МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЯ

И.А. Елецких, Т.М. Сафронова,
Н.В. Черноусова

МАТЕМАТИКА

(ЧАСТЬ I)

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки: 44.03.01 – «Педагогическое образование» (Профиль подготовки: «Начальное образование»)

Елец – 2016

УДК 51
ББК 22.1
Е 50

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 31.01. 2017, протокол № 1

Рецензенты:

О.В. Тарасова, доктор педагогических наук, профессор
(Орловский государственный университет),

Г.А. Симоновская, кандидат педагогических наук, доцент
(Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина)

И.А. Елецких, Т.М. Сафронова, Н.В. Черноусова

Е 50 Математика: учебное пособие. (Часть I). – из-е 2-е, доп. и перераб. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2016. - 205 с.

ISBN 978-5-94809-816-6 (ч. 1)
ISBN 978-5-94809-817-3

Учебное пособие «Математика» написано в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки «Педагогическое образование» (профиль подготовки – Начальное образование, квалификация выпускника – бакалавр) и нацелено на решение задачи обеспечения будущего учителя начальных классов математической подготовкой, необходимой ему для грамотного, творческого обучения и воспитания младших школьников, для дальнейшей работы по углублению и расширению математических знаний.

Пособие содержит теоретический материал, изложение которого сопровождается разбором типовых примеров (задач). Завершается каждый параграф списком заданий для самостоятельной работы. Кроме того, в пособии имеются образцы контрольных работ по темам.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-94809-816-6 (ч. 1)
ISBN 978-5-94809-817-3

Предисловие

Современный учитель начальных классов поставлен перед выбором собственной методики обучения, направленной на всестороннее развитие личности младшего школьника средствами предмета. Учитывая, что в настоящее время в начальной школе используются как традиционные, так и вариативные учебники математики, от учителя требуется не только методическое мастерство, но и глубокое понимание сути математических понятий и фактов. Прежде всего, необходимо знание научных основ начального курса математики: различных подходов к определению понятия натурального числа, понятия величины и её измерения, понятия функции и функциональной зависимости между величинами, знание алгебры и геометрии.

Учебное пособие «Математика» написано в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки «Педагогическое образование» (профиль подготовки – Начальное образование, квалификация выпускника – бакалавр) и нацелено на решение задачи обеспечения будущего учителя начальных классов математической подготовкой, необходимой ему для грамотного, творческого обучения и воспитания младших школьников, для дальнейшей работы по углублению и расширению математических знаний.

Модернизация высшего образования предполагает использование компетентностного подхода. В совокупности с другими дисциплинами базовой и вариативной частей ФГОС ВПО дисциплина «Математика» направлена на формирование общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций бакалавра педагогического образования.

Высшая школа должна формировать целостную систему универсальных знаний, умений и навыков, а также опыт самостоятельной деятельности и личной ответственности студентов, то есть ключевые компетенции, определяющие современное качество содержания образования. Данное пособие предназначено для студентов очного и заочного отделений университетов. Его цель организовать самостоятельную работу при изучении теоретического курса математики и осуществить контроль за качеством усвоения основных вопросов. Задачи учебного пособия: изложение системы знаний по темам учебной дисциплины; раскрытие содержания курса в форме, удобной для изучения и усвоения; управление познавательной деятельностью студентов.

Структура пособия такова: теоретический материал разбит на темы, темы – на параграфы. В содержании каждого параграфа студентам предоставляется: структурированный теоретический материал, образцы записи доказательств теорем. Изложение теоретического материала сопровождается разбором типовых примеров (задач), которые раскрывают суть рассматриваемого материала. Завершается каждый параграф списком заданий для самостоятельной работы, предназначенных как для более глубокого усвоения теории, так и для формирования у будущего учителя ряда профессиональных умений, а также позволяющих проверить уровень усвоения изучаемого материала. Кроме того, в пособии имеются образцы контрольных работ по темам.

При разработке пособия использованы материалы авторов прошлых лет и современности (Н.Я. Виленкин, Л.П. Стойлова, А.П. Пышкало, Н.Н. Лаврова, А.П. Тонких и др.). Часть задач составлена авторами пособия, другая часть взята из известных задачников, справочников и учебных пособий.

Отличие пособия от ранее изданных состоит в том, что в нем учтены преподавание дисциплины в рамках классического университета и разнообразие методических подходов в современных учебниках математики для начальной школы.

Материал пособия может быть использован при подготовке к практическим занятиям, написанию курсовых работ, промежуточной и государственной итоговой аттестации.

Работа с данным пособием позволит преподавателям осуществлять уровневую дифференциацию обучения, сокращать время на развитие у студентов практических навыков, включать студентов в активную учебную деятельность и повышать ее мотивацию.

ТЕМА 1.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

§1. *Понятие высказывания. Простые и составные высказывания*

Определение. *Под* ***высказыванием*** *понимают всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно.*

Примерами высказываний могут служить следующие утверждения:

1) Москва – столица России;
2) Число 221 – простое;
3) $13 < 17$.

Утверждения 1 и 3 истинны, а утверждение 2 ложно, так как $221=13 \cdot 17$.

Таким образом, каждое высказывание либо истинно, либо ложно. Одновременно быть истинным и ложным высказывание не может.

Высказывания могут быть образованы с помощью слов или символов. Однако, не каждый набор слов или символов (даже осмысленный) является высказыванием. Например, утверждения:

1) В Московский государственный университет поступить легко;
2) $x = 0$;
3) $2x+3 > 0$

высказываниями не являются, так как судить об их истинности или ложности невозможно.

Для обозначения высказываний обычно используют заглавные буквы латинского алфавита A, B, C и т.д. Например, пишут $A=(6<7)$, $B=$(*число 6 - простое*). Это означает, что высказывание A заключается в утверждении, что число 6 меньше числа 7, а высказывание B – в том, что 6 – простое число. Знак «=» заменяет слова «есть высказывание».

Высказывания A и B являются примерами простых высказываний. Из простых высказываний при помощи так называемых логических связок (союзов «и», «или», слов «если…, то…», «тогда и только тогда, когда…») можно образовывать новые высказывания. Так, например из высказываний $A = (6 < 7)$ и $B =$ (*число 6 - простое*), используя логические связки, можно образовать следующие сложные высказывания:

$C=$(6 < 7 *и* 6 – *простое число*);

$D=$(6 < 7 *или* 6 – *простое число*);

$E=$(*если* 6 < 7*, то* 6 – *простое число*);

G=(6 < 7 *тогда и только тогда, когда* 6 – *простое число*).

Отметим, что новые высказывания можно образовывать и из таких высказываний, которые никак не связаны между собой по смыслу. Например, высказывание F=(*если слон – насекомое, то Антарктида покрыта тропическими лесами*) составлено при помощи логической связки «если…, то…» из двух высказываний между которыми нет никакой смысловой связи.

Истинность или ложность сложного высказывания определяется, во-первых, тем, какие логические связки использованы для образования сложного высказывания и, во-вторых, тем, какие из простых высказываний, образующих сложное, истинны и какие ложны. Для этого в логике высказываний вводятся операции над высказываниями, соответствующие связкам, при помощи которых образуются сложные высказывания.

§2. *Операции над высказываниями*

2.1. Отрицание высказывания

Определение 1. ***Отрицанием*** *высказывания A называется высказывание, которое истинно, если A ложно, и ложно, если A истинно.*

Отрицание высказывания A обозначается символом $\bar{A}$ (читается «не A»). Таблица истинности для высказывания $\bar{A}$ имеет вид

A	$\bar{A}$
и	л
л	и

Пример 1. *Дано высказывание A=(*27 *нацело делится на* 3). *Сформулировать отрицание этого высказывания и определить его истинность.*

Решение.

Отрицание данного высказывания имеет вид $\bar{A}$=(27 *не делится на* 3). Так как данное высказывание истинно, то высказывание $\bar{A}$ является ложным.

Пример 2. *Сформулировать отрицание высказывания B*=(3≥5) *и определить его истинность.*

Решение.

Отрицанием ложного высказывания B является истинное высказывание $\bar{B}$=(3 < 5).

2.2. Конъюнкция высказываний

Определение 2. ***Конъюнкцией*** *высказываний A и B называется высказывание, которое истинно лишь при условии, что истинны оба высказывания A и B одновременно, и ложно во всех остальных случаях.*

Конъюнкция высказываний A и B обозначается символом $A \wedge B$ (читается «A и B»). Таблица истинности высказывания $A \wedge B$ имеет вид

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Пример 1. *Из высказываний A*=(2 *– простое число*) *и B*=(2 *– четное число*) *составить высказывание C*= $A \wedge B$ *и определить его истинность.*

Решение.

C=(2 – *простое число и* 2 – *четное число*). Так как A истинное высказывание и B истинное высказывание, то по определению конъюнкции C также истинное высказывание.

Пример 2. *Определить истинность высказывания C*=(*3 – корень уравнения* $x^2 - 9 = 0$ *и 3 – целое число*).

Решение.

Высказывание C состоит из двух простых высказываний A=(*3 – корень уравнения* $x^2 - 9 = 0$) и B = (*3 – целое число*). Высказывание A истинно, высказывание B истинно, высказывание C образовано из высказываний A и B при помощи логической связки «и», которая соответствует операции конъюнкции. Согласно определению конъюнкции C – истинное высказывание.

2.3. Дизъюнкция высказываний

Определение 3. ***Дизъюнкцией*** *высказываний A и B называется высказывание, которое истинно при условии, что истинно хо-*

тя бы одно из высказываний A или B, и ложно, когда высказывания A и B одновременно ложны.

Дизъюнкция высказываний A и B обозначается символом $A \vee B$ (читается «A или B»). Таблица истинности для высказывания $A \vee B$ имеет вид

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Пример 1. *Из высказываний $A=(3 < 5)$ и $B=(3 = 5)$ составить высказывание $C= A \vee B$ и определить его истинность.*

Решение.

$C=$ ($3 < 5$ *или* $3 = 5$)=($3 \leq 5$). A – истинное высказывание, B – ложное высказывание; C составлено при помощи операции дизъюнкции, следовательно, по определению дизъюнкции оно также истинно.

Пример 2. *Определить истинность высказывания C = (уравнение x -5 = 0 имеет корни 2 или 5).*

Решение.

Высказывание C состоит из высказываний *A=(уравнение x-5=0 имеет корень 2)* и *B=(уравнение x – 5 = 0 имеет корень 5)*. Высказывание A ложно, высказывание B истинно, следовательно, по определению дизъюнкции двух высказываний C – истинное высказывание.

2.4. Импликация высказываний

Определение 4. ***Импликацией*** *высказываний A и B называется высказывание, которое ложно лишь при условии, что A истинно, а B ложно, и истинно во всех остальных случаях.*

Импликация высказываний A и B обозначается символом $A \Rightarrow B$ (читается «если A, то B»). Таблица истинности высказывания $A \Rightarrow B$ имеет вид

A	B	$A \Rightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Пример. *Из высказываний A=(30 делится на 6) и B=(30 делится на 3) составить высказывание C= $A \Rightarrow B$ и определить его истинность.*

Решение.

C=(если 30 делится на 6, то 30 делится на 3). Высказывание A истинно, высказывание B истинно, высказывание C образовано из высказываний A и B при помощи операции импликации. Согласно определению 4 C – истинное высказывание.

Высказывание A называется ***условием***, а высказывание B – ***заключением*** импликации $A \Rightarrow B$. Если в импликации $A \Rightarrow B$поменять местами условие и заключение, то получим новую импликацию $B \Rightarrow A$, которая называется импликацией ***обратной*** данной. Импликация $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ называется ***противоположной*** импликации $A \Rightarrow B$. Импликация $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ называется ***обратной для противоположной***.

2.5. Эквиваленция высказываний

Определение 5. ***Эквиваленцией*** *высказываний A и B называется высказывание, которое истинно, если A и B имеют одинаковую истинность (либо оба истинны, либо оба ложны), и ложно во всех остальных случаях.*

Эквиваленция высказываний A и B обозначается символом $A \Leftrightarrow B$ (читается «*A* тогда и только тогда, когда *B*» или «*A* эквивалентно *B*»). Таблица истинности высказывания $A \Leftrightarrow B$ имеет вид

A	B	$A \Leftrightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Пример. *Из высказываний A=(60 делится на 10) и B=(60 оканчивается цифрой 0) составить высказывание C= $A \Leftrightarrow B$ и определить его истинность.*

Решение.

Высказывание A истинно, высказывание B истинно, значит высказывание *C=(60 делится на 10 тогда и только тогда, когда 60 оканчивается цифрой 0)* также будет истинным высказыванием по определению эквиваленции.

Итак, в логике высказываний определяют пять операций: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и эквиваленцию, определения которых приводились в этом параграфе.

§3. Формулы логики высказываний

Определение 1. *Элементарные высказывания и составные высказывания, составленные из элементарных высказываний при помощи знаков* $\overline{\ }$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ *называются* ***формулами логики высказываний***.

Примерами формул логики высказываний могут служить следующие высказывания: A, $\bar{A} \wedge B$, $\bar{A} \Rightarrow (A \vee B)$, $A \Rightarrow (A \Leftrightarrow \bar{B})$ и другие.

Определение 2. *Две формулы логики высказываний называются* ***равносильными****, если они имеют одну и ту же истинность при любых предположениях об истинности логических переменных, из которых эти формулы составлены.*

Равносильность формул логики высказываний обозначается знаком $\equiv$.

Примеры равносильных формул логики высказываний

1. Высказывание и двойное отрицание высказывания равносильны: $A \equiv \bar{\bar{A}}$.
2. $A \wedge A \equiv A$; $A \vee A \equiv A$.
3. $A \wedge B \equiv B \wedge A$; $A \vee B \equiv B \vee A$. Эти две равносильности выражают коммутативность операций конъюнкции и дизъюнкции.
4. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$; $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ - ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции.
5. Отрицание дизъюнкции высказываний A и B равносильно конъюнкции их отрицаний: $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$.
   Отрицание конъюнкции высказываний A и B равносильно дизъюнкции их отрицаний: $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$.

Для доказательства равносильности формул логики высказываний строят таблицы истинности для высказываний и сравнивают столбцы, соответствующие этим формулам.

Пример 1. *Доказать, что* $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$.

Решение.

Строим таблицу истинности, в которую входят высказывания из данной формулы:

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
и	и	и	л	л	л	л
и	л	л	и	л	и	и
л	и	л	и	и	л	и
л	л	л	и	и	и	и

Сравниваем 4-й и 7-й (последний) столбцы таблицы. Истинность одинакова. Следовательно, $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$.

Определение 3. *Формулы логики высказываний называются **тождественно истинными (или тавтологиями)**, если они истинны при любых предположениях об истинности логических переменных, из которых эти формулы составлены.*

*Формулы логики высказываний называются **тождественно ложными**, если они ложны при любых предположениях об истинности логических переменных, из которых эти формулы составлены.*

Тождественно истинные, тождественно ложные и равносильные формулы логики высказываний относятся к законам логики.

Важнейшими законами логики являются:

1. Закон двойного отрицания: $A \equiv \bar{\bar{A}}$.
2. Закон контрапозиции: $A \Rightarrow B \equiv \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.
3. Закон исключения третьего: $A \vee \bar{A} \equiv$ и (дизъюнкция высказывания и его отрицания тождественно истинна).
4. Закон противоречия: $A \wedge \bar{A} \equiv$ л (конъюнкция высказывания и его отрицания тождественно ложна).
5. Законы де Моргана: $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$; $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$.

Существуют и другие законы логики высказываний.

Для составления таблиц истинности для различных формул логики высказываний требуется знание определенных правил. Остановимся на подробном их рассмотрении.

Для уменьшения числа скобок в формулах логики высказываний вводят следующие соглашения.

1. В сложной формуле будем опускать внешнюю пару скобок.
2. Упорядочим знаки логических операций по «старшинству»: $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\bar{\ }$. В этом списке знак $\Leftrightarrow$ имеет самую большую область действия, а знак $\bar{\ }$ - самую маленькую.

Договоримся опускать во всякой формуле те пары скобок, которые можно восстановить, учитывая «порядок старшинства».

Пример 2. *В формуле $B \Leftrightarrow \bar{C} \vee D \wedge A$ восстановите скобки.*

Решение.

1). $B \Leftrightarrow (\bar{C}) \vee D \wedge A$, 2). $B \Leftrightarrow (\bar{C}) \vee (D \wedge A)$,

3). $B \Leftrightarrow ((\bar{C}) \vee (D \wedge A))$, 4). $(B \Leftrightarrow \left((\bar{C}) \vee (D \wedge A)\right))$.

Однако не всякая формула может быть записана без скобок. Например, в формулах $(A \Rightarrow B) \wedge C$, $A \wedge (B \vee \bar{C})$ дальнейшее исключение скобок невозможно.

Существует определенный порядок составления таблиц истинности для формул логики высказываний:

1. Заполняют первую строку таблицы, в которую вносят все элементарные высказывания, входящие в формулу, и сложные высказывания, составленные из элементарных, учитывая порядок, о котором говорилось выше.
2. Определяют количество возможных истинностных строк в таблице по формуле $m=2^n$, где m – количество истинностных строк, n – число элементарных высказываний, входящих в формулу.
3. Заполняют первый столбец таблицы, соответствующий первому элементарному высказыванию. В него, начиная сверху, вносят $\frac{m}{2}$ значений «и» и $\frac{m}{2}$ значений «л».
4. Заполняют второй столбец таблицы соответствующий второму элементарному высказыванию, имеющемуся в таблице. В этом столбце, начиная сверху, будут чередоваться $\frac{m}{4}$ значений «и» и $\frac{m}{4}$ значений «л».
5. В третьем столбце элементарных высказываний будет чередование $\frac{m}{8}$ значений «и» и $\frac{m}{8}$ значений «л» и т.д.
6. После заполнения всех столбцов для элементарных высказываний переходят к заполнению столбцов сложных высказываний, пользуясь определениями логических операций, которые считаются «старшими» в конкретном столбце.

Пример 3. *Составить таблицу истинности для высказывания*

$$A \wedge B \vee \bar{C}.$$

Решение.

В эту формулу входят три элементарных высказывания *A, B, C* и составные высказывания $\bar{C}$, $A \wedge B$, $(A \wedge B) \vee \bar{C}$ (в порядке возрастания их сложности). Так как элементарных высказываний три, то *m=8*, т.е. истинностных строк будет 8. Первый столбец таблицы для высказывания *A* будет содержать чередование четырех значений «истинно» и четырех значений «ложно». Второй столбец таблицы для высказывания B – чередование двух значений «и» и двух значений «л». Третий столбец для высказывания C – чередование одного значения «и» и одного значения «л». При составлении истинностных столбцов для высказываний $\bar{C},\ A \wedge B,\ (A \wedge B) \vee \bar{C}$ воспользуемся определениями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции высказываний. Итак, таблица будет иметь вид

A	B	C	$\bar{C}$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee \bar{C}$
и	и	и	л	и	и
и	и	л	и	и	и
и	л	и	л	л	л
и	л	л	и	л	и
л	и	и	л	л	л
л	и	л	и	л	и
л	л	и	л	л	л
л	л	л	и	л	и

§4. Множества. Способы задания множеств. Подмножества. Равенство множеств

Понятие «множество» является одним из фундаментальных понятий математики. Оно не определяется, а лишь поясняется на примерах. Можно говорить о множестве студентов, обучающихся в данном университете, о множестве гласных букв русского алфавита, о множестве решений неравенства $x+5<12x$ и т.д.

Множества будем обозначать большими латинскими буквами *A, B, C,…, X, У, Z.*

Определение 1. *Объекты, из которых состоит данное множество, называются* ***элементами*** *этого множества.*

Элементы множеств будем обозначать малыми латинскими буквами *a, b, c,…, x, y, z.* Если элемент *a* принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$, а если элемент *a* не принадлежит множеству *A*, то пишут $a \notin A$.

Определение 2. *Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется* ***пустым*** *и обозначается* $\emptyset$.

Пример 1. *Найти множество действительных корней уравнения*

$$x^2 + 1 = 0.$$

Решение.

Преобразуем уравнение к виду $x^2 = -1$, но квадрат любого действительного числа не может быть числом отрицательным. Следовательно, уравнение действительных корней не имеет. Если за X обозначить множество действительных корней данного уравнения, то $X = \emptyset$.

Множество считают заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

Множество может быть задано:

- перечислением всех его элементов в любом порядке, при этом пользуются записью с фигурными скобками, например, $A=\{a, b, c\}$ или $M=\{1, 2, 3, 4\}$;
- указанием характеристического свойства, т.е. свойства, которым обладают все элементы данного множества и только они, при этом пользуются обозначением $M=\{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ – характеристическое свойство, которым обладают элементы x (читается «Множество M состоит из таких элементов x, каждый из которых обладает свойством $P(x)$»).

Эти два способа задания множеств тесно связаны, и в ряде случаев можно перейти от одного способа задания к другому.

Пример 2. *Множество M задано указанием характеристического свойства $M=\{x \mid x^2 - 5x + 6=0\}$. Запишите это множество перечислением всех его элементов.*

Решение.

Чтобы выполнить это задание, необходимо решить уравнение

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

По теореме Виета уравнение имеет два корня 2 и 3. Они и составляют множество решений уравнения. Следовательно, $M=\{2, 3\}$.

Определение 3. *Множество, которое может быть задано перечислением всех его элементов, называется **конечным**.*

*Множество, которое не может быть задано перечислением всех его элементов, называется **бесконечным**.*

Примерами бесконечных множеств могут служить множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ и множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$. Все элементы этих множеств перечислить невозможно. В качестве примера конечного множества можно привести множество натуральных чисел, не превосходящих 6, т.е. множество $A=\{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ x \leq 6\}$.

Определение 4. *Множества A и B считают **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.*

Равенство множеств A и B обозначают символом $A = B$.

Пример 3. *Определить равны ли множества* $A=\{1, 2, 3\}$ *и* $B= \{x| \ x \in \mathbf{N}, x < 4\}$.

Решение.

Множество A задано перечислением его элементов и содержит три элемента – 1, 2, 3. Множество B задано указанием характеристического свойства. В него войдут те натуральные числа, которые меньше 4, т.е. числа 1, 2, 3. Множества A и B состоят из одинаковых элементов, следовательно, они равны: $A = B$.

Определение 5. *Множество B называется* ***подмножеством*** *множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.*

Обозначение: $B \subset A$ (читается «B включено в A» или «B – подмножество A»).

Пример 4. $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B=\{3, 4\}$. *Является ли B подмножеством A?*

Решение.

Множество B состоит из двух элементов 3 и 4. $3 \in A$ и $4 \in A$, следовательно, каждый элемент B принадлежит A. По определению подмножества $B \subset A$.

Пример 5. *A – множество двузначных натуральных чисел, B – множество четных двузначных натуральных чисел. Является ли B подмножеством A?*

Решение.

Так как множество состоит из всех двузначных натуральных чисел, то в него войдут четные и нечетные двузначные натуральные числа. Значит каждый элемент множества B содержится в A, следовательно, $B \subset A$.

Определение 6. *Пустое множество и само множество A называются* ***несобственными*** *подмножествами множества A; все остальные подмножества множества A называются* ***собственными*** *подмножествами множества A.*

Отношение «включения» множеств обладает следующими свойствами.

1. Свойством рефлексивности: $A \subset A$ (всякое множество является подмножеством самого себя).

2. Свойством транзитивности: если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Если можно видеть все элементы множеств A и B, то для доказательства равенства множеств можно воспользоваться ранее записанным определением равных множеств. Однако не всегда множества могут быть заданы указанием принадлежащих им элементов. Поэтому, в дальнейшем, для доказательства утверждений будем пользоваться другим определением равных множеств.

Определение 7. *$A = B$ тогда и только тогда, когда* $A \subset B$ и $B \subset A$.

§5. Универсальное множество. Диаграммы Эйлера-Венна

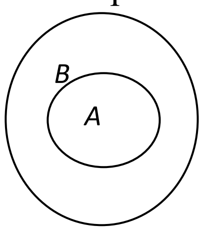
Для наглядного изображения множеств и отношения между ними чертят замкнутую линию и представляют, что элементы множества определены точками, находящимися внутри начерченных линий (точки показывать необязательно). Такие изображения множеств называют диаграммами Эйлера-Венна.

Пример. *Изобразить с помощью диаграмм Эйлера-Венна следующие отношения между множествами:*

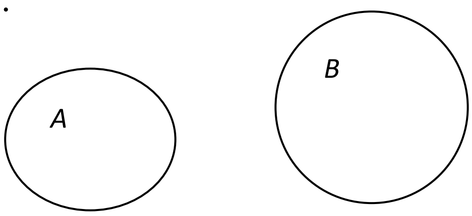
а) $A \subset B$; *в)* $A \not\subset B$; *c)* если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Решение.

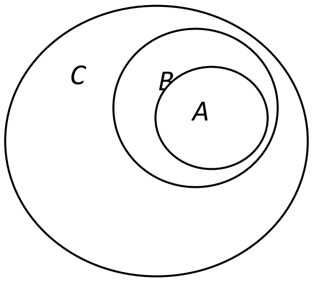
а) Так как $A \subset B$, то каждый элемент множества A принадлежит множеству B и на кругах Эйлера это будет показано так



в) По условию $A \not\subset B$, следовательно, множества A и B не имеют общих элементов:



c) Рассуждая аналогичным образом, получим диаграмму



Определение. *Если рассматриваются только подмножества некоторого множества U, то множество U называется **универсальным** множеством.*

Если рассматривать фигуры в плоскости ***П***, то ***П*** – универсальное множество. Если рассматривать подмножества множества целых чисел ***Z***, то ***Z*** – универсальное множество.

Универсальное множество на диаграммах Эйлера-Венна будем изображать в виде прямоугольника.

§6. Предикаты. Область определения и область истинности предиката

Пусть *x* – переменная с областью определения *X*.

Определение 1. *Предложение A(x) с переменной x называется **предикатом (или высказывательной формой)**, если оно становится высказыванием при подстановке вместо переменной ее любого допустимого значения.*

*Множество X допустимых значений переменной x называется **областью определения** предиката.*

*Множество T значений x, при подстановке которых в предикат A(x) получается истинное высказывание, называется **множеством истинности** предиката A(x).*

Пример 1. *Являются ли перечисленные ниже предложения предикатами? Если да, то укажите их область определения и множество истинности.*

a) $A(x)=(x + 1= 0),\ x \in R;$ *b)* $B(x)=(x^2 - 1=0),\ x \in R;$

c) $C(x)=(x^2 - 7x + 12),\ x \in R.$

Решение.

a) При подстановке вместо *x* любых действительных значений будем получать либо истинное, либо ложное высказывания. Следовательно, *A(x)* – предикат, $X = R$, $T=\{-1\}$.

b) *B(x)* – предикат, $X = R$, $T=\{-1, 1\}$.

c) C(x) не является предикатом, так как не становится высказыванием при подстановке вместо переменной ее любого допустимого значения.

Замечание. *Предикат может зависеть от двух, трех и большего числа переменных. Предикат A(x) от одной переменной называется одноместным, предикат F(x, y) от двух переменных – двухместным и т.д.*

Предикаты, заданные на конечных множествах, можно задавать таблицами, в первой строке которых указываются элементы области определения, а во второй – истинно или ложно высказывание, получаемое из предиката, если заменить переменную этими элементами.

Пример 2. *Дан предикат A(x)=(x – четное число), X={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Задать предикат A(x) в виде таблицы.*

Решение.

x	1	2	3	4	5	6
A(x)	л	и	л	и	л	и

Пусть *A(x)* и *B(x)* определены на множестве *X*. При подстановке вместо переменной *x* конкретных элементов из множества *X* предикаты становятся высказываниями, поэтому над предикатами можно выполнять логические операции.

Определение 2. ***Отрицанием*** *предиката A(x),* $x \in X$, *называется предикат* $\overline{A(x)}$, *определенный на том же множестве X, и обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех значениях переменной x из множества X, при которых предикат A(x) обращается в ложное высказывание.*

Пример 3. *Задан предикат A(x)=(число x оканчивается цифрой 5) на множестве X={10, 15, 20, 25, 30}. Составьте предикат* $\overline{A(x)}$ *и укажите его множество истинности.*

Решение.

$\overline{A(x)}$=(число *x* не оканчивается цифрой 5). $T_{A(x)}=\{15,\ 25\}$; $T_{\overline{A(x)}} = \{10, 20, 30\}$.

