групп, с другой стороны, существуют задачи, которые могут быть отнесены к нескольким указанным группам.

Вместе с тем с точки зрения учебных целей эти и подобные им «классификации» задач удобны. Они дают возможность выделить наиболее типичные виды задач и усвоить стандартные способы их решения.

При обучении математике, кроме приведенной классификации задач по их месту при изучении нового материала, используются классификации по другим основаниям:

- по методам поиска решения – алгоритмические, типовые, эвристические;
- по требованию задачи – на построение, вычисление, доказательство;
- по трудности – легкие и трудные;
- по сложности – простые и сложные;
- по применению математических методов – арифметический, алгебраический, графический, практический и т. д.

Все эти классификации позволяют рассматривать математические задачи под разными углами зрения, уточнять и совершенствовать методику работы над задачей.

§3. Методы решения текстовых задач

Основными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический. Реже используются геометрический и наглядно-практический методы.

Арифметический метод

Решить задачу арифметическим методом – это значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами.

Одну и ту же задачу можно решить различными арифметическими способами. Они отличаются друг от друга логикой рассуждений, выполняемых в процессе решения задачи. Задача считается решенной различными способами, если ее решения отличаются связями между данными и искомыми, положенными в основу решений, или последовательностью этих связей. Покажем различные способы решения конкретной задачи.

Задача 1. *Из пунктов А и В выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля со скоростями 40 км/ч и 30 км/ч. На каком расстоянии от А и В они встретятся, если АВ = 210 км?*

Решение.

I способ. Примем длину пути в 210 км за 1.

1) $40 : 210 = \frac{4}{21}$ – часть пути, которую проезжал за 1 час первый автомобиль;
2) $30 : 210 = \frac{1}{7}$ – часть пути, которую проезжал за 1 час второй автомобиль;
3) $\frac{4}{21} + \frac{1}{7} = \frac{1}{3}$ – часть пути, которую проходят оба автомобиля вместе за 1 час;
4) $1 : \frac{1}{3} = 3$ (час.) – во столько часов оба автомобиля пройдут весь путь (через столько часов они встретятся);
5) $40 \cdot 3 = 120$ (км) – проедет до встречи первый автомобиль;
6) $30 \cdot 3 = 90$ (км) – проедет до встречи второй автомобиль.

Ответ: на расстоянии 120 км и 90 км.

II способ.

1) $40+30 = 70$ (км/ч) – скорость сближения автомобилей (расстояние, которое проходят оба автомобиля за 1 час);
2) $210 : 70 = 3$ (час.) – время движения обоих автомобилей;
3) $40 \cdot 3 = 120$ (км) – проедет до встречи первый автомобиль;
4) $30 \cdot 3 = 90$ (км) – проедет до встречи второй автомобиль.

Ответ: на расстоянии 120 км и 90 км.

Алгебраический метод

Решить задачу алгебраическим методом – это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или систему уравнений.

В зависимости от выбора неизвестного (неизвестных) для обозначения буквой (буквами), от хода рассуждений можно составить различные уравнения (системы уравнений) по одной и той же задаче. В этом смысле можно говорить о различных алгебраических способах решения этой задачи. Например, рассмотрим задачу

Задача 2. *Ученик имеет в руках несколько карандашей. Если он переложит один карандаш из правой руки в левую, то в обеих руках карандашей будет поровну; если же из левой руки переложить в правую 2 карандаша, то в правой руке карандашей будет в 2 раза больше, чем в левой. Сколько карандашей в каждой руке?*

Решение.

I способ. Пусть x – число карандашей в правой руке. Если из левой руки переложить 2 карандаша в правую руку, то в правой будет $(x + 2)$ карандашей. Теперь в правой руке в 2 раза больше карандашей, чем в левой руке. Следовательно, в левой руке будет $\frac{x+2}{2}$ карандашей. До перекладывания двух карандашей в левой руке было $\frac{x+2}{2} + 2$ карандаша. После того как переложили один карандаш из правой руки в левую в правой осталось $x – 1$, а в левой было $\frac{x+2}{2} + 2 + 1 = \frac{x+2}{2} + 3$. Так ка по условию эти числа равны, приходим к уравнению

$$\frac{x+2}{2} + 3 = x - 1,$$

решая которое получим $x = 10$, т.е. в правой руке было 10 карандашей. В левой руке было на 2 карандаша меньше, т.е. 8 карандашей.

Ответ: 10 и 8.

II способ. Обозначим число карандашей в правой руке через x, а в левой – через y. После того как переложили один карандаш из правой руки в левую, в правой осталось $x – 1$ карандашей, а в левой стало $y + 1$ карандашей. По условию карандашей в руках станет поровну, т.е. имеет место уравнение $x – 1 = y + 1$.

Когда переложили 2 карандаша из левой руки в правую, то в правой стало $x + 2$ карандашей, а в левой осталось $y – 2$ карандашей, причем в левой руке теперь в два раза меньше, чем в правой. Поэтому можно составить второе уравнение $x + 2 = 2(y – 2)$. Таким образом, приходим к системе $\begin{cases} x - 1 = y + 1, \\ x + 2 = 2(y - 2), \end{cases}$ решая которую получим $x = 10$, $y = 8$.

Ответ: 10 и 8.

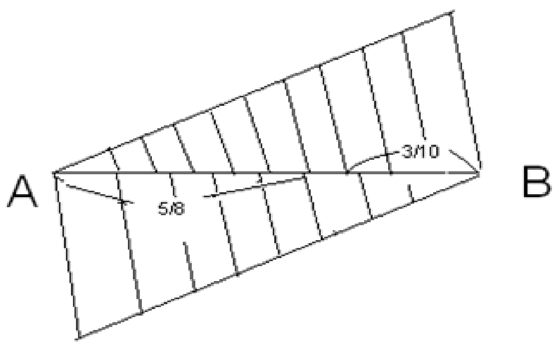
Геометрический метод

Решить задачу геометрическим методом – значит найти ответ на требование задачи, используя геометрические построения или свойства геометрических фигур. Рассмотрим задачу

Задача 3. *Из двух пунктов навстречу друг другу вышли два пешехода. Первый прошёл 5/8 пути, второй – 3/10. Произошла ли встреча пешеходов?*

Решение.

Изобразим произвольным отрезком расстояние между пунктами. Опираясь на теорему Фалеса, разделим отрезок на 8 и 10 равных частей. Из чертежа следует ответ на вопрос задачи: «Встреча не произошла».



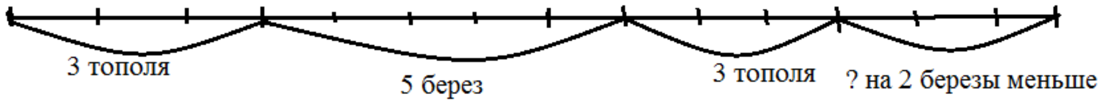
Иногда решение задачи геометрическим методом связано не только с построением отрезков, но и с измерением их длин.

Например, рассмотрим задачу

Задача 4. *В первый день у школы было посажено 3 тополя и 5 берез, а во второй день – тополей столько же, а берез на 2 меньше. Сколько деревьев было посажено за два дня?*

Решение.

Условимся обозначать каждое дерево отрезком в 1 см. Тогда все деревья, посаженные за два дня, можно изобразить в виде отрезка.



Измерив отрезок, изображающий все деревья, получим ответ на вопрос задачи (14 деревьев).

Наглядно-практический метод

При решении задач этим методом ответ находится в результате выполнения практических действий с реальными предметами или с предметами, которые их заменяют. Чаще всего этот метод используется в начальной школе и в дальнейшем при решении задач на взвешивание, на переливание и на переправы. Приведем примеры решения задач наглядно-практическим методом.

Задача 5. *В гараже 40 автомашин – легковых и грузовых. Причем на каждую легковую машину приходится 4 грузовые. Сколько легковых и сколько грузовых машин в гараже?*

Решение.

Изобразим каждую машину палочкой (40 машин – 40 палочек). Известно, что на каждую легковую машину приходится 4 грузовые машины. Поэтому отложим одну палочку – это легковая машина. Под ней положим 4 палочки – это грузовые машины. Будем поступать так до тех пор, пока все 40 палочек не окажутся разложенными.

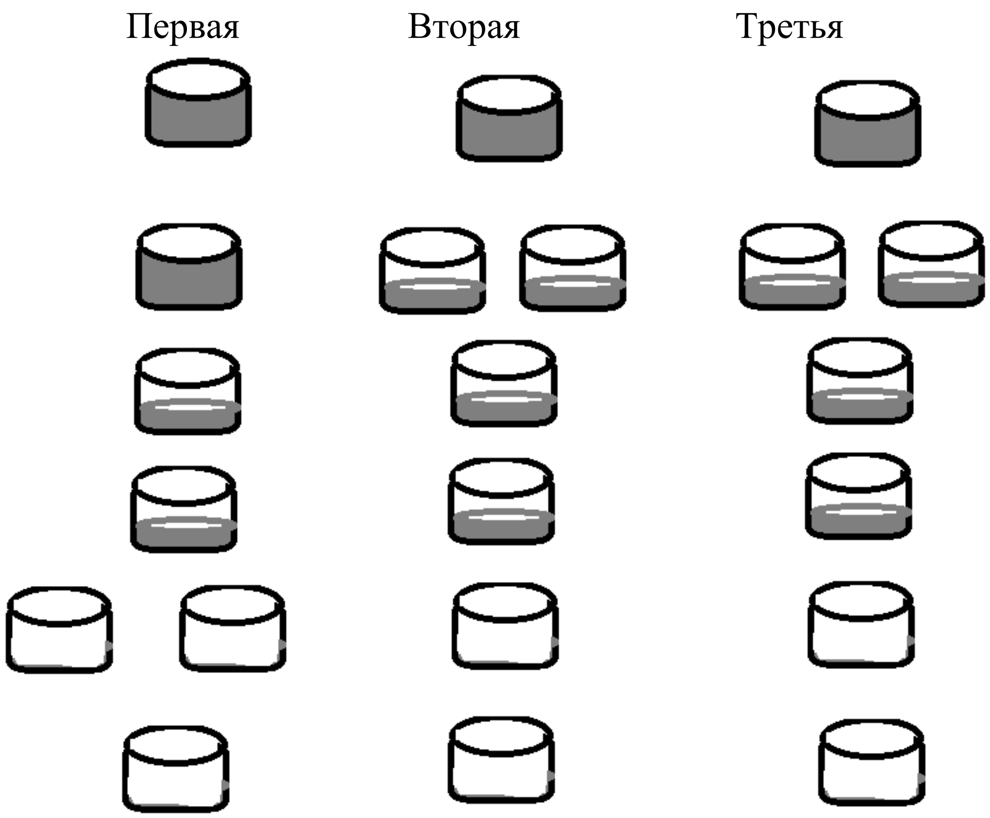
Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно сосчитать, сколько палочек положено в верхнем ряду и сколько палочек положено в нижнем ряду (8 легковых машин и 32 грузовые машины).

При решении задачи 5 использовался практический метод (конкретное применение предметов – палочек).

Задача 6. *Имеется 7 пустых бочек, 4 полных и 10 полупустых бочек с медом. Требуется разметить их на трех машинах так, чтобы на* *каждой из них оказалось одинаковое количество меда и одинаковое число бочек.*

Решение.

Сначала «погрузим» на каждую машину по одной полной бочке (см. рис.). Чтобы уравновесить полную бочку на первой машине, на вторую и третью машины «погрузим» по две полупустые бочки, а затем грузим оставшиеся полупустые бочки. Теперь на каждой машине одинаковое количество меда, остается «погрузить» пустые бочки так, чтобы уравнять количество бочек на каждой машине. Так как на первой машине на одну бочку меньше, чем на второй и третьей, то «погрузим» на неё сначала 2 бочки, а потом продолжим погрузку на каждую машину по одной бочке. В итоге получим ответ (на одну машину «погрузили» 2 полные, 2 полупустые и 3 пустые бочки; на две другие – по 1 полной, 4 полупустые и 2 пустые).



Как видим, в задаче 6 использовалось наглядное представление процесса решения.

Иногда в ходе решения задачи применяются несколько методов: арифметический и алгебраический; геометрический, алгебраический и арифметический; арифметический и практический и т.д. В этом случае считают, что задача решается ***комбинированным (смешанным) методом***.

§4. Этапы решения задачи и приёмы их выполнения

Решение текстовой задачи – это сложная деятельность, содержание которой зависит как от конкретной задачи, так и от умений решающего. Независимо от выбранного метода деятельность по решению задачи включает следующие этапы:

1. Восприятие и анализ содержания задачи.
2. Поиск пути решения задачи и составление плана её решения.
3. Выполнение плана решения.
4. Проверка решения и устранение ошибок, если они есть. Формулировка вывода о выполнении требования задачи или ответа на вопрос задачи.

Следует подчеркнуть, что в реальном процессе решения задачи отмеченные этапы не имеют четких границ и не всегда выполняются одинаково полно. Вместе с тем решение каждой задачи должно обязательно содержать все указанные этапы, осмысленное прохождение которых делает процесс решения задачи осознанным и целенаправленным.

Рассмотрим более подробно каждый этап решения задачи.

Этап 1. Анализ задачи

Основная цель первого этапа – понять в целом ситуацию, описанную в задаче; выделить условия и требования; назвать известные и искомые объекты, выделить все отношения (зависимости) между ними. На этом этапе можно использовать такие приёмы:

1) представление той жизненной ситуации, которая описана в задаче;
2) постановка специальных вопросов и поиск ответов на них;
3) перефразировка (переформулировка) текста задачи;
4) построение модели задачи с помощью реальных предметов, предметных или графических моделей и др.

Первый приём – представление той жизненной ситуации, которая описана в задаче, – выполняется фактически при чтении задачи. Его цель – выявление основных количественных и качественных характеристик ситуации, представленной в задаче.

Второй приём – постановка специальных вопросов и поиск ответов на них, – включает стандартный набор вопросов, ответы на которые позволяют детально разобраться в содержании задачи. Реализацию этого приёма рассмотрим на примере следующей задачи.

Задача 1. *Одновременно из пунктов А и В выехали навстречу друг другу два автомобиля. Один ехал со скоростью 50 км/ч, а другой – 40 км/ч. Встреча произошла на расстоянии 20 км от середины. Найти расстояние между пунктами А и В.*

Для анализа задачи 1 приведём варианты вопросов и ответов на них:

1) О чем говорится в задаче?

Задача о движении двух автомобилей. Оно характеризуется для каждого из участников движения скоростью, временем и расстоянием до пункта встречи.

2) Что требуется найти в задаче?

В задаче требуется найти расстояние между пунктами А и В.

3) Что в задаче известно о движении каждого из участников?

В задаче известно, что

а) автомобили выехали навстречу друг другу одновременно;

б) скорость первого автомобиля, который выехал из пункта А, равна 50 км/ч;

в) скорость второго автомобиля, который выехал из пункта В, равна 40 км/ч;

г) встреча произошла на расстоянии 20 км от середины пути.

4) Что в задаче неизвестно?

В задаче неизвестно время движения автомобилей. Неизвестно также, с какой скоростью происходит сближение автомобилей Неизвестно расстояние, которое проехал каждый автомобиль до встречи. Неизвестно расстояние между пунктами А и В – это требуется узнать в задаче.

5) Что является искомым: число, значение величины, вид некоторого отношения?

Искомым является значение величины – расстояние между пунктами А и В.

Третий приём – перефразировка текста задачи, – заключается в замене данного в задаче описания некоторой ситуации другим, сохраняющим все отношения, связи и количественные характеристики, но более явно их выражающим.

Направления перефразировки могут быть следующие: отбрасывание несущественной, излишней информации; замена описания некоторых понятий соответствующими терминами и наоборот; переорганизация текста задачи в форму, удобную для поиска решения. Результатом перефразировки должно быть выделение основных ситуаций. Например, рассмотрим задачу

Задача 2. *На двух полках книг было на 5 больше, чем на одной из них. Сколько книг было на другой полке?*

После первого прочтения текста кажется, что в задаче недостаёт информации о книгах на другой полке. Но переформулировав задачу так: «*Количество книг на первой и второй полках вместе – это количество книг на первой полке и ещё 5 книг. Сколько книг на второй полке?*», придем не только к пониманию содержания, но и получению ответа на вопрос (5 книг – это и есть книги на другой полке).

Переформулированный текст часто бывает полезно записать схематически, т. е. построить вспомогательную модель задачи.

Четвертый приём – построение модели задачи, – заключается в моделировании ситуации, описанной в задаче, с помощью реальных предметов, предметных моделей или графических моделей. В качестве модели могут выступать изображения, описания, схемы, чертежи, графики, уравнения, карты, компьютерные программы и т.д. На этапе анализа условия текстовой задачи строится вспомогательная модель: схематическая запись условия, таблица, схематический чертёж, диаграмма или график и т.п. Эта модель служит формой фиксации анализа текстовой задачи и является основным средством поиска плана её решения.

После построения вспомогательной модели необходимо проверить:

1) все ли объекты задачи показаны на модели;

2) все ли отношения между объектами отражены;

3) все ли числовые данные приведены;

4) есть ли вопрос и правильно ли он указывает искомое?

Рассмотрим задачу

Задача 3. *Турист проехал 6часов на поезде со скоростью 56 км/ч. После этого осталось ехать в 4 раза больше того, что он проехал. Сколько всего километров должен был проехать турист?*

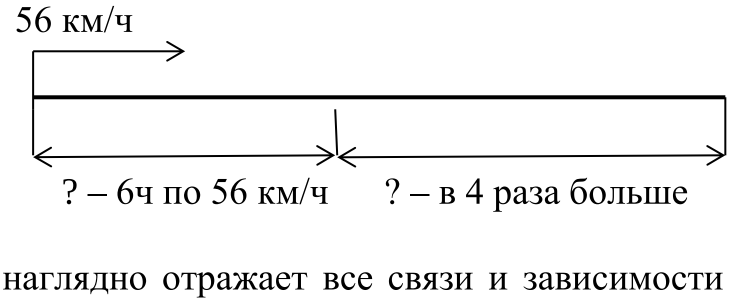
После переформулировки текст задачи может иметь вид:

«Турист ехал 6 часов по 56 км/ч, осталось проехать в 4 раза больше. Требуется узнать весь путь.»

Схематическую запись этой задачи можно выполнить так:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Проехал – 6 ч по 56 км/ч}\\ \text{Осталось проехать – ?, в 4 раза больше}\end{array}\right\}?$$

Важным средством анализа задачи является чертёж. Например, к задаче 3 может быть выполнен следующий схематический чертёж:



Он наглядно отражает все связи и зависимости между величинами, что значительно облегчает поиск решения задачи.

Этап 2. Поиск пути решения задачи и составление плана её решения

Назначение этого этапа: установить связь между данными и исходными объектами, наметить последовательность действий.

План решения – это лишь идея решения, его замысел.

Одним из наиболее распространенных приемов поиска плана решения задачи является разбор задачи по тексту или по её вспомогательной модели.

Разбор задачи по тексту проводится в виде цепочки рассуждений, которая может начинаться как от данных задачи, так и от её вопросов.

При разборе задачи от данных к вопросу нужно выделить в тексте задачи два данных и на основе знания связи между ними определить, какое неизвестное может быть найдено по этим данным и с помощью какого арифметического действия. Далее, считая это неизвестное заданным, надо вновь выделить два взаимосвязанных данных, определить неизвестное, которое может быть найдено по ним, а так же соответствующее арифметическое действие и т.д., пока не будет выяснено действие, выполнение которого приводит к получению искомого. В качестве примера приведем разбор задачи о туристе, проводя рассуждения от данных к вопросу.

Известно, что 6 ч турист проехал на поезде, который шел со скоростью 56 км/ч; по этим данным можно узнать расстояние, которое проехал турист за 6 ч, - для этого достаточно скорость умножить на время.

Зная пройденную часть расстояния и то, что оставшееся расстояние в 4 раза больше, можно найти, чему оно равно. Для этого пройденное расстояние нужно умножить на 4.

Зная, сколько километров турист проехал и сколько ему осталось ехать, можем найти весь путь, выполнив сложение найденных отрезков пути.

Итак,

первым действием будем находить расстояние, которое турист проехал на поезде;

вторым действием – расстояние, которое ему осталось проехать;

третьим – весь путь.

При разборе задачи от вопроса к данным нужно обратить внимание на вопрос задачи и установить, что достаточно знать для ответа на этот вопрос. Обратиться к условию и выяснить, есть ли для этого необходимые данные. Если таких данных нет, то установить, что нужно знать, чтобы найти недостающее данное (недостающие данные) и т.д. Потом составляется план. Рассуждения при этом проводятся в обратном порядке. Приведем рассуждения от вопроса к данным при разборе задачи о туристе:

В задаче требуется узнать весь путь туриста. Мы установили, что весь путь состоит из двух частей. Значит, для выполнения тре-

бования задачи достаточно знать, сколько километров турист проехал и сколько километров ему осталось проехать. И то, и другое неизвестно.

Чтобы найти пройденный путь, достаточно знать время и скорость, с которой ехал турист. Это в задаче известно. Умножив скорость на время, узнаем путь, который турист проехал.

Оставшийся путь можно найти, увеличив пройденный путь в 4 раза.

Итак, вначале можно узнать пройденный путь, затем оставшийся, после чего сложением найти весь путь.

Поиск решения задачи может проводиться по чертежу и по схематической записи, составленной на первом этапе.

Этап 3. Выполнение плана решения. Формулировка вывода о выполнении требования задачи

Назначение этого этапа – найти ответ на требование задачи, выполнив все действия в соответствии с планом.

Для текстовых задач, решаемых арифметическим методом, используются приемы: запись по действиям (с пояснением, без пояснения, с вопросами); запись в виде выражения.

1. *Запись решения по действиям с пояснением к каждому действию (задача о туристе).*

1) 56 · 6 = 336 (км) – турист проехал за 6 часов
2) 336 · 4 = 1344 (км) – осталось проехать туристу
3) 336 + 1344 = 1680 (км) – должен был проехать турист
Ответ: 1680 км.

Если пояснения даются в устной форме или совсем не даются, то запись будет следующей:

1) 56 · 6 = 336 (км)
2) 336 · 4 = 1344 (км)
3) 336 + 1344 = 1680 (км)
Ответ: 1680 км должен был проехать турист.

2. *Запись решения задачи по действиям с вопросами.*

1) Сколько километров проехал турист на поезде?
   56 · 6 = 336 (км)
2) Сколько километров осталось проехать туристу?
   336 · 4 = 1344 (км)
3) Сколько километров должен был проехать турист?
   336 + 1344 = 1680 (км)
Ответ: 1680 км.

3. *Запись решения задачи в виде выражения.*

Запись решения в этой форме осуществляется поэтапно. Сначала записываются отдельные шаги в соответствии с планом, затем составляется выражение и находится его значение.

Для рассматриваемой задачи эта форма записи имеет вид:
$56 \cdot 6$ (км) – турист проехал за 6 часов
$56 \cdot 6 \cdot 4$ (км) – расстояние, которое осталось проехать туристу
$56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4$ (км) – путь, который должен проехать турист
$56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4 = 1680$ (км)
Ответ: 1680 км.

Пояснения к действиям можно не записывать, а давать их в устной форме. Тогда запись решения примет вид:
$56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4 = 1680$ (км)
Ответ: 1680 км.

4. *Запись каждого пункта плана с соответствующими арифметическими действиями.*

1) Найдем расстояние, которое проехал турист за 6 ч:

$$56 \cdot 6 = 336 \text{ (км)}$$

2) Найдем расстояние, которое осталось проехать туристу:

$$336 \cdot 4 = 1344 \text{ (км)}$$

3) Найдем расстояние, которое должен был проехать турист:

$$336 + 1344 = 1680 \text{ (км)}$$

Ответ: 1680 км

Этап 4. Проверка решения и устранение ошибок, если они есть

Назначение этого этапа – установить правильность или ошибочность выполнения решения. Известно несколько приёмов, помогающих установить, верно ли решена задача.