Определение 4. ***Конъюнкцией*** *предикатов A(x) и B(x) называется предикат* $A(x) \wedge B(x)$, *который обращается в истинное высказывание при тех и только тех значениях x из множе-*

ства X, при которых оба предиката A(x) и B(x) одновременно обращаются в истинные высказывания.

Пример 4. *На множестве X={10, 15, 16, 20, 35} заданы предикаты A(x)=(число x – четное) и B(x)=(число x кратно 5). Составить предикат $A(x) \wedge B(x)$ и определить множество его истинности.*

Решение.

$A(x) \wedge B(x)$= (число x четно и кратно 5). $T_{A(x)}=\{10, 16, 20\}$, $T_{B(x)}=\{10, 15, 20, 35\}$, а $T_{A(x)\wedge B(x)} = \{10, 20\}$.

Определение 5. ***Дизъюнкцией*** *предикатов A(x) и B(x) называется предикат $A(x) \vee B(x)$, который обращается в истинное высказывание при тех и только тех значениях x из множества X, при которых хотя бы один из предикатов A(x) или B(x) обращается в истинное высказывание.*

Пример 5. *A(x)=(x – 2 >0); B(x)=(x + 2 ≥ 0); X = R. Составьте предикат $A(x) \vee B(x)$ и найдите его множество истинности.*

Решение.

$A(x) \vee B(x)$=*(x-2>0 или x+2≥0).*

$T_{A(x)} = \{x \in R|\ x > 2\}$; $T_{B(x)} = \{x \in R| x \geq -2\}$;

$T_{A(x)\vee B(x)} = \{x \in R|\ x \geq -2\}$.

Определение 6. ***Импликацией*** *предикатов A(x) и B(x) называется предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$, который обращается в ложное высказывание при тех и только тех значениях x из множества X, при которых предикат A(x) обращается в истинное высказывание, а предикат B(x) – в ложное высказывание, а в остальных случаях предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$ обращается в истинное высказывание.*

Замечание. $A(x) \Rightarrow B(x)$ *читают «если A(x), то B(x)».*

Пример 6. *A(x)=(натуральное число x делится на 3), B(x)=(натуральное число x делится на 4). Составить предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$.*

Решение.

$A(x) \Rightarrow B(x)$=(если натуральное число x делится на 3, то оно делится на 4).

Определение 7. *Предикаты A(x) и B(x), заданные на одном и том же множестве X, называются* ***эквивалентными****, если их множества истинности совпадают.*

Если предикаты *A(x)* и *B(x)* эквивалентны, то пишут $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ или $A(x) \sim B(x)$. Читается «*A(x)* тогда и только тогда, когда *B(x)*».

Пример 7. *Заданы предикаты A(x) = (натуральное число x делится на 10) и B(x) = (десятичная запись натурального числа оканчивается цифрой 0). Составить предикат* $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

Решение.

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$=(натуральное число x делится на 10 тогда и только тогда, когда десятичная запись этого числа оканчивается цифрой 0).

Замечание. *Если предикаты A(x) и B(x) эквивалентны на множестве X, то каждый из них называют необходимым и достаточным условием для другого.*

§7. Кванторы. Запись высказываний на языке логики предикатов

Определение 1. ***Квантором общности*** *называется символ* ∀. *Квантор общности заменяет слова «всякий», «каждый», «любой», «все».*

Определение 2. ***Квантором существования*** *называется символ* ∃. *Он заменяет слова «существует», «найдется».*

Определение 3. *Кванторы общности и существования называют* ***двойственными****.*

С помощью кванторов и предикатов строят высказывания. Операция получения высказываний из предикатов называется операцией связывания кванторами.

Вообще, высказывание «Для всех $x \in X$ истинно *A(x)*» записывается так: $(\forall x \in X)$: $A(x)$. Высказывание «Существует $x \in X$, для которого истинно *A(x)*» записывают так: $(\exists x \in X)$: $A(x)$.

Пример. *Прочитайте следующие высказывания и определите их истинность:*

1. $(\forall x \in R)$: $x^2 + 1 > 0$;
2. $(\exists x \in R)$: $x + 2 > 0$;
3. $(\forall x \in N)$: $(2x + 1) \vdots 3$.

Решение.

1. Для всякого действительного числа x выполняется неравенство $x^2 + 1 > 0$. Это истинное высказывание.
2. Существует действительное число x, для которого выполняется неравенство $x + 2 > 0$. Это также истинное высказывание, так как, например, $x = 0$ удовлетворяет неравенству.
3. Для любого натурального числа x выполняется, что выражение $2x + 1$ нацело делится на 3. Это ложное высказывание, так как, например, при $x = 2$ данное утверждение не выполняется.

Все сказанное остается справедливым и для многоместных предикатов, но при этом надо иметь в виду, что в подобных случаях для получения высказываний надо связать квантором каждую переменную. Например, если дан предикат «Прямые x и y параллельны», то для получения высказывания надо связать кванторами обе переменные. Например, $(\exists x)(\exists y)$: $x \parallel y$ или $(\forall x)(\exists y)$: $x \parallel y$.

Выясним, как устанавливают значения истинности высказываний с кванторами.

В высказывании $(\forall x \in X): A(x)$ утверждается, что для любого x из множества X истинно $A(x)$, поэтому, чтобы убедиться в истинности высказывания, надо показать, что множество истинности предиката $A(x)$ совпадает с множеством X. Чтобы убедиться в ложности высказывания $(\forall x \in X): A(x)$, достаточно показать, что $T_{A(x)} \neq X$, т.е. показать, что существует значение x, при котором высказывание, полученное из предиката, ложно.

Например, чтобы убедиться в истинности высказывания «Любое натуральное число, меньшее 5, является решением неравенства $x^3 - 3x + 9 < 0$» можно показать, что каждое из чисел 1, 2, 3, 4 является решением этого неравенства. Чтобы убедиться в ложности высказывания «Все числа положительны», достаточно назвать число, которое не является положительным. Например, - 3.

Итак, истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства. Показать ложность таких высказываний можно, приведя контр пример.

В высказывании $(\exists x \in X): A(x)$ утверждается, что во множестве X есть такой элемент x, который обладает свойством $A(x)$. Поэтому оно будет истинно, если множество истинности предиката $A(x)$ не пусто. Для того чтобы показать это, достаточно привести пример. Высказывание $(\exists x \in X): A(x)$ ложно в том случае, когда $T_{A(x)} = \emptyset$. Убедиться в этом можно лишь путем доказательства.

Таким образом, истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера. Чтобы убедиться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.

Выясним теперь, как построить отрицание высказываний с кванторами. Существует правило преобразования высказываний $\overline{(\forall x \in X)\colon\ A(x)}$ и $\overline{(\exists x \in X)\colon\ A(x)}$.

Правило. *Для того чтобы построить отрицание высказываний с кванторами, нужно заменить квантор общности на квантор существования (и наоборот), а предложение, стоящее после квантора – на его отрицание.*

Символически это записывают так:

$$\overline{(\forall x \in X)\colon\ A(x)} = (\exists x \in X)\colon \overline{A(x)} \quad \text{и} \quad \overline{(\exists x \in X)\colon\ A(x)} = (\forall x \in X)\colon \overline{A(x)}$$

§8. Операции над множествами и их основные свойства

8.1. Пересечение множеств

Определение 1. ***Пересечением*** *множеств A и B называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат каждому из данных множеств.*

Пересечение множеств A и B обозначается символом $A \cap B$.

По определению: $A \cap B = \{x |\ x \in A\ \wedge x \in B\}$.

Пример 1. *Найдите пересечение множеств:*

a) A={1, 2 , 3, 4}, B={2, 3, 5}; b) A={1, 2, 3}, B={4, 5}.

Решение.

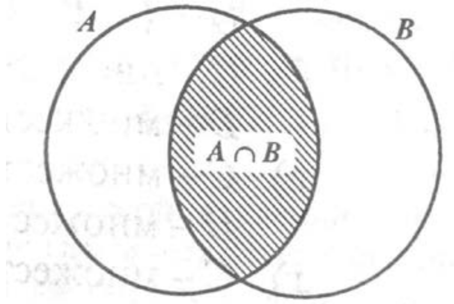
a) 1 принадлежит только множеству A, значит в пересечение не войдет; 2 войдет в пересечение, т.к. принадлежит сразу двум множествам A и B; 3 войдет в пересечение; 4 принадлежит только множеству A и, следовательно, не будет в пересечении этих множеств; 5 принадлежит только множеству B, значит не войдет в пересечение.

Итак, $A \cap B = \{2, 3\}$.

b) Множества A и B не содержат ни одного общего элемента, поэтому $A \cap B = \emptyset$.

Замечание. *Если* $A \cap B = \emptyset$, *то говорят, что множества A и B не пересекаются.*

На диаграммах Эйлера-Венна $A \cap B$ – заштрихованная область:



Теорема 1. *Операция пересечения множеств обладает следующими свойствами:*

1. $A \cap B = B \cap A$ *(коммутативность);*
2. $A \cap B = A$;
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
4. $A \cap U = A$;
5. *Если* $A \subset B$, *то* $A \cap B = A$;
6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(ассоциативность).*

Доказательство.

Свойства 1 – 5 непосредственно следуют из определения операций пересечения множеств и равенства множеств. Докажем свойство 6.

a). Пусть x – любой элемент множества $(A \cap B) \cap C$, тогда $x \in (A \cap B) \cap C$, следовательно, $x \in A \cap B$ и $x \in C$, значит, $x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$.

$x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \cap C$,

$x \in A \wedge x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$.

Следовательно, каждый элемент множества $(A \cap B) \cap C$ принадлежит множеству $A \cap (B \cap C)$. По определению подмножества $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$.

b). Пусть y – любой элемент множества $A \cap (B \cap C)$. Тогда $\in A \cap (B \cap C)$. Следовательно,

$y \in A \wedge y \in B \cap C \Rightarrow y \in A \wedge y \in B \wedge y \in C$.

$y \in A \wedge y \in B \Rightarrow y \in A \cap B$,

$y \in A \cap B \wedge y \in C \Rightarrow y \in (A \cap B) \cap C$.

Значит, каждый элемент множества $A \cap (B \cap C)$ принадлежит множеству $(A \cap B) \cap C$. Следовательно, $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$.

Из *a)* и *b)* следует, что $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Теорема доказана.

8.2. Объединение множеств

Определение 2. ***Объединением*** *множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств.*

Объединение множеств обозначается символом $A \cup B$.

По определению: $A \cup B = \{x |\ x \in A\ \vee x \in B\}$.

Пример 2. *Найдите объединение множеств:*

a) A={1 , 2, 3, 4}, B={1, 3, 5, 7};

b) M_1 *– множество всех нечетных целых чисел,* M_2 *– множество всех четных целых чисел.*

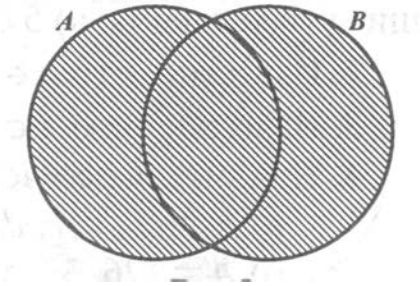
Решение.

a) В объединение множеств A и B войдут все элементы множества A, а также те элементы множества B, которых нет в A:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}.$$

b) $M_1 \cup M_2 = Z$.

На кругах Эйлера-Венна $A \cup B$ — заштрихованная область:



Теорема 2. *Операция объединения множеств обладает следующими свойствами:*

1. $A \cup B = B \cup A$ *(коммутативность);*
2. $A \cup A = A$ *;*
3. $A \cup \emptyset = A$;
4. $A \cup U = U$;
5. *Если* $A \subset B$, *то* $A \cup B = B$;
6. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; *(ассоциативность).*

Доказательство.

Свойства 1 – 5 непосредственно следуют из определения операций объединения множеств и равенства множеств. Докажем свойство 6.

a). Пусть x – любой элемент множества *(A* $\cup$ *B)* $\cup$ C, тогда x принадлежит множеству *(A*$\cup$*B)* $\cup$*C*. Следовательно, $x \in A \cup B \ \vee x \in C \ \Longrightarrow$ $x \in A \ \vee x \in B \ \vee x \in C$.

$x \in A \ \Longrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$;

$x \in B \Longrightarrow x \in B \cup C \ \Longrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$;

$x \in C \ \Longrightarrow x \in B \cup C \ \Longrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$.

Следовательно, *(A*$\cup$*B)* $\cup$*C* $\subset$ *A*$\cup$ *(B*$\cup$*C)*.

b). Пусть y – любой элемент множества *A*$\cup$*(B*$\cup$*C)*. Следовательно, $y \in A \cup (B \cup C) \ \Longrightarrow y \in A \ \vee y \in B \cup C \ \Longrightarrow y \in A \ \vee y \in B \ \vee y \in C$.

$y \in A \ \Longrightarrow y \in A \cup B \ \Longrightarrow y \in (A \cup B) \cup C$;

$y \in B \ \Longrightarrow y \in A \cup B \ \Longrightarrow y \in (A \cup B) \cup C$;

$y \in C \ \Longrightarrow y \in (A \cup B) \cup C$.

Следовательно, *A*$\cup$ *(B*$\cup$*C)* $\subset$ *(A*$\cup$*B)* $\cup$*C.*

Из *a)* и *b)* следует справедливость равенства. Теорема доказана.

8.3. Связь между операциями объединения и пересечения множеств

Связь между операциями объединения и пересечения множеств отражают свойства дистрибутивности.

Теорема 3. *Для любых множеств A, B, C справедливы равенства:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \qquad (1)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \qquad (2)$$

Доказательство.

Формулы (1) и (2) доказываются аналогично. Докажем, например, формулу (1).

a).

Пусть $x \in A \cap (B \cup C) \ \Longrightarrow x \in A \ \wedge x \in B \cup C \ \Longrightarrow x \in A \ \wedge (x \in B \ \vee x \in C)$.

$$x \in A \ \wedge x \in B \ \Longrightarrow x \in A \cap B \qquad (3)$$

$$x \in A \ \wedge x \in C \ \Longrightarrow x \in A \cap C \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, а значит $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b). Пусть $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, тогда $y \in A \cap B \ \vee y \in A \cap C$.

Если $y \in A \cap B$, то $y \in A \ \wedge \ y \in B \ \Longrightarrow y \in A \ \wedge y \in B \cup C \ \Longrightarrow$ $y \in A \cap (B \cup C)$.

Если $y \in A \cap C$, то $y \in A \ \wedge \ y \in C \ \Longrightarrow y \in A \ \wedge y \in B \cup C \ \Longrightarrow$ $y \in A \cap (B \cup C)$.

Следовательно, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

Из *a)* и *b)* следует справедливость равенства (1). Теорема доказана.

8.4. Разность множеств. Дополнение к множеству

Определение 3. ***Разностью*** *множеств A и B называется множество, в которое входят все элементы из множества A, не принадлежащие множеству B.*

Разность множеств A и B обозначается символом $A|B$.

По определению: $A|B = \{x |\ x \in A\ \wedge x \notin B\}$.

Пример 3. *Найдите разность множеств:*

a) A={1, 2, 3, 4, 5}, B={1, 2, 3};

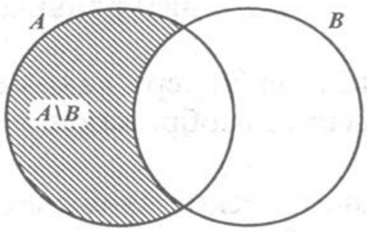
b) C={a, b}, D={a, b, c}.

Решение.

a) Выберем из множества A те элементы, которых нет в B: 4 и 5. Они и войдут в разность, т.е. $A|B=\{4, 5\}$.

b) Во множестве C нет элементов, которые бы не входили во множество D, следовательно, $C|D = \emptyset$.

На диаграммах Эйлера-Венна $A|B$ — заштрихованная область:



Определение 4. *Если B⊂A, то разность A и B называется* ***дополнением*** *к множеству B во множестве A.*

Дополнение к B во множестве A обозначается символом C_A^B или $B_A^/$.

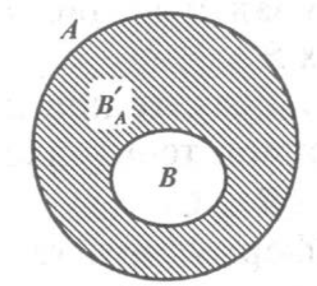
По определению $B_A^/ = A|B$, если $B \subset A$.

Пример 4. *Найдите* $B_A^/$, *если A={1, 2, 3, 4, 5}, B={1, 2, 4}.*

Решение.

$B \subset A$, следовательно, $B_A^/ = A|B = \{3, 5\}$.

На диаграммах Эйлера-Венна $B_A^/$ — заштрихованная область:



Определение 5. *Если U – универсальное множество, то дополнение к множеству B в универсальном множестве называется просто* ***дополнением*** *к множеству B.*

Дополнение к множеству B обозначается символами CB или B', т.е. $B' = U|B$.

Теорема 4. *Для любых подмножеств A и B универсального множества имеют место следующие равенства:*

$$(A \cap B)' = A' \cup B' , \tag{1}$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' . \tag{2}$$

Доказательство.

Докажем формулу (1).

Пусть $x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \in A' \vee x \in B' \Rightarrow x \in A' \cup B' \Rightarrow (A \cap B)' \subset A' \cup B'$.

Пусть теперь $y \in A' \cup B' \Rightarrow y \in A' \vee y \in B' \Rightarrow y \notin A \vee y \notin B \Rightarrow y \notin A \cap B \Rightarrow y \in (A \cap B)' \Rightarrow A' \cup B' \subset (A \cap B)'$.

Из определения равных множеств и следует справедливость равенства (1). Равенство (2) доказывается аналогично.

§9. Понятие о разбиении множества на классы

Определение 1. ***Классами*** *множества M называются его подмножества, если они не пусты, попарно не пересекаются и их объединение равно множеству M.*

Из определения 1 следует, что для того чтобы разбить множество на классы, необходимо соблюдение условий:

1) выделяемые подмножества должны быть не пусты;
2) попарно не пересекаться;
3) объединений этих подмножеств должно совпасть с данным множеством.

Если не выполнено хотя бы одно из условий, то классификация выполнена неправильно.

Пример 1. *Разбить на классы множество М всех треугольников плоскости.*

Решение.

Обозначим через K_1 множество остроугольных треугольников, через K_2 – множество тупоугольных треугольников, а через K_3 – множество прямоугольных треугольников. Множества K_1 , K_2 , K_3 не пусты, попарно не пересекаются, все являются подмножествами множества M и их объединение равно множеству M. Следовательно, K_1 , K_2 , K_3 – классы множества M.

Разбиение множества на классы можно выполнять при помощи свойств элементов множеств. Пусть задано множество M и некоторое свойство α. Множество тех элементов, которые содержатся в M и обладают свойством α, обозначим K, а множество тех элементов, которые содержатся в M и не обладают свойством α, обозначим $\overline{K}$. Покажем, что K и $\overline{K}$ есть классы множества M.

Действительно, множества K и $\overline{K}$ непустые подмножества множества M, $K \cap \overline{K} = \emptyset$ и $K \cup \overline{K} = M$. Следовательно, K и $\overline{K}$ - классы множества M.

Таким образом, с помощью одного свойства множество разбивается на два класса.

Пример 2. *Множество М – множество треугольников плоскости. Свойство α формулируется так: «быть прямоугольным треугольником». Записать и назвать классы множества М.*

Решение.

K_1 – множество прямоугольных треугольников, K_2 – множество непрямоугольных треугольников. Очевидно, что K_1 и K_2 – классы множества M.

Пусть дано множество M и два свойства α и β. Обозначим множество элементов, содержащихся в M и обладающих свойством α через A, не обладающих свойством α – через $\bar{A}$, обладающих свойством β – через B, не обладающих свойством β – через $\bar{B}$. Рассмотрим множества:

$K_1 = A \cap B$ — множество элементов, которые содержатся в M и обладают свойствами α и β;

$K_2 = \bar{A} \cap B$ — множество элементов, содержащихся в M, не обладающих свойством α, но обладающих свойством β;

$K_3 = A \cap \bar{B}$ — множество элементов, содержащихся в M, обладающих свойством α, но не обладающих свойством β;

$K_4 = \bar{A} \cap \bar{B}$ — множество элементов, содержащихся в M, не обладающих ни свойством α, ни свойством β.

Множества K_1 , K_2 , K_3 , K_4 попарно не пересекаются и их объединение совпадает с множеством M. Значит K_1 , K_2 , K_3 , K_4 – классы множества M. Таким образом, с помощью двух свойств множество разбивается на четыре класса.

Пример 3. *Множество M – множество треугольников плоскости. Свойство α формулируется так: «быть равнобедренным треугольником», свойство β: «быть прямоугольным треугольником». Записать и назвать классы множества M.*

Решение.

K_1 – множество равнобедренных прямоугольных треугольников;
K_2 – множество неравнобедренных прямоугольных треугольников;
K_3 – множество равнобедренных непрямоугольных треугольников;
K_4 – множество неравнобедренных непрямоугольных треугольников.

Можно доказать, что с помощью n свойств множество M можно разбить на 2^n классов. Например, с помощью трех свойств множество можно разбить на 8 классов, с помощью четырех свойств – на 16 классов и т. д. Однако может оказаться, что некоторые из этих классов будут пусты.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Какие из следующих утверждений являются высказываниями?

- 347>125;
- $3x^2 + 2x - 3 = 0$;
- число 10^{321} - 5 оканчивается цифрой 5;
- Стоп!
- 12 делится нацело на 3 (12 ⋮ 3);
- число x кратно 5;
- некоторые люди имеют голубые глаза.

1.2. Среди следующих предложений укажите составные; выделите в них элементарные предложения и логические связки:

- $\sqrt{4} = 2$ или $\sqrt{4} = -2$;
- противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны;
- число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр его десятичной записи делится на 3;
- число 17 простое и не делится на 2;
- если число делится на 6, то оно делится на 2;
- 13≤ 5.

1.3. В следующих составных высказываниях выделите составляющие их элементарные высказывания, запишите составные высказывания при помощи формул и укажите их истинность:

- 15 кратно 3 и 12 кратно 3;
- 2<3<5;
- число 157 простое или составное;
- если 15 – простое число, то 15 не делится на 7;
- $\sqrt{16} = 4$ или $\sqrt{16} = -4$;
- число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр в десятичной записи числа делится на 9.

1.4. Даны высказывания *A*=(*сегодня ясно*), *B*=(*сегодня идет дождь*), *C*=(*сегодня идет снег*), *D*=(*вчера было пасмурно*), *E*=(*я пойду в гости*). Сформулируйте следующие высказывания: $A \Rightarrow D$; $B \vee C$; $A \wedge \bar{B}$; $B \wedge \bar{A} \Rightarrow E$.

1.5. Даны высказывания *A*=(*число 279 кратно 9*) и *B*=(*сумма цифр числа 279 кратна 9*). Запишите высказывания $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$; $\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$; $\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$ и определите их истинность.

1.6. Выясните, в каких случаях можно установить значение истинности высказывания *B*:

а) $A \wedge B$ - «и»;
б) $A \wedge B$ - «л»;
в) $A \vee B$ - «и»;
г) $A \vee B$ - «л»;
д) $A \wedge B$ - «л», A – «и»;
е) $A \vee B$ - «и», A – «л».

1.7. Составьте таблицы истинности высказываний:

а) $\bar{A} \vee B$;
б) $A \Rightarrow (A \vee \bar{C})$;
в) $\bar{A} \Leftrightarrow (A \wedge C)$;
г) $(A \wedge B) \wedge C$;
д) $(A \vee \bar{B}) \wedge C$;
е) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C$;
ж) $C \Rightarrow (A \vee B)$;
з) $\bar{A} \Rightarrow \overline{B \vee A}$.

1.8. Докажите, что следующие формулы – тавтологии:

а) $A \wedge A \Leftrightarrow A$;
б) $(\bar{A} \Rightarrow A) \Rightarrow A$;
в) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$;
г) $A \vee \bar{A}$;
д) $\overline{A \wedge \bar{A}}$;
е) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$;
ж) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$;
з) $\bar{A} \Rightarrow (A \Rightarrow B)$;
и) $A \Rightarrow (\bar{A} \wedge B)$;
к) $\overline{A \wedge (\bar{A} \wedge B)}$;
л) $\big((A \Rightarrow B) \Rightarrow A\big) \Leftrightarrow A$;
м) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$.

1.9. Что можно сказать об истинности высказывания $\bar{A} \Leftrightarrow B \vee A \Leftrightarrow B$, если значение высказывания $A \Rightarrow B$ есть «л»?

1.10. Равносильны ли высказывания:

а) $B \Rightarrow A$ и $\bar{B} \vee A$;
б) $\overline{A \wedge B}$ и $\bar{A} \vee \bar{B}$;
в) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ и $A \Leftrightarrow B$;
г) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ и A.

1.11. Даны множества: М – множество натуральных чисел, больших 8 и меньших 18; Р – множество натуральных чисел, оканчивающихся цифрой 7. Укажите, каким из этих множеств принадлежат числа 12, 17, 0, 3, 7. Запишите это с помощью символа $\in$. Укажите, каким из этих множеств не принадлежат перечисленные числа. Запишите это с помощью знака $\notin$.

1.12. Известно, что $x \in R$. Найдите множество решений каждого из уравнений: a) $7x + 5 = 7(x + 12)$; b) $2(x - 5) = 3x$; c) $x^2 + 3 = 2$. Какие из них пусты?

1.13. Изобразите на числовой прямой следующие множества:
$A = \{x|\ x \in R, x > 2\}$;
$B = \{x|x \in Z_0, x < 2\}$;
$C = \{x|\ x \in Z, -3 \leq x \leq 7\}$;
$D = \{x|\ x \in R, -3 < x < 7\}$;
$E = \{x|\ x \in N, x \leq 5\}$.

1.14. Дано множество С={213, 45, 324, 732, 136}. Составьте подмножество множества С, состоящее из чисел, которые а) делятся на 3; б) делятся на 9; в) не делятся на 4; г) не делятся на 5; д) не делятся на 3.

1.15. Образуйте все подмножества множества А={1, 2, 3, 4}.

1.16. Какие из следующих пар множеств связаны между собой отношением включения:
$A = \{x|x \in N, x > 2\}$, $B = \{y|\ y \in N, y > 2\}$;
$A = \{x|\ x \in R, x > 0\}$, $B = \{y|\ y \in N, y > 0\}$;
$A = \{x|\ x \in N, x^2 > 4\}$, $B = \{y|\ y \in N, y^2 > 5\}$;
A - множество многоугольников с периметром 4, B – множество квадратов с площадью 1?

1.17. Равны ли следующие множества:
$A = \{2,\ 4,\ 6\}$ и $B = \{6,\ 4,\ 2\}$;
$A = \{1,\ 2,\ 3\}$ и $B = \{\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III}\}$;
$A = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}\}$ и $B = \{1,\ 2,\ 4\}$;
$A = \{\sqrt{256},\ \sqrt{16}, \sqrt{1}\}$ и $B = \{1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2\}$?

1.18. Даны множества: А – множество натуральных чисел; В - множество четных натуральных чисел; С – множество нечетных чисел; D – множество чисел кратных 2 и 3 одновременно; Е - множество чисел, десятичная запись которых оканчивается нулем; F – множество чисел кратных 6; К – множество чисел кратных 3; М – множество чисел кратных 2 и 5 одновременно. Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других данных множеств. Есть ли среди данных множеств равные?

1.19. Докажите, что А=В, если А – множество двузначных чисел кратных 9; В – множество двузначных чисел, сумма цифр которых кратна 9.

1.20. Пусть А – множество выпуклых многоугольников, В - множество четырехугольников, С – множество трапеций, D – множество параллелограммов, E – множество ромбов. Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других. Запишите это при помощи символа $\subset$ и постройте диаграммы Эйлера-Венна для множеств, данных в задании.

1.21. Рассмотрим множество U книг в библиотеке института и его подмножества: M – книг по математике, A – книг по алгебре, F – книг по физике, P – множество книг на английском языке. Изобразите эти множества с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

1.22. Для каждой пары множеств найдите подходящее универсальное множество:

а) $A = \{а, б, в, г, д, е\}$ и $B = \{а, е, и, о, я\}$;

б) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots\}$ и $B = \{1,\ 4,\ 9,\ 16, \dots\}$;

в) $A = \{x \mid x = \frac{n}{n+1},\ n \in N, n \leq 20\}$ и $B = \{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}, \dots, \frac{20}{21}\}$;

г) A – множество квадратов и B – множество прямоугольников;

д) A – множество равнобедренных треугольников и B – множество равносторонних треугольников.

1.23. Изобразите при помощи кругов Эйлера множества P и Q, если P– множество равнобедренных треугольников, а Q есть множество:

а) остроугольных треугольников;

б) прямоугольных треугольников;

в) равносторонних треугольников.

1.24. Установите отношения между множествами A, B и C и изобразите их при помощи кругов Эйлера, если:

а) A – множество четных натуральных чисел, B – множество натуральных чисел, оканчивающихся нулем, C – множество натуральных чисел кратных 2;

б) A – множество треугольников, B – множество прямоугольных треугольников, C – множество остроугольных треугольников;

в) A – множество треугольников с углом 45°, B – множество равнобедренных треугольников, C – множество равносторонних треугольников.

1.25. Из следующих предложений выберите предикаты, укажите их область определения и множество истинности:

- x+5=1;
- при x=2 выполняется равенство $x^2 - 1 = 0$;
- для всех чисел x выполняется равенство $x + 2 = 2 + x$;
- существует такое положительное число x, что $x^2 + 1 = 0$;
- планета x совершает вращение вокруг Солнца за один год;
- $x + 3 < 3x - 5$.

1.26. На множестве X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} задан предикат A(x)=(x – нечетное число). Заполните таблицу, отмечая истинные высказывания буквой «и», а ложные – «л».

1.27. На множестве X={1, 2, 3, 4, 5} заданы предикаты A(x)=(x – простое число), B(x)=(x < 3), C(x)=((x – 1)(x + 2)=0). Составьте предикаты A(x) $\wedge$ B(x), A(x) $\vee$ B(x), A(x) $\wedge$ C(x), $\overline{B(x)} \wedge C(x)$, A($x$)$\Rightarrow$C($x$), $\overline{A(x)} \wedge$ C(x), B(x) $\Rightarrow \overline{C(x)}$. Найдите множество истинности каждого предиката.

1.28. Какие из следующих высказываний содержат квантор общности, а какие квантор существования?

- Все кустарники являются растениями;
- существуют числа кратные 3;
- в любом равностороннем треугольнике высоты совпадают с биссектрисами;
- каждое натуральное число является целым;
- найдется такое натуральное число x, что x<3.

1.29. Прочитайте следующие высказывания:

а) $(\exists n \in N)\ n \vdots 2$;
б) $(\exists n, m \in N)\ n \vdots m$;
в) $(\forall n \in N)\ n \vdots 5$;
г) $(\forall n \in N)(\exists m \in N)\ n \vdots m$.

1.30. Найдите значение истинности следующих высказываний:

а) $(\forall x \in R)\ x^2 + 1 = 5$;
б) $(\exists x \in R)\ x^2 + 1 = 5$;
в) $(\forall x \in R)\ x^2 + 5 = 1$;
г) $(\exists x \in R)\ x^2 + 5 = 1$.

1.31. Сформулируйте отрицания следующих высказываний и установите, что истинно само высказывание или его отрицание:

а) некоторые параллелограммы имеют центр симметрии;
б) все параллелограммы имеют центр симметрии;
в) диагонали ромба не равны между собой;
г) всякий прямоугольник является квадратом;
д) все числа положительны или отрицательны.

1.32. Даны предикаты на множестве X четырехугольников: A(x)= (фигура x – параллелограмм), B(x)=(фигура x – равнобочная трапеция), C(x)=(фигура x – ромб), D(x)=(фигура x имеет ось симметрии), E(x)=(фигура x имеет центр симметрии). Укажите, какие из следующих высказываний истинны, какие ложны:

а) $(\forall x)$ A(x)$\Rightarrow$E(x);
б) $(\forall x)$ D(x)$\Rightarrow$C(x);
в) $(\forall x)$ $\overline{E(x)} \Rightarrow$A($x$);
г) $(\forall x)$ $\overline{C(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$;
д) $(\exists x)$ $\overline{D(x)} \Rightarrow$E($x$);
е) $(\exists x)$ B(x)$\Rightarrow \overline{D(x)}$;
ж) $(\forall x)$ C(x)$\Rightarrow$A(x);
з) $(\exists x)$ C(x)$\Rightarrow$A(x).

1.33. Найдите пересечение множеств $A = \{x | \ x \in R, x > -2\}$ и $B = \{y | y \in R, y \leq 7\}$. Изобразите пересечение множеств на числовой прямой.

1.34. Найдите объединение и разность множеств A и B, если $A = \{x | \ x \in R, -1 \leq x < 3\}$, $B = \{y | \ y \in R, 0 < \ y \leq 5\}$. Изобразите решение на числовой прямой.

1.35. Изобразите на числовой прямой и запишите при помощи неравенства пересечение, объединение и разность множеств P и Q:

а) $P = \{x|\ x \in R, \frac{10}{3} \le x \le 8\}$, $Q = \{x|\ x \in R, \frac{26}{47} \le x \le 3{,}2\}$;

б) $P = \{x|\ x \in R, -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\}$, $Q = \{x|\ x \in R, \frac{6}{5} < x < \frac{40}{27}\}$.

1.36. Докажите, что для любых множеств верны следующие отношения:

а) $A\backslash B = A\backslash(A \cap B)$; г) $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$;

б) $(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash C)\backslash B$; д) $(A\backslash B)^{/} = A^{/} \cup B$;

в) $A\backslash B = A \cap B^{/}$; е) $(A \cap B) \cup (A \cap B^{/}) \cup (A^{/} \cap B) = A \cup B$.

1.37. Показать, что $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$.

1.38. Доказать, что $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_1 \Leftrightarrow A_1 = A_2 = \cdots = A_n$.

1.39. Из 100 студентов английский язык изучают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 5, английский и французский – 8, немецкий и французский – 10, все три языка изучают 3 студента. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только один язык? Решите эту задачу при помощи диаграмм Эйлера-Венна.

Образцы контрольных работ по теме 1

Контрольная работа № 1 (по математической логике)

1. Среди следующих предложений укажите высказывания и определите их истинность.
   1). Все студенты любят математику.
   2). 2 – натуральное число.
   3). x = 11 является решением неравенства $2x$ – 1 > 5.
   4). y + 3 = 5.
   5). $(\forall x \in N): x > 8$.
2. Из предложений A=(число 22 чётное) и B=(число 22 делится на 11) составьте сложные высказывания и определите их истинность.
3. Составьте таблицу истинности высказывания: $X \vee Y \Leftrightarrow \overline{Z}$.
4. Докажите, что формула $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ – тавтология.
5. На множестве K = {3, 4, 5, 6, 7, 8} заданы предикаты $A(x)$ = (x – простое число), $B(x)$ = (x – составное число), $D(x)$ = (x > 5). Составьте предикаты $A(x) \vee B(x)$ и $B(x) \Rightarrow \overline{D(x)}$ и найдите их множества истинности.
6. Записать при помощи кванторов утверждение и определить его истинность «Число x – простое».

Контрольная работа № 2 (по теории множеств)

1. Перейдите от одного способа задания множества X к другому. Изобразите множество X на числовой прямой.
   1). $X = (-\infty, 7)$;
   2). $X = \{x|\ x \in Z, -1 < x < 5\}$;
   3). $X = \{x|\ x \in N,\ x < 7\}$.

2. Дано множество A={72, 56, 513, 117, 324}. Составить подмножества множества A, состоящие из чисел, которые 1) делятся на 4; 2) делятся на 9; 3) делятся на 5; 4) не делятся на 10.

3. Найдите объединение, пересечение и разность множеств $P = \{x|x \in R,\ \frac{10}{3} < x < \sqrt{18}\}$ и $Q = \{x|x \in R,\ \frac{26}{27} < x < 3{,}5\}$.

4. Доказать при помощи кругов Эйлера, что $A \setminus B = A \cap B'$.
5. Даны множества $A=\{a,\ b\}$, $B=\{c,\ d,\ e\}$, $C=\{c,\ m\}$. Доказать, что $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
6. Изобразите на координатной плоскости элементы декартова произведения множеств $X = \{x|\ x \in Z,\ -1 \le x \le 2\}$ и $Y = \{y|\ y \in R,$ $2 \le y \le 4\}$.

Образец ректорской контрольной работы

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:
   а) Некоторые люди имеют голубые глаза;
   б) Луна – спутник Земли;
   в) – 17 < 0;
   г) 15 кратно 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа 15 кратна 3;
   д) Принесите мне, пожалуйста, книгу!
   е) $x - 1 > 0$.
2. Напишите таблицы истинности для высказываний:
   $\overline{A} \wedge B$; $A \wedge B \wedge C$; $C \Rightarrow A \wedge B$; $\overline{A \wedge B}$; $\overline{A} \wedge B \Rightarrow C$; $\overline{A \vee B} \Rightarrow C$.
3. Докажите равносильность формул:
   $A \Rightarrow B$ и $\overline{A} \vee B$; $A \Leftrightarrow B$ и $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
4. Докажите, что формулы являются тавтологиями:
   $(\overline{A} \Rightarrow A) \Rightarrow A$; $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$.

Вариант тестового контроля знаний по теме

К каждому заданию даны 4 варианта ответа, из которых верный только один. При выполнении этих заданий в ответе выполняемого вами задания запишите цифру, которая соответствует номеру выбранного вами ответа.

1. Множество D={d | d – число, меньшее 16 и делящееся на 3} содержит натуральных чисел

1) 8 2) 13 3) 5 4) 7.

2. Дано множество A={{a, b, c}, {a, k}, d}. Сколько элементов содержится в этом множестве?

1) 6 2) 2 3) 5 4) 3.

3. Даны два множества $A=\{x \mid x\in R, x>0\}$ и $B=\{y \mid y\in N, y>0\}$. В каком соотношении находятся эти множества?

1) $A\cap B=\varnothing$ 2) $A\subset B$ 3) $B\subset A$ 4) $A=B$.

4. Пересечение множеств $A=\{x \mid -\frac{2}{3}\le x\le \frac{7}{4}\}$ и $B=\{x \mid -\frac{1}{4}\le x\le 2\}$ равно

1) $\left[-\frac{2}{3};2\right]$ 2) $\left[-\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$ 3) $\left(-\frac{2}{3};2\right)$ 4) $\left[-\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right]$.

5. Множество A состоит из целых чисел от – 5 до 10. Множество B состоит из натуральных чисел от 3 до 15. Сумма всех элементов, входящих в множество $P=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, равна

1) 50 2) 53 3) 55 4) 49.

6. Дано множество {5, 2, 3}. Сколько двузначных чисел можно составить из элементов этого множества?

1) 6 2) 9 3) 5 4) 3.

7. Среди следующих предложений укажите высказывание:

1) $3x>8$ 2) $2^{32}>3^{12}$ 3) $2x^2-x-3$ 4) прямые параллельны.

8. На множестве Z задан предикат $B(y)=(y+3<5)$. Какое из чисел принадлежит его множеству истинности?

1) -2 2) 10 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\sqrt{25}$.

9. На множестве P={1, 2, 3, 4, … ,20} Заданы предикаты $A(x)$=(число x кратно 5) и $B(x)$=(число x чётное). Сумма элементов, входящих во множество истинности предиката $A(x)\wedge B(x)$ равна

1) 20 2) 32 3) 28 4) 30.

10. Предикат, которому не удовлетворяет ни одно действительное число, имеет вид

1) $x+2=5+x$ 2) $y^2>0$ 3) $x^2+1\ge 0$ 4) $y+24>36$.

ТЕМА 2.
ОТНОШЕНИЯ

§1. Декартово произведение множеств

Пусть даны два непустых множества X и $У$.

Определение 1. ***Декартовым*** *(или* ***прямым)*** ***произведением*** *X на $У$ называется множество всех упорядоченных пар, первые элементы которых принадлежат множеству X, а вторые множеству $У$.*

Прямое произведение X на $У$ обозначается $X \times У$. Упорядоченную пару элементов обозначают (x, y).

По определению: $X \times У = \{(x, y) \mid x \in X, \quad y \in У\}$.

Пример 1. *Заданы множества* $X = \{1, 2, 3\}$, $У = \{0, 1\}$. *Составить декартово произведение* $X \times У$.

Решение.

По определению декартово произведение множеств – это множество упорядоченных пар, первый элемент которых взят из множества X, а второй – из множества $У$, т.е.

$$X \times У = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1)\}.$$

Замечание. *Пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются совпадающими в том и только том случае, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.*

Если множества X и $У$ совпадают, т.е. $X = У$, то множество $X \times X$ состоит из всех пар (x, y) таких что $x \in X$, $y \in X$.

Пример 2. *Задано множество $A = \{m, n, p\}$. Составить декартово произведение $A \times A$.*

Решение.

$A \times A = \{(m, m), (m, n), (m, p), (n, n), (n, m), (n, p), (p, m), (p, n), (p, p)\}$.

Элементы декартова произведения двух конечных множеств можно записывать в виде таблицы. По вертикали располагают элементы множества X, по горизонтали – элементы множества $У$, а элементы множества $X \times У$ пишут на пересечении соответствующих строк и столбцов.

Пример 3. *Заданы множества* $X = \{a, b, c\}$, $У = \{4, 5\}$. *Составить таблицу, содержащую элементы декартова произведения* $X \times У$.

Решение.

Согласно принятого соглашения о расположении элементов множеств X и $У$, получим следующую таблицу

$X \backslash У$	4	5
a	$(a, 4)$	$(a, 5)$
b	$(b, 4)$	$(b, 5)$
c	$(c, 4)$	$(c, 5)$

Теорема 2. *Если множество X содержит n элементов, множество $У$ – m элементов, то в декартовом произведении этих множеств $n \cdot m$ элементов.*

Доказательство.

Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $У = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$. Расположим элементы $X \times У$ в виде таблицы. В каждой строке таблицы m элементов, строк в таблице – n.

$X \backslash У$	y_1	y_2	…	y_m
x_1	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	…	(x_1, y_m)
x_2	(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	…	(x_2, y_m)
…	…	…	…	…
x_n	(x_n, y_1)	(x_n, y_2)	…	(x_n, y_m)

Всего в таблице $n \cdot m$ элементов. Значит, множество $X \times У$ содержит $n \cdot m$ элементов.

Свойства декартова произведения

Будем считать, что множества X, $У$ и Z не совпадают.

Свойство 1. *Для любого множества X верны равенства:*

$$X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing.$$

Свойство 2. *Декартово произведение множеств не подчиняется коммутативному закону, т.е. $X \times У \neq У \times X$.*

Доказательство.

Декартово произведение $X \times У$ состоит из таких упорядоченных пар, в которых на первом месте стоит элемент из множества X, а на втором месте – элемент из множества $У$, т.е. пар вида (x, y). Декартово произведение $У \times X$ состоит из таких упорядоченных пар, в которых на первом месте стоит элемент из множества $У$, а на втором месте – элемент из множества X, т.е. пар вида (y, x).

Поскольку мы потребовали, что $X \neq У$, то и $x \neq y$. А следовательно, $(x, y) \neq (y, x)$, т.е. $X \times У \neq У \times X$.

Свойство 3. $X \times (У \times Z) \neq (X \times У) \times Z$, *т.е. декартово произведение не подчиняется ассоциативному закону.*

Свойство 4. $X \times (У \cap Z) = (X \times У) \cap (X \times Z)$.

Свойство 5. $X \times (У \cup Z) = (X \times У) \cup (X \times Z)$.

Свойство 6. $X \times (У \setminus Z) = (X \times У) \setminus (X \times Z)$.

Определение 3. *Упорядоченный набор, состоящий из n элементов, называется* ***кортежем длины n*** *или* ***упорядоченной n – кой.***

Обозначение: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Определение 4. ***Декартовым (прямым) произведением n множеств*** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *называется множество всех кортежей* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *длины n таких, что* $a_1 \in X_1$, $a_2 \in X_2$, $\ldots$, $a_n \in X_n$.

По определению:

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in X_1,\ a_2 \in X_2,\ \ldots,\ a_n \in X_n\}.$$

Замечание. *Пусть n – некоторое натуральное число. Произведение* $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ раз}$ *называется n кратным произведением множества A и обозначается* A^n.

Пример 4. $A = \{2, 5\}$. *Найти* A^2.

Решение.

$A^2 = A \times A = \{(2, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 5)\}$.

Декартово произведение множеств может быть изображено на координатной плоскости.

Если множества X и $У$ конечны и содержат небольшое число элементов, то декартово произведение этих множеств может быть изображено точками на координатной плоскости. Если множество X конечно, а множество $У$ бесконечно, то декартово произведение $X \times У$ изображается на координатной плоскости линиями (отрезками, интервалами, полуинтервалами) параллельными оси Oy. Если множество X

бесконечно, а множество $У$ конечно, то декартово произведение $X \times У$ изображается на координатной плоскости линиями (отрезками, интервалами, полуинтервалами) параллельными оси Ox. Если же оба множества X и $У$ бесконечны, то их декартово произведение изобразится геометрической фигурой, причем элементами декартова произведения будут все точки, находящиеся внутри фигуры.

§ 2. Понятие бинарного соответствия[1] между элементами множеств. Способы задания бинарных соответствий

Формирование почти всех понятий начального курса математики сопровождается рассмотрением тех соответствий и отношений, которые существуют между изучаемыми объектами. Изучая понятие натурального числа, говорят об отношениях «*больше*», «*меньше*», «*равно*». Со многими соответствиями и отношениями учащиеся начальных классов встречаются при решении задач. Это и отношения «*старше*», «*моложе*», «*старше в ... раз*», «*ниже*», «*выше*» на множестве людей, и соответствия «*дороже, чем*», «*дешевле в ... раз*», «*дороже на …*», оперировать которыми приходится при сравнении стоимости различных предметов.

Пусть даны два множества X и $У$. Построим декартово произведение $X \times У$.

Определение 1. ***Бинарным соответствием*** *между множествами X и $У$ называется упорядоченная тройка множеств $\rho = (X, У, Г_\rho)$, где $Г_\rho \subset X \times У$.*

Элементами множества $Г_\rho$ являются упорядоченные пары, причем первая компонента пары взята из множества X, а вторая – из множества $У$.

Множество $Г_\rho$ называется ***графиком*** бинарного отношения ρ.

Если упорядоченная пара $(x, y) \in Г_\rho$, то говорят, что «элемент x находится в соответствии ρ с элементом y» или «x соответствует y» и записывают $x\rho y$. Элемент x называют ***прообразом*** элемента y, а элемент y ***образом*** элемента x. Если упорядоченная пара (x, y), взятая из декартова произведения $X \times У$, не содержится во множестве $Г_\rho$, то элементы x и y не связаны между собой соответствием ρ. В этом случае пишут $\overline{x\rho y}$.

[1] Слово «*бинарный*» происходит от латинского слова *bis*, означающего «*дважды*», и показывает, что речь идет о двух множествах.

Множество X называют ***областью отправления*** соответствия ρ, а множество $У$ называется ***областью прибытия*** соответствия ρ. Множество всех первых компонентов упорядоченных пар $(x, y) \in Г_\rho$ называется ***областью определения*** соответствия ρ, а множество всех вторых компонентов упорядоченных пар $(x, y) \in Г_\rho$ называется ***областью значений*** данного соответствия ρ.

Если множество $Г_\rho$ совпадает с декартовым произведением $X \times У$, т.е. $Г_\rho = X \times У$, то бинарное соответствие называется ***полным***. Если $Г_\rho = \varnothing$, то соответствие ρ называется ***пустым***. Соответствие называют ***противоположным*** данному соответствию ρ, если график этого соответствия дополняет график заданного соответствия до декартова произведения множеств. Обозначают противоположное соответствие $\overline{\rho}$. Таким образом, $Г_\rho \cup Г_{\overline{\rho}} = X \times У$. Соответствие называют ***обратным*** данному соответствию ρ и обозначают ρ^{-1}, если $y\rho^{-1}x$, если только $x\rho y$.

Способы задания бинарных соответствий:

- ***перечислением всех элементов***, принадлежащих множеству $Г_\rho$;
- ***таблицей***;
- ***с помощью графов***[2], т.е. особых чертежей, на которых замкнутые линии изображают множества, точками показаны их элементы, а направленными линиями (или стрелками) связи между элементами множеств.

В большинстве случаев можно перейти от одного способа задания бинарного соответствия ρ к другому.

Пример 1. *Рассмотрим соответствие* $\rho = (X, У, Г_\rho)$ *между множествами* $X = \{2, 3, 4, 1\}$ *и* $У = \{5, 6, 7\}$. *График соответствия – это множество* $Г_\rho = \{(1, 5); (3, 6); (4, 7)\}$. *Следовательно,* $1\rho 5,\ 3\rho 6, 4\rho 7$.

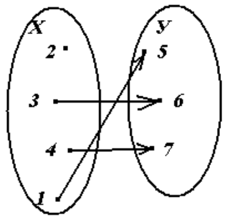
Это же соответствие можно задать в виде таблицы:

X \ *У*	*5*	*6*	*7*
2			
3		■	
4			■
1	■		

Заштрихованные клетки таблицы образуют график рассматриваемого соответствия.

И, наконец, при помощи графа:

[2] Такие чертежи в математике называют *ориентированными графами* от греческого слова «графо» - «пишу».



Множество $\{3, 4, 1\}$ *- область определения соответствия* ρ*, а множество* $\{5, 6, 7\}$ *- область значений соответствия* ρ*.*

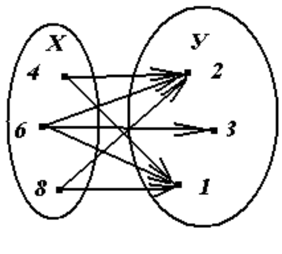
Пример 2. $X = \{4, 6, 8\}$*,* $У = \{2, 3, 1\}$*,* $x \rho y \Leftrightarrow x \in X,\ y \in У$ *и x делится на y без остатка, т.е.* $x \vdots y$*. Построить граф и записать график соответствия.*

***Решение*.**

Для выполнения задания составим таблицу, содержащую декартово произведение $X \times У$ и подчеркнем пары, удовлетворяющие указанному соответствию.

X \ У	1	2	3
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)
6	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)
8	(8; 1)	(8; 2)	(8; 3)

Значит, $Г_\rho = \{(4; 1); (4; 2); (6; 1); (6; 2); (6; 3); (8; 1); (8; 2)\}$. Теперь построим график заданного соответствия:



§ 3. Отношения на множестве

В математике изучают не только связи между элементами двух множеств, т.е. соответствия, но и связи между элементами одного множества. Называют их отношениями.

Отношения многообразны: между понятиями – это отношения рода и вида, части и целого; между предложениями – отношения следования и равносильности; между числами – «больше», «меньше», «равно», «больше на …», «меньше на …», «следует» и др.[3]

[3] Если рассматривают отношения между двумя элементами, то их называют бинарными; отношения между тремя элементами – тернарными; отношения между *n* элементами – *n*-арными. Все названные выше отношения являются бинарными.

Изучение отношений между объектами важно для познания, как самих объектов, так и для познания реального мира в целом.

Пусть дано множество *M*. Будем рассматривать упорядоченные пары *(x, y)*, у которых $x \in M$ и $y \in M$.

Определение. ***Бинарным отношением***, *определенным в множестве M, называется упорядоченная пара множеств* $\rho = (M; \Gamma_\rho)$, *где* $\Gamma_\rho \subset M \times M$.

Множество первых элементов пар, входящих в множество Γ_ρ, *называется* ***областью определения*** *бинарного отношения.*

Множество вторых элементов пар, входящих в множество Γ_ρ, *называется* ***множеством значений*** *бинарного отношения.*

Множество Γ_ρ *называется* ***графиком*** *бинарного отношения* ρ, *заданного на множестве M.*

Если упорядоченная пара $(x, y) \in \Gamma_\rho$, то говорят, что элемент x из множества M находится в отношении ρ с элементом y из того же множества M и пишут $x\rho y$.

Для записи некоторых бинарных отношений имеются специальные обозначения: =, >, <, ≤, ≥, ⊥, || и т.д.

Способы задания бинарного отношения на множестве:

- ***указанием графика соответствия***, т.е. перечислением всех упорядоченных пар, входящих в множество Γ_ρ.

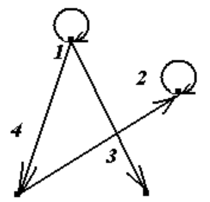
  Например, $M = \{1, 2, 3\}$, $\Gamma_\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$. *В* Γ_ρ *входят пары, у которых первый элемент равен второму. Следовательно,* ρ *- отношение равенства.*

- ***указанием характеристического свойства***, которое можно выразить уравнением или неравенством.

  Например, $M = \{1, 2, 3\}$, *а отношение* ρ *задается так:* $x\rho y \Leftrightarrow x < y$. *Найдем все упорядоченные пары, принадлежащие* Γ_ρ. *Так как первый элемент x должен быть меньше y, то в заданном отношении находятся пары* $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$.

- ***с помощью ориентированного графа***: изображают элементы данного множества $M = \{1, 2, 3\}$ точками плоскости и если элемент x находится в отношении ρ с элементом y, то проводят стрелку от x к y. Если элемент x множества M находится в отношении ρ с самим собой, то рисуют петлю, выходящую из точки x и входящую в ту же точку x. Выполнив указанные построения, получают фигуру, которая называется ориентированным графом.

  Например:



Этот граф определяет некоторое бинарное отношение между элементами множества $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

От одного способа задания бинарного отношения ρ на множестве M можно перейти к другому способу задания.

Пример. $M = \{4, 6, 8\}$. $x\rho y \Leftrightarrow x \vdots y$. *Найти граф и график заданного отношения.*

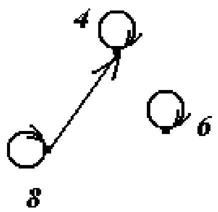
Решение.

Составим таблицу декартова произведения $M \times M$.

M \ M	4	6	8
4	$\underline{(4;\ 4)}$	$(4;\ 6)$	$(4;\ 8)$
6	$(6;\ 4)$	$\underline{(6;\ 6)}$	$(6;\ 8)$
8	$\underline{(8;\ 4)}$	$(8;\ 6)$	$\underline{(8;\ 8)}$

Подчеркнем те пары декартова произведения, которые удовлетворяют заданному отношению.

Запишем график отношения: $\Gamma_\rho = \{(4,4), (6,6), (8,4), (8,8)\}$. Граф отношения имеет вид:



§ 4. Основные типы бинарных отношений на множестве и их свойства

Пусть на множестве M задано бинарное отношение ρ.

Определение 1. *Отношение* ρ *называется* ***рефлексивным****, если для любого элемента x из множества M пара (x, x)* $\in \Gamma_\rho$*, т.е. отношение* ρ *называется рефлексивным, если для любого элемента x из множества M выполняется соотношение* $x\rho x$ *(элемент x находится в отношении* ρ *с самим собой).*

Примеры 1. $M = \{1, 2, 3\}$, $\Gamma_\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$. ρ *- отношение равенства, это рефлексивное отношение.*

2. *M – множество прямых плоскости,* ρ *- отношение параллельности. По определению всякая прямая параллельна сама себе. Следовательно,* ρ *- рефлексивное отношение.*

На графе отношение рефлексивности отражается наличием петель в каждой вершине графа.

Определение 2. *Отношение* ρ *называется* ***антирефлексивным****, если для любого элемента x из множества M пара (x, x)* $\notin \Gamma_\rho$*, т.е. отношение* ρ *называется антирефлексивным, если для любого элемента x из множества M выполняется соотношение* $\overline{x\rho x}$.

Примеры. **1.** *Отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости – антирефлексивно.*

2. *Отношение «больше» на любом числовом множестве - антирефлексивно.*

На графе бинарного отношения ρ антирефлексивность характеризуется отсутствием петель во всех вершинах графа.

Определение 3. *Отношение* ρ *называется* ***симметричным****, если из того, что пара* $(x, y) \in \Gamma_\rho$*, следует, что пара* $(y, x) \in \Gamma_\rho$*, т.е. отношение* ρ *называется симметричным, если из отношения* $x\rho y$ *следует отношение* $y\rho x$.

Примеры. **1.** *Отношение параллельности на множестве прямых плоскости – симметричное отношение, так как если a* $||$ *b, то b* $||$ *a.*

2. *Отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости – симметричное отношение, так как если a* $\perp$*b, то b* $\perp$ *a.*

3. *Пусть N – множество натуральных чисел, ρ - отношение делимости. Отношение ρ не является симметричным, так как, например, если 10 ⋮ 5, то 5 $\bar{\vdots}$ 10.*

На графе бинарного отношения симметричность отражается наличием двойных ребер (и только петли могут быть одинарными). Если на графе найдется хотя бы одно одинарное ребро, то данное отношение свойством симметричности не обладает.