1). Прикидка. Суть этого приема заключается в прогнозировании с некоторой степенью точности правильности результата решения. Применение прикидки дает точный ответ на вопрос «Правильно ли решена задача?» лишь в том случае, если полученный при решении результат не соответствует прогнозируемому.

2). Соотношение полученного результата и условия задачи. Суть данного приема заключается в том, что найденный результат вводится в текст задачи и на основе рассуждений устанавливается, не возникает ли при этом противоречия.

Проверим, используя данный приём, правильность решения задачи о движении туриста.

Мы установили, что турист должен был всего проехать 1680км. Пусть теперь этот результат будет одним из данных задачи. Далее, как известно, за 6 часов турист пройдёт 336км (56·6=336) и ему останется проехать 1680 – 336=1344(км). Согласно условию задачи это расстояние должно быть в 4 раза больше того, которое турист проехал на поезде за 6 часов. Проверим это, разделив 1344 на 336. Действительно, 1344:336=4. Следовательно, если найденный результат подставить в условие задачи, то противоречий с другими *данными, а именно отношением «быть больше в 4 раза», не возникает. Значит задача решена верно.*

3). Решение задачи другим способом. Пусть при решении задачи каким-либо способом получен некоторый результат. Если её решение другим способом приводит к тому же результату, то можно сделать вывод, что задача решена верно.

Заметим, что если задача решена первоначально арифметическим способом, то правильность её решения можно проверить, решив задачу алгебраическим способом.

Не следует так же думать, что без проверки нет решения текстовой задачи. Правильность решения обеспечивается, прежде всего, четкими и логичными рассуждениями и на всех других этапах работы над задачей.

В данном параграфе все этапы решения задачи рассмотрены на примере решения задачи арифметическим методом. При решении задачи алгебраическим методом используются все рассмотренные выше этапы. Только после анализа содержания задачи выбирается неизвестное, обозначается буквой, вводится в текст задачи, а затем на основе выделенных в содержании задачи зависимостей составляются два выражения, связанные отношением равенства, что позволяет записать соответствующее уравнение. Найденные в результате решения корни осмысливаются с точки зрения содержания задачи, а корни, не соответствующие условию задачи отбрасываются. Если буквой обозначено искомое, оставшиеся корни могут сразу дать ответ на вопрос задачи. Если буквой обозначено неизвестное, не являющееся искомым, то искомое находится на основе взаимосвязи его с тем неизвестным, которое было обозначено буквой.

§5. Моделирование в процессе решения текстовых задач

Математическая модель – это описание какого-либо реального процесса на языке математических понятий, формул, отношений.

Если задача решается арифметическим методом, то её моделью является выражение либо запись по действиям. Если задача решается алгебраическим методом, то её модель представляется уравнением или системой уравнений.

В процессе решения задачи чётко выделяются три этапа математического моделирования:

I этап – это перевод условий задачи на математический язык; при этом выделяются необходимые для решения данные и искомые и математическими способами описываются связи между ними;

II этап – нахождение значения выражения, выполнение действий, решение уравнения;

III этап – перевод полученного решения на тот язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Проиллюстрируем эти этапы на примере решения алгебраическим методом задачи

Задача 1. *В одном вагоне электропоезда было пассажиров в 2 раза больше, чем в другом. Когда из первого вагона вышли 3 человека, а во второй вагон вошли 7 человек, то в обоих вагонах пассажиров стало поровну. Сколько пассажиров было в каждом вагоне первоначально?*

Решение.

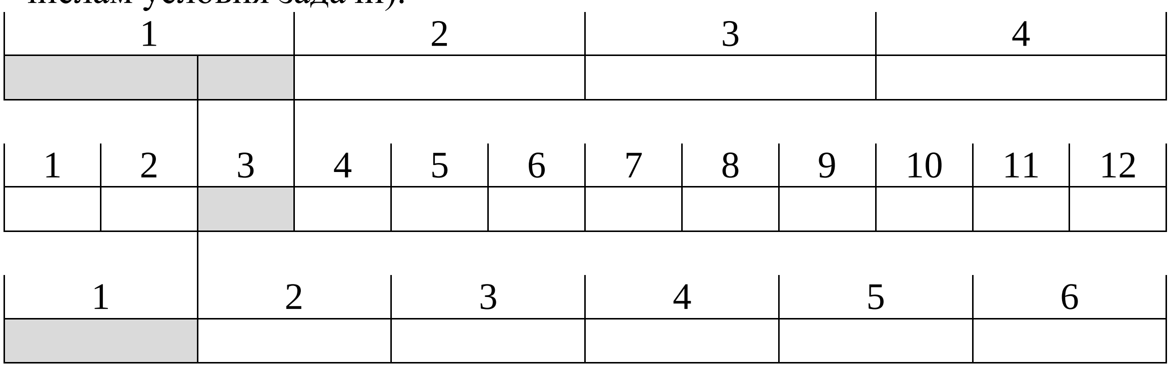
Пусть x – первоначальное число пассажиров во втором вагоне. Тогда в первом вагоне первоначально было $2x$ пассажиров. Когда из первого вагона вышли 3 человека, в нем осталось $2x - 3$ пассажиров. Во второй вагон вошли 7 человек, значит, в нем стало $x + 7$ пассажиров. Так как в обоих вагонах пассажиров стало поровну, то можно записать $2x - 3 = x + 7$. Получили уравнение – это математическая модель данной задачи.

Следующий этап – решение полученного уравнения вне зависимости от того, что в нем означает переменная x: $2x - x = 3 + 7 \Rightarrow x=10$.

Последний этап – используем полученное решение, чтобы ответить на вопрос задачи: во втором вагоне было 10 человек, а в первом – $10 \cdot 2 = 20$ человек.

Наибольшую сложность в процессе решения задачи представляет процесс перевода текста с естественного языка на математический, т.е. I этап математического моделирования. На этом этапе можно использовать наглядные представления связей и зависимостей между данными и искомыми величинами, рассматриваемыми в задаче. Например, при решении следующей задачи «*Два человека, работая вместе, выполнили работу за 4 дня; первый, работая один, может выполнить эту работу за 12 дней. Во сколько дней выполнит эту работу второй, работая один?*» арифметическим и алгебраическим способами можно использовать следующие наглядные представления.

При арифметическом методе. Примем всю работу за 1 и изобразим её в виде прямоугольника, длина которого 12 см (кратна числам условия задачи).



Пусть на чертеже верхняя полоса изображает работу, выполненную двумя рабочими за 4 дня, а вторая – одним первым рабочим за 12 дней; тогда на долю второго рабочего (третья полоса) приходится выполнение в день части, равной двум частям первого. Разделив третий прямоугольник на части, равные доле работы за 1 день, можем получить ответ на вопрос задачи.

Арифметическое решение

1. Какую часть работы выполняют оба рабочих, работая одновременно, за 2 день?

$$1:4=\frac{1}{4}\ \text{(показать на чертеже)}.$$

2. Какую часть работы выполняет первый рабочий за 1 день, работая один?

$$1:12=\frac{1}{12}.$$

3. Какую часть работы выполняет второй рабочий за 1 день?

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

4. Во сколько дней выполнит работу второй рабочий?

$$1:\frac{1}{6}=6.$$

Ответ: за 6 дней.

При алгебраическом методе. Примем работу за 1. Обозначим число дней, затрачиваемых вторым рабочим на выполнение всей работы, через x. Заполняем таблицу

	Объём выполненной работы	**Время, потраченное на работу**	**Производительность**
I рабочий	1	12	$\frac{1}{12}$
II рабочий	1	x	$\frac{1}{x}$
Оба вместе	1	4	$\frac{1}{4}$

Из таблицы видно, что оба рабочих за 1 день выполняют $\frac{1}{4}$ часть работы, а всю работу – за 4 дня; поэтому уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4},\ \text{откуда}\ x=6.$$

Ответ: за 6 дней.

Более подробные материалы по вопросам, рассмотренным в данной главе, можно найти в учебном пособии «Теория и практика решения текстовых задач» авторы: Т.Е. Демидова, А.П. Тонких.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

15.1. В следующих задачах выделите условие и требование; сформулируйте эту задачу таким образом, чтобы предложение содержащее требование, не содержало элементов условия; замените повелительную форму требования вопросительной. Решите эту задачу.

1) Найдите стороны прямоугольника, если известно, что одна из них на 14 см больше другой, а диагональ его равна 34 см.

2) Два автобуса отправились одновременно из города на базу отдыха, расстояние до которой 72 км. Первый автобус прибыл к месту назначения на 15 минут раньше второго. Найти скорость, с которой шел каждый автобус, если скорость одного из них на 4 км/ч больше скорости другого.

15.2. Найдите два арифметических способа решения задачи. Запишите одно решение по действиям, а другое – составив выражение.

1) Мотоциклист, двигаясь со скоростью 40 км/ч, проехал некоторое расстояние за 12 минут. За сколько минут проедет это расстояние велосипедист, двигаясь со скоростью 15 км/ч?

2) Из поселка в город, до которого 27 км выехал велосипедист. Проехав $\frac{1}{3}$ пути, он вернулся в поселок, пробыл там полчаса и после этого снова поехал в город. Сколько времени затратил велосипедист, пока доехал до города, если скорость движения была равна 15 км/ч?

15.3. Проведите разбор задачи (от данных к вопросу и от вопроса к данным) и запишите решение в форме вопросов и соответствующих действий.

1) Капитан теплохода получил задание пройти 540 км за 16 часов. 180 км теплоход проплыл со скоростью 30 км/ч. С какой скоростью теплоход должен проплыть остальное расстояние, чтобы выполнить задание в положенное время?

2) Пашня занимает площадь в 120 га. Один трактор мог бы вспахать всю эту площадь за 6 дней, а другой трактор – за 12 дней. За сколько дней могли бы вспахать её оба трактора, работая вместе?

15.4. Решите задачу различными алгебраическими способами.

1) Периметр прямоугольника равен 60 см. Если длину увеличить на 10 см, а ширину уменьшить на 6 см, то площадь прямоугольника уменьшится на 32 см^2. Найдите площадь прямоугольника.

2) Из пункта *A* вышел груженый катер и идет равномерно со средней скоростью 4 км/ч. Через 8 часов после отхода катера из того же пункта *A* и по тому же направлению вышел пароход и идет со средней скоростью 12 км/ч. Через сколько часов и на каком расстоянии от *A* он догонит катер?

3) Из 560 листов бумаги сделали 60 тетрадей двух сортов, затратив на тетрадь одного сорта по 8 листов, а на тетрадь другого сорта по 12 листов. Сколько сделали тетрадей того и другого сорта отдельно?

15.5. Решите задачу алгебраическим способом и проверьте её, решив арифметическим способом.

1) Из пункта *A* выехал велосипедист. Одновременно вслед за ним из пункта *B*, отстоящего от *A* на расстоянии 20 км, выехал мотоциклист. Вело-

сипедист ехал со скоростью 12 км/ч, а мотоциклист со скоростью 16 км/ч. На каком расстоянии от пункта *А* мотоциклист догонит велосипедиста?

2) Из города *А* в город *В* вышла грузовая машина, а спустя 2 часа из города *В* в город *А* вышла легковая машина. Грузовая машина проходит в среднем по 42 км/ч, а легковая – по 65 км/ч. На каком расстоянии от города *В* встретятся машины, если расстояние между городами *А* и *В* 619 км?

3) Фермер отвел под гречиху и овес 700 га, причем площадь, отведенная под овес, была на 60 га больше площади, отведенной под гречиху. Сколько гектар было отведено под овес и сколько под гречиху?

4) Машинистка должна была перепечатать рукопись за 8 дней. Однако она выполнила работу за 6 дней, так как печатала ежедневно на 6 страниц больше, чем планировала ранее. Сколько страниц в рукописи?