Определение 4. *Отношение ρ называется* ***антисимметричным****, если из того, что пары $(x, y) \in \Gamma_\rho$ и $(y, x) \in \Gamma_\rho$, следует, что $x = y$.*

Примеры.1. *Отношение делимости на множестве натуральных чисел является антисимметричным, так как если x ⋮ y и y ⋮ x, то x = y.*

2. *Отношения $\leq$ и $\geq$ являются антисимметричными.*

3. *Отношение равенства на любом числовом множестве является одновременно симметричным и антисимметричным.*

На графе антисимметричного отношения не должно быть двойных ребер.

Определение 5. *Отношение ρ называется* ***транзитивным****, если из того, что пары $(x, y) \in \Gamma_\rho$ и $(y, x) \in \Gamma_\rho$, следует, что пара $(x; z) \in \Gamma_\rho$, т.е. отношение ρ называется транзитивным, если из отношений $x\rho y$ и $y\rho z$ следует отношение $x\rho z$.*

Примеры: **1.** *Отношение равенства на любом числовом множестве является транзитивным, так как если x = y и y = z, то x = z.*

2. *Отношения < и > на любом числовом множестве являются транзитивными отношениями.*

3. *Отношение параллельности на множестве прямых плоскости – транзитивное отношение.*

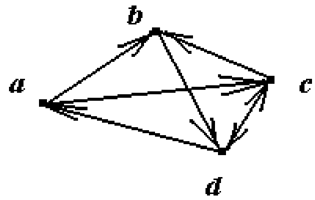
4. *Отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости не является транзитивным отношением.*

На графе отношение транзитивности характеризуется наличием реберного треугольника.

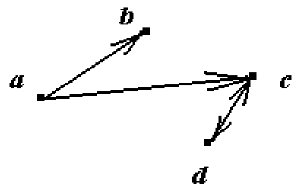
Определение 6. *Отношение ρ на множестве М называется связным, если из любых двух элементов этого множества, по крайней мере, один находится в отношении ρ с другим.*

Пример. *Пусть на некотором числовом множестве заданы отношения $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\neq$. Любое из этих отношений является связным, так как из любых двух различных чисел, по крайней мере, одно находится в заданном отношении с другим.*

Связность отношения на графе заключается в том, что две различные вершины графа соединяются, по крайней мере, одним ребром.



связное отношение



не связное отношение

Определение 7. *Отношение ρ на множестве М называется* ***асимметричным****, если ни для каких элементов х и у из множества М не может случиться, что одновременно имеют место соотношения $x\rho y$ и $y\rho x$.*

Пример. *Отношение «меньше» на любом числовом множестве является асимметричным, так как два соотношения $x < y$ и $y < x$ одновременно выполняться не могут.*

§ 5. Отношение эквивалентности. Связь отношения эквивалентности с разбиением множества на классы

Пусть на множестве *М* задано бинарное отношение ρ.

Определение 1. *Отношение ρ на множестве М называется отношением* ***эквивалентности****, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Примеры. 1. *Отношение равенства на множестве действительных чисел является отношением эквивалентности.*

2. *Отношение параллельности на множестве прямых плоскости является отношением эквивалентности.*

3. *Отношение перпендикулярности на множестве всех прямых плоскости не является отношением эквивалентности, так как оно антирефлексивно.*

Отношение эквивалентности позволяет разбивать множество на классы.

Пусть во множестве M определено отношение эквивалентности ρ.

Определение 2. ***Классом эквивалентности****, порожденным элементом $a \in M$ называется множество $M_a = \{x \mid x \in M \wedge x \rho a\}$.*

Теорема. *Классы эквивалентности являются классами множества M.*

Доказательство.

1) Для любого класса эквивалентности M_a справедливо утверждение: если $x \in M_a$, то $x \in M$, а, следовательно, $M_a \subset M$.

2) Для любого класса эквивалентности M_a ρ - отношение эквивалентности, поэтому $a\rho a$. Следовательно, $a \in M_a$, а значит, $M_a \neq \varnothing$.

3) $M_a \neq M_b$. Докажем, что $M_a \cap M_b = \varnothing$.

Доказательство проведем методом от противного: предположим $M_a \cap M_b \neq \varnothing$.

Тогда существует элемент c такой, что $c \in M_a \cap M_b$. По определению пересечения множеств: $c \in M_a$ и $c \in M_b$.

Если $c \in M_a$, то $c\rho a$; если $c \in M_b$, то $c\rho b$.

ρ - отношение эквивалентности, а значит, оно симметрично. Получаем: $a\rho c$ и $c\rho b$.

$(\forall x \in M_a):(x\rho a \quad a\rho c \quad c\rho b \quad \Rightarrow x\rho b) \quad \Rightarrow x \in M_b$.

Т.е. из того, что $x \in M_a$ вытекает, что $x \in M_b$.

Следовательно, $M_a \subset M_b$. (1)

$(\forall x \in M_b):(x\rho b \quad b\rho c \quad c\rho a \quad \Rightarrow x\rho a) \quad \Rightarrow x \in M_a$.

Следовательно, если $x \in M_b$, то $x \in M_a$.

Значит и $M_b \subset M_a$. (2)

Из (1) и (2) следует, что $M_a = M_b$.

Получили противоречие с условием. Значит, сделанное предположение неверно, остается принять, что $M_a \cap M_b = \varnothing$.

4) Пусть S – объединение всех классов эквивалентности. Докажем, что $S = M$.

Действительно, любой элемент x из множества S принадлежит хотя бы одному классу эквивалентности. Каждый класс эквивалентности является подмножеством множества М. Следовательно, $x \in M$. Значит, $S \subset M$.

Для любого $x \in M$: $x \in M_x$, но $M_x \subset S \Rightarrow x \in S$, но тогда $M \subset S$.

Из того, что $S \subset M$ и $M \subset S$ следует, что $S = M$.

Из 1) – 4) имеем: классы эквивалентности являются классами множества *M.* Таким образом, построив все классы эквивалентности, найдем разбиение множества *M* на классы. Следовательно, всякое отношение эквивалентности, определенное во множестве *M*, порождает разбиение множества *M* на классы. Теорема доказана.

Замечание. *Справедлива и обратная теорема: всякое разбиение множества М на классы порождает во множестве М отношение эквивалентности.*

Пример. *Задано множество* $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Отношение $x \rho y \Leftrightarrow x, y \in M \wedge (x - y) \vdots 3$. *Доказать, что отношение* ρ *является отношением эквивалентности и построить классы эквивалентности по отношению* ρ.

Решение.

Докажем, что отношение ρ является отношением эквивалентности.

1) $(\forall x \in M) : ((x - x) \vdots 3)$, следовательно, $x \rho x$, т.е. отношение ρ рефлексивно.

2) $(\forall x, y \in M) : (\text{если } x \rho y \Rightarrow (x - y) \vdots 3, \text{ то } (y - x) \vdots 3 \Rightarrow y \rho x)$. Таким образом, отношение ρ симметрично.

3) Отношение ρ транзитивно, так как

$$(\forall x, y, z \in M) : \begin{pmatrix} \text{если } x \rho y,\ y \rho z \Rightarrow (x - y) \vdots 3 \wedge (y - z) \vdots 3 \Rightarrow x - z = \\ = (x - y) + (y - z) \Rightarrow (x - z) \vdots 3 \Rightarrow x \rho z \end{pmatrix}$$

Из 1) – 3) следует, что отношение ρ является отношением эквивалентности.

Классы эквивалентности по отношению ρ имеют вид: $M_1 = \{1, 4\}$, $M_2 = \{2, 5\}$, $M_3 = \{3\}$.

§6. Отношение порядка

Пусть во множестве M определено бинарное отношение ρ.

Определение 1. *Отношение ρ на множестве М называется* ***отношением нестрого порядка****, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.*

Определение 2. *Отношение ρ на множестве М называется* ***отношением строго порядка****, если оно антирефлексивно, асимметрично и транзитивно.*

Определение 3. *Отношение ρ на множестве М называется* ***отношением линейного порядка****, если оно связно.*

Определение 4. *Множество с заданным на нем отношением порядка называется* ***упорядоченным множеством.***

Примеры: **1.** *N – множество натуральных чисел. $x \rho y \Leftrightarrow x \in N, y \in N$ и $x \vdots y$. Отношение ρ - рефлексивно, антисимметрично, транзитивно. Следовательно, ρ - отношение нестрогого порядка во множестве N. Отношение ρ не является связным. Следовательно, ρ не является линейным порядком.*

2. *Z – множество целых чисел. $x \rho y \Leftrightarrow x \in Z, y \in Z$ и $x < y$. Отношение ρ - антирефлексивно, асимметрично, транзитивно. Следовательно, ρ - отношение строгого порядка во множестве Z. Отношение ρ связно. Следовательно, отношение ρ является строгим линейным порядком.*

3. *R – множество действительных чисел. $x \rho y \Leftrightarrow x \in R$, $y \in R$ и $x \geq y$. Отношение ρ рефлексивно, антисимметрично, транзитивно. Следовательно, ρ - отношение нестрогого порядка во множестве R. Отношение ρ связно. Следовательно, ρ - отношение нестрогого линейного порядка в множестве R.*

§ 7. ***Отображение множеств***

Отображение множеств – частный случай более общего понятия соответствия между двумя множествами.

Пусть даны два непустых множества X и $У$ и соответствие f между элементами этих множеств.

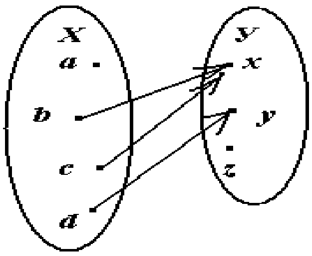
Определение 1. *Соответствие f, сопоставляющее каждому элементу множества X не более одного элемента из множества*

*У, называется **отображением** множества X в множество У.*

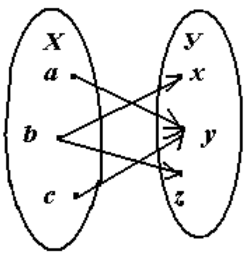
Замечание 1. *Если $x \in X$, $y \in У$ и $x f y$, то элемент x называется **прообразом** элемента y в отображении f, а элемент y называется **образом** элемента x в отображении f.*

Замечание 2. *Если задано отображение f множества X в множество У, то пишут:* $f: X \to У$ *или* $X \xrightarrow{f} У$.

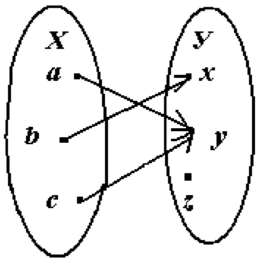
Примеры.

1. 

Соответствие *f* не является отображением, так как элементу *a* из множества *X* не соответствует ни одного элемента во множестве *У*.

2. 

Соответствие *f* не является отображением, так как элементу *b* из множества *X* соответствует сразу два элемента *x* и *y* в *У*.

3. 

f – отображение, так как каждому элементу из множества *X* соответствует по одному элементу из множества *У*.

Определение 2. *Множество образов всех элементов множества X в отображении f называется **образом множества** X в этом отображении и обозначается f(X).*

Нетрудно заметить, что отображение множества *X* в множество *У* порождает множество пар таких, что первый элемент каждой пары принадлежит множеству *X,* а второй элемент пары принадлежит множеству *У* и является образом первого элемента пары в данном отображении. Это множество пар называется ***графиком*** отображения *f*.

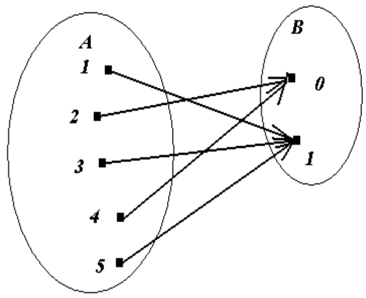
График отображения f обозначают следующим образом: $\Gamma_f = \{(x;\, y) \mid (x;\, y) \in X \times У,\ y = f(x)\}$. Это множество пар удовлетворяет следующим условиям:

1) все элементы множества *X* являются первыми элементами пар, так как каждому элементу множества *X* ставится в соответствие элемент из множества *У*.
2) не существует различных пар с равными первыми элементами, так как каждому элементу множества *X* ставится в соответствие только один элемент из множества *У*.

Рассмотрим частные случаи отображений.

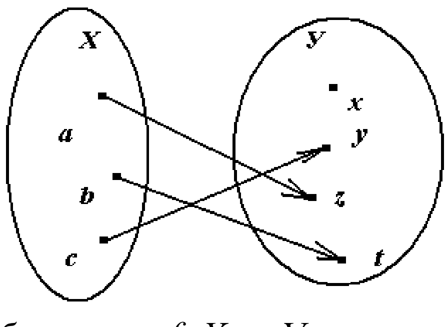
Определение 3. *Отображение f множества X в множество У называется* ***сюръективным*** *или* ***отображением множества X на множество У,*** *если каждый элемент множества У является образом хотя бы одного элемента из множества X, т.е. f(X) = У.*

Пример 4.



Определение 4. *Отображение f: X → У называется* ***инъективным****, если каждый элемент множества У является образом не более одного элемента из множества X, т.е. если* $x_1 \neq x_2$, *то* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

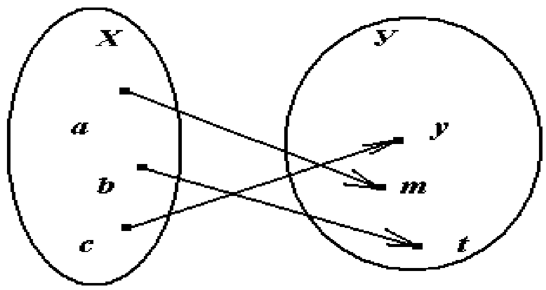
Пример 5.



Определение 5. *Отображение f: X → У называется* ***биективным*** *или* ***биекцией****, если оно одновременно суръективно и инъективно.*

Замечание. *Можно сказать и так: отображение f: $X \to У$ называется биекцией или взаимно однозначным соответствием, если каждому элементу множества X соответствует один и только один элемент множества $У$ и обратно, т.е. каждый элемент множества $У$ является образом только одного элемента из множества X.*

Пример 6.



§ 8. Понятие мощности множества

Определение 1. *Два множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие, называются* ***эквивалентными*** *множествами.*
Обозначение: $A \sim B$.

Понятие эквивалентности применимо к любым множествам как конечным, так и бесконечным.

Два конечных множества будут эквивалентны тогда, когда у них одинаковое количество элементов.

Если же эквивалентны множества произвольной природы (и бесконечные), то говорят, что они имеют одинаковую мощность. Мощность – это то общее, что есть у любых двух эквивалентных множеств.

Определение 2. *Множество, элементы которого можно биективно сопоставить всем натуральным числам, называется* ***счетным*** *множеством.*

Иначе говоря, счетное множество – это множество, элементы которого можно занумеровать в бесконечную последовательность: $a_1, a_2, \dots$.

Пример. *Показать, что множество Z целых чисел является счетным множеством.*

Решение.

Для доказательства данного утверждения установим взаимно однозначное соответствие между всеми целыми числами и всеми натуральными числами следующим образом: отрицательным целым числам поставим в соответствие четные натуральные числа, а неотрицательным целым числам – нечетные натуральные числа, т.е.

если $n < 0$, то $n \leftrightarrow 2|n|$;

если же $n \geq 0$, то $n \leftrightarrow 2|n| + 1$.

Таким образом, между множествами Z и N будет установлено взаимно однозначное соответствие. Следовательно, множество целых чисел Z – счетное множество.

Определение 3. *Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется **несчетным** множеством.*

Можно доказать, что множество всех действительных чисел, заключенных между 0 и 1, будет несчетным множеством.

О множествах, эквивалентных отрезку [0; 1], говорят, что они имеют ***мощность континуума***. Примерами таких множеств являются множество всех точек прямой, множество всех точек плоскости, множество всех точек пространства, множество точек интервала $(a; b)$ и т.д.

Из всех бесконечных множеств «самыми маленькими» являются счетные множества. Затем, как мы уже отмечали, существуют и такие бесконечные множества, мощность которых имеет более высокий порядок – это множества мощности континуума.

Возникает вопрос: существуют ли бесконечные множества, мощность которых превосходит мощность континуума?

Пусть M – некоторое бесконечное множество, M_1 – множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества M. Можно доказать, что мощность множества M_1 больше, чем мощность исходного множества M.

Итак, для любого множества мы можем построить множество большей мощности и т.д., т.е. существует неограниченная сверху шкала мощностей.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1. Даны множества A и B. Найдите все элементы декартовых произведений $A \times B$ и $B \times A$, если

а) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{m, n\}$;

б) $A = \{0, 1, 2, 3\},\ B = \{2, 3, 4\}$;

в) $A = \{1\},\ B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2.2. Найдите декартово произведение множеств $A = \{12, 11, 10\}$, $B = \{13, 10, 14\}$ и выделите из него подмножество пар, в которых а) первая компонента меньше второй; б) первая компонента равна второй; в) вторая компонента равна 13.

2.3. Дано множество $A = \{a, b, c\}$. Составьте декартово произведение $A \times A$. Сколько элементов содержит это множество?

2.4. Найдите декартово произведение двух множеств и изобразите его точками координатной плоскости:

а) $X = \{-1, 0, 1, 2\},\ \ Y = \{2, 3, 4\}$;

б) $X = \{5, 9, 4\},\ \ Y = \{7, 8, 6\}$;

в) $X = [-1, 2],\ \ Y = \{2, 3, 4\}$;

г) $X = \{-1, 0, 1, 2\},\ \ Y = [2,\ 4]$;

д) $X = R,\ \ Y = \{-3\}$.

2.5. Изобразить в прямоугольной системе координат множество $A \times B$, если

1) $A = \{x |\ x \in R, x > 0\},\ B = \{y |\ y \in R, y < 0\}$;

2) $A = \{x |\ x \in N, x \leq 3\},\ B = \{y |\ y \in R, y \geq 0\}$;

3) $A = \{x |\ x \in N, x = 2\},\ B = \{y |\ y \in R, -2 \leq y \leq 3\}$;

4) $A = \{x |\ x \in R, x = 2\},\ B = \{y |\ y \in R, y < 0\}$;

5) $A = \{x |\ x \in R, -2 \leq x \leq 0\},\ B = \{y |\ y \in N, y = 2\}$;

6) $A = \{x |\ x \in N, 0 < x \leq 4\},\ B = \{y |\ y \in R, -2 \leq y < 0\}$;

7) $A = \{x |\ x \in N, x \leq 2\},\ B = \{y |\ y \in N, y < 4\}$;

8) $A = \{x |\ x \in R, -5 \leq\ x \leq -3\},\ B = \{y |\ y \in R, 1 < y < 3\}$;

9) $A = \{x |\ x \in Z, -3 < x < 0\},\ B = \{y |\ y \in R, 1 \leq y < 3\}$;

10) $A = \{x |\ x \in R, 1 \leq x < 5\},\ B = \{y |\ y \in Z, -6 < y \leq -3\}$.

2.6. На координатной плоскости постройте фигуру F, если

1) $F = \{(x, y) |\ x = 2, y \in R\}$;

2) $F = \{(x, y) |\ x \in R, y = -3\}$;

3) $F = \{(x, y) |\ x = 2, y \in R\}$;

4) $F = \{(x, y) |\ x \geq 2, y \in R\}$;

5) $F = \{(x, y) |\ x \in R, y \leq -3\}$.

2.7. Даны множества $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{c, e, m\}$. Проверьте справедливость равенств:

1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

2.8. Изобразите на координатной плоскости декартово произведение множеств $X = \{\ 1, 2, 3\},\ \ Y = \{-1, 0, 1\}$. Укажите, для каких точек выполняется соответствие $x = y + 3$.

2.9. Найдите область определения и множество значений для соответствия $a \leq b$, если a и b натуральные числа и $2 \leq a < 10$, $4 \leq b < 12$.

2.10. Построить граф и график соответствия:

1) $X = \{1, 3, 5\}, Y = \{2, 4, 6\};\ \ x\rho y\ \Leftrightarrow x \in X, y \in Y\ \wedge x < y;$
2) $X = \{2, 3, 5, 7\}, Y = \{15, 28, 37\};\ \ x\rho y\ \Leftrightarrow x \in X, y \in Y\ \wedge y \vdots x;$
3) $X = \{135, 0, 264, 122\}, Y = \{3, 4, 5, 9\};\ \ x\rho y\ \Leftrightarrow x \in X, y \in Y\ \wedge$ $x \vdots y$
4) $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, Y = Z;\ \ x\rho y\ \Leftrightarrow x \in X, y \in Y\ \wedge y = x - 3.$

2.11. Для множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{-1, -2, -3\}$ заданы следующие соответствия:

a) $a < b$, b) $a = b + 3$, c) $a > b$, d) $a = -b$, $a \in A$, $b \in B$.

Для каждого из них укажите область определения, множество значений, постройте граф и график.

2.12. Построить граф и график отношения, заданного на множестве *X*, если

1) $X = \{2, 3, 4, 5\}; x\rho y\ \Leftrightarrow x < y;$
2) $X = \{7, 8, 9, 10\}; x\rho y\ \Leftrightarrow x = y;$
3) $X = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}; x\rho y\ \Leftrightarrow y = 2x;$
4) $X = \{-3, -1, 1, 2, 3, 4\}; x\rho y\ \Leftrightarrow y = x + 3;$
5) $X = \{3, 5, 7, 9\}; x\rho y\ \Leftrightarrow x = y - 2;$

2.13. Пусть ρ – отношение в множестве *X*. Какими свойствами обладает это отношение, если

1) $X = \{a, b\},\ \Gamma_\rho = \{(a, a), (b, b), (a, b)\};$
2) $X = \{a, b, c, d\},\ \Gamma_\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\};$
3) $X = \{a, b, c, d\},\ \Gamma_\rho = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d)\}.$

2.14. На множестве $X = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ заданы отношения «больше» и «кратно». Постройте их графы и укажите свойства данных отношений.

2.15. Решите задачу, используя граф бинарного отношения:

1) Дано пять чисел. Известно, что первое больше пятого, второе меньше третьего, пятое больше третьего, а четвертое меньше пятого. Какое из чисел больше: первое или четвертое? пятое или второе?
2) Из лагеря вышли пять туристов: Вася, Галя, Толя, Лена и Миша. Толя идет впереди Миши, Лена – впереди Васи, но позади Миши, Галя – впереди Толи. Кто идет первым и кто последним?
3) Мы наблюдаем за вертолетом, орлом, дирижаблем, самолетом. Орел находится выше вертолета, вертолет – ниже самолета, но выше дирижабля, а орел – ниже самолета. В каком порядке расположились по высоте вертолет, орел, дирижабль и самолет?

Образец контрольной работы по теме 2

1. Проверьте справедливость свойства дистрибутивности декартова произведения множества A относительно объединения множеств B и C, если: $A = \{3; 4;5\}$, $B = \{5; 7\}$, $C = \{7;8\}$.

2. Найдите декартово произведение $A \times B \times C$, если $A = \{a; b;c\}$, $B = \{k; l\}$, $C = \{n\}$.

3. Построить граф отношения $x = y + 2$ между элементами множества $\{-3; -1; 1; 2; 3; 4\}$.

4. Является ли отношение ρ рефлексивным на множестве M. Если $M = \{3, 4, 5\}$, ρ – отношение равенства.

5. Является ли отношение $x - y = 2$ в $X = R$ отношением эквивалентности?

6. $X = \{3, 4, 5, 8\}$, $У = \{6, 7\}$. $x \rho y \Leftrightarrow x \in X, y \in У$ и $x < y$. Построить граф и график соответствия ρ.

ТЕМА 3.
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 1. Комбинаторика. Правила суммы и произведения

В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название ***комбинаторных задач***, а раздел математики, в котором рассматриваются подобные задачи, называют ***комбинаторикой***.

Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, которое означает «*соединять, сочетать*». По сути дела, в комбинаторике изучают конечные множества, их подмножества, отображения, а также кортежи, составленные из элементов конечных множеств. Поэтому комбинаторику можно рассматривать как часть теории конечных множеств.

Методы комбинаторики находят широкое применение в физике, химии, биологии и других областях знаний.

Приведем примеры некоторых комбинаторных задач.

1. Расположить 10 точек и 5 отрезков так, чтобы на каждом отрезке было по 4 точки.

2. Сколькими способами можно из 7 мальчиков и 9 девочек выбрать команду для эстафетного бега, если в команду должны войти 4 мальчика и 4 девочки.

3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза.

Решение большинства комбинаторных задач основано на двух простых правилах, которые называют ***правилами суммы*** и ***произведения***. Правило суммы позволяет найти число элементов в объединении двух конечных множеств, а правило произведения – число элементов их декартова произведения.

Правило суммы. *Если элемент x можно выбрать k способами, а элемент y можно выбрать m способами, причем ни один из способов выбора элемента x не совпадает со способом выбора элемента y, то выбор «x или y» можно осуществить $k + m$ способами.*

На языке теории множеств это правило формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Если пересечение конечных множеств A и B пусто, т.е. $A \cap B = \varnothing$, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств A и B:*

$$A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; n(A \cup B) = n(A) + n(B). \tag{1}$$

Пример 1. *В корзине лежат 9 яблок и 5 груш. Сколькими способами можно выбрать один плод?*

***Решение*.**

В задаче идет речь о выборе «яблоко или груша». Одно яблоко можно выбрать девятью способами, а одну грушу можно выбрать пятью способами, причем ни один из способов выбора яблока не совпадает со способом выбора груши. Следовательно, указанный выбор можно осуществить 9 + 5 = 14 способами.

Замечание 1. Правило суммы может быть обобщено на случай *m* непересекающихся множеств.

Если конечные множества $A_1, A_2, \dots, A_m$ попарно не пересекаются, т.е. $A_j \cap A_k = \varnothing$ при $j \neq k$, то имеет место равен

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_m). \tag{2}$$

Разберем теперь случай, когда множества могут иметь непустые пересечения. Начнем со случая двух множеств.

Теорема 2. *Для любых конечных множеств A и B верно равенство*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \tag{3}$$

Доказательство.

Множество $A \cup B$ является объединением трех попарно непересекающихся множеств: $A \setminus (A \cap B)$ (элементы, принадлежащие только *A*), $B \setminus (A \cap B)$ (элементы, принадлежащие только B) и множества $A \cap B$ (элементы, принадлежащие обоим множествам).

Первое из этих множеств содержит $n(A) - n(A \cap B)$ элементов, второе содержит $n(B) - n(A \cap B)$ элементов, а третье – $n(A \cap B)$ элементов. Значит число элементов во множестве $A \cup B$ равно:

$$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B).$$

Таким образом, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Теорема доказана.

Например, если заданы множество *A = {а, б, в, г, д, е}* и множество *B = {г, д, е, ж, з}*, то их объединением является множество, состоящее из букв *{а, б, в, г, д, е, ж, з}*, а пересечением – множество *{г, д, е}*.

При этом $n(A) = 6$, $n(B) = 5$, $n(A \cap B) = 3$, $n(A \cup B) = 8$, что согласуется с формулой (3).

Пример 2. *Из 100 учащихся, изучающих английский и немецкий языки, 85 изучают английский язык, 45 – немецкий язык. Сколько человек изучает оба языка?*

***Решение*.**

В задаче рассматриваются множество A – множество всех учащихся и его подмножества:
множество B – множество учащихся, изучающих английский язык,
множество C – множество учащихся, изучающих немецкий язык.

Известно, что $n(A) = 100$, $n(B) = 85$, $n(C) = 45$.

Необходимо найти $n(B \cap C)$. Множество $A=B \cup C$. Следовательно, $n(A) = n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$. Подставляя, имеем:
$100 = 85 + 45 - n(B \cap C)$, значит, $n(B \cap C) = 30$.

Замечание 2. Формула (3) является частным случаем более общей формулы, которую называют ***формулой перекрытий*** или, иначе, ***формулой включений и исключений***:

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = {} & n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m) - \\ & - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_1 \cap A_m) - \\ & - n(A_2 \cap A_3) - \ldots - n(A_2 \cap A_m) - \ldots - n(A_{m-1} \cap A_m) + \\ & + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + (-1)^{m+1} \cdot n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m). \end{aligned} \qquad (4)$$

В эту формулу, кроме самих множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$, входят их всевозможные пересечения по 2, по 3, …, по m множеств. При этом если число пересекаемых множеств нечетно, соответствующее слагаемое входит в формулу (4) со знаком «плюс», а если оно четно, то со знаком «минус».

Например, при $n = 3$ имеем:

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - \\ & - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned} \qquad (5)$$

Пример 3. *В классе обучаются 42 ученика. Из них 16 занимаются в секции по легкой атлетике, 24 – в футбольной секции, 15 – в шахматной секции, 11 – и в секции по легкой атлетике, и в футбольной, 8 – и в легкоатлетической, и в шахматной, 12 – и в футбольной, и в шахматной, а 6 - во всех трех секциях. Остальные школьники увлекаются только туризмом. Сколько школьников являются туристами?*

***Решение*.**

В задаче рассматриваются множества: U – всех учащихся, A – членов легкоатлетической секции, B – членов футбольной секции, C – членов шахматной секции, D – членов туристической секции.

По условию задачи имеем: $U = A \cup B \cup C \cup D$.

Причем $D \cap (A \cup B \cup C) = \varnothing$ и $n(U) = 42$, $n(A) = 16$, $n(B) = 24$, $n(C) = 15$, $n(A \cap B) = 11$, $n(A \cap C) = 8$, $n(B \cap C) = 12$, $n(A \cap B \cap C) = 6$.

По формуле (5) получаем, что

$n(A \cup B \cup C) = 16 + 24 + 15 – 11 – 8 – 12 + 6 = 30$, и потому

$n(D) = n(U) – n(A \cup B \cup C) = 42 – 30 = 12$.

Значит, туризмом занимаются 12 школьников.

Вторым основным правилом комбинаторики является *правило произведения*. Оно касается подсчета числа кортежей, которые можно составить из элементов данных конечных множеств.

Правило произведения. *Если элемент x можно выбрать k способами, а элемент y можно выбрать m способами, то упорядоченную пару $(x; y)$ можно выбрать $k \cdot m$ способами.*

На языке теории множеств это правило формулируется следующим образом:

Теорема 3. *Если множества A и B конечны, то число пар в их декартовом произведении $A \times B$ равно произведению чисел элементов этих множеств:*

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B). \qquad (6)$$

Пример 4. *Набор составляется из тетради и книги. Сколько различных наборов можно составить, имея 9 различных тетрадей и 13 различных книг?*

***Решение*.**

В задаче идет речь о выборе упорядоченной пары (тетрадь, книга). Одну тетрадь из 9 различных тетрадей можно выбрать девятью способами. Одну книгу из 13 различных книг можно выбрать тринадцатью способами. Следовательно, осуществить выбор указанной пары можно $9 \cdot 13 = 117$ способами.

Итак, из 9 различных тетрадей и 13 различных книг можно составить 117 различных наборов.

Формулу (6) можно обобщить на любое число множеств.

Теорема 4. *Если множества $A_1, A_2, \ldots, A_m$ конечны, то имеет место равенство*

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_m). \qquad (7)$$

§ 2. *Перестановки без повторений. Понятие «n – факториал»*

Определение 1. *Конечное множество X называется* ***упорядоченным****, если его элементы пронумерованы некоторым образом, т.е. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

Понятие упорядоченного множества – частный случай понятия кортежа. Оно выделяется из общего понятия кортежа условием, что в упорядоченном множестве все элементы различны.

Например, $\{a; b; a; c; a; d\}$ не является упорядоченным множеством, а $\{a; b; c; d; e; f\}$ – упорядоченное множество.

Одно и то же множество можно упорядочить различными способами. Например, множество школьников в классе можно упорядочить по возрасту, росту, весу, алфавиту и т. д.

Задача. *Сколькими способами можно упорядочить множество, состоящее из n элементов?*

***Решение*.**

Каждое упорядочение заключается в том, что какой-то элемент получает номер 1, какой-то – номер 2, …, какой-то – номер n. Номер 1 может получить любой из элементов множества X, значит, выбор первого элемента можно сделать n способами. Если первый элемент выбран, то на второе место остается лишь $(n – 1)$ кандидат, так как повторить сделанный выбор нельзя. Значит, имеем $(n – 1)$ способ выбора второго элемента. Третий элемент можно выбрать $(n – 2)$ способами и т.д. Последний элемент можно выбрать лишь одним способом – все остальные элементы получили свои места, и остался лишь один элемент, который и занимает
n-е место. По правилу произведения получаем, что общее число способов упорядочения равно $n \cdot (n – 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Замечание. *Для произведения первых n натуральных чисел в математике используют специальное обозначение: n! (читается «n – факториал»).*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Например, $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

По определению считают, что **$1! = 1$** и **$0! = 1$.**

Таким образом, число различных упорядочений n-элементного множества X равно $n!$. Различные упорядочения n-элементного множества состоят из одних и тех же элементов, а отличаются друг от друга лишь порядком этих элементов. При этом элементы в них не повторяются.

Определение 2. *Упорядоченное множество длины n, составленное из элементов n-элементного множества X, называют **перестановками без повторений** из n элементов. Число таких перестановок обозначают P_n.*

Итак, мы доказали, что $\boldsymbol{P_n = n!}$

Перестановки без повторений являются простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества.

Пример 1. *Сколькими способами можно рассадить 12 гостей на 12 различных стульях?*

Решение.

Необходимо составить различные упорядочения 12-элементного множества. При этом ни один гость не может находиться на двух различных стульях одновременно. Следовательно, число таких упорядочений есть

$P_{12} = 12! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 479\,001\,600.$

Пример 2. *Сколько можно составить трехзначных чисел, не кратных 5, из цифр 4, 5, 9, если любую из них использовать один раз?*

Решение.

Из трех различных цифр можно составить P_3 трехзначных чисел. Среди них содержатся и трехзначные числа, кратные пяти. Они оканчиваются цифрой 5, и их столько, сколько существует перестановок без повторений из цифр 4 и 9, т.е. P_2.

Таким образом, из цифр 4, 5, 9 можно составить

$P_3 - P_2 = 3! - 2! = 6 - 2 = 4$ трехзначных числа, не кратных пяти.

§ 3. Размещения без повторений

Будем теперь составлять из элементов n-элементного множества X упорядоченные множества длины k.

Определение. *Упорядоченное множество длины k, составленное из элементов n-элементного множества X, называют* ***размещениями без повторений*** *из n элементов множества X по k. Число таких размещений обозначают* A_n^k .

Задача. *Найти число размещений без повторений из n элементов по k элементов.*

Решение.

Первым элементом упорядоченного множества - кортежа длины k без повторяющихся элементов может стать любой из элементов множества X. Так как их число равно n, то получаем n возможностей выбора.

Если первый элемент x_1 уже выбран, второй элемент можно выбрать лишь $(n-1)$ способами (повторение элемента x_1 не допускается). Аналогично устанавливаем, что при выбранных элементах x_1 и x_2 элемент x_3 можно выбрать $(n-2)$ способами и т.д. вплоть до элемента x_k, который можно выбрать $(n-(k-1))$, т.е. $(n-k+1)$ способами (так как до него выбраны $(k-1)$ элемент $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ и ни один из них не должен повториться).

По правилу произведения получаем, что число размещений без повторений из n элементов по k выражается формулой

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \qquad (1)$$

Эту формулу можно записать иначе, если воспользоваться обозначением $n!$.

Для этого умножим обе части равенства (1) на выражение $(n-k)! = (n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1$, и получим, что:

$$(n-k)!\cdot A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

Отсюда вытекает, что

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Пример 1. *Сколькими способами можно выбрать из класса, насчитывающего 25 человек, старосту, профорга и физорга?*

Решение.

Любой такой выбор является размещением без повторений из 25 элементов по 3 (он задается кортежем длины 3 без повторений, составленным из элементов множества учеников). Значит, число способов выбора равно $A_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 23\cdot 24\cdot 25 = 13800$.

§ 4. *Сочетания без повторений и их свойства*

Будем теперь строить из элементов множества X не кортежи, а подмножества. Получим так называемые сочетания без повторений.

Определение. *k–элементные подмножества n-элементного множества X называют* ***сочетаниями без повторений*** *из элементов этого множества по k.*

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначают C_n^k.

Замечание. *В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из n элементов по k отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.*

Задача. *Найти число сочетаний без повторений из n элементов по k.*

***Решение*.**

Из каждого сочетания без повторений из n элементов по k путем упорядочивания получаются $k!$ различных размещений без повторений из n элементов по k. При этом различные сочетания порождают различные размещения, и каждое размещение может быть получено указанным образом. Отсюда следует, что число размещений без повторений из n элементов по k в $k!$ раз больше, чем число сочетаний без повторений из n элементов по k.

Иными словами мы доказали, что $A_n^k = k! \cdot C_n^k$. Но тогда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. Подставляя для A_n^k, выведенное в § 3 значение $\frac{n!}{(n-k)!}$, получим формулу для подсчёта числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{1}$$

Формулу (1) можно записать также следующим образом:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Пример 1. *Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?*

***Решение*.**

В задаче не имеет значения, в каком порядке будут выбираться дежурные. Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3. Имеем:

$$C_{15}^{3}=\frac{15!}{3!\cdot(15-3)!}=\frac{15!}{3!\cdot 12!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=455.$$

Следовательно, трех дежурных можно выбрать 455 способами.

Пример 2. *Из вазы с фруктами, в которой лежит 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?*

Решение.

Выбрать 3 яблока из 9 можно C_9^3 способами, а выбрать 2 груши из 6 можно C_6^2 способами.

Сделать выбор фруктов, о котором говорится в задаче, можно $C_9^3\cdot C_6^2$ способами. Имеем: $C_9^6\cdot C_6^2=\frac{9!}{6!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}=1260.$

Значит, указанный выбор фруктов можно сделать 1260 способами.

Числа C_n^k, выражающие количество k–элементных подмножеств в n–элементном множестве X, обладают целым рядом замечательных свойств. Эти свойства выражают различные соотношения между подмножествами множества X.

Свойство 1. *Если $0\le k\le n$, то верно равенство*

$$C_n^k=C_n^{n-k}. \tag{2}$$

Доказательство.

Докажем это свойство с помощью формулы (1). Действительно:

$$C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-n+k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=C_n^k.$$

Свойство 2. *Для любых k и n, таких, что $0\le k\le n$, верно равенство*

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k. \tag{3}$$

Доказательство.

Докажем и это равенство с помощью формулы (1) . В самом деле, так как

$$C_{n-1}^{k-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=\frac{(n-1)!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!},$$

$$C_{n-1}^{k}=\frac{(n-1)!}{(k)!\cdot(n-k-1)!}=\frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k)!}$$

то, подставляя эти значения в правую часть формулы (3), получаем:

$$C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k)!} =$$

$$=\frac{(n-1)!\cdot(k+n-k)}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{(n-1)!\cdot n}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=C_n^k$$

Равенство (3) доказано.

§ 5. *Размещения, перестановки, сочетания с повторениями*

Задача 1. *Найти число всех кортежей длины k, которые можно составить из элементов множества X, если число этих элементов равно m, т.е. n(X) = m.*

Решение.

Надо найти число элементов в декартовом произведении $X\times X\times\ldots\times X$, состоящем из k одинаковых множителей. По формуле (7) §1 это число равно $n(X)\cdot n(X)\cdot\ldots\cdot n(X)$ (k множителей), т.е. $n(X)^k = m^k$.

Определение 1. *Кортежи длины k, составленные из элементов m-элементного множества X,* ***называют размещениями с повторениями*** *из m элементов по k.*

Число этих кортежей обозначают $\overline{A_m^k}$. Из задачи 1 следует, что

$$\overline{A_m^k} = m^k \tag{1}$$

Пример 1. *Сколько пятизначных номеров можно составить из девяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?*

Решение.

Такие номера являются кортежами длины 5, составленными из элементов множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. По формуле (1) их число равно $\overline{A_9^5} = 9^5 = 6561$.

Пример 2. *Имеется 5 различных стульев и 7 рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев?*

Решение.

Так как стулья различны, то каждый способ обивки есть, по существу, кортеж длины 5, составленный из элементов данного множества цветов ткани, содержащего 7 элементов. Значит всего способов обивки стульев столько, сколько имеется таких кортежей, т.е. размещений с повторениями из 7 элементов по 5: $\overline{A_7^5} = 7^5 = 16807$.

Определение 2. ***Перестановкой с повторениями*** *состава* $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ *из элементов* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *называют любой кортеж длины* $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$, *в который* a_1 *входит* k_1 *раз,* a_2 *входит* k_2 *раза, ...,* a_m *входит* k_m *раз.*

Обозначение: $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Задача 2. *Найти число* $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ *перестановок с повторениями, имеющих состав* $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Решение.

Перестановку состава $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ можно получить следующим образом: сначала выбираем k_1 место из общего числа мест $k = k_1 + k_2 + +\ldots + k_m$ и помещаем на них a_1. Этот выбор может быть сделан $C_k^{k_1}$ способами. Затем из оставшихся $(k - k_1)$ мест выбираем k_2 места и помещаем на них a_2. Этот выбор может быть сделан $C_{k-k_1}^{k_2}$ способами. Выбор мест для a_3 может быть сделан $C_{k-k_1-k_2}^{k_3}$ способами и т.д.

По правилу произведения получаем, что выбор перестановки состава $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ может быть сделан $C_k^{k_1} \cdot C_{k-k_1}^{k_2} \cdot C_{k-k_1-k_2}^{k_3} \cdot \ldots \cdot C_{k-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m}$ способами. В силу формулы (1) §4 получаем:

$$P\left(k_1, k_2, \ldots, k_m\right) = \frac{k!}{k_1!(k-k_1)!} \cdot \frac{(k-k_1)!}{k_2!(k-k_1-k_2)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{(k-k_1-k_2)!}{k_3!(k-k_1-k_2-k_3)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(k-k_1-\ldots-k_{m-1})!}{k_m! \cdot 0!}$$

После сокращения получаем формулу

$$\mathrm{P}\left(k_1, k_2, \ldots, k_m\right) = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} \qquad (2)$$

Пример 3. *Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?*

Решение.

Слово «*математика*» является кортежем длины 10, имеющим состав (2, 3, 2, 1, 1, 1) (буква «*м*» входит в запись слова 2 раза, буква «*а*» - 3 раза, буква «*т*» - 2 раза, буквы «*е*», «*и*», «*к*» - по одному разу). Значит, при перестановках букв получится

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 151\ 200 \text{ «слов».}$$

Пример 4. *Сколькими способами можно разложить 28 различных предметов по четырем различным ящикам, так, чтобы в каждом ящике оказалось по 7 предметов?*

Решение.

В данной задаче существенно, что ящики можно отличить друг от друга. Число способов равно

$$P(7, 7, 7, 7) = \frac{28!}{7!\cdot 7!\cdot 7!\cdot 7!} = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

И в заключение рассмотрим так называемые сочетания с повторениями.

Пусть имеются предметы m видов, и из них составляется набор, содержащий k элементов. Два таких набора считаются одинаковыми в том и только в том случае, когда они имеют одинаковый состав. Такие наборы называют ***сочетаниями с повторениями*** из m элементов по k элементов. Число сочетаний с повторениями из m элементов по k обозначают $\overline{C_m^k}$.

Задача 3. *Найти число сочетаний с повторениями из m элементов по k.*

Решение.

Каждый состав сочетания задается кортежем, состоящим из неотрицательных чисел $(k_1, k_2, ..., k_m)$, где k_1 показывает количество элементов первого вида, k_2 – второго, …, k_m – m-го.

Таким образом, $\overline{C_m^k}$ равно количеству числовых кортежей длины m $(k_1, k_2, ..., k_m)$, для которых $k_1 + k_2 + ... + k_m = k$ (как указывалось, здесь все k_t – неотрицательные целые числа).

Таким образом, решение задачи 3 свелось к решению следующей задачи: *найти количество тех числовых кортежей* $(k_1, k_2, ..., k_m)$ *длины* m, *для которых* $k_1 + k_2 + ... + k_m = k$.

Будем кодировать каждый кортеж $(k_1, k_2, ..., k_m)$ кортежем, составленным из единиц и нулей.

С этой целью заменим в кортеже каждое число k_j последовательностью из k_j единиц (если $k_j = 0$, то пишут 0), а каждую запятую нулем.

Получим кортеж из $k_1 + k_2 + ... + k_m = k$ единиц и $(m - 1)$ нуля (запятых в кортеже $(k_1, k_2, ..., k_m)$ на 1 меньше, чем чисел).

Например, кортеж (4, 1, 0, 2) будет закодирован так: (1111010011).

Обратно, каждому кортежу, составленному из k единиц и $(m - 1)$ нуля, соответствует числовой кортеж $(k_1, k_2, ..., k_m)$, такой, что $k_1 + k_2 + ... + k_m = k$. Поэтому искомое число кортежей вида $(k_1, k_2, ..., k_m)$ равно числу кортежей из k единиц и $(m-1)$ нуля.

По формуле перестановок с повторениями число таких кортежей равно $P(k, m-1)$, т.е. $\frac{(k+m-1)!}{k!(m-1)!}$. Но это число равно C_{k+m-1}^{k}.

Итак, мы доказали равенство $\overline{C_m^k} = C_{k+m-1}^{k}$

Пример 4. *Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеются 4 сорта пирожных?*

***Решение*.**

Искомое число наборов равно $\overline{C_4^7}$, т.е. C_{7+4-1}^{7}.

Но $C_{10}^{7} = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$.

Итак, можно составить 120 наборов.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задания к теме «Правило суммы»

1. Сколько чисел содержится в множестве А, если известно, что среди них 100 чисел кратно двум; 115 – трем; 120 – пяти; 45- шести; 38 – десяти; 50 – пятнадцати; 20 чисел – тридцати?
2. Из 80 школьников 40 играют в футбол, а 50 - в волейбол. Каким может быть число школьников, играющих в обе игры; хотя бы в одну из этих игр?
3. Из 25 учащихся класса 13 увлекаются математикой, а 7 – русским языком. Каким может быть число учащихся, увлекающихся обоими предметами? увлекающихся хотя бы одним предметом?
4. Из 30 учащихся 22 занимаются в математическом кружке, 11 – в физическом кружке, а 5 – в обоих кружках. Сколько учащихся класса не занимаются ни в том, ни в другом кружке?
5. В корзине лежат 5 белых грибов, 6 подберезовиков и 3 сыроежки. Сколькими способами можно выбрать один какой-нибудь гриб?

Задания к теме «Правило произведения»

1. Из города А в город В ведут пять дорог, а из города В в город С – три дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С? (Ответ: 15 путей)
2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы слова «полка»? (Ответ: 6 способами).

3. Имеется 6 перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?
4. Гера, Афина и Афродита попросили Париса не только назвать самую красивую из них, но и указать, кто на «втором и третьем местах». Сколько есть вариантов ответа? (Ответ: 6 вариантов).
5. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали по итогам первенства по футболу, если число команд 12? (Ответ: 132 способа)
6. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата – белый и черный? Решите эту задачу, если нет ограничений на цвет квадратов; если надо выбрать два белых квадрата. (Ответ: 1024; 4032; 992).
7. Сколько различных шифров можно набрать в автоматической камере хранения, если шифр составляется с помощью любой из тридцати букв русского алфавита с последующим трехзначным числом?
8. Сколько имеется семизначных натуральных чисел, в которых все цифры, стоящие на нечетных местах, различные?
9. Сколько различных танцевальных пар (юноша, девушка) можно составить из пяти юношей и восьми девушек?
10. На районную олимпиаду школа должна была набрать команду из трех участников: одного из трех лучших надо выбрать для участия в олимпиаде по химии, одного из четырех – по физике, одного из семи – по математике. Сколькими способами можно составить такую команду?
11. Сколько различных четырехзначных чисел, не имеющих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4?
12. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день из шести разных учебных предметов?
13. Имеется восемь видов конвертов без марок и пять видов марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправки письма?
14. Из трех экземпляров учебника алгебра, семи экземпляров учебника геометрии и шести экземпляров учебника физики надо выбрать комплект, содержащий все три учебника по одному разу. Сколькими способами это можно сделать?
15. В корзине лежит 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает либо яблоко, либо апельсин, после чего Надя выбирает из оставшихся фруктов и яблоко, и апельсин. Сколько возможно таких выборов? При каком выборе Вани у Нади больше возможностей?

Задания к теме «Размещения с повторениями»

1. Вычислите : $\overline{A}_5^3$; $\overline{A}_3^5$. (Ответ: 125; 243)
2. Для запирания автоматической камеры применяется секретный замок, который открывается лишь тогда, когда набрано «тайное слово». Это слово набирают с помощью пяти дисков, на каждом из которых изображено 12 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова и подбирающего его наудачу? (Ответ: 248 831)
3. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 5, 8 и 9, если каждая цифра может входить в комбинацию несколько раз? (Ответ: 1024).
4. На референдуме предложены четыре вопроса, на которые надо ответить «да» или «нет». Сколько есть возможностей заполнения бюллетеня (на все вопросы надо дать ответ)? (Ответ: 16)
5. Гера, Афина и Афродита обратились к трем мудрецам с просьбой назвать прекраснейшую из них. Каждый из мудрецов высказал свое мнение. Сколько могло возникнуть вариантов ответа у этой тройки на поставленный вопрос? (Ответ: 216)
6. У Кати есть восемь красок. Она хочет написать ими слова «Новый год». Сколькими способами она может это сделать, если собирается каждую букву раскрашивать одним цветом? (Ответ: 8^8)
7. Сколько букв русского алфавита можно закодировать, используя лишь комбинации точек и тире, содержащие только три знака? (Ответ: 8)
8. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в синий, зеленый и красный переплеты. Сколькими способами он может это сделать? (Ответ: 1728)
9. Сколькими способами можно разделить восемь различных конфет между четырьмя детьми?
10. Сколько существует пятизначных номеров, не содержащих цифру 6.
11. Сколькими способами можно разложить 15 различных деталей по трем ящикам?
12. Имеется выбор из 16 карточек. На четырех из них написана буква «А», на четырех – буква «Б», на четырех – буква «В» и на четырех – буква «Г». Сколько различных комбинаций букв можно получить, выбирая из набора четыре карточки и располагая их в некотором порядке?

Задания к теме «Размещения без повторений»

1. Вычислите: 4!; 5!; 6!.
2. Вычислите: A_5^3. (Ответ: 60)

3. В высшей лиге первенства России по футболу участвуют 16 команд. Разыгрывается три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось указать распределение медалей. Сколько различных ответов можно дать на этот вопрос? (Ответ: 3360)
4. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду их четырех человек для участия в эстафете на 100+200+400+800 (м). Сколькими способами это можно сделать? (Ответ: 657 720).
5. Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы А, В, С, Е, М, К? (Ответ: 60)
6. Сколько всего различных пятизначных чисел, не содержащих нуля? (Ответ: 15 120)
7. В классе изучают девять предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть шесть разных уроков? (Ответ: 720)
8. В классе 25 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из них староста и казначей?
9. В чемпионате по футболу участвуют десять команд. Сколько существует различных возможностей занять командам первые три места?
10. В цехе работают 7 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление трех различных видов деталей (по одному виду на каждого)?
11. Из десяти различных книг выбирают четыре для подарка. Сколькими способами это можно сделать?
12. В студенческий комитет избраны семь человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
13. Сколькими способами можно опустить пять писем в 11 почтовых ящиков, если в каждый ящик опускают не более одного письма?
14. Сколькими различными способами можно распределить между восемью лицами три различные путевки в санаторий?
15. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым по одной партии, всего было сыграно36 партий. Определите число участников турнира.

Задания к теме «Перестановки без повторений»

1. Вычислите: P_3; P_5.
2. Что больше и во сколько раз:
   а) $4!\cdot 3$ или $3!\cdot 4$; б) $(\kappa+1)!\cdot\kappa$ или $\kappa!\cdot(\kappa+1)$?
3. Найти значение выражения: $a)\ \frac{7!}{9!}$; $б)\ \frac{5!}{3!\cdot 2!}$.

4. Делится ли число 20! на 40?
5. Найти значение выражения: $P_6 - P_3 + P_4$.
6. Сократите дробь $\frac{(n+1)!\cdot(n+3)}{(n+4)!}$.
7. Найдите число способов расстановки восьми ладей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга. (Ответ: 40 320)
8. Сколькими способами можно переставлять друг с другом цифры 5, 6, 7, 8? (Ответ: 24)
9. За столом 6 мест. Сколькими способами можно рассадить шестерых гостей. (Ответ 720)
10. У Лены есть восемь разных красок. Она хочет написать ими слова «Новый год». Сколькими способами она может это сделать, если каждая буква должна быть раскрашена одним цветом и все восемь букв должны быть разными по цвету? (Ответ: 40 320).
11. Сколькими способами можно посадить за круглым столом шесть мужчин и шесть женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом? (Ответ: $6!\cdot 6! = 720\cdot 720$)
12. Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на который поставлено 12 приборов?
13. Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди 10 учащихся группы в течение десяти дней?
14. Сколько шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 4, 6, 8, 9 так, чтобы:
    а) последней была цифра 9;
    б) первой была цифра 4, а второй 1?
15. Имеется 10 книг, среди которых:
    а) восемь книг разных авторов и двухтомник одного автора, которого не было среди предыдущих семи;
    б) семь книг разных авторов и трехтомник восьмого автора.
16. Сколькими способами можно расставить эти книги так, чтобы книги одного автора не стояли рядом?
17. Сколько различных перестановок можно составить из букв слова «учитель»? Сколько из них начинаются с буквы «т»?

Задания к теме «Перестановки с повторениями»

1. Вычислите: $P(2,5,3)$; $P(1,2,3,4)$ (Ответ: 360; 420)
2. У мамы два яблока и три груши. Каждый день в течение пяти дней она дает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это можно сделать? (Ответ: 10).
3. Сколькими способами можно положить 28 различных открыток в четыре одинаковых конверта так, чтобы в каждом конверте было по семь открыток? (Ответ: $\frac{28!}{4!(7!)^4}$).

4. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «ингредиент»? (Ответ: 226 800)
5. Как-то раз в воскресенье семеро друзей зашли в кафе. Хозяин кафе сказал, что если друзья в каждое следующее воскресенье будут садиться по-разному и перепробуют все способы посадки, то с этого момента он обещает кормить всех мороженым бесплатно. Удастся ли друзьям воспользоваться предложением хозяина кафе?
6. Для премирования победителей математической олимпиады выделено три экземпляра одной книги, четыре экземпляра другой и восемь экземпляров третьей. Сколькими способами могут быть распределены эти премии между 30 участниками олимпиады, если каждому вручается не более одной книги?
7. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «огород», чтобы три буквы «о» не шли подряд?

Задания к теме «Сочетания без повторений»

1. Вычислите: C_8^3; C_6^2; C_9^5.
2. Сколько подмножеств имеет множество, содержащее 5 элементов? Сколько среди них трехэлементных? четырехэлементных?
3. Составьте все подмножества множества A и найдите их число, если: а)$A=\{1,3,5,7\}$; б) $A=\{x,y\}$; в) $A=\{p_1,p_2,p_3\}$.
4. Решите уравнение: а) $C_8^x = 70$; б) $C_x^{x-2} = 15$; в)$C_x^3 = 2C_x^2$. (Ответ: 4; 6; 8)
5. Найти значение выражения $\frac{C_6^3 - C_6^2}{A_6^2}$ (Ответ: $\frac{1}{6}$)
6. Отметьте на координатной плоскости точки (n, C_n^2) для n = 3, 4, 5, 6.
7. Сколькими способами из 12 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?
8. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги из 7?
9. Из пачки цветной бумаги, в которой всего 10 листов и все они по цвету различные, выбирают 3 листа цветной бумаги. Сколькими способами это можно сделать?
10. В шахматном турнире принимают участие 10 шахматистов. Сколько будет сыграно партий, если любые два участника встретятся между собой один раз?
11. Из отряда солдат в 40 человек, среди которых есть рядовой Иванов, назначаются в караул 3 человека. Сколькими различными способами может быть составлен караул? В скольких случаях в число караульных попадет рядовой Иванов?

12. От трех студенческих групп спортивного факультета, в каждой из которых по 20 человек, надо выделить по 3 студента для участия в соревнованиях. Сколькими способами это можно сделать?

13. Во взводе 5 сержантов и 50 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из одного сержанта и четырех солдат?