15.6. Решите задачу, выполнив сначала чертеж.

1) На полке стоят тарелки. Сначала взяли $\frac{1}{3}$ часть всех тарелок, а потом $\frac{1}{2}$ оставшихся тарелок. После этого на полке осталось 9 тарелок. Сколько тарелок было на полке?

2) Разделить число 11 на такие две части, чтобы при делении большей части на меньшую в частном было 2 и в остатке 2.

3) Один кусок проволоки на 54 м длиннее другого. После того как от каждого из кусков отрезали по 12 м, второй кусок оказался в 4 раза короче первого. Найдите первоначальную длину каждого куска проволоки.

Образец контрольной работы по теме

Дана задача: «*Расстояние между турбазами А и В равно 40 км. Группа туристов вышла с турбазы А в направлении к турбазе В со скоростью 5 км/ч. Через час с турбазы В навстречу первой группе с той же скоростью вышла другая группа туристов. Через сколько часов после своего выхода вторая группа встретится с первой?*».

1) Выделите в ней условие и требование.
2) Проведите разбор задачи (от данных к вопросу и от вопроса к данным).
3) Решите задачу арифметическим способом, записав его с пояснением к каждому действию.
4) Решите задачу алгебраическим способом, предварительно сделав схематический чертеж.

ТЕМА 15. ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

§1. Понятие величины. Основные свойства величин

Одна из существенных особенностей окружающей нас действительности – беспрерывное её изменение. Меняется погода, возраст человека, условия жизни людей, изменяются растительный и животный мир. Чтобы дать научное обоснование этим процессам, нужно знать их определенные свойства. Например, такие как время, скорость, длина, масса.

Длина, масса, время, площадь, скорость – величины. Первоначальное знакомство с ними происходит в начальных классах.

Определение 1. ***Величины*** *– это особые свойства реальных объектов или явлений, характеризующие их форму и размеры.*

Известные нам величины – длина, площадь, масса, время и т.д. представляют собой особые свойства окружающих нас предметов и явлений и проявляются при сравнении предметов и явлений по этому свойству, причем каждая величина связана с определенным способом сравнения.

Определение 2. *Величины, которые выражают одно и то же свойство объектов, называют* ***величинами одного рода*** *или* ***однородными величинами. Разнородные величины*** *выражают различные свойства объектов.*

Например, длина стола и длина комнаты – однородные величины, а длина и площадь – разнородные величины.

<u>Основные свойства однородных величин</u>

Свойство 1. *Любые две величины одного рода сравнимы: они либо равны, либо одна меньше другой, т.е. для любых двух величин a и b справедливо одно и только одно из отношений:*

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Например, длина гипотенузы прямоугольного треугольника больше, чем длина любого катета; масса груши меньше массы арбуза; длины противоположных сторон прямоугольника равны.

Отношение «меньше» для однородных величин транзитивно, т.е. если $a < b$, $b < c$, то $a < c$.

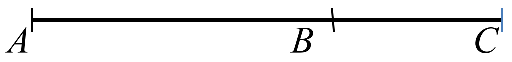
Свойство 2. *Величины одного рода можно складывать, в результате сложения получается величина того же рода. Другими словами, для любых величин a и b однозначно определяется величина $c = a + b$, называемая суммой величин a и b.*

Например, если отрезок AC точкой B разбит на два отрезка $AB=a$ и $BC=b$, $AC=AB+BC= a + b$.

Сложение величин коммутативно и ассоциативно, т.е. для любых величин a и b верны равенства:

$$a + b = b + a \text{ и } (a + b) + c = a + (b + c).$$

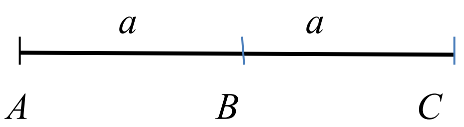
Свойство 3. *Величины одного рода можно вычитать, получая в результате величину того же рода. При этом разность величин определяется через сумму: разностью величин a и b называется такая величина c, что a=b+c.*



Например, если a – длина отрезка AC, b – длина отрезка AB, то длина отрезка BC есть разность длин отрезков AC и AB.

Свойство 4. *Величину можно умножать на положительное действительное число, в результате получают величину того же рода. Другими словами для любой величины a и любого положительного действительного числа x существует единственная величина $b = x\cdot a$, которую называют произведением величины a на число x.*

Например, если длину отрезка AB умножить на x=2, то получим длину $2a$ нового отрезка AC.



Свойство 5. *Величины одного рода можно делить, определяя частное через произведение величины на число: частным величин a и b называется такое неотрицательное действительное число x, что $a=x\cdot b$. Чаще это число x называют отношением величин a и b и записывают в виде $x = \frac{a}{b}$.*

§2. Понятие измерения величины. Скалярные и векторные величины

Сравнивая величины непосредственно, можно установить их равенство или неравенство. Чтобы получить более точный результат сравнения, необходимо величины измерить.

Измерение *заключается в сравнении данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу.*

Процесс сравнения зависит от рода рассматриваемых величин: для длин он один, для площадей – другой, для масс – третий и т.д. Но каким бы не был этот процесс, в результате измерения величина получает определенное численное значение при выбранной единице. В тех случаях, когда единица измерения величин содержится в измеряемом объекте целое число, раз мы получаем целое число. Если же в объекте содержится не целое число, а доля единицы – то получаем дробные числа. В случае, когда нет общей единицы измерения величины (несоизмеримые), как для случая стороны квадраты равного единице измерения и диагонали этого квадрата, мы получаем иррациональные числа, а в совокупности мы получим множество действительных чисел R.

Определение 1. *Если дана величина а и выбрана единица величины е, то в результате измерения величины а находят такое действительное число х, что а = х · е. Это число х называют* ***численным значением*** *величины а при единице величины е.*

Если число *х* – численное значение величины *а* при единице величины *е*, то оно показывает, во сколько раз величина *а* больше (или меньше) величины *е*, принятой за единицу измерения.

Определение 2. *Если а= х · е, то число х называют также* ***мерой величины*** *а при единице е и пишут:* $x = m_e(a)$.

Согласно определениям 1 и 2 любую величину можно представить в виде произведения некоторого числа и единицы этой величины. Например, 7 кг = 7·1 кг, 15 см = 15·1 см, 2 ч = 2·1 ч.

Используя это, а так же определение умножения величины на число, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой. Пусть, например, требуется выразить $\frac{3}{12}$ часа в минутах. Так как $\frac{3}{12}$ч $= \frac{3}{12} \cdot 1$ ч и 1 ч = 60 мин, то $\frac{3}{12}$ч $= \frac{3}{12} \cdot 60$ мин $= \left(\frac{3}{12} \cdot 60\right)$ мин $= 15$ мин.

Измерение величин позволяет свести их к сравнению чисел, операции над величинами – к соответствующим операциям над числами.

1. Если величины a и b измерены при помощи единицы величины e, то отношения между величинами a и b будут такими же, как и отношения между их численными значениями, и наоборот:
   $a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)$, $a < b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b)$,
   $a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$.
2. Если величины a и b измерены при помощи единицы величины e, то, чтобы найти численное значение суммы $a + b$, достаточно сложить численные значения величин a и b:
   $a + b = c \Leftrightarrow m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b)$.
3. Если величины a и b таковы, что $b = x \cdot a$, где x – положительное действительное число, и величина a измерена при помощи единицы величины e, то, чтобы найти численное значение величины b при единице величины e, достаточно число x умножить на численное значение величины a: $b = x \cdot a \Leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a)$.

Определение 3. *Величины, которые вполне определяется одним численным значением, называются* ***скалярными величинами***.

Например, длина, площадь, объем, масса – скалярные величины. Кроме скалярных величин в математике рассматриваются еще и *векторные величины*. Для определения векторной величины необходимо указать не только численное ее значение, но и направление. Примерами векторных величин могут служить сила, ускорение, напряженность электрического поля и др.

§3. Из истории развития системы единиц величин

В истории развития единиц величин можно выделить несколько периодов.

Самым древним является период, когда единицы длины отождествлялись с названием частей человеческого тела. Так, в качестве единиц длины применяли ладонь (ширина четырех пальцев без большого), локоть (длина локтя), фут (длина ступни), дюйм (длина сустава большого пальца) и др. В качестве единиц площади в этот период выступали: колодец (площадь, которую можно полить из одного колодца), соха или плуг (средняя площадь, обработанная за день сохой или плугом) и др.

В XIV—XVI вв. появляются в связи с развитием торговли так называемые объективные единицы измерения величин. В Англии, например, дюйм (длина трех приставленных друг к другу ячменных зерен), фут (ширина 64 ячменных зерен, положенных бок о бок). В качестве единиц массы были введены гран (масса зерна) и карат (масса семени одного из видов бобов).

Следующий период в развитии единиц величин — введение единиц, взаимосвязанных друг с другом. В России, например, такими были единицы длины: миля, верста, сажень и аршин (3 аршина составляли сажень, 500 саженей — версту, 7 верст — милю).

Однако связи между единицами величин были произвольными, свои меры длины, площади, массы использовали не только отдельные государства, но и отдельные области внутри одного и того же государства. Особый разнобой наблюдался во Франции, где каждый феодал имел право в пределах своих владений устанавливать свои меры. Такое разнообразие единиц величин тормозило развитие производства, мешало научному прогрессу и развитию торговых связей.

Новая система единиц, которая впоследствии явилась основой для международной системы, была создана во Франции в конце XVIII века, в эпоху Великой французской революции. В качестве основной единицы длины в этой системе принимался **метр**[1] — одна сорокамиллионная часть длины земного меридиана, проходящего через Париж.

Кроме метра, были установлены еще такие единицы: ар — площадь квадрата, длина стороны которого равна 10 м; литр — объем и вместимость жидкостей и сыпучих тел, равный объему куба с длиной ребра 0,1 м; грамм — масса чистой воды, занимающая объем куба с длиной ребра 0,01 м.

---

[1] Слово «*метр*» происходит от греческого слова *metron*, что означает «мера».

Были введены также десятичные кратные и дольные единицы, образуемые с помощью приставок: мириа (10^4), кило (10^3), гекто (10^2), дека (10^1), деци (10^{-1}), санти (10^{-2}), милли (10^{-3}).

Единица массы **килограмм** был определен как масса 1 дм^3 воды при температуре 4 °С.

Так как все единицы величин оказались тесно связанными с единицей длины метром, то новая система величин получила название **метрической системы мер.**

В соответствии с принятыми определениями были изготовлены платиновые эталоны метра и килограмма: метр представляла линейка с нанесенными на ее концах штрихами, а килограмм — цилиндрическая гиря. Эти эталоны передали на хранение Национальному архиву Франции, в связи с чем они получили названия «архивный метр» и «архивный килограмм».

Создание метрической системы мер было большим научным достижением[2] — впервые в истории появились меры, образующие стройную систему, основанные на образце, взятом из природы, и тесно связанные с десятичной системой счисления.

Но уже скоро в эту систему пришлось вносить изменения. Оказалось, что длина меридиана была определена недостаточно точно. Более того, стало ясно, что по мере развития науки и техники значение этой величины будет уточняться. Поэтому от единицы длины, взятой из природы, пришлось отказаться. Метром стали считать расстояние между штрихами, нанесенными на концах архивного метра, а килограммом — массу эталона архивного килограмма.

Не сразу метрическая система мер получила признание. Даже через 100 лет (в 1875 г.) только 17 государств подписали Метрическую конвенцию «для обеспечения международного единства измерений и усовершенствования метрической системы мер». В настоящее время эта конвенция подписана 60 государствами.

В России метрическая система мер начала применяться наравне с русскими национальными мерами начиная с 1899 года, когда был принят специальный закон, проект которого был разработан выдающимся русским ученым Д. И. Менделеевым. Специальными постановлениями Советского государства был узаконен переход на метрическую систему мер сначала РСФСР (1918 г.), а затем и полностью СССР (1925 г.).