14. В кружке художественного слова занимаются 12 человек, в фортепьянном - 10, в вокальном – 15, в фотокружке - 9. Сколькими способами можно составить бригаду из 4 чтецов, или 3 пианистов, или 5 певцов и одного фотографа?

15. Собрание из 40 человек выбирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

16. В чемпионате участвовали 7 команд. Каждая команда играла матч с каждой. Сколько всего было встреч? (Ответ: 21)

17. Встретились шестеро друзей, и каждый пожал руку каждому своему другу. Сколько было рукопожатий? (Ответ: 15).

18. «Проказница Мартышка, Осел, Козел и косолапый Мишка затеяли сыграть квартет» и для начала стали выбирать 4 инструмента из11, имеющихся на складе. Найти число возможных способов выбора инструментов. (Ответ: 330)

<u>Задания к теме «Сочетания с повторениями»</u>

1. Сколькими способами можно выбрать 4 монеты из четырех пятикопеечных монет и четырех десятикопеечных монет? (Ответ: 5).

2. В кондитерской имеется 5 разных сортов пирожных. Сколькими способами можно выбрать набор из 4 пирожных? (Ответ: 70)

Образец контрольной работы по теме 3

1) В гости приглашены 4 различные пары близнецов. Сколькими способами можно выбрать двух из восьми гостей?
2) В отделении НИИ работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 – английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский, 1 – все три языка. Сколько человек работают в отделе**?**
3) Вычислить $\left(\frac{P_5}{A_5^4}+\frac{P_4}{A_5^3}+\frac{P_3}{A_5^2}+\frac{P_2}{A_5^1}\right)\cdot A_5^2$.
4) Найти x, если $\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}}=\frac{16}{29}$.
5) Найдите число различных перестановок в слове «аннотация».

ТЕМА 4.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

§1. Математические понятия

Окружающий нас мир состоит из различных объектов – живых существ, домов, книг, автомобилей и т.д. При изучении этих объектов мы интересуемся некоторыми их свойствами, например, массой, формой, цветом, размерами и т.д. Между объектами окружающего нас мира существуют различные отношения (человек живет в доме, страница является частью книги). Говоря об объектах и их свойствах, мы высказываем те или иные утверждения. Например, «Кусок мела лежит около классной доски». Каждое такое утверждение может быть или истинным, или ложным. Многие утверждения относятся не к отдельным объектам, а к классам объектов («Все волки - четвероногие животные», «Некоторые обезьяны живут в зоопарке»). Объединение объектов в классы отражает их родственность, сходство их свойств.
Объединение отдельных объектов в классы и создание соответствующих понятий – важный мыслительный процесс. На первых этапах развития человеческого мышления возникали понятия, охватывавшие узкие классы объектов. По-видимому, сначала возникли слова, обозначавшие отдельные виды объектов, например, отдельные виды деревьев «сосна», «ель», «береза», «дуб», и лишь потом возникло общее понятие «дерево». Но и это понятие оказалось частным случаем более общего понятия «растение». Каждый шаг вперед в познании мира связан с введением все более общих понятий, изучением взаимодействий между ними и свойств объектов, охватываемых этими понятиями.

Для научного исследования характерно использование абстрактных понятий таких, как «химический элемент», «масса», «энергия», «материя», «число», «геометрическая фигура». Абстрактные понятия являются обобщением громадного опыта человечества, отражают коренные свойства материального мира. При введении любого из таких понятий приходится отвлекаться от многих свойств реальных объектов (например, рассматривая физическое тело как геометрическую фигуру, мы отвлекаемся от его цвета, массы, плотности, а интересуемся лишь его формами и размерами). Кроме того, происходит идеализация рассматриваемых объектов. Например, в геометрии считают отрезки безгранично делимыми, отвлекаясь от того, что реальные тела не могут быть разделены на сколь угодно малые части. Чтобы установить свойства таких идеализированных объектов, приходится опираться не на данные опыта, а на логические рассуждения.

Примером абстрактных понятий являются математические понятия. Они обладают рядом особенностей. Главная особенность заключается в том, что математические объекты, о которых необходимо составить понятие, в реальности не существуют. Математические объекты созданы умом человека. Это идеальные объекты, отражающие реальные предметы или явления. Математические объекты существуют лишь в мышлении человека и в тех знаках и символах, которые образуют математический язык.

В логике ***понятия*** рассматривают как форму *мысли, отражающую объекты (предметы или явления) в их существенных и общих свойствах*. Языковой формой понятия является слово или группа слов. Составить понятие об объекте – это значить уметь отличить его от других сходных с ним объектов.

Каждому понятию отвечает его ***объем***, *т.е. совокупность реальных и идеализированных объектов, охватываемых этим понятием.* Например, в объем понятия «слон» входят все слоны, как живущие сейчас на Земле, так и жившие на ней ранее, а так же те, которые будут жить потом.

Если объем одного понятия составляет часть объема второго понятия, то второе понятие называют ***обобщением*** первого, а первое – ***частным случаем*** второго. Например, понятие «ромб» – частный случай понятия «многоугольник», а понятие «многогранник» – обобщение понятия «призма».

С каждым понятием связана некоторая совокупность свойств, признаков, отношений к другим понятиям. Она образует ***содержание*** этого понятия и отражает объективно существующие свойства, признаки и отношения реальных предметов. Рассмотрим, например, понятие «прямоугольник». Объем понятия – это множество различных прямоугольников, а в его содержание входят такие свойства прямоугольников, как «иметь четыре прямых угла», «иметь равные противоположные стороны», «иметь равные диагонали» и т.д.

Между объемом понятия и его содержанием существует взаимосвязь: если *увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание*, и, наоборот: *при уменьшении объема понятия, его содержание возрастает*. Так, например, объем понятия «квадрат» является частью объема понятия «прямоугольник». В содержании понятия «квадрат» содержится больше свойств, чем в содержании понятия «прямоугольник».

Любое понятие нельзя усвоить, не осознав его взаимосвязь с другими понятиями. Поэтому важно знать, в каких отношениях могут находиться понятия, и уметь устанавливать эти связи.

Отношения между понятиями тесно связаны с отношениями между их объемами, т.е. множествами.

Условимся понятия обозначать строчными буквами латинского алфавита: a, b, c ….

Пусть заданы два понятия a и b. Объемы их обозначим соответственно A и B.

Если $A \subset B$, $(A \neq B)$, то говорят, что понятие a – ***видовое*** по отношению к понятию b, а понятие b – ***родовое*** по отношению к понятию a.

Например, если a – «прямоугольник», b – «четырехугольник», то их объемы находятся в отношении включения ($A \subset B$ и $A \neq B$), поскольку всякий прямоугольник является четырехугольником. Поэтому можно утверждать, что понятие «прямоугольник» является видовым по отношению к понятию «четырехугольник», а понятие «четырехугольник» – родовое по отношению к понятию «прямоугольник».

Если $A = B$, то говорят, что понятия a и b ***тождественны***. Например, тождественны понятия «равносторонний треугольник» и «равноугольный треугольник», так как их объемы совпадают.

Если множества A и B не связаны отношением включения, то говорят, что понятия a и b ***не находятся в отношении рода и вида*** и не тождественны. Например, не связаны таким отношением понятия «треугольник» и «куб».

Свойства отношений рода и вида между понятиями

1) *Понятия рода и вида относительны.*

Одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому. Например, понятие «прямоугольник» – родовое по отношению к понятию «квадрат» и видовое по отношению к понятию «четырехугольник».

2) *Для некоторого понятия часто можно указать несколько родовых понятий.*

Например, для понятия «прямоугольник» родовыми являются понятия «четырехугольник», «параллелограмм», «многоугольник». Среди нескольких родовых понятий выделяют ближайшее. Для понятия «прямоугольник» ближайшим является понятие «параллелограмм».

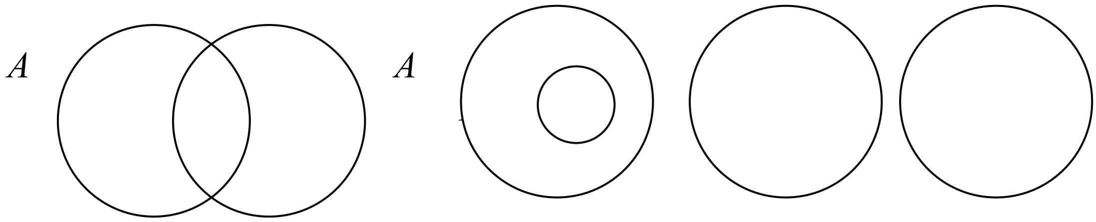
3) *Видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия.*

Например, квадрат, являясь видовым понятием по отношению к понятию «прямоугольник», обладает всеми свойствами, присущими прямоугольнику.

Так как объем понятия – множество, удобно, устанавливая отношения между объемами понятий, изображать их при помощи кругов Эйлера.

Установим, например, отношение между следующими парами понятий a и b, если:

1) a – «прямоугольник», b – «ромб»;
2) a – «многоугольник», b – «параллелограмм»;
3) a – «прямая», b – «отрезок».



1) 2) 3)

В 1) случае объемы понятий пересекаются, но ни одно множество не является подмножеством другого, следовательно данные понятия не находятся в отношении рода и вида.

Во 2) случае объемы находятся в отношении включения, но не совпадают, следовательно, можно утверждать, что понятие «параллелограмм» – видовое по отношению к понятию «многоугольник», а то в свою очередь, является родовым.

В 3) случае объемы понятий не пересекаются, так как ни про один отрезок нельзя сказать, что он является прямой, и ни одна прямая не может быть названа отрезком. Об этих понятиях можно сказать, что они находятся в отношении *целого* и *части*: отрезок – часть прямой, а не ее вид. Причем часть не обязательно обладает свойствами целого.

Рассмотрим теперь различные соотношения между понятиями и свойствами объектов. Если все объекты, входящие в объем понятия a, обладают свойством α, то говорят, что α – ***существенное свойство*** этого понятия, его ***необходимый признак***. Например, необходимым признаком квадрата является равенство его диагоналей. Среди существенных свойств данного понятия выделяются его ***характеристические свойства***, то есть свойства, присущие объектам соответствующего класса и не присущие никаким иным объектам. Например, свойство равенства длин диагоналей является характеристическим для прямоугольников в классе параллелограммов.

Может случиться, что свойством α обладают некоторые объекты данного класса, и не обладает ни один объект, не принадлежащий этому классу. Тогда это свойство называют ***достаточным признаком*** соответствующего понятия. Например, равенство длин сторон – достаточный признак для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, но этот признак не является необходимым: это значит, что если установлено равенство длин всех сторон, то четырехугольник наверняка является параллелограммом, но обратное неверно – существуют параллелограммы, стороны которых имеют разную длину.

Понятия, которые изучаются в начальной школе, можно разделить на четыре группы:

I – понятия, связанные с числами и операциями над ними (число, слагаемое, больше и др.);
II – алгебраические понятия (выражение, равенство, уравнение и др.);
III – геометрические понятия (прямая, отрезок, треугольник и т.д.);
IV – понятия, связанные с величинами и их измерением.

§ 2. Определение понятий

Понятиям дают определения. ***Определение*** *– это предложение, с помощью которого раскрывается содержание понятия либо устанавливается значение термина.* Определить понятие – значит указать, что оно означает, выявить признаки, входящие в его содержание. Одна из задач определения – отличить и отграничить определяемый предмет от всех иных; другая – раскрыть сущность этих предметов.

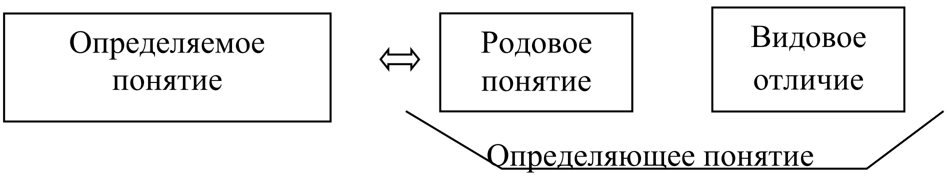
Определения бывают ***явными*** и ***неявными***. Явные определения имеют форму равенства, совпадения двух понятий. Общая схема таких определений: «A есть (по определению) B». В некоторых учебниках математики используют обозначение:

$$A \underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} B.$$

Здесь A и B – два понятия, причем не имеет принципиального значения выражается каждое из них одним словом или сочетанием слов. A – ***определяемое*** понятие, содержание которого требуется раскрыть, B – ***определяющее*** понятие, решающее эту задачу. Например, в определении «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые» определяемое понятие – «прямоугольник», а определяющее – «четырехугольник, у которого все углы прямые».

Самым распространенным видом явных определений в математике являются ***определения через род и видовое отличие***. Их общая схема «A есть B и C». Здесь A – определяемое понятие, B – понятие, более общее по отношению к A (род), C – такие признаки, которые выделяют предметы, обозначаемые A, среди всех предметов, обозначаемых B (видовое отличие).

Определения через род и видовое отличие можно изобразить в виде следующей схемы:



Например, с помощью определения, данного выше, прямоугольники выделяются из множества четырехугольников с помощью свойства «иметь все углы прямые». При этом понятие «четырехугольник» является родовым по отношению к определяемому понятию «прямоугольник». С теоретико-множественной точки зрения такие определения сводятся к выделению некоторого подмножества путем указания его характеристического свойства.

К явным определениям и, в частности, к родовидовым предъявляется ряд достаточно простых и очевидных требований. Их обычно называют ***правилами определения.***

Прежде всего, определяемое и определяющее понятия должны быть ***взаимозаменяемы***. Если в каком-то предложении встречается одно из этих понятий, всегда должна существовать возможность его другим. При этом предложение, истинное до замены, должно остаться истинным и после нее.

Для определений через род и видовое отличие это правило формулируется, как ***правило соразмерности определяемого и определяющего понятий***: совокупности предметов, охватываемые ими, должны быть одними и теми же. Например, несоразмерно такое определение квадрата: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны». Действительно, объем определяемого понятия – множество квадратов. Объем определяющего понятия – множество четырехугольников, все стороны которых равны, а это множество ромбов. Но не всякий ромб есть квадрат, т.е. объемы определяемого и определяющего понятий не совпадают, и, следовательно, данное понятие несоразмерно.

Второе правило определения запрещает ***порочный круг***: нельзя определять понятие через само себя или определять его через такое другое понятие, которое, в свою очередь, определяется через него. Например, содержат порочный круг определения: «Равные треугольники – это треугольники, которые равны», «Касательная к окружности – это прямая, которая касается окружности».

Так как в математике рассматривают не просто отдельные понятия, а их систему, то данное правило запрещает порочный круг и в системе определений. Например, если определить окружность как границу круга, а круг как часть плоскости, ограниченную окружностью, то мы будем иметь порочный круг в определениях данных понятий.

Наконец определение должно быть ясным. Это правило означает что:

✓ Значения терминов, входящих в определяющее понятие, должны быть известны к моменту введения определения нового понятия. Например, нельзя определять прямоугольник как параллелограмм с прямым углом, если понятие «параллелограмм» еще не рассмотрено.

✓ Определение не должно содержать избыточных свойств в определяющей части, т.е. таких свойств, которые могут быть выведены из других, включенных в это определение. (Однако иногда для простоты изложения это правило нарушают). Например, определение прямоугольника: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые и противоположные стороны равны» соразмерное и в нем нет порочного круга. Но можно доказать, что свойство «в прямоугольнике противоположные стороны равны» вытекает из свойства «в прямоугольнике все углы прямые». В этом случае считают, что в данном определении прямоугольника второе свойство избыточное.

✓ В определении важно наличие понятия, родового по отношению к определяемому. Пропуск родового понятия делает определение несоразмерным. Неприемлемо, например, такое определение квадрата: «Квадрат – это когда все стороны равны».

Формулируя определение, надо стремиться в определяющем понятии указывать не просто родовое по отношению к определяемому понятие, а *ближайшее*. Это часто позволяет сократить количество свойств, включаемых в видовое отличие. Например, если для определения квадрата в качестве родового выбрать понятие «четырехугольник», то тогда надо будет включать в видовое отличие два свойства: «иметь все углы прямые» и «иметь все равные стороны». В результате получим определение: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все углы прямые и все стороны равны». Если же в качестве родового выбрать ближайшее для квадрата родовое понятие – прямоугольник, то получим более короткое определение квадрата: «Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны».

Кроме определений через род и видовое отличие в школьном курсе математики встречается еще ряд явных определений. Например, генетические и индуктивные. В ***генетических*** определениях указывается способ образования определяемого объекта. Например, «Шар – это геометрическая фигура, получаемая в результате вращения полукруга вокруг диаметра». В ***индуктивных*** определениях указываются некоторые основные объекты теории и правила, позволяющие получить новые из уже имеющихся. Примером такого определения может служить определение арифметической прогрессии: «Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом».

Определим последовательность действий, которую необходимо соблюдать, при воспроизведении или построении определения понятия:

1) назвать определяемое понятие (термин);
2) указать ближайшее родовое понятие (по отношению к определяемому);

3) перечислить свойства, выделяющие определяемые объекты из объема родового, т.е. сформулировать видовое отличие;
4) проверить, выполнение требований к определению понятия.

При изучении математики в начальных классах определения через род и видовое отличие используются редко. Связано это как с особенностями курса, так и с возможностями детей. При изучении математики в начальной школе чаще всего используют ***неявные*** определения. Среди них различают *контекстуальные* и *остенсивные* определения.

Контекстуальные определения – это определения, в которых содержание нового понятия раскрывается через отрывок текста, через контекст, через анализ конкретной ситуации, описывающей смысл вводимого понятия. Посредством контекста устанавливается связь определяемого понятия с другими, известными, и тем самым косвенно раскрывается его содержание.

Примером контекстуального определения может быть определение уравнения и его решения, приведенное в учебнике математики для 2 класса. Здесь после записи □ + 6 = 15 и перечня чисел 0, 5, 9, 10 идет текст: «К какому числу надо прибавить 6, чтобы получилось 15? Обозначим неизвестное число латинской буквой *x* (икс):

$x + 6 = 15$ – это уравнение.

Решить уравнение – значит найти неизвестное число. В данном уравнении неизвестное число равно 9, так как 9 + 6 = = 15. Объясни, почему числа 0, 5 и 10 не подходят».

Остенсивные определения – это определения путем показа. Они используются для введения терминов путем демонстрации объектов, которые этими терминами обозначают.

Например, таким способом можно определить в начальной школе понятия равенства и неравенства:

$2 \cdot 7 > 2 \cdot 6$	$9 \cdot 3 = 27$
$78 - 9 < 78$	$6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$
$37 + 6 > 37$	$17 - 5 = 8 + 4$
Это неравенства.	Это равенства.

Остенсивные определения, как и контекстуальные, характеризуются некоторой незавершенностью. Они только связывают термины с определяемыми объектами. Поэтому после контекстуального или остенсивного определения понятия необходимо дальнейшее изучение свойств так определенных объектов.

§ 3. Отношение логического следования и равносильности между предложениями

Отношение логического следования является одним из важнейших в математике. Устанавливая связи между математическими предложениями, часто используют слова «следует», «вытекает», «следовательно». Рассмотрим, например, два предиката: «Число x кратно 4» и «Число x кратно 2», которые заданы на множестве N натуральных чисел. Эти предикаты связаны между собой, так как «любое число, кратное 4, кратно 2» и «из того, что число кратно 4, следует, что оно кратно 2». Можно сказать, что данные предложения находятся в отношении логического следования.

Определение 1. ***Предикат B (x) следует из предиката A(x)****, если предикат B(x) обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x, при которых предикат A(x) – истинен.*

Замечание. *Если A и B – высказывания, тогда говорят, что из A следует B, если всякий раз, когда A истинно, истинно и B.*

Для обозначения отношения логического следования используется знак $\Rightarrow$.

Соединяя две высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ таким знаком, мы получаем утверждение $A(x) \Rightarrow B(x)$, прочитать которое можно по-разному:

1) «Из $A(x)$ следует $B(x)$»;
2) «Всякое $A(x)$ есть $B(x)$»;
3) «Если $A(x)$, то $B(x)$»;
4) «$B(x)$ есть следствие $A(x)$»;
5) «$A(x)$ есть достаточное условие для $B(x)$»;
6) «$B(x)$ есть необходимое условие для $A(x)$».

Из определения 1 следует, что установление значения истинности предложения $A(x) \Rightarrow B(x)$ сводится к установлению значения истинности предложения с квантором общности. Значит истинность предложения $A(x) \Rightarrow B(x)$ устанавливается путем доказательства, а ложность с помощью контр примера.

Пример 1. *Выясним, является ли уравнение* $5x(x + 1)(x - 2) = 0$ *следствием уравнения* $x^2 - 2x = 0$.

Решение.

Решим уравнение $x^2 - 2x = 0$: $x \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = 2$.

При подстановке $x = 0$ и $x = 2$ в уравнение $5x(x + 1)(x – 2) = 0$ получим $5·0·1·(- 2) = 0$ и $5·2·3·0 = 0$. Это значит, что при всех тех значениях x, при которых $x(x – 2) = 0$ обращается в истинное высказывание, будет истинно и второе уравнение. Значит утверждение $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 5x(x + 1)(x – 2) = 0$ истинно.

Пример 2. *Докажем, что утверждение «Если число делится на 5, то его десятичная запись оканчивается цифрой 5» ложно.*

Решение.

Для доказательства достаточно привести контр пример, то есть указать такое число, которое делится на 5, но не оканчивается цифрой 5. Примером такого числа может быть число 20. 20 делится на 5, но не оканчивается цифрой 5.

С теоретико-множественной точки зрения предложение вида $A(x) \Rightarrow B(x)$ означает, что если T_A – множество истинности высказывательной формы $A(x)$, а T_B – множество истинности высказывательной формы $B(x)$, то $T_A \subset T_B$. Справедливо и обратное утверждение. Этим фактом удобно пользоваться при установлении значения истинности предложения $A(x) \Rightarrow B(x)$. Исходя из этого можно, например, утверждать, что $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 5x(x + 1)(x – 2) = 0$, так как множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения: $\{0, 2\}$ – подмножество $\{0, -1, 2\}$.

Часто бывает и так, что имеют место оба утверждения $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $B(x) \Rightarrow A(x)$. Например, из школьного курса математики известно, что если сумма цифр десятичной записи числа делится на 3, то число делится на 3; и обратно, если число делится на 3, то сумма цифр его десятичной записи делится на 3. В этом случае говорят, что предложения $A(x)$ и $B(x)$ равносильны.

Определение 2. *Предложения $A(x)$ и $B(x)$* ***равносильны****, если из предложения $A(x)$ следует предложение $B(x)$, а из предложения $B(x)$ следует предложение $A(x)$.*

Для обозначения отношения равносильности используется знак $\Leftrightarrow$.

Соединяя две высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ таким знаком, мы получаем предложение $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, прочитать которое можно по-разному:

1) «$A(x)$ равносильно $B(x)$»;
2) «$A(x)$ тогда и только тогда, когда $B(x)$»;
3) «$A(x)$ – необходимое и достаточное условие для $B(x)$»;
4) «$B(x)$ – необходимое и достаточное условие для $A(x)$».

С теоретико-множественной точки зрения утверждение $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ означает, что если T_A – множество истинности предиката $A(x)$, а T_B - множество истинности предиката $B(x)$, то $T_A = T_B$. Например, уравнения $(x + 1)^2 = 9$ и $(x - 2)(x + 4) = 0$ равносильны на множестве действительных чисел, так как множество решений каждого из уравнений есть $\{2, -4\}$.

§ 4. Структура теоремы. Виды теорем

Ранее мы отмечали, что существенные свойства объекта образуют содержание понятия об этом объекте. Часть этих свойств входит в определение понятия. Чтобы иметь достаточно полное представление об объекте, изучают и другие его свойства. Они, как правило, доказываются, то есть выводятся как следствия из определений, аксиом и ранее доказанных свойств. Такие свойства понятий чаще всего называют теоремами, иногда следствиями, признаками, в алгебре – формулами, тождествами, правилами. Несмотря на разные названия, эти предложения имеют одинаковую структуру, поэтому будем называть их все теоремами.

Определение 1. ***Теорема*** *– это математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).*

Большинство теорем имеют следующую структуру

$$(\forall x \in X){:}\, A(x) \Rightarrow B(x).$$

Рассмотрим, например, теоремы:

1. «Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то и число делится на 3»;
2. «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны».

В первой теореме речь идет о двух предложениях $A(n)$ = (сумма цифр числа n делится на 3) и $B(n)$ = (число n делится на 3), зависящих от одной переменной n. В теореме утверждается истинность высказывания $(\forall n \in N){:}\, A(n) \Rightarrow B(n)$.

Из-за краткости формулировки второй теоремы о диагоналях ромба может показаться, что эта теорема не имеет формы $(\forall x \in X){:}\, A(x) \Rightarrow B(x)$. На самом деле это не так. Точная формулировка этой теоремы такова: «Пусть P – множество всех параллелограммов и пусть $A(p)$ = (параллелограмм p – ромб), $B(p)$ = (диагонали параллелограмма p взаимно перпендикулярны) – два предложения, заданные на множестве P. Тогда $(\forall p \in P){:}\, A(p) \Rightarrow B(p)$, т.е. для любого параллелограмма верно утверждение: если параллелограмм – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

В формулировке каждой теоремы, имеющей вид $(\forall x \in X)$: $A(x) \Rightarrow B(x)$, можно выделить три части:

1) ***условие*** теоремы: предикат *A(x)*, заданный на множестве X (что дано);
2) ***заключение*** теоремы: предикат *B(x)*, заданный на множестве X (что требуется доказать);
3) ***разъяснительная часть (преамбула)***, в которой описывают множество объектов, о котором идет речь в теореме. Эта часть теоремы обычно не формулируется явно, но она всегда подразумевается и ее необходимо выделять как составную часть теоремы.

Таким образом, каждая теорема имеет вид:

$$\underbrace{(\forall x \in X)}_{\text{преамбула}}: \underbrace{A(x)}_{\text{условие}} \Rightarrow \underbrace{B(x)}_{\text{заключение}}.$$

Замечание. *Удобнее всякую теорему формулировать в виде условного предложения, т.е. со словами «если ..., то ...», поскольку сразу видно ее условие (что дано) и заключение (что надо доказать). Однако нельзя исключать возможности и других записей теоремы.*

Определение 2. *Если теорема* $(\forall x \in X): A(x) \Rightarrow B(x)$ *верна, то предложение A(x) называется* ***достаточным условием*** *для B(x), а B(x) –* ***необходимым условием*** *для A(x).*

Пользуясь этой терминологией теорему о диагоналях ромба можно сформулировать так:

1. «Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны»;
2. «Для того чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, достаточно, чтобы он был ромбом».

Рассмотрим виды теорем.

Определение 3. *Теорема* $(\forall x \in X)$: $B(x) \Rightarrow A(x)$ *называется* ***обратной*** *для теоремы* $(\forall x \in X): A(x) \Rightarrow B(x)$.

Для получения формулировки обратной теоремы надо в данной теореме поменять местами условие и заключение.

Определение 4. *Если справедлива не только теорема* $(\forall x \in X): A(x) \Rightarrow B(x)$, *но и обратная ей* $(\forall x \in X): B(x) \Rightarrow A(x)$, *то A(x) называется* ***необходимым и достаточным*** *условием для B(x), а B(x) – необходимым и достаточным условием для A(x).*

Следует помнить, что если в теореме содержатся слова «необходимо и достаточно», то ее доказательство должно состоять из двух частей: доказательства необходимости и доказательства достаточности. Так как в такой формулировке объединены формулировки двух теорем: прямой и обратной.

Определение 5. *Теорема* $(\forall x \in X): \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ *называется* ***противоположной*** *для теоремы* $(\forall x \in X): A(x) \Rightarrow B(x)$.

Для того чтобы получить формулировку противоположной теоремы, надо в формулировке исходной теоремы заменить условие и заключение их отрицаниями.

Таким образом, можно утверждать, что всякая теорема $(\forall x \in X): A(x) \Rightarrow B(x)$ порождает еще три вида теорем:
1) *обратную* (теорема вида $(\forall x \in X): B(x) \Rightarrow A(x)$);
2) *противоположную* (теорема вида $(\forall x \in X): \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$);
3) *обратную противоположной* (теорема вид $(\forall x \in X): \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$).

Например, взяв в качестве исходной теоремы теорему о диагоналях ромба будем иметь:

1) ***исходная теорема***: «Если четырехугольник ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны»;
2) ***обратная***: «Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то четырехугольник есть ромб»;
3) ***противоположная***: «Если четырехугольник не ромб, его диагонали не взаимно перпендикулярны»;
4) ***обратная противоположной***: «Если диагонали четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то четырехугольник не является ромбом».

В рассмотренном примере прямая теорема и обратная противоположной оказались истинными, а обратная и противоположная – ложными. Это совпадение не является случайным. Можно доказать равносильность прямой и обратной противоположной теорем, обратной и противоположной прямой теорем. Эту равносильность называют *законом контрапозиции.* На этом законе основывается известный метод доказательства от противного, который и состоит в том, что вместо исходной теоремы доказывают обратную противоположной.

§ 5. Умозаключения и их виды

Большую часть знаний об окружающей нас действительности мы получаем с помощью рассуждений, поэтому умение правильно рассуждать и строить выводы является одним из важнейших логических умений, необходимых в любой области деятельности. Знание будет истинным, если оно получено путем правильного рассуждения, а таким считают рассуждение, построенное по правилам логики.

В логике вместо термина «рассуждения» чаще используют слово «умозаключение».

Определение 1. ***Умозаключение*** *– это логическая операция, посредством которой из одного или нескольких утверждений, называемых* ***посылками****, получают новое по отношением к исходным утверждение, называемое* ***заключением*** *(следствием, выводом).*

Существуют различные классификации умозаключений. В математике в основе классификации умозаключений лежит отношение логического следования, и все умозаключения в связи с этим делят на ***дедуктивные*** и ***не дедуктивные (индуктивные)***.

Определение 2. ***Дедуктивным*** *называется умозаключение, в котором заключение с логической необходимостью вытекает из принятых посылок, т.е. посылки и заключение находятся в отношении логического следования.*

Отличительной особенностью дедуктивного умозаключения в том, что от истинных посылок оно всегда ведет к истинному заключению.

Если посылки дедуктивного умозаключения обозначить $A_1, A_2, \dots, A_n$, а заключение – буквой B, то схематично само заключение можно представить так: $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n) \Rightarrow \mathrm{B}$.

Часто используют такую запись:

$$\frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B}.$$

В ней черта заменяет слово «следовательно».

Определение 3. ***Индуктивным*** *называется умозаключение, в котором заключение не вытекает логически из посылок и истинность последних не гарантирует истинности выводимого из них утверждения.*

Индукция дает из достоверных посылок только вероятные или правдоподобные заключения. Приведем примеры дедуктивных и индуктивных рассуждений.

Пример 1. *Любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых. Число 23 – двузначное. Следовательно, число 23 можно представить в виде суммы разрядных слагаемых, т.е. 23 = 20 + 3.*

Это дедуктивное умозаключение, так как из истинности его посылок следует истинность заключения.

Пример 2. $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$, $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$, $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$. *Следовательно, для всех натуральных чисел a и b верно равенство $a \cdot b = b \cdot a$.*

В этом примере приведены три посылки частного характера, которые показывают, что *некоторые* натуральные числа обладают свойством: от перестановки множителей произведение не изменяется. И на этой основе сделан вывод, что этим свойством обладают *все* натуральные числа. Такие умозаключения называют *неполной индукцией*.

Определение 4. ***Неполная индукция*** *– это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод, о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса.*

Неполная индукция не является дедуктивным умозаключением, поскольку, рассуждая по такой схеме, можно прийти к ложному выводу. Например, рассматривая выражения $3 + 5$ и $3 \cdot 5$, $2 + 7$ и $2 \cdot 7$, $4 + 9$ и $4 \cdot 9$ и сопоставляя их значения, можно заметить, что $3 + 5 < 3 \cdot 5$, $2 + 7 < 2 \cdot 7$, $4 + 9 < 4 \cdot 9$ и сделать вывод, что сумма любых натуральных чисел меньше их произведения. Этот вывод не верен, так как для чисел 1 и 2 $1 + 2 < 1 \cdot 2$ – ложное высказывание. Этот пример показывает, что индуктивное умозаключение не следует из посылок, поэтому необходимо критически относится к выводам, полученным с помощью неполной индукции, так как они носят характер гипотезы и требуют доказательства или опровержения.

Несмотря на то, что неполная индукция не всегда приводит к истинным выводам, роль таких умозаключений в процессе познания велика. Почти все общие положения и, в частности, научные законы являются результатом умозаключений, полученных с помощью неполной индукции.

Примером индуктивного рассуждения является рассуждение по аналогии, которое часто применяется в начальной школе. Например, при обучении делению на однозначное число используется такой прием. Сначала выясняется: чтобы найти значение выражения 12 : 4, следует узнать, на какое число надо умножить делитель 4, чтобы получить делимое, т.е. 12. Известно, что $4 \cdot 3 = 12$, значит, $12 : 4 = 3$. Затем учащимся предлагается, рассуждая также, найти, например, частное 8 : 4, 9 : 3, 20 : 5 и т.д.

Определение 5. *Под* ***аналогией*** *понимают умозаключение, в котором на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта.*

Слово «аналогия» в переводе с греческого означает «соответствие, сходство». Аналогия помогает открывать новые знания, способы деятельности или использовать усвоенные способы деятельности в изменённых условиях. Вывод по аналогии так же носит характер предположения и поэтому нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении.

§ 6. Схемы дедуктивных умозаключений

Правильность умозаключения определяется его формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений. В логике предлагаются правила, соблюдая которые, можно строить дедуктивные умозаключения. Эти правила называют ***правилами вывода*** или ***схемами дедуктивных*** (правильных) ***умозаключений***.

Правил много, но наиболее часто используются следующие:

$$\frac{A(x)\Rightarrow B(x),\ \ A(a)}{B(a)} \text{ – \textit{правило заключения};}$$

$$\frac{A(x)\Rightarrow B(x),\ \ \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}} \text{ – \textit{правило отрицания;}}$$

$$\frac{A(x)\Rightarrow B(x), B(x)\Rightarrow C(x)}{A(x)\Rightarrow C(x)} \text{ – \textit{правило силлогизма.}}$$

Рассмотрим, например, правило заключения. В нем обозначены две посылки *A(x)*$\Rightarrow$ *B(x)* и *A(a)*. Первую посылку называют ***общей посылкой***, это может быть теорема, определение и, вообще, предложение вида *A(x)*$\Rightarrow$ *B(x)*. Вторую посылку *A(a)* называют ***частной по-***

сылкой, она получается из условия *A(x)* при $x = a$. Предложение *B(a)* – это ***заключение***, оно получается из *B(x)* при $x = a$. Посылки отделены от заключения чертой, которая заменяет слово «*следовательно*».

Приведем примеры умозаключений и установим, какие правила использовались для их построения.

Пример 1. *Если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Запись числа 135 оканчивается цифрой 5. Следовательно, число 135 делится на 5.*

Решение.

Пусть $A(x)$ = (запись числа x оканчивается цифрой 5), $B(x)$ = (число x делится на 5). Тогда логическая структура умозаключения имеет вид

$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ A(a)}{B(a)}$, где $a = 135$. Так как умозаключение построено по правилу заключения, то можно утверждать, что оно является дедуктивным.

Пример 2. *Если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Число 177 не делится на 5. Следовательно, оно не оканчивается цифрой 5.*

Решение.

Используя те же обозначения, что и в предыдущем примере, можем утверждать, что данное умозаключение построено по правилу отрицания, а значит, является дедуктивным.

Пример 3. *Если число x кратно 12, то оно кратно 6. Если число x кратно 6, то оно кратно 3. Следовательно, если число x кратно 12, то оно кратно 3.*

Решение.

Пусть $A(x)$ = (число x кратно 12), $B(x)$ = (число x кратно 6), $C(x)$ = (число x кратно 3). Тогда логическая структура умозаключения имеет вид $\frac{A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow C(x)}{A(x) \Rightarrow C(x)}$, т.е. в данном случае было использовано правило силлогизма.

В логике существуют различные способы проверки правильности умозаключений. Один из них связан с использованием кругов Эйлера.

Сначала данное умозаключение записывают на теоретико-множественном языке, затем посылки изображают на кругах Эйлера, считая их истинными. После этого выясняют, всегда ли при таких посылках истинно заключение. Если оказывается, что всегда, то говорят, что данное умозаключение правильное, дедуктивное. Если же возможен рисунок, из которого видно, что заключение может быть ложным, то говорят, что всякое умозаключение, выполненное по такой схеме, является неправильным.

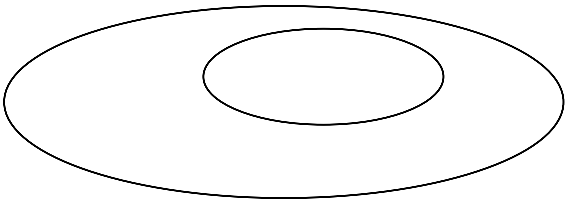
Например, покажем, что умозаключение, построенное по правилу заключения, является дедуктивным.

Запишем правило заключения на теоретико-множественном языке.

Посылка $A(x) \Rightarrow B(x)$ может быть записана в виде $T_A \subset T_B$, где T_A и T_B – множества истинности высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$. Частная посылка $A(a)$ означает, что $a \in T_A$, а заключение $B(a)$ показывает, что $a \in T_B$.

Все умозаключение, построенное по правилу заключения, запишется на теоретико-множественном языке так: $\dfrac{T_A \subset T_B, a \in T_A}{a \in T_B}$.

Изобразив на кругах Эйлера:



Видим, что правило заключения является схемой дедуктивного умозаключения. Аналогично можно проверить и другие правила.

§ 7. Способы математических доказательств

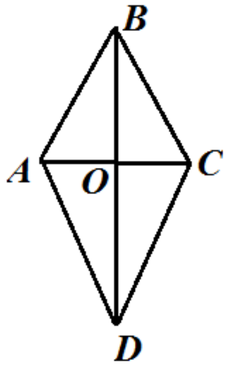
Доказать какое-либо утверждение – это значит показать, что это утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним утверждений.

В логике считают, что если рассматриваемое утверждение логически следует из уже доказанных утверждений, то оно обоснованно и также истинно, как и последние. Таким образом, основным способом математического доказательства является ***дедуктивный вывод***. При этом само доказательство представляет собой такую цепочку дедуктивных умозаключений, что заключение каждого из них (кроме последнего) является посылкой в одном из последующих умозаключений. Заключение последнего умозаключения — доказываемое утверждение.

Самое простое доказательство состоит из одного умозаключения, одного шага. Например, для доказательства утверждения «4<8» можно построить следующее умозаключение: «Если число a встречается при счете раньше числа b, то говорят, что $a < b$. Число 4 при счете встречается раньше, чем число 8. Значит $4 < 8$.»

Примером доказательства, содержащего большее число шагов, является доказательство теоремы: «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны».

Выполним логический анализ доказательства, т.е. выделим цепочку умозаключений и установим используемые в каждом звене правила вывода.



1. В ромбе все стороны равны. $ABCD$ – ромб. Следовательно, $AB = AD$ (правило заключения).

2. В ромбе диагонали в точке пересечения делятся пополам. $ABCD$ – ромб. Следовательно, $BO = OD$ (правило заключения).

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны. $AB = AD$, $BO = OD$, AO – общая сторона. Следовательно, $\Delta AOB = \Delta AOD$ (правило заключения).

4. Если треугольники равны, то их соответственные углы равны. $\Delta AOB = \Delta AOD$. Следовательно, $\angle BOA = \angle AOD$ (правило заключения).

5. Если смежные углы равны, то они прямые. $\angle BOA$ и $\angle AOD$ – смежные и равные. Следовательно, эти углы прямые (правило заключения).

6. Если прямые при пересечении образуют прямые углы, то они перпендикулярны. Углы $\angle BOA$ и $\angle AOD$ – прямые, следовательно, диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны (правило заключения).

Таким образом, доказательство истинности данного высказывания представляет собой цепочку дедуктивных умозаключений, проводимых в каждом случае по правилу заключения, что обеспечивает истинность выводов. Заключение каждого из умозаключений, кроме последнего, является посылкой в одном из последующих умозаключений.

В логике выделяют еще одну составляющую в структуре доказательства – это ***способ доказательства****, т.е. правила логики, которые используются при переходе от одних высказываний к другим в процессе доказательства.*

Математическое доказательство – это не просто набор умозаключений, это умозаключения, расположенные в определенном порядке.

По способу ведения различают ***прямые*** и ***косвенные*** доказательства. К прямым доказательствам в математике относят *полную индукцию* – такой способ доказательства, при котором истинность утверждения следует из истинности его во всех частных случаях.

Пример 1. *Доказать, что каждое составное натуральное число, большее 4, но меньшее 20, представимо в виде суммы двух простых чисел.*

Решение.

Для доказательства нам необходимо рассмотреть числа: 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18.

Действительно, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $9 = 7 + 2$, $10 = 5 + 5$ (или $7 + 3$), $12 = 5 + 7$, $14 = 11 + 3$ (или $7 + 7$), $15 = 13 + 2$, $16 = 13 + 3$ (или $11 + 5$), $18 = 13 + 5$ (или $11 + 7$).

Так как утверждение истинно во всех частных случаях, то оно доказано.

В школьном курсе геометрии методом полной индукции доказывают теорему о величине вписанного в окружность угла.

Примером косвенного доказательства является доказательство *методом от противного*. Сущность его состоит в следующем. Пусть требуется доказать теорему $(\forall x \in X)\colon A(x) \Rightarrow B(x)$. При доказательстве методом от противного допускают, что заключение теоремы ложно, а, следовательно, его отрицание истинно. Присоединив предложение $\overline{B(x)}$ к совокупности истинных посылок, используемых в процессе доказательства, строят цепочку дедуктивных умозаключений до тех пор, пока не получится утверждение, противоречащее одной из посылок и, в частности, условию $A(x)$. Как только такое противоречие устанавливают, говорят, что полученное противоречие доказывает истинность теоремы.

Пример 2. *Докажем, что если две различные прямые a и b параллельны третьей прямой c, то они параллельны между собой.*

Решение.

Предположим противное: прямые a и b не параллельны между собой. Тогда они пересекаются в некоторой точке P, не принадлежащей прямой c. Так как про условию $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то приходим к выводу, что через точку P вне прямой c можно провести две различные прямые, параллельные прямой c, что противоречит аксиоме параллельности. Следовательно, наше предположение неверное. Но тогда истинна данная теорема.

Аналогично доказывается в школьном курсе геометрии и признак параллельности плоскостей: если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Еще одной формой косвенного доказательства является доказательство, основанное на законе контрапозиции. Напомним, что его суть состоит в том, что вместо теоремы $(\forall x \in X): A(x) \Rightarrow B(x)$ доказывают равносильную ей теорему $(\forall x \in X): \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$. Если она оказывается истинной, то истинна и исходная теорема.

Пример 3. *Докажем, что если дробь* $\frac{a-b}{a+b}$ *несократима, то и дробь* $\frac{a}{b}$ *тоже несократима.*

Решение.

Допустим, что дробь $\frac{a}{b}$ - сократима. Тогда ее числитель и знаменатель делятся на одно и то же число, например, m, то есть $a=mq$, $b=mp$, где $m \geq 2$. Значит

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{mq-mp}{mq+mp} = \frac{m(q-p)}{m(q+p)}$$, т.е. дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима.

Таким образом, доказана истинность предложения «Если дробь $\frac{a}{b}$ сократима, то будет сократима и дробь $\frac{a-b}{a+b}$ ». Оно представляет собой теорему обратную противоположной. Значит, будет истинна и исходная теорема.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.1. Назовите несколько элементов, принадлежащих объему понятия: а) «рациональное число»; б) «часть речи»; в) «четырехугольник»; г) «лиственное дерево»; д) «геометрическая фигура».

4.2. Укажите какие-нибудь свойства, присущие всем параллелограммам. Какие из перечисленных свойств принадлежат и другим фигурам?

4.3. Назовите фигуру со следующими свойствами: а) иметь три стороны; б) иметь четыре угла; в) иметь все равные стороны; г) иметь прямой угол; д) иметь равные углы.

4.4. Назовите свойства: а) присущие и прямоугольнику и ромбу; б) присущие квадрату и прямоугольнику; в) присущие прямоугольнику и не присущие ромбу; г) присущие ромбу и не присущие квадрату.

4.5. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между понятиями *а, в, с,* если:

а) *а* – «однозначное число», *в* – «трехзначное число», *с* – «многозначное число»;

б) *а* – «отрезок», *в* – «треугольник», *с* – «квадрат»;

в) *а* – «треугольник», *в* – «многоугольник», *с* – «геометрическая фигура».

4.6. Изобразить отношения между объемами следующих понятий на кругах Эйлера:

а) *а* – «целое число», *в* – «натуральное число», *с* – «отрицательное число»;

б) *а* – «дерево», *в* – «растение», *с* – «кустарник»;

в) *а* – «квадрат», *в* – «ромб с прямым углом», *с* – «четырехугольник».

4.7. Для каждого из следующих понятий укажите видовое понятие:

а) «животное»; б) «дерево»; в) «многоугольник»; г) «часть речи»; д) «параллелограмм».

4.8. Назовите понятие, являющееся родовым по отношению к данной группе понятий:

а) квадрат, трапеция, ромб;

б) круг, окружность, многоугольник, отрезок;

в) деревья, кустарники, травы.

4.9. В нижеприведенных определениях выделите определяемое и определяющее понятия, в определяющем понятии – родовое понятие и видовое отличие:

а) «Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны»;

б) «Треугольник называется равнобедренным, если хотя бы две его стороны равны»;

в) «Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам»;

г) «Два отрезка называются соизмеримыми, если они имеют общую меру».

4.10. Вместо пропусков вставьте термины «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно»:

а) для того чтобы сумма двух натуральных чисел была больше 20, …, чтобы хотя бы одно их слагаемых было больше 10;

б) для того чтобы разность двух чисел была четной, … , чтобы обе компоненты вычитания были четными;

в) для того чтобы вычитание было выполнимо в множестве натуральных чисел, … , чтобы уменьшаемое было больше вычитаемого;

г) для того чтобы сумма двух чисел равнялась второму слагаемому, … , чтобы первое слагаемое было равно нулю;

д) для того чтобы произведение двух чисел равнялось нулю, … , чтобы один из сомножителей равнялся нулю;

е) для того чтобы сумма чисел делилась на 5, … , чтобы каждое слагаемое делилось на 5;

ж) для того чтобы число делилось на 24, … , чтобы оно делилось на 4;

з) для того чтобы число было кратно 5, … , чтобы оно было кратно 10;

и) для того чтобы число было кратно 9, … , чтобы сумма цифр этого числа была кратна 9.

4.11. Выделите условие и заключение в следующих теоремах, сформулируйте их в виде «Если …, то …», сформулируйте обратную, противоположную и обратную противоположной теоремы:

а) всякий параллелограмм имеет центр симметрии;

б) сумма углов треугольника равна 180^0;

в) число, оканчивающееся нулем, делится на 5;

г) в правильный многоугольник можно вписать окружность;

д) для того чтобы прямые были параллельны, достаточно, чтобы они были центрально симметричны;

е) для того чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы хотя бы один из его углов был прямым;

ж) для того чтобы разность двух чисел делилась на 2, достаточно, чтобы на 2 делилось уменьшаемое и вычитаемое;

з) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо, чтобы его противоположные стороны были попарно равны.

4.12. В каждом из нижеприведенных умозаключений выделите посылки и заключение, выделите логическую форму умозаключений и укажите из них те, которые построены по правилу: 1) отрицания; 2) заключения; 3) силлогизма:

а) Все учащиеся нашей группы в каникулы ходили в театр. Иванов не был в театре. Следовательно, Иванов – студент не нашей группы.

б) Все студенты нашей группы приняли участие в субботнике. Сидорова учится в нашей группе. Значит, она принимала участие в субботнике.

в) Если студент справился с контрольной работой по математике, то он будет допущен к экзамену. Петрова не допущена к экзамену по математике. Следовательно, она не справилась с контрольной работой.

г) Каждый студент нашей группы занимается в каком-то кружке. Петя занимается в кружке по рисованию. Следовательно, Петя учится в нашей группе.

4.13. Закончите умозаключение, используя правило

1) заключения:

а) Все имена собственные пишутся с большой буквы. Слово «Москва» - … ;

б) Все числа, делящиеся на 2, являются четными. Число 18 … ;

2) отрицания:

а) Если число делится на 2, то оно четное. Число 15 … ;

б) В любом прямоугольнике противоположные стороны попарно равны. В четырехугольнике ABCD …

4.14. Используя круги Эйлера, проверьте правильность следующих умозаключений:

а) Некоторые студенты педагогического факультета являются учителями начальных классов. Некоторые учителя начальных классов старше 20 лет. Следовательно, некоторые студенты педагогического факультета старше 20 лет.

б) Все глаголы отвечают на вопрос «что делать?» или «что сделать?». Слово «василек» не отвечает ни на один из этих вопросов. Следовательно, «василек» не является глаголом.

в) Все деревья являются растениями. Дуб – растение. Следовательно, дуб – дерево.

г) Если углы вертикальные, то они равны. Угол ABC не равен углу DEF. Следовательно, углы ABC и DEF не вертикальные.

д) Некоторые прямоугольники – квадраты. Все квадраты правильные четырехугольники. Следовательно, некоторые квадраты являются правильными четырехугольниками.

4.15. Постройте дедуктивное умозаключение, доказывающее, что а) 130 делится на 10; б) 137 не делится на 10.

4.16. Каким числом может быть сумма двух нечетных чисел? Рассмотрите несколько частных случаев и выскажите предположение. Каким образом можно доказать его истинность?

4.17. Даны четыре последовательных натуральных числа. Верно ли, что произведение средних чисел этой последовательности больше произведения крайних на 2? Рассмотрите частные случаи и сформулируйте предположение. Выполните его полное доказательство.

4.18. Как изменится сумма двух чисел, если каждое слагаемое увеличить в 2 раза? Рассмотрите несколько частных случаев и сделайте предположение. Докажите его.

4.19. Докажите, что значениями выражения $(x-4)(2x+1)$ будет целое число, если x принимает значения -1, 0, 1, 4. Каким методом было проведено доказательство?

4.20. Докажите, что диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника. Выполните логический анализ проведенного доказательства.

Образец контрольной работы по теме

1. В определении «Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется прямоугольником» выделите определяемое и определяющее понятия; в определяющем – родовое понятие и видовое отличие.
2. В умозаключении «Все числа, делящиеся на 4, делятся на 2. Число 127 не делится на 4. Следовательно, 127 не делится на 2.» выделите посылки и заключение, выделите логическую форму умозаключения и с помощью кругов Эйлера проверьте его правильность.
3. В теореме « Для того чтобы разность двух чисел делилась на 3, достаточно, чтобы на 3 делилось уменьшаемое и вычитаемое» выделите условие и заключение, сформулируйте обратную, противоположную и обратную противоположной теоремы. Укажите истинность сформулированных теорем.
4. Докажите, что средняя линия треугольника равна половине его третьей стороны. Выполните логический анализ проведённого доказательства.

ТЕМА 5.
СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И АЛГОРИТМЫ

§1. Позиционные и непозиционные системы счисления

Определение. *Язык для наименования чисел, записи чисел и выполнения действий над ними называется* ***системой счисления****.*

Системы счисления делятся на позиционные и непозиционные. В непозиционной системе для изображения числа употребляется специальный символ, а в позиционных системах счисления используется строго определенное количество символов или знаков. Позиционной система счисления называется потому, что значение каждого символа зависит от той позиции или от того места, которое этот символ занимает при написании числа. Рассмотрим примеры систем счисления.

Древнегреческая нумерация

В древнейшее время в Греции была распространена так называемая аттическая нумерация. Числа 1, 2, 3, 4 обозначались черточками |, ||, |||, ||||. Число 5 записывалось знаком Г; числа 6, 7, 8, 9 обозначались Г|, Г||, Г|||, Г||||. Число 10 обозначалось Δ (начальной буквой слова «дека» - десять). Числа 100, 1000, и 10000 обозначались Н, Х, М – начальными буквами соответствующих слов. Остальные числа обозначались комбинациями перечисленных знаков.

В III веке до нашей эры аттическая нумерация была вытеснена так называемой ионийской системой. В ней числа 1, 2, 3, …, 9 обозначались первыми девятью буквами алфавита: α (альфа)=1, β (бета)=2, γ (гамма)=3, …, θ (тета)=9; числа 10, 20, 30, …, 90 – следующими девятью буквами: ι (йота)=10, κ (каппа)=20, λ (лямбда)=30, μ (мю)=40 и т.д.; числа 100, 200, 300, …, 900 – последними девятью буквами: ρ (ро)=100, σ (сигма)=200, τ (тау)=300 и т.д. Для обозначения тысяч и десятков тысяч пользовались теми же знаками с добавлением особого значка $^{/}$ сбоку. $^{/}$α=1000, $^{/}$β=2000 и т.д. Для отличия цифр от букв, составляющих слова, писали черту над цифрами.

Такую же алфавитную нумерацию имели в древности и многие другие народы Ближнего Востока. Неизвестно, у какого народа она возникла впервые.

Славянская нумерация

Южные и восточные славянские народы для записи чисел пользовались алфавитной нумерацией. У одних славянских народов, числовые значения букв установились в порядке славянского алфавита, у других же (в том числе и русских) роль цифр играли не все буквы, а только те, которые имеются в греческом алфавите. Над буквой, обозначавшей цифру, ставился специальный значок - титло. При этом числовые значения букв возрастали в том же порядке, в каком следовали буквы в греческом алфавите.

В России славянская нумерация сохранялась до конца XVII в. При Петре I возобладала так называемая арабская нумерация, которой мы пользуемся и сейчас. Славянская нумерация сохранилась только в богослужебных книгах.

Вавилонская поместная нумерация

В древнем Вавилоне примерно за сорок веков до нашего времени создалась поместная (позиционная) нумерация, т.е. такой способ изображения чисел, при котором одна и та же цифра может обозначать разные числа в зависимости от места, занимаемого этой цифрой. В вавилонской нумерации ту роль, которую у нас играет число 10, играло число 60, и потому эту нумерацию называют шестидесятеричной. Числа, меньшие 60, обозначались с помощью двух знаков: для единицы  и для десятка . Они имели клинообразный вид, так как жители Вавилона писали на глиняных дощечках палочками треугольной формы. Эти знаки повторялись нужное число раз. Например,

= 5,  = 30,  =35

Способ обозначения чисел, больших 60, показан на следующих примерах.

Запись  обозначала число 5·60+2=302.

Запись  обозначала число 21·60+35=1295.

При отсутствии промежуточного разряда употреблялся знак , игравший роль нуля.

Наряду с шестидесятеричной системой нумерации в Вавилоне пользовались и десятичной системой счисления, но она не была позиционной. В ней, кроме знаков для 1 и 10, существовали знаки для 100, 1000 и 10000.

Шестидесятеричная запись целых чисел не получила распространения за пределами вавилонского царства, но шестидесятеричные дроби проникли далеко за эти пределы: в страны Ближнего Востока, Средней Азии, в Северную Африку и Западную Европу. Они широко применялись вплоть до изобретения десятичных дробей, т.е. до начала XVII в. Следы шестидесятеричных дробей сохраняются и поныне в делении углового и дугового градусов (а так же часа) на 60 минут и минуты на 60 секунд.

Римские цифры

Древние римляне пользовались нумерацией, которая сохраняется до настоящего времени под именем римской системы счисления. В ней для изображения числа употребляется специальный символ. Например, I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

О происхождении римских цифр достоверных сведений нет. Цифра V могла первоначально служить изображением кисти руки, а цифра X могла составиться из двух пятерок. В римской нумерации явственно сказываются следы пятеричной системы счисления. В языке же римлян (латинском) никаких следов пятеричной системы нет. Значит, эти цифры были заимствованы у другого народа.

Все целые числа до 5000 записываются с помощью повторения вышеприведенных цифр. При этом если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются, если же меньшая стоит перед большей (в этом случае она не может повторяться), то меньшая вычитается из большей. Например, VI = 6, т.е. 5 + 1, IV = 4, т.е. 5 – 1, XL = 40, т.е. 50 – 10, LX = 60, т.е. 50 + 10. Подряд одна и та же цифра ставится не более трех раз: LXX = 70, LXXX = 80; число 90 записывается XC (а не LXXXX).

Первые 12 чисел записываются в римских цифрах так: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII.

Чтобы узнать, какое число записано, необходимо выполнить операцию сложения. Например, CLXVI=100 + 50 + 10 + 5 + 1=166. Поэтому непозиционные системы счисления называют иногда аддитивными.