Созданная в XVIII веке, метрическая система мер отвечала уровню развития науки и измерительной техники того времени и, конечно, не могла быть стабильной. С целью укрепления сотрудничества по совершенствованию системы единиц величин в 1921 году бы-

[2] В создании метрической системы мер принимали крупнейшие ученые того времени — Ж. Лагранж, П. Лаплас, Т. Монж, Ж. Борда и др.

ло создано Международное бюро мер и весов. Руководит им Международный комитет мер и весов, а законодательным органом является Генеральная конференция по мерам и весам, проводимая один раз в шесть лет.

Бурное развитие науки и производства в XX веке привело к тому, что к 50-м годам возникло множество различных систем единиц, дополняющих и развивающих метрическую систему мер. Со всей остротой встала проблема создания единой универсальной системы единиц величин. Большую работу по ее решению провел Международный комитет мер и весов. Она завершилась принятием в 1960 году XI Генеральной конференцией мер и весов решения о введении Международной системы единиц (СИ).

§4. Международная система единиц (МСЕ)

Международная система единиц (СИ) — это единая универсальная практическая система единиц для всех отраслей науки, техники, народного хозяйства и преподавания. Так как потребность в такой системе единиц, являющейся единой для всего мира, была велика, то за короткое время она получила широкое международное признание и распространение во всем мире.

В этой системе семь основных единиц (метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль и кандела) и две дополнительные единицы (радиан и стерадиан).

Как известно, единица длины метр и единица массы килограмм входили и в метрическую систему мер. Какие изменения претерпели они, войдя в новую систему? Введено новое определение **метра** — он рассматривается как расстояние, которое проходит в вакууме плоская электромагнитная волна за $\frac{1}{299792458}$ долей секунды. Переход на это определение метра вызван ростом требований к точности измерений, а также стремлением иметь такую единицу величины, которая существует в природе и остается неизменной при любых условиях.

Определение единицы массы – **килограмма -** не изменилось, по-прежнему килограмм — это масса цилиндра из платино-иридиевого сплава, изготовленного в 1889 году. Хранится этот эталон в Международном бюро мер и весов в г. Севре (Франция).

Третьей основной единицей Международной системы является единица времени: **секунда**. Она намного старше метра. До 1960 года секунду определяли как $\frac{1}{86400}$ часть солнечных суток, т. е. секунда определялась по вращению Земли вокруг своей оси. Это было сделано с таким расчетом, чтобы сохранить привычные отношения между различными единицами времени. При таком определении в сутках содержится 86 400 с, что составляет 1440 мин, или 24 ч.

В 1960 году Генеральная конференция мер и весов приняла решение о переходе к единице времени, основанной на движении Земли по орбите вокруг Солнца. Секунду определили как $\frac{1}{31556925{,}9747}$ часть года. Новое определение учитывало непостоянство средних солнечных суток и значительно повысило точность ее воспроизведения. Однако и это определение не удовлетворило ученых. В 1967 году секунду определили следующим образом: «Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133». В настоящее время имеется более точное определение секунды.

Вообще развитие науки и техники постоянно вносит свои коррективы в определения единиц величин.

Измерять на практике все длины в метрах, массы в килограммах, время в секундах неудобно. Поэтому из основных единиц образуют другие единицы — кратные и дольные. Кратные единицы в 10, 10^2, 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15}, 10^{18} раз больше основной, а дольные составляют 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}, 10^{-15}, 10^{-18} основной единицы. Названия новых (кратных и дольных) единиц образуются из названий «метр», «грамм», «секунда» и других с помощью приставок, указанных в таблице:

Наименование приставки	Обозначение приставки	Множитель	Наименование приставки	Обозначение приставки	Множитель
мега	М	10^6	санти	с	10^{-2}
кило	к	10^3	милли	м	10^{-3}
гекто	г	10^2	микро	мк	10^{-6}
дека	да	10	нано	н	10^{-9}
деци	д	10^{-1}			

Величины, которые определяются через длину, массу и время, ***называют производными величинами***. Их единицы должны быть согласованы с основными.

Назовем некоторые производные величины и их единицы.

1. **Площадь**. Единицы площади — квадратный метр (м^2), квадратный километр (км^2), квадратный дециметр (дм^2), квадратный сантиметр (см^2), квадратный миллиметр (мм^2).

2. **Объем, вместимость**. Единицы объема — кубический метр (м^3), кубический дециметр (дм^3), кубический сантиметр (см^3), кубический миллиметр (мм^3), литр (л), гектолитр (гл), миллилитр (мл).

В СИ литр рассматривается как особое наименование кубического дециметра, т. е. 1 л = 1 дм^3.

3. **Скорость**. Единицы скорости — метр в секунду (м/с), километр в час (км/ч), сантиметр в секунду (см/с).

Единицы величин, применяемые в нашей стране, их наименования, обозначения и правила применения устанавливаются Государственным стандартом (ГОСТом). В соответствии с ним используется Международная система единиц, а также определена группа внесистемных единиц, которые разрешается использовать наряду с единицами СИ. В частности, для массы разрешается применение такой единицы, как тонна (т); для времени — минута (мин), час (ч), сутки (сут), неделя, месяц, год, век; для площади — гектар (га); для температуры — градус Цельсия (°С).

Заметим, что такие единицы, как центнер (для массы) и ар (для площади), изъяты из употребления согласно ГОСТу.

Следует обратить внимание и на правильное употребление терминов, связанных с единицами величин. Эти правила также установлены ГОСТом. Так, вместо термина «единица величины» не допускается применять термин «единица измерения величины», поскольку термин «измерение» определяют через понятие величины и включение слова «измерение» в термин «единица величины» приводит к порочному кругу в определениях. Следовательно, надо говорить и писать: «Метр — единица длины», «Грамм — единица массы», «Час — единица времени».

§ 5. *Геометрические величины*

Геометрические величины – это свойства геометрических фигур, характеризующих их форму и размеры. К ним относятся: длина, площадь, объем и величина угла. Это скалярные величины, так как они определяются своими численными значениями.

В геометрии, прежде всего, изучают то число, которое получается в результате измерения величины, т.е. меру величины при выбранной единице величины. Поэтому часто это число называют длиной, площадью, объемом. Относительно этого числа решают различные теоретические задачи, в частности, каким требованиям оно должно удовлетворять как мера величины, существует ли оно, каким образом его можно определить. Вообще правила измерения геометрических величин и их обоснование – важнейшая задача геометрии.

Вопросы, связанные с измерением геометрических величин, достаточно трудны, поэтому рассмотрим их в небольшом объеме, особо выделив те, которые, непосредственно связаны |с изучением величин в начальной школе.

5.1. Длина отрезка

Понятие длины отрезка и ее измерения были уже использованы неоднократно, в частности, когда рассматривали натуральное число как меру величины. В этом пункте мы только обобщим представления о длине отрезка как геометрической величине.

Будем считать, что численное значение длины отрезка, концы которого совпадают, равно нулю. Тогда о длине произвольного отрезка будем говорить, что она выражается целым неотрицательным числом.

Определение 1. ***Длиной отрезка*** *называется неотрицательная величина, обладающая следующими свойствами:*

1)равные отрезки имеют равные длины;

2)если отрезок состоит из конечного числа отрезков, то его длина равна сумме длин его частей.

Эти свойства длины отрезка используются при ее измерении. Процесс измерения длин отрезков заключается в следующем:

- из множества отрезков выбирают некоторый отрезок e и принимают его за единицу длины;
- на измеряемом отрезке a от одного из его концов откладывают последовательно отрезки, равные e, до тех пор, пока это возможно. Если отрезки, равные e, отложились n раз и конец последнего совпал с концом отрезка a, то говорят, что значение длины отрезка a есть натуральное число n и пишут $a = n \cdot e$, если же отрезки, равные e, отложились n раз и остался еще отрезок, меньший e, то на нем откладывают отрезки, равные e_1, где $e_1 = e : 10$. Если они отложились точно n_1 раз, то тогда значение длины отрезка a есть конечная десятичная дробь: $a = n,n_1 \cdot e$. Если же отрезок e_1 отложился n_1 раз и остался еще отрезок, меньший e_1, то на нем откладывают отрезки, равные $e_2 = e_1 : 10 = e : 100$.

Если продолжать этот процесс бесконечно, то получим, что значение длины отрезка a есть бесконечная десятичная дробь.

В общем случае: результатом измерения длины отрезка x является неотрицательное действительное число. Обозначим его $m(x)$. Это число и называют *численным значением длины отрезка* x при выбранной единице длины или просто *длиной*.

Доказано, что такое число всегда существует и единственно. Доказано также, что для каждого положительного действительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

Из определения длины отрезка следуют известные ***свойства численных значений длин***:

1. Каждый отрезок имеет длину, не меньшую нуля.

2. Мера длины единичного отрезка равна 1, т.е. $m(e) = 1$.

3. Если два отрезка равны, то численные значения их длин также равны, и обратно: если численные значения длин двух отрезков равны, то равны и сами отрезки.

4. Если отрезок x состоит из отрезков x_1, и x_2, то численное значение его длины равно сумме численных значений длин отрезков x_1 и x_2. Справедливо и обратное утверждение.

$$x = x_1 \oplus x_2 \Leftrightarrow m(x) = m(x_1) + m(x_2).$$

5. При замене единицы длины численное значение длины увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

6. Большему отрезку соответствует большая мера и наоборот.

На практике для измерения длин отрезков используются различные инструменты, в частности линейка с нанесенными на ней единицами длины.

При решении практических задач используются стандартные единицы длины: миллиметр (мм), сантиметр (см), метр (м), километр (км) и др.

5.2. Величина угла и ее измерение

Определение 2. ***Величиной*** *угла называется неотрицательная величина, определенная для каждого угла так, что:*

1) равные углы имеют равные величины;

2) если угол состоит из двух углов, то его величина равна сумме величин его частей.

Эти свойства лежат в основе измерения величины угла. Оно аналогично измерению длины отрезка и состоит в сравнении измеряемой величины угла с величиной угла, принятой за единицу. Единичный угол, а если нужно и его доли, откладываются на угле, величина которого измеряется. В результате получается численное значение величины угла или мера величины угла при данной единице измерения.

На практике за единицу измерения величины угла принимают градус - девяностую часть прямого угла. Один градус записывают так: 1°.

Градус делится на 60 минут, а минута на 60 секунд. Одну минуту обозначают 1', одну секунду - 1". Так, если мера величины угла равна 5 градусам 3 минутам и 12 секундам, то пишут 5°3' 12". Если нужна большая точность в измерении величин углов, используют и доли секунды.

Заметим, что часто вместо «величина угла» говорят «угол». Например, вместо «величина угла равна 45 градусам» говорят, что «угол равен 45 градусам».

На практике величины углов измеряют с помощью транспортира. Для более точных измерений пользуются и другими приборами.

Для численных значений величины угла выполняются свойства, аналогичные свойствам численных значений длин отрезков. Читателю предлагается самостоятельно сформулировать свойства величины угла.

5.3. Понятие площади фигуры и ее измерение

Каждый человек интуитивно представляет, что такое площадь комнаты, площадь участка земли, площадь поверхности, которую надо покрасить. Он также понимает, что если земельные участки одинаковы, то площади их равны; что площадь квартиры складывается из площади комнат и площади других ее помещений. Это обыденное представление о площади используется при ее определении в геометрии, где говорят о площади фигуры.

Геометрические фигуры устроены по-разному, и поэтому, когда говорят о площади, выделяют определенный класс фигур. Например, рассматривают площади многоугольных фигур или площади криволинейных фигур и т.д.

Рассмотрим понятие площади применительно к многоугольникам и ограниченным плоским фигурам.

Если говорят, что фигура F состоит (составлена) из фигур F_1 и F_2, то имеют в виду, что она является их объединением и у них нет общих внутренних точек. В этой же ситуации говорят, что фигура F разбита на фигуры F_1 и F_2 и пишут $F= F_1 \oplus F_2$.

Определение 3. ***Площадью фигуры*** *называется неотрицательная скалярная величина, определенная для каждой фигуры так, что:*

1) равные фигуры имеют равные площади;

2) если фигура состоит из конечного числа фигур, то ее площадь равна сумме их площадей.

Эти свойства площади фигуры используются при ее измерении. Чтобы измерить площадь фигуры, нужно иметь единицу площади. Как правило, такой единицей является площадь квадрата со стороной, равной единичному отрезку. Условимся площадь единичного квадрата обозначать буквой E. Результатом измерения площади фигуры F будет неотрицательное действительное число, обозначим его $S(F)$. Это число называют численным значением площади фигуры F при выбранной единице площади E.

В геометрии доказано, что для многоугольников и ограниченных плоских фигур такое число всегда существует и оно единственно. Из определения площади следуют известные свойства численных значений площади. Сформулируем некоторые из них, считая, что единица площади выбрана.

1. Если фигуры равны, то равны численные значения их площадей, т.е. $F_1 = F_2 \Rightarrow S(F_1) = S(F_2)$.
2. Если фигура F состоит из фигур F_1 и F_2, то численное значение площади фигуры равно сумме численных значений площадей фигур

F_1 и F_2, т.е. $S(F_1 \oplus F_2) = S(F_1) + S(F_2)$.

3. Численное значение площади единичного квадрата принимается равным 1, т.е. $S(E) = 1$.

4. При замене единицы площади численное значение площади фигуры F увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

5. Если фигура F_1 является частью фигуры F_2, то численное значение площади фигуры F_1 не больше численного значения площади фигуры F_2, т.е. $F_1 \subset F2 \Rightarrow S(F_1) \leq S(F_2)$.

В практической деятельности при измерении площадей используются стандартные единицы площади: квадратный метр (м^2), квадратный сантиметр (см^2) и другие. Так, квадратный метр – это площадь квадрата со стороной, равной 1 метру. Между единицами площади существует взаимосвязь. Например, 1 м^2 = 100 дм^2.

Определение 4. *Фигуры, у которых площади равны, называются* ***равновеликими****.*

Определение 5. *Две фигуры называются* ***равносоставленными****, если они составлены из одинакового числа попарно равных фигур.*

В начальной школе знакомство учащихся с понятием площади начинается на интуитивной основе. Сначала их знакомят с квадратом, а затем с прямоугольником и их площадями.

Школьникам показывают два основных способа нахождения численных значений площадей прямоугольника:

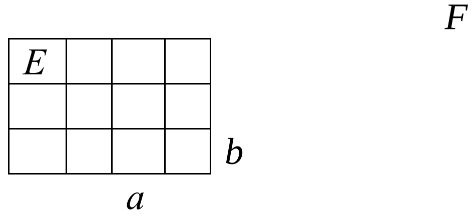
1) подсчитывая число единичных квадратов, лежащих внутри;
2) косвенным способом – перемножая численные значения длин сторон прямоугольника.

Площадь многоугольника

Теорема 1. *Площадь прямоугольника равна произведению длин соседних его сторон.*

Доказательство.

Если F- данный прямоугольник, а числа a, b – длины его сторон, то $S(F) = ab$. Докажем это.



Пусть a и b – натуральные числа. Тогда прямоугольник F можно разбить на единичные квадраты (рис.): $F = E \oplus E \oplus E \oplus \dots \oplus E$. Всего их ab, так как имеем b рядов, в каждом из которых a квадратов. Отсюда $S(F) = \underbrace{S(E) + S(E) + \dots + S(E)}_{a \cdot b \text{ слагаемых}} = a \cdot b \cdot S(E) = a \cdot b$

Следствие. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.*

Можно доказать, что площадь параллелограмма равна произведению стороны и проведенной к ней высоты, а площадь любого треугольника – половине произведения основания на высоту.

Примечание: повторить все известные формулы вычисления площадей треугольника, прямоугольника, трапеции, квадрата.

Венгерским математиком Ф. Бойяи и немецким любителем математики П. Гервином была доказана теорема:

Теорема 2. *Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены, т.е., если два многоугольника имеют равные площади, то их всегда можно представить состоящими из попарно равных частей.*

Теорема Бойяи-Гервина служит теоретической базой для решения задач на перекраивание фигур: одну разрезать на части и сложить из нее другую. Оказывается, что если данные фигуры многоугольные и имеют одинаковые площади, то задача непременно разрешима.

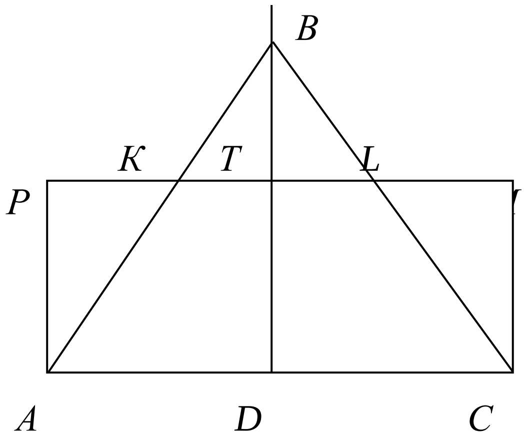
Доказательство теоремы Байяи-Гервина достаточно сложное. Мы докажем только утверждение о том, что всякий треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником, т.е. докажем теорему:

Теорема 3. *Всякий треугольник можно перекроить в равновеликий ему прямоугольник.*

Доказательство.

Пусть дан треугольник *ABC* (рис.). Проведем в нем высоту *BD* и среднюю линию *KL*. Построим прямоугольник, одной стороной которого является *AC*, а другая лежит на прямой *KL*.

Так как пары треугольников *APK* и *KBT*, а также *CLM* и *TBL* равны, то треугольник *ABC* и прямоугольник *APMC* равносоставлены.



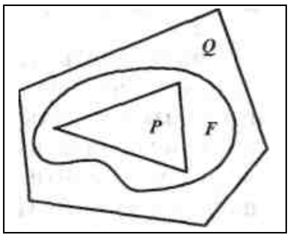
<u>Площадь криволинейной фигуры и ее измерение</u>

Пусть *F* – некоторая криволинейная фигура. Как найти ее площадь? Оказывается это можно сделать с помощью площадей многоугольных фигур. Рассмотрим способ, который используется в начальном обучении.

Если многоугольная фигура Q содержит фигуру F, а многоугольная фигура P содержится в фигуре F, т.е. $P \subset F \subset Q$ (рис.), то

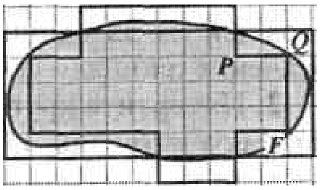
$$S(P) \le S(F) \le S(Q).$$

Если разность площадей фигур Q и P стремится к нулю, то, существует единственное число $S(F)$, удовлетворяющее неравенству, его и считают площадью фигуры F.



Воспользуемся этим положением для обоснования приема измерения площади фигуры при помощи палетки.

Палетка – это прозрачная пластина, на которой нанесена сеть квадратов. Сторона квадрата принимается за 1, и чем меньше эта сторона, тем точнее можно измерить площадь фигуры.



Накладываем палетку на данную фигуру F.

Квадраты, которые целиком лежат внутри фигуры F, образуют многоугольную фигуру P; квадраты, имеющие с фигурой F общие точки, образуют многоугольную фигуру Q.

Площади $S(P)$ и $S(Q)$ находят простым подсчетом квадратов. За приближенное значение площади фигуры F принимается среднее арифметическое найденных площадей:

$$S(F) \approx \frac{S(P)+S(Q)}{2}.$$

Действительно, пусть m – число квадратов, которые поместились внутри фигуры F, а n – число квадратов, через которые проходит контур фигуры F.

Тогда $S(P) = m$, а $S(Q) = m + n$.

И значит, $S(F) = \frac{m+(m+n)}{2} = \frac{2m+n}{2} = m + \frac{n}{2}$.

Палетка позволяет измерить площадь фигуры F с определенной точностью. Чтобы получить более точный результат, нужно взять палетку с более мелкими квадратами. Но можно поступить иначе: наложить одну и ту же палетку по-разному на фигуру и найти несколько приближенных значений площади фигуры F. Их среднее арифметическое может быть лучшим приближением к численному значению площади фигуры F.

В начальном курсе математики учащиеся измеряют площади фигур с помощью палетки таким образом:

Наложив палетку на фигуру, учащиеся определяют:

- число квадратов, которые полностью лежат внутри фигуры F;

- число квадратов, через которые проходит контур фигуры;
- затем второе число делят пополам и прибавляют к первому.

Полученную сумму считают площадью фигуры *F*.

5.4. Объем тела и его измерение

Определение 6. *Величина части пространства, занимаемого геометрическим телом, называется* ***объемом*** *этого тела.*

Определение 7. *Тело называется* ***простым****, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.*

Определение 8. ***Объем*** *простого тела – положительная скалярная величина, которая обладает следующими свойствами:*

1) *равные тела имеют равные объемы;*
2) *если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей;*
3) *объем куба, ребро которого равно единице длины, равен 1.*

За единицу измерения объемов принимается объем единичного куба, т.е. куба, длина ребра которого равна единице длины *е*. Единицу измерения объемов обозначают e^3.

Результатом измерения объема тела *F* будет неотрицательное действительное число, обозначим его *V(F)*. Это число называют численным значением объема тела *F* при выбранной единице объема.

На множестве тел, состоящих из всех многогранников и тел вращения, задача вычисления объема имеет единственное решение, причем при выбранной единице длины единственное.

Из определения объема следуют известные свойства численных значений объемов. Сформулируем некоторые из них, считая, что единица объема выбрана.

1. Если тела равны, то равны численные значения их объемов, т.е. $F_1 = F_2 \Rightarrow V(F_1) = V(F_2)$.

2. Если тело *F* состоит из тел F_1 и F_2, то численное значение объема тела *F* равно сумме численных значений объемов тел F_1 и F_2, т.е. $V(F_1 \oplus F_2) = V(F_1) + V(F_2)$.

3. При замене единицы объема численное значение объема тела *F* увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

4. Если тело F_1 является частью тела F_2, то численное значение объема тела F_1 не больше численного значения объема тела F_2, т.е. $F_1 \subset F_2 \Rightarrow V(F_1) \leq V(F_2)$.

В начальной школе учащихся знакомят с объемом куба, прямоугольного параллелепипеда. За единицу объема при измерении их берут объем такого куба, у которого ребро равно линейной единице. Для измерения объемов употребляются м^3, дм^3, см^3 и т.п.

Примечание: повторить формулы объемов пирамиды, призмы, конуса, шара, цилиндра.

§ 6. Негеометрические величины

6.1. Масса тела и ее измерение

Масса – одна из основных физических величин. Понятие массы тела тесно связано с понятием веса – силы, с которой тело притягивается Землей. Поэтому вес тела зависит не только от самого тела. Например, он различен на разных широтах (на полюсе тело весит на 0,5% больше, чем на экваторе). При своей изменчивости вес обладает особенностью: отношение весов двух тел в любых условиях остается неизменным.

При измерении веса тела путем сравнения его с весом другого выявляется новое свойство тел, которое называется ***массой.***

Представим, что на одну из чашек рычажных весов положили какое-нибудь тело *a.* На другую чашку положили второе тело *b*. При этом возможны случаи:

1) вторая чашка весов опустилась, а первая поднялась так, что они оказались в результате на одном уровне; в этом случае говорят, что весы находятся в равновесии, а тела *a* и *b* имеют равные массы;

2) вторая чашка весов так и осталась выше первой; в этом случае говорят, что масса тела *a* больше массы тела *b;*

3) вторая чашка опустилась, а первая поднялась и стала выше второй; в этом случае говорят, что масса тела *a* меньше массы тела *b*.

Определение. ***Масса –*** *это положительная величина, определенная для тела так, что*

1) масса одинакова у тел, уравновешивающих друг друга на весах;

2) масса складывается, когда тела соединяются вместе: масса нескольких тел, вместе взятых, равна сумме их масс.

Если сравнить данное определение массы с определениями длины и площади, то увидим, что масса характеризуется теми же свойствами, что и длина и площадь, но задана она на множестве физических тел.

Измерение массы производится с помощью весов. Происходит это следующим образом.

Выбираем тело *e,* масса которого принимается за единицу. Предполагается, что можно взять и доли этой массы. Например, если за единицу массы взят килограмм, то в процессе измерения можно использовать и такую его долю, как грамм: 1 г = $\frac{1}{1000}$ кг.

На одну чашку весов кладут тело, массу которого измеряют, а на другую – тела, выбранные в качестве единицы массы, т. е. гири. Этих гирь должно быть столько, чтобы они уравновесили первую чашку весов. В результате взвешивания получается численное значение массы данного тела при выбранной единице массы. Это значение приближенное. Например, если масса тела равна 5 кг 350 г, то число 5350 следует рассматривать как приближенное значение массы данного тела (при единице массы – грамм).

Для численных значений массы справедливы все утверждения, сформулированные для длины, т. е. сравнение масс, действия над ними сводятся к сравнению и действиям над численными значениями масс (при одной и той же единице массы).

Основная единица массы — килограмм. Из этой основной единицы образуются другие единицы массы: грамм, тонна и пр.

6.2. Промежутки времени и их измерение

Понятие времени более сложное, чем понятие длины и массы. В обыденной жизни время – это то, что отделяет одно событие от другого. В математике и физике время рассматривают как скалярную величину, потому что промежутки времени обладают свойствами, похожими на свойства длины, площади, массы.

Промежутки времени можно сравнивать. Например, на один и тот же путь пешеход затратит больше времени, чем велосипедист.

Промежутки времени можно складывать. Так, лекция в институте длится столько же времени, сколько два урока в школе.

Промежутки времени можно вычитать, умножать на положительное действительное число.

Промежутки времени измеряют. Но процесс измерения времени отличается от измерения длины. Для измерения длины можно многократно использовать линейку, перемещая ее от точки к точке. Промежуток времени, принятый за единицу, может быть использован лишь один раз. Поэтому единицей времени должен быть регулярно повторяющийся процесс. Такой единицей в Международной системе единиц названа *секунда*. Наряду с секундой используются и другие единицы времени: минута, час, сутки, год, неделя, месяц, век. Такие единицы, как год и сутки, были взяты из природы, а час, минута, секунда придуманы человеком.

Год — это время обращения Земли вокруг Солнца. Сутки — время обращения Земли вокруг своей оси. Год состоит приблизительно из 365¼ суток. Но год жизни людей складывается из целого числа суток. Поэтому вместо того, чтобы к каждому году прибавлять 6 ч, прибавляют целые сутки к каждому четвертому году. Этот год состоит из 366 дней и называется *високосным*.

Календарь с таким чередованием лет ввел в 46 году до н. э. римский император Юлий Цезарь в целях упорядочивания существующего в то время очень запутанного календаря. Поэтому новый календарь называется *юлианским*. Согласно ему новый год начинается с 1 января и состоит из 12 месяцев. Сохранилась в нем и такая мера времени, как неделя, придуманная еще вавилонскими астрономами.

В Древней Руси неделя называлась седмицей, а воскресенье — днем недельным (когда нет дел) или просто неделей, т. е. днем отдыха. Теперь в русском языке день отдыха называется воскресенье — от слова «воскрешать», т. е. придавать силы, оживить. Названия следующих пяти дней недели указывают, сколько дней прошло после воскресенья. Понедельник — сразу после недели, вторник — второй день, среда — середина, четверг и пятница — четвертые и пятые сутки, суббота — конец дел.

Месяц не очень определенная единица времени, он может состоять из тридцати одного, тридцати и двадцати восьми (двадцати девяти в високосные годы) дней. Но существует эта единица времени с древних времен и связана с движением Луны вокруг Земли. Один оборот вокруг Земли Луна делает примерно за 29,5 суток, и за год она совершает примерно 12 оборотов. Эти данные и послужили основой для создания древних календарей, а результатом их многовекового усовершенствования является тот календарь, который используется в настоящее время.

Вернемся к юлианскому календарю. Этот календарь, принятый христианской церковью, распространился среди всех европейских народов и просуществовал более 16 столетий.

Но постепенно люди стали замечать, что результаты измерения времени по календарю не сходятся с результатами измерений по Солнцу. Например, 21 марта — день весеннего равноденствия в XVI веке пришелся на 11 марта по календарю. Откуда взялась эта разница в 10 дней? Они накапливались постепенно, из года в год, поскольку год по юлианскому календарю на 11 мин 14 с больше солнечного и за 400 лет набегало примерно трое с лишним суток. Чтобы в дальнейшем расхождения не возникало, в новом григорианском календаре, названном в честь тогдашней главы католической церкви папы Григория XIII и принятом в 1582 году, было уменьшено число високосных лет. По юлианскому календарю високосными были все годы, число которых делилось на 4. По григорианскому из их числа исключались те, которые были «вековыми» и не делились на 400: например, 1600 год — високосный, а 1700, 1800 и 1900 из числа високосных исключались, они содержали по 365 суток. 2000 год был високосным, а, заглядывая вперед, скажем, что, 2100, 2200, 2300 годы не будут високосными.

Этот календарь был принят в европейских странах. В России до

Великой Октябрьской социалистической революции православная церковь отклоняла эту реформу. Здесь жили по юлианскому календарю, что причиняло многие неудобства. 14 февраля 1918 года у нас был введен новый стиль. В соответствии с этим декретом февраль 1918 был укорочен на 13 дней. После 31 января наступило сразу 14 февраля. С тех пор мы и живем по новому стилю.

Заметим, что если юлианский календарный год длиннее солнечного на 11 ¼ мин, то григорианский всего на 26 с. Лишние сутки накопятся только в 50-м веке н. э.

Григорианский календарь принят не всеми государствами мира. Например, Египет и другие страны Востока пользуются другим календарем — лунным. Год по этому календарю равен 12 лунным месяцам и короче солнечного на 11 дней.

Чтобы вести счет, надо иметь начало отсчета. У времени нет начала и нет конца. Оно «течет» и «течет». Поэтому, чтобы считать, нужно самим установить начало счета. Установить начало суток, года можно разными способами. Так, древние египтяне вели летоисчисление по годам правления фараонов, китайцы — по годам царствования и династиям императоров, римляне — от основания города Рима и от первого года царствования того или иного императора, другие народы — от мифического «сотворения мира» или от «рождения Христа».

В Древней Руси год начинался весной, в марте, когда приступали к полевым работам. С введением христианства на Руси был принят юлианский календарь и начало летоисчисления от «сотворения мира», причем это «сотворение мира» христианская церковь приурочила к 5508 году до «рождества Христова», а началом года считала 1 сентября. Такой отсчет лет велся на Руси до начала XVIII столетия. Указом Петра I Русское государство перешло на другое летоисчисление: началом года стало 1 января, а года стали считать не от «сотворения мира», а от «рождества Христова». В соответствии с ним год принятия указа 7208 стал 1700 годом. Счет лет от рождения мифического Христа в настоящее время принят большинством государств и называется нашей эрой (н. э.).

Современное деление суток на 24 ч также восходит к глубокой древности, оно было введено в Древнем Египте. Минута и секунда появились в Древнем Вавилоне, а в том, что в часе 60 мин, а в минуте 60 с, сказывается влияние шестидесятеричной системы счисления, изобретенной вавилонскими учеными.

§ 7. Зависимости между величинами

Понятие величины, принимающей различные численные значения, является отражением изменяемости окружающей нас действительности. Но всевозможные изменения в реальном мире не происходят не зависимо друг от друга. Изучение этих связей посредством изучения зависимостей между величинами является способом применения математики для решения практических задач, способом математизации знаний.

Зависимости между величинами многообразны. Их изучают различные науки. Рассмотрим те, с которыми встречаются учащиеся в начальном курсе математики.

Рассмотрим величины, связанные с равномерным прямолинейным движением: время, скорость и расстояние. Зависимость между временем (t), скоростью (v) и расстоянием (s), пройденным телом при прямолинейном равномерном движении, может быть выражена формулой $s = v \cdot t$.

Если движение таково, что скорость принимает одно и то же значение, то зависимость пройденного расстояния от времени прямо пропорциональная, так как выражается формулой вида $y = k \cdot x$. Переменная x есть время движения, а переменная y – пройденное расстояние. Коэффициент k обозначает скорость движения. Прямо пропорциональная зависимость между временем и пройденным расстоянием обладает свойством: во сколько раз увеличивается (уменьшается) время движения, во столько же раз увеличивается (уменьшается) пройденное расстояние.

Зависимость расстояния прямолинейного равномерного движения от времени (при постоянной скорости) может быть и линейной, т. е. она может выражаться формулой вида $y = kx + b$, где k и b – некоторые данные числа.

Рассмотрим в качестве примера такую задачу: «Туристы за день прошли пешком *18 км*, а остальной путь проехали на автобусе со скоростью *45 км/ч*. Какой путь проделали туристы за день, если на автобусе они ехали *2 ч? 3 ч? 4ч?»*

Если туристы ехали на автобусе *2 ч,* то всего за день они проделали путь s*=18 км + 45 км/ч · 2 ч=18 км + 90 км = 108 км.*

Если они ехали на автобусе 3 ч, то всего за день они проделали путь s *= 18 км + 45 км/ч · 3 ч=153 км*.

За 4 ч они проделали путь s *= 18 км + 45 км/ч · 4 ч =208 км.*

Видим, что зависимость между временем и пройденным расстоянием линейная, так как она может быть представлена формулой вида

$s = v \cdot t + s_o$, где s_o*=18 км,* а v *= 45 км/ч.*

Если среди величин s, v и t две величины – скорость и время – принимают различные значения, а расстояние постоянно, то зависимость между скоростью и временем движения обратно пропорциональная, так как может быть выражена формулой $y = \frac{k}{x}$, где переменная x есть скорость движения, переменная y – время движения (или наоборот), постоянная k есть расстояние, которое надо пройти телу.

Обратно пропорциональная зависимость между скоростью и временем движения обладает свойством: во сколько раз увеличивается (уменьшается) скорость движения, во столько же раз уменьшается (увеличивается) время, затраченное на движение.

Знание зависимости между величинами, данными в текстовой задаче, позволяет находить различные способы ее решения.

Аналогичные зависимости существуют и между другими величинами, рассматриваемыми в начальных классах. Например, такими, как:

а) стоимость товара, его количество и цена;
б) объем работы, время работы и производительность труда;
в) количество ткани, количество изделий и расход на одно изделие.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

15.1. Назовите объект, его величину, численное значение и единицу измерения величины в каждом из следующих предложений:
1) «В коробке 8 кг яблок»; 2) «Глубина оврага 2 м»;
3) «Площадь садового участка 6 соток»; 4) «В сервизе 6 тарелок»;
5) «Рост девочки 1 м 20 см»; 6) «Объем жидкости 5 л».
15.2. Выразите:
1) в сантиметрах 8 см 79 мм; 2) в минутах 8 мин 12 с;
3) в тоннах 125 кг 300 г; 4) в метрах 10 см 15 мм.
15.3. Сравните величины:
1) 56 мин и $\frac{7}{10}$ час; 2) 1,5 см и $\frac{3}{20}$ дм; 3) $\frac{3}{50}$ м и $\frac{4}{5}$ дм.
15.4. Решите задачи и объясните, какие действия над величинами выполнялись в процессе решения:
1) Книга дешевле альбома на 77 рублей 80 копеек. Сколько стоят два таких альбома, если книга стоит 168 рублей 50 копеек?
2) В двух баках содержалось 140 л воды. Когда из первого взяли 26 л воды, а из второго 60 л, то в первом баке осталось в 2 раза больше воды, чем во втором. Сколько литров воды было в каждом баке первоначально?
3) На обработку трех деталей потратили $\frac{4}{3}$ часа. На первую деталь было затрачено 0,25 часа, на вторую – $\frac{2}{3}$ часа. Сколько времени пошло на обработку третьей детали?
4) На нефтебазе было 12680 т бензина. В первый день база отпустила 834 т, во второй – в 2 раза меньше, чем в первый, а в третий – на 229 т больше, чем во второй. Сколько тонн бензина осталось на базе?
5) Для вышивания первого узора нужно 24 м ниток, для второго – в 6 раз меньше, а для третьего – на 16 м больше, чем для первого. Хватит

ли 7 катушек для вышивания всех узоров, если в каждой катушке по 10 м ниток?

6) Петя выполняет некоторую работу за 2 дня. Коля выполняет эту работу за 3 дня, а Вася – за 6 дней.

а) За какое время они выполнят эту работу вместе?

б) За какое время они выполнят всю работу, если сначала третью часть ее выполнит один Петя, затем половину оставшегося – Коля, а уже остальное – Вася?

в) Кто выполнит работу быстрее: Петя один или Коля и Вася вместе?

г) Ребята выполнили эту работу вместе и получили 4518 рублей. Сколько денег причитается каждому?

15.5. Установите, в процессе измерения, каких величин были получены следующие результаты: 12,3 м; 17 мм^3; 140 л; 5 кг 300 г; 160 т; 6 км/ч; 16 руб.

15.6. Назовите основные, дольные и кратные единицы величин: длины, массы, времени, площади и скорости.

15.7. Как изменится числовое значение величины, если единицу этой величины: 1) уменьшить в 3 раза; 2) увеличить в 5 раз?

15.8. Известное произведение Ж. Верна называется «20 000 лье под водой». Выразите в километрах указанную глубину, если 1 лье = 4,44км.

15.9. В нашей стране атмосферное давление измеряют в миллиметрах ртутного столба (мм рт. ст.). В странах Европы в Паскалях (П). Выразите давление 746 мм рт. ст. в Паскалях, если 1 мм рт. ст.= 133,322 П. Ответ округлите до целых.

15.10. Ранее в России использовались единицы длины миля, верста, сажень и аршин (3 аршина составляли сажень, 500 саженей – версту, 7 верст – милю). Найдите значения этих величин в метрах, если 1 аршин равен 0,7112 м.

15.11. Моряки всех стран расстояние, пройденное кораблем, измеряют в милях. Одна морская миля равна 1852 м. Выразите в километрах расстояние, равное 320 милям.

15.12. Для измерения длины отрезка используются единицы:
1 миля (сухопутная) = 1609 м; 1 миля (морская) = 1852 м;
1 кабельтов = 0,1 морской мили; 1 дюйм = 25,4 мм;
1 фут = 12 дюймов = 0, 3048 м; 1 ярд = 3 фута = 914,4 м;
1 лье = 4,44 км.
Выразите в этих единицах: 125 км; 25,6 см; 150 м.

15.13. Длина некоторого отрезка равна 24*е*. Чему будет равна длина этого отрезка, если единицу длины *е*: 1) увеличить в 2 раза; 2) уменьшить в 2 раза?

15.14. Проиллюстрируйте примером истинность следующих высказываний:

1) Длина одного и того же отрезка может выражаться различными числами.
2) Длины неравных отрезков могут выражаться одним и тем же числом.
15.15. Дан отрезок *е*. Постройте отрезки, длины которых равны: 3*е*; 0,6*е*; 1,8*е*.
15.16. Истинно ли высказывание: «Если многоугольники равны, то они равновелики? Сформулируйте высказывание, обратное данному. Истинно ли оно?»
5.17. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если длину каждой его стороны увеличить на 25%?
5.18. Как изменится площадь прямоугольника, если:
1) длину и ширину его увеличить в 3 раза;
2) длину и ширину уменьшить в 2 раза;
3) длину увеличить в 3 раза, а ширину уменьшить в 3 раза;
4) длину увеличить в 2 раза, а ширину не изменять?
15.19. Решите следующие задачи и объясните, какие операции над длинами были выполнены в процессе решения:
1) В мотке 240 метров проволоки. $\frac{5}{8}$ этой проволоки израсходовали. На сколько метров проволоки больше израсходовали, чем осталось?
2) Периметр треугольника 37 см. Одна сторона 12 см, другая составляет 75 % длины первой стороны. Чему равна длина третьей стороны?
3) Бревно длиной 8,1 м распилили на 2 части так, что одна из них оказалась в 1,7 раза длиннее другой. Какова длина каждой части бревна?
4) Площадь кухни 9 м^2. Сколько плиток, имеющих форму квадрата со стороной 3 дм, нужно для покрытия пола кухни?
5) На пришкольном огороде прямоугольной формы выделены два опытных участка одинаковой площади. Длина первого участка 30 м, а ширина 28 м. Чему равна длина второго участка, если его ширина 20м?
6) Комната имеет длину 8,5 м, ширину 5,6 м и высоту 2,75 м. Площадь окон и дверей составляет 0,1 общей площади стен комнаты. Сколько рулонов обоев понадобится для оклеивания этой комнаты, если рулон обоев имеет длину 10 м и ширину 0,75 м?
7) Площадь одной стены комнаты равна 14 м^2 90 дм^2, а смежной стены – 9 м^2 80 дм^2. В комнате имеется окно площадью 3 м^2 50 дм^2 и дверь площадью 2 м^2 20 дм^2. Кроме того, десятая часть стен под потолком не оклеивается обоями. Какую площадь займут обои?
8) Прямоугольный участок земли размером 130×60 м окопали рвом шириной 1 м, причем ров выкопали на участке. Какова новая площадь участка?

15.20. Установите, какие величины рассматриваются в следующих задачах, каковы зависимости между ними, приведите различные способы решения задач:

1) Из двух городов выехали навстречу друг другу два мотоциклиста. Один мотоциклист двигался со скоростью 90 км/ч и проехал до встречи 180 км. Какое расстояние проехал до встречи другой мотоциклист, если он двигался со скоростью 45 км/ч?

2) При нагревании воды в течение 7,5 мин температура её повысилась на 30°. На сколько градусов повысится температура в том же сосуде за 12,5 мин?

3) При ежедневном расходе 3,6 т угля имеющихся запасов хватит на 56 дней. На сколько дней хватит запасов угля, если ежедневно расходовать 2,4 т?

Образец контрольной работы

1. Выразите:

1) в дециметрах 2 м 45 см; 2) в часах 12 мин 32 сек;

3) в килограммах 13 т 250 кг 600 г.

2. Сравните величины:

1) $\frac{5}{6}$ часа и 319 секунд; 2) 7,5 дециметра и $\frac{3}{4}$ метра;

3) $\frac{4}{5}$ минуты и $\frac{1}{75}$ часа.

3. Решите задачу и объясните, какие действия над величинами выполнялись в процессе решения: « Два насоса наполняют чан. Первый насос, действуя один, наполняет его в 3 часа, а второй – в 6 часов. Во сколько времени наполнится чан при одновременном действии обоих насосов?»

4. Для измерения длины отрезка используются единицы:

1 миля (сухопутная) = 1609 м; 1 дюйм = 25,4 мм;

1 миля (морская) = 1852 м; 1 фут = 12 дюймов = 0,3048 м;

1 кабельтов = 0,1 морской мили; 1 ярд = 3 фута;

1 лье = 4,44 км.

Выразите в этих единицах: 1) 242 км; 2) 43,5 см.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие………………………………………………… 3
ТЕМА 9. Расширение понятия числа………………………….. 4
§1. Краткие исторические сведения из истории возникновения и развития понятия числа………………… 4
§2. Дробь как результат измерения длины отрезка. Отношение равенства дробей……………………….. 6
§3. Понятие положительного рационального числа. Арифметические действия с положительными рациональными числами…………………………….. 9
§4. Упорядоченность множества положительных рациональных чисел……………………………… 15
§5. Множество положительных рациональных чисел как расширение множества натуральных чисел….. 17
§6. Запись положительных рациональных чисел в виде десятичных дробей……………………….. 18
§7. Бесконечные десятичные периодические дроби...... 23
§8. Множество действительных чисел как расширение множества рациональных чисел…………………… 26
§9. Аксиоматическое построение множества действительных чисел……………………………. 28
§10. Представление действительных чисел десятичными дробями…………………………………………… 30
§11. Геометрическое изображение множества действительных чисел. Модуль действительного числа….. 31
§12. Арифметические операции над действительными числами………………………………………. 34
12.1. Арифметические операции над действительными числами, представленными конечными десятичными дробями……………………………. 34
12.2. Арифметические операции над действительными числами, представленными бесконечными десятичными дробями……………………………. 36
Задания для самостоятельной работы…………….. 40
ТЕМА 10. Числовые выражения и выражения с переменной. Тождества…………………………………………. 44
§1. Об алфавите математического языка……………… 44
§2. Числовые выражения и выражения с переменной…. 44
§3. Тождественные преобразования выражений……… 46
§4. Числовые равенства и неравенства………………… 47
Задания для самостоятельной работы…………….. 48
ТЕМА 11. Числовые функции ………………………………….. 51

§1. Определение числовой функции……………………. 51
§2. Способы задания функций……………………….. 52
§3. Общие свойства числовых функций……………… 53
§4. Прямая пропорциональность…………………….. 55
§5. Линейная функция……………………………… 57
§6. Обратная пропорциональность…………………… 58
§7. Квадратичная функция…………………………… 60
Задания для самостоятельной работы………………. 61
ТЕМА 12. Уравнения…………………………………………… 63
§1. Уравнения с одной переменной. Теоремы о равносильности уравнений……………………………… 63
§2. Виды алгебраических уравнений и их решение….. 65
§3. Уравнения с двумя переменными……………….. 70
§4. Системы уравнений……………………………. 72
§5. Системы линейных уравнений…………………… 75
Задания для самостоятельной работы……………… 77
ТЕМА 13. Неравенства ………………………………………… 80
§1. Понятие неравенства. Неравенства с переменной. Равносильные неравенства. Теоремы о равносильности неравенств……………………………….. 80
§2. Линейные неравенства. Квадратные и дробно-линейные неравенства. Метод интервалов………… 84
§3. Системы и совокупности неравенств с одной переменной………………………………………… 89
§4. Неравенства с двумя переменными. Геометрическое изображение множества решений неравенства с двумя переменными……………………………….. 92
Задания для самостоятельной работы……………… 95
ТЕМА 14. Текстовые задачи ………………………………… 98
§1. Понятие текстовой задачи. Структура текстовых задач………………………………………………… 98
§2. Классификация текстовых задач…………………. 99
§3. Методы решения текстовых задач………………… 101
§4. Этапы решения задачи и приёмы их выполнения…. 106
§5. Моделирование в процессе решения текстовых задач………………………………………………… 112
Задания для самостоятельной работы……………… 116
ТЕМА 15. Величины и их измерение …………………………….. 117
§1. Понятие величины. Основные свойства величин….. 117
§2. Понятие измерения величины. Скалярные и векторные величины……………………………… 118
§3. Из истории развития системы единиц величин…… 120
§4. Международная система единиц (МСЕ)…………… 122

§5. Геометрические величины…………………………… 124
5.1. Длина отрезка……………………………………. 124
5.2. Величина угла и ее измерение…………………. 126
5.3. Понятие площади фигуры и ее измерение……... 127
5.4. Объем тела и его измерение……………………. 131
§6. Негеометрические величины………………………… 132
6.1. Масса тела и ее измерение……………………… 132
6.2. Промежутки времени и их измерение…………. 133
§7. Зависимости между величинами……………………. 135
Задания для самостоятельной работы……………… 137

Учебное издание

И.А. Елецких,
Татьяна Михайловна Сафронова,
Н.В. Черноусова

МАТЕМАТИКА
(Часть II)

Техническое исполнение – В. М. Гришин
Технический редактор – О.А. Ядыкина

Лицензия на издательскую деятельность
ИД № 06146. Дата выдачи 26.10.01
Формат 60 х 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 8,9 Уч.-изд.л. 8,3
Тираж 300 экз. (1-й завод 1-50 экз.). Заказ 191

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И.А.Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1