Выполнение арифметических действий над многозначными числами в этой записи очень трудно. Тем не менее, римская нумерация просуществовала в Италии до XIII в., а в других странах Западной Европы – до XVI в.

Индийская поместная нумерация

В различных областях Индии существовали различные системы нумерации. Одна из них распространилась по всему миру и в настоящее время является общепринятой. В ней цифры имели вид начальных букв соответствующих числительных на древнеиндийском языке – санскрите (алфавит «девангари»).

Первоначально этими знаками представлялись числа 1, 2, 3, …, 9, 10, 20, 30, …,90, 100, 1000; с их помощью записывались другие числа. Впоследствии был введен особый знак (жирная точка, кружок) для указания пустующего разряда; знаки для чисел, больших 9, вышли из употребления, и нумерация «девангари» превратилась в десятичную поместную систему. Как и когда совершился этот переход – до сих пор неизвестно. К середине VIII века позиционная система нумерации получает в Индии широкое применение. Примерно в это время она проникает и в другие страны (Индокитай, Китай, Тибет, Иран и др.). Решающую роль в распространении индийской нумерации в арабских странах сыграло руководство, составленное в начале IX века узбекским ученым Мухаммедом из Хорезма. Оно было переведено в Западной Европе на латинский язык в XII веке. В XIII веке индийская нумерация получает распространение в Италии. В других странах Западной Европы она утверждается в XVI веке. Европейцы, заимствовавшие индийскую нумерацию от арабов, назвали ее «арабской». Это исторически неправильное название удерживается и поныне.

Из арабского языка заимствовано и слово «цифра», означающее буквально «пустое место». Это слово первоначально употреблялось для наименования знака пустующего разряда и этот смысл сохраняло до XVIII века, хотя уже в XV веке появился латинский термин «нуль» (*nullum* – ничто).

Форма индийских цифр претерпевала многообразные изменения. Та форма, в которой мы их пишем, установилась в XVI веке.

§2. Запись чисел в десятичной системе счисления

Как известно в десятичной системе счисления для записи чисел используется 10 знаков (цифр): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Из них образуются конечные последовательности, которые являются краткими записями чисел. Например, последовательность 3745 является краткой записью числа $3\cdot10^3 + 7\cdot10^2 + 4\cdot10 + 5$.

Определение. ***Десятичной записью*** *натурального числа x называется его представление в виде* $x=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0$, *где коэффициенты* a_n , $a_{n-1},\ldots, a_1, a_0$ *принимают значения* $0, 1, 2,\ldots,9$ *и* $a_n\neq0$.

Сумму $a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0$ принято записывать кратко $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}$.

Так как понятие числа и его запись не тождественны, то существование и единственность десятичной записи числа надо доказывать.

Теорема 1. *Любое натуральное число x можно представить в виде*

$$x=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0, \qquad (1)$$

где коэффициенты a_n, $a_{n-1},\ldots, a_1, a_0$ *принимают значения* $0, 1, 2,\ldots,9$ *и такая запись единственна.*

Доказательство.

1) Докажем существование записи числа x виде (1). Среди последовательных чисел $1, 10, 10^2, \ldots, 10^n$ найдем наибольшую степень, содержащуюся в x, т.е. такую, что $10^n \leq x < 10^{n+1}$. Это всегда можно сделать.

Разделим число x с остатком на 10^n. Обозначим частное этих чисел a_n , а остаток x_n . Тогда

$$x=a_n\cdot 10^n + x_n\ , \qquad (2)$$

где $a_n<10$ и $x_n <10^n$. Далее разделим x_n на 10^{n-1}, получим

$$x_n= a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + x_{n-1}\ , \qquad (3)$$

где a_{n-1} – частное, x_{n-1} – остаток.

Подставим (3) в (2), получим $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+ x_{n-1}$. Продолжая этот процесс дойдем до равенства $x_2= a_1\cdot 10+x_1$. Положив $x_1 = a_0$, будем иметь $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$, т.е. число x будет представлено в виде суммы степеней числа 10, что и означает возможность записи числа x в десятичной системе счисления.

2) Докажем единственность. Число n в равенстве (1) однозначно определяется условием $10^n \leq\ x < 10^{n+1}$. После того как n определено, коэффициент a_n определяется требованием $a_n\cdot 10^n \leq x <(a_n+1)\cdot 10^n$. Далее определяются аналогичным образом коэффициенты $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

Теорема доказана полностью.

Десятичная запись чисел позволяет производить их сравнение.

Теорема 2. *Пусть x и y – натуральные числа, запись которых дана в десятичной системе счисления:*

$x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$,

$y=b_m\cdot 10^m+b_{m-1}\cdot 10^{m-1}+\ldots+b_1\cdot 10+b_0$.

Тогда число x меньше числа y, если выполнено одно из условий:

а) $n<m$;

б) $n=m$, *но* $a_n < b_n$;

в) $n=m$, $a_n = b_n , \ldots, a_k = b_k$, *но* $a_{k-1} <b_{k-1}$.

Доказательство.

а) Так как $n<m$, то

$$10^{n+1}\leq 10^m \qquad (4)$$

Поскольку

$$x<10^{n+1} \text{ и } 10^m\leq y\ , \qquad (5)$$

то из (4) и (5) следует $x<10^{n+1}\leq 10^m\leq y \Rightarrow x< y$.

б) Если $n=m$ и $a_n < b_n$, то $a_n+1\leq b_n$. Умножая обе части последнего неравенства на 10^n , получим $(a_n+1)\cdot 10^n \leq b_n\cdot 10^n$, а так как $x<(a_n+1)\cdot 10^n$ и $b_n\cdot 10^n\leq y$, то $x<(a_n+1)\cdot 10^n\leq b_n\cdot 10^n\leq y$. Следовательно, $x< y$.

в) Доказывается аналогично.

Пусть $x=a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0$. Числа 1, 10, 10^2, …, 10^n называют при таком представлении ***разрядными единицами*** соответственно 1-го, 2-го,…, $(n+1)$-го разряда. Причем 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда, т.е. отношение соседних разрядов равно 10 – основанию системы счисления.

Три первых разряда в записи числа соединяют в одну группу и называют первым классом или *классом единиц*. В первый класс входят единицы, десятки и сотни. Четвертый, пятый и шестой разряды в записи числа образуют второй класс – *класс тысяч*. Затем идет третий класс – класс миллионов, состоящий из трех разрядов: седьмого, восьмого и девятого, т.е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов. Последующие три разряда так же образуют новый класс и т.д.

9-й разряд	8-й разряд	7-й разряд	6-й р.	5-й р.	4-й р.	3-й р.	2-й р.	1-й р.
сотни миллионов	десятки миллионов	единицы миллионов	сотни тысяч	десятки тысяч	единицы тысяч	сотни	десятки	едини-цы
Класс миллионов			**Класс тысяч**			**Класс единиц**		

В десятичной системе счисления каждому числу можно дать наименование. Так название чисел второго десятка, т.е. чисел вида $1 \cdot 10 + a_0$, образуются путем соединения первых десяти чисел, предлога «на» и несколько измененного слова «десять» - «дцать»: одиннадцать – один на десять; двенадцать – два на десять и т.д. Слово «двадцать» обозначает два десятка. Название чисел третьего десятка, т.е. чисел вида $2 \cdot 10 + a_0$, получаются прибавлением к слову «двадцать» названий чисел первого десятка: двадцать один, двадцать два и т.д. Аналогично получаются названия чисел четвертого, пятого, шестого, седьмого, восьмого девятого и десятого десятков. При этом только в трех случаях появляются новые слова: сорок, девяносто и сто.

Название чисел, больших 100, т.е. чисел вида $1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, составляются из слова «сто» и названий чисел первого и последующего десятков: сто один, сто два, …, сто девяносто девять. Две сотни кратко называют «двести». Для получения чисел, больших двухсот, используются названия чисел первого и последующих десятков, присоединенных к слову «двести». Затем отсчитываются последующие сотни, получившие особые названия: триста, четыреста и т.д. Десять сотен носят особое название – тысяча.

Счет за пределами тысячи ведется так: прибавляя к тысяче по единице (1001, 1002 и т.д.), получают две тысячи, три тысячи и т.д. Число тысяча тысяч получило особое название – миллион. Далее считают миллионами до тех пор пока не дойдут до тысячи миллионов. Число тысяча миллионов называется миллиард. Миллион миллионов называют биллионом. В вычислениях миллион принято записывать в виде 10^6 , миллиард – 10^9, биллион – 10^{12}.

Таким образом, для того чтобы назвать все натуральные числа (в пределах миллиарда), потребовалось только 16 различных слов: один, два, …, девять, десять, сорок, девяносто, сто, тысяча, миллион, миллиард. Остальные названия чисел получаются из основных.

§3. Позиционные системы счисления, отличные от десятичной. Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Определение 1. *Количество символов (знаков), употребляемых для записи чисел в данной позиционной системе счисления, называется* ***основанием*** *этой системы.*

Основанием позиционной системы счисления может быть любое натуральное число $p \geq 2$. Система счисления с основанием p называется p-ичной. Так, если $p=2$, то двоичной, если $p=8$ – восьмеричной. Для обозначения чисел в p-ичной системе счисления необходимо p символов: 0, 1, 2,…, p-1. Например, для записи чисел в троичной системе счисления используют знаки 0, 1, 2.

Определение 2. *Целое неотрицательное число x называется записанным в позиционной системе счисления с основанием p, если оно может быть представлен в виде*

$$x = \alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \cdots + \alpha_1 p + \alpha_0, \qquad (1)$$

где $1 \leq \alpha_n \leq p-1,\ 0 \leq \alpha_{n-1} \leq p-1, \dots,\ 0 \leq \alpha_0 \leq p-1$.

Коротко пишут $x = \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0}_p$.

Если $p=10$, то из определения 2 получим определение записи числа x в десятичной системе счисления (см. опр. §2).

Если $p=8$, то получим определение записи числа в восьмеричной системе счисления.

Определение 3. *Число x называется записанным в восьмеричной системе счисления, если оно может быть представлено в виде*

$$x = \alpha_n 8^n + \alpha_{n-1} 8^{n-1} + \cdots + \alpha_1 8 + \alpha_0,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ *есть цифры* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, *чем* $\alpha_n \neq 0$.

Пример 1. $7 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 5$ – *запись некоторого числа в системе счисления с основанием* 8. *Коротко пишут* 765_8. *Читать это число как семьсот шестьдесят пять нельзя. Потому что* 5 *показывает, сколько в этом числе единиц,* 6 – *сколько восьмерок,* 7 – *сколько восьмерок в квадрате.*

Аналогично можно из общего определения получить определения записи числа в позиционной системе счисления с основанием 2, 3 и т.д.

Теорема. *Пусть $p \geq 2$ – заданное натуральное число. Тогда любое натуральное число x представимо и притом единственным образом в виде (1).*

Доказательство этой теоремы аналогично соответствующему доказательству для $p=10$.

Одно и то же натуральное число может быть записано в любой системе счисления. Чтобы из одной записи получить другую, достаточно научиться переходить от записи в заданной системе счисления к записи в десятичной системе счисления и наоборот.

Пусть дана p-ичная запись числа x. Надо найти десятичную запись этого числа. Для этого достаточно вместо $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_0}_p$ написать $\alpha_n p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \cdots + \alpha_1 p + \alpha_0$, а потом заменить $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ их десятичными записями и выполнить обозначенные действия по правилам, принятым в десятичной системе счисления. Десятичная запись результата и будет искомым ответом.

Пример 2. *Записать число* 362_7 *в десятичной системе счисления.*

Решение.

$362_7=3\cdot 7^2 + 6\cdot 7 + 2=3\cdot 49 + 42 + 2 = 191$. Следовательно, $362_7 = 191$.

Пример 3. *Записать число* $\alpha 4\beta_{12}$ *в десятичной системе счисления.*

Решение.

Для записи чисел в двенадцатеричной системе счисления используются 12 символов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β. Причем десятичными записями символов α и β являются 10 и 11 соответственно. Поэтому

$$\alpha 4\beta_{12} = 10 \cdot 12^2 + 4 \cdot 12 + 11 = 1499.$$

Найдем p-ичную запись для числа, заданного в десятичной системе счисления.

Пусть

$$x = \alpha_n p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \cdots + \alpha_1 p + \alpha_0 .$$

Это число можно записать в виде

$$x = p(\alpha_n p^{n-1} + \alpha_{n-1}p^{n-2} + \cdots + \alpha_1) + \alpha_0.$$

Так как $0 \leq \alpha_0 < p$, то из этой записи видно, что α_0 – остаток от деления числа x на p, причем неполным частным при этом делении будет $\alpha_n p^{n-1} + \alpha_{n-1}p^{n-2} + \cdots + \alpha_1$. Точно так же находим, что α_1 – остаток от деления этого неполного частного на p и т.д.

Таким образом, p-ичная запись числа x находится следующим образом. Число x делят (в десятичной системе счисления) на p. Остаток от деления даст последнюю цифру α_0 в p-ичной записи числа x. Неполное частное снова делим на p. Новый остаток даст предпоследнюю цифру p-ичной записи x. Продолжая процесс деления, найдем все цифры p-ичной записи числа x.

Пример 1. *Найти двоичную запись числа* 46.

Решение.

$46=101110_2$

46	2				
0	23	2			
	1	11	2		
		1	5	2	
			1	2	2
				0	1

Пример 2. *Найти восьмеричную запись числа* 691.

Решение.

$691=1263_8$

_691	8		
64	86	8	
_51	6	10	8
48		2	1
3			

Пример 3. *Перевести число* 32014_5 *в восьмеричную систему счисления.*

Решение.

В данном случае перевод осуществляется в два этапа. Сначала переводим данное число в десятичную систему счисления:

$$32014_5 = 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 = 2134.$$

А теперь 2134 переведем в восьмеричную систему счисления:

$2134=4126_8$

2134	8		
6	266	8	
	2	33	8
		1	4

Значит $32014_5 = 4126_8$.

§4. Алгоритм и его свойства

Название алгоритм произошло от латинского написания имени родившегося в Хиве узбекского математика IX в. аль-Хорезми (*algorithmi*). В свое время он сформулировал четкие правила выполнения четырех арифметических действий.

Определение алгоритма сформулировано известным русским математиком А.А. Марковым.

Определение. ***Алгоритм*** *– это точное предписание, задающее вычислительный процесс, или, другими словами, точное изложение последовательности действий над исходными данными, выполнение которой обеспечивает получение искомого результата.*

Важнейшими свойствами алгоритма являются:

1) ***определенность*** – однозначность предписываемой последовательности действий, не допускающая произвольности ее толкования;
2) ***массовость*** – пригодность для решения многих или даже всех задач данного типа при различных исходных данных;
3) ***дискретность*** – расчлененность алгоритма на отдельные элементарные акты;
4) ***результативность*** – возможность получения решения за конечное число шагов;
5) ***инвариантность*** по отношению к вычислителю, означающая, что алгоритм может оставаться неизменным при выполнении предписываемых им вычислений человеком или машиной любого типа.

Алгоритмы могут быть представлены в виде словесного или графического описания. Словесное описание конструируется так, чтобы оно удовлетворяло всем перечисленным выше свойствам. Такое описание должно содержать минимум слов, быть удобным для чтения. Примерами таких алгоритмов являются алгоритмы арифметических действий.

§5. Алгоритмы арифметических действий во множестве N_0 в десятичной и других системах счисления

5.1. Сложение многозначных чисел

Рассмотрим сначала случай, когда количество цифр в записи чисел x и y одинаково:

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$
$$y = b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0.$$

Тогда

$$\begin{gathered} x + y = \left(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0\right) + \\ + \left(b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0\right) = \\ = \left(a_n + b_n\right) \cdot 10^n + \left(a_{n-1} + b_{n-1}\right) \cdot 10^{n-1} + \ldots + \left(a_1 + b_1\right) \cdot 10 + \left(a_0 + b_0\right). \end{gathered}$$

Однако сумма

$$\left(a_n + b_n\right) \cdot 10^n + \left(a_{n-1} + b_{n-1}\right) \cdot 10^{n-1} + \ldots + \left(a_1 + b_1\right) \cdot 10 + \left(a_0 + b_0\right) \qquad (1)$$

не всегда может быть рассмотрена как десятичная запись числа $x + y$, так как коэффициенты перед степенями десяти могут быть больше девяти. Лишь тогда, когда ни одна из сумм $a_k + b_k$ не превосходит девяти, операцию сложения можно считать законченной, а сумму (1) считать десятичной записью числа $x + y$. В противном случае: выбираем наименьшее k, для которого $a_k + b_k \geq 10$. Учитывая, что $0 \leq a_k \leq 9$ и $0 \leq b_k \leq 9$, получим $0 \leq a_k + b_k \leq 18$.

Значит, $a_k + b_k$ возможно представить в виде суммы: $a_k + b_k = 10 + c_k$, где $0 \leq c_k \leq 9$. Тогда k –тое слагаемое в сумме (1) будет иметь вид:

$$\left(a_k + b_k\right) \cdot 10^k = \left(10 + c_k\right) \cdot 10^k = c_k \cdot 10^k + 10^{k+1}.$$

Слагаемое 10^{k+1} может быть отнесено к $(k+1)$–му слагаемому $\left(a_{k+1} + b_{k+1}\right) \cdot 10^{k+1}$, и получим новый вид $(k+1)$–го слагаемого

$$\left(a_{k+1} + b_{k+1} + 1\right) \cdot 10^{k+1}.$$

Затем рассматривают остальные коэффициенты суммы. Менее чем через n шагов придем к десятичной записи числа $x + y$.

В случае, когда в десятичных записях слагаемых разное количество цифр, надо приписать к числу с меньшим количеством цифр впереди столько нулей, сколько уравняет количество цифр в обоих слагаемых. После этого применяется описанный выше процесс сложения. Он позволяет сформулировать в общем виде алгоритм сложения натуральных чисел в десятичной системе счисления.

Алгоритм сложения натуральных чисел в десятичной системе счисления

1. Записать второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
2. Сложить цифры разряда единиц:
   а) если сумма меньше десяти, то записать ее в разряде единиц ответа и перейти к сложению в следующем разряде;

б) если сумма цифр в разряде единиц больше или равна 10, то представить ее в виде $a_0 + b_0 = 10 + c_0$, где c_0 – однозначное число, т.е. $0 \le c_0 \le 9$. Записать c_0 в разряде единиц ответа и прибавить 1 к цифре десятков первого слагаемого. После этого перейти к сложению в следующем разряде.

3. Процесс заканчивается тогда, когда окажутся сложенными цифры старших разрядов.

Замечание. *Если сумма цифр старших разрядов* $(a_n + b_n) \ge 10$, *то приписывают впереди обоих слагаемых нули, увеличивают нуль первого слагаемого на 1 и выполняют сложение 1+0 =1.*

Пример 1. *Найдите сумму чисел:* 1) 131 *и* 234; 2) 485 *и* 794.

Решение.

$$131 + 234 = \left(1\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 1\right) + \left(2\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 4\right) = (1+2)\cdot 10^2 + (3+3)\cdot 10 + (1+4) =$$
$$= 3\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 5 = 365$$

С помощью сформулированного алгоритма коротко описанный процесс сложения записывается так

$$\begin{array}{r} 131 \\ {}^{+}234 \\ \hline 365 \end{array}$$

$$485 + 794 = \left(4\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 5\right) + \left(7\cdot 10^2 + 9\cdot 10 + 4\right) = (4+7)\cdot 10^2 + (8+9)\cdot 10 + (5+4) =$$
$$= (4+7)\cdot 10^2 + 17\cdot 10 + 9 = (4+7)\cdot 10^2 + (7+10)\cdot 10 + 9 = (4+7+1)\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 9 =$$
$$= 12\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 9 = (0+0)\cdot 10^3 + (2+10)\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 9 =$$
$$= (1+0)\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 9 = 1279$$ или короче

$$\begin{array}{r} 485 \\ {}^{+}794 \\ \hline 1279 \end{array}$$

Точно так же складывают числа в других системах счисления. Изменения будут лишь в формулировке пункта 2. Мы приведем алгоритм сложения в p-ичной системе счисления полностью.

Алгоритм сложения натуральных чисел в p-ичной системе счисления

1. Записать второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
2. Сложить цифры меньшего разряда:

   а) если сумма меньше p, то записать ее в меньшем разряде ответа и перейти к сложению в следующем разряде;

б) если сумма цифр первого разряда больше или равна $\boldsymbol{p}$, то представить ее в виде $a_0 + b_0 = p + c_0$, где $0 \le c_0 \le p - 1$. Записать $\boldsymbol{c_0}$ в меньшем разряде ответа и прибавить 1 к цифре второго разряда первого слагаемого. После этого перейти к сложению в следующем разряде.

3. Процесс заканчивается тогда, когда окажутся сложенными цифры старших разрядов.

Замечание. *Если сумма цифр старших разрядов* $(a_n + b_n) \ge p$, *то приписывают впереди обоих слагаемых нули, увеличивают нуль первого слагаемого на* 1 *и выполняют сложение* 1 + 0 = 1.

Пример 2. *Найти сумму чисел* 2305_6 *и* 3455_6 ; 202112_3 *и* 210210_3.

Решение.

$$\begin{array}{r} 2305_6 \\ {}^{+}3455_6 \\ \hline 10204_6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 202112_3 \\ {}^{+}210210_3 \\ \hline 1120022_3 \end{array}$$

5.2. Вычитание многозначных чисел

Рассмотрим числа

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

$$y = b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0, \text{ причем } y < x.$$

При вычитании многозначных чисел x и y могут возникнуть случаи:

1. $n = m$ и $(\forall k)(a_k \ne 0)$, где $k = \overline{0; n}$.
2. $n = m$ и $(\exists k)(a_k = 0)$, где $k = \overline{0; n}$.
3. $n > m$ и $(\forall k)(a_k \ne 0)$, где $k = \overline{0; n}$.
4. $n > m$ и $(\exists k)(a_k = 0)$, где $\mathrm{k} = \overline{0; \mathrm{n}}$.[4]

Выведем алгоритм вычитания многозначных натуральных чисел в десятичной системе счисления. Для этого рассмотрим вычитание натуральных чисел в одном из возможных случаев (перечисленных выше).

Например, для второго случая получим следующие рассуждения. Пусть

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \qquad (1)$$

[4] Таким образом, числа $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ могут содержать либо равное, либо разное количество цифр, и в десятичной записи числа x могут быть или не быть нули.

$$y = b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0 \quad . \qquad (2)$$

Учитывая свойства вычитания и дистрибутивность умножения относительно вычитания, можно записать:

$$x - y = \left(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0\right) -$$
$$\left(b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0\right) =$$
$$= \left(a_n - b_n\right) \cdot 10^n + \left(a_{n-1} - b_{n-1}\right) \cdot 10^{n-1} + \ldots + \left(a_1 - b_1\right) \cdot 10 + \left(a_0 - b_0\right). \qquad (3)$$

Формула (3) задает алгоритм вычитания лишь при условии, что $(\forall k)(a_k \geq b_k)$.

Обозначим через k – наименьший индекс, для которого это условие не выполняется, т.е. выполняется условие: $(a_k < b_k)$.

Пусть m – наименьший индекс, такой, что верны условия:

$$a_m \neq 0; \qquad m > k; \qquad a_{m-1} = a_{m-2} = \ldots = a_{k+1} = 0 .$$

Преобразуем в формуле (1) m –ное слагаемое $a_m \cdot 10^m$ следующим образом:

$$a_m \cdot 10^m = \left(a_m - 1\right) \cdot 10^m + 9 \cdot 10^{m-1} + 9 \cdot 10^{m-2} + \ldots + 9 \cdot 10^{k+1} + 10 \cdot 10^k \quad (4)$$[5]

Выпишем из формулы (3) сумму, начиная с m – ного слагаемого и заканчивая k – тым слагаемым:

$$(\ a_m - b_m) \cdot 10^m + \left(a_{m-1} - b_{m-1}\right) \cdot 10^{m-1} + \ldots + \left(a_{k+1} - b_{k+1}\right) \cdot 10^{k+1} + \left(a_k - b_k\right) \cdot 10^k$$

Учитывая, что $a_{m-1} = a_{m-2} = \ldots = a_{k+1} = 0$, и, воспользовавшись преобразованием (4), получим:

$$a_m - 1 - b_m) \cdot 10^m + \left(9 - b_{m-1}\right) \cdot 10^{m-1} + \ldots + \left(9 - b_{k+1}\right) \cdot 10^{k+1} + \left(a_k + 10 - b_k\right) \cdot 10^k \quad (5)$$

Распишем теперь формулу (3) с учетом преобразования (5):

$$x - y = \left(a_n - b_n\right) \cdot 10^n + \left(a_{n-1} - b_{n-1}\right) \cdot 10^{n-1} + \ldots + \left(a_1 - b_1\right) \cdot 10 + \left(a_0 - b_0\right) =$$
$$= (a_n - b_n) \cdot 10^n + \left(a_{n-1} - b_{n-1}\right) \cdot 10^{n-1} + \ldots + (\ a_m - 1 - b_m) \cdot 10^m + \left(9 - b_{m-1}\right) \cdot 10^{m-1} +$$
$$+ \left(9 - b_{m-2}\right) \cdot 10^{m-2} + \ldots + \left(9 - b_{k+1}\right) \cdot 10^{k+1} + \left(a_k + 10 - b_k\right) \cdot 10^k + \ldots +$$
$$+ \left(a_1 - b_1\right) \cdot 10 + \left(a_0 - b_0\right) \qquad (6)$$

В записи (6) все коэффициенты с индексом, меньшим m, неотрицательны и не превосходят 9. Покажем это.

Действительно. Т.к. $0 < a_k < b_k < 10$, то $0 < a_k + 10 - b_k < 10$**.** Из того, что $0 \leq b_s \leq 9$, следует, что $0 \leq 9 - b_s \leq 9$, где $k + 1 \leq s \leq m - 1$. Что и требовалось показать.

---

[5] Для понимания выполненного преобразования достаточно вспомнить, каким образом происходит перенос разрядной единицы из $\boldsymbol{m}$ – ного разряда в $\boldsymbol{k}$ – тый разряд. Например, в случае, когда $\boldsymbol{m} = 6$, $\boldsymbol{a} = 5$, получим:

$5 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10$, т.е.

$5000000 = 4000000 + 900000 + 90000 + 9000 + 900 + 100$, что действительно верно.

Применяя те же преобразования (при необходимости) к коэффициентам $(a_n - b_n)$, $(a_{n-1} - b_{n-1})$, ..., $(a_m - 1 - b_m)$, менее чем через n шагов мы придем к записи разности $x - y$ в виде:

$x - y = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10 + c_0$, где $0 \le c_k \le 9$, для всех k.

Если при этом окажется, что $c_n = 0$, то надо отбросить первые слагаемые вплоть до первого, отличного от нуля, коэффициента.

Замечание. *Несмотря на то, что мы рассмотрели только один из четырех возможных случаев составления разности натуральных чисел, опираясь на сделанные доказательства, возможно сформулировать алгоритм вычитания натуральных многозначных чисел в общем виде.*

Алгоритм вычитания натуральных чисел в десятичной системе счисления

1. Записать вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
2. Выполнить вычитание в разрядах единиц:

а) если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, то

- производят вычитание;
- переходят к действию в следующем разряде.

б) если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, т.е. $b_0 > a_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от 0, то

- уменьшают цифру десятков уменьшаемого на 1, одновременно увеличив цифру единиц уменьшаемого на 10;
- вычитают из числа $a_0 + 10$ число b_0;
- записывают разность в разряде единиц искомого числа;
- переходят к действию в следующем разряде.

в) если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, т.е. $b_0 > a_0$ и цифры, стоящие в разрядах десятков, сотен и т.д. уменьшаемого равны 0, то

- уменьшают на 1 первую, отличную от 0, цифру в уменьшаемом (после разряда единиц);
- все цифры в младших разрядах (до разряда десятков включительно) увеличивают на 9,
- цифру в разряде единиц увеличивают на 10;
- вычитают из числа $(a_0 + 10)$ число b_0;
- записывают разность в разряде единиц искомого числа;
- переходят к действию в следующем разряде.

3. Процесс вычитания заканчивается тогда, когда произведено вычитание в старшем разряде уменьшаемого.

Примеры. *Выполнить вычитание в десятичной системе счисления.*

1)457–325= 132; 2) 457 – 328 = 129; 3)4007–328 = 3679.

$$\begin{array}{r} 4\ 5\ 7\\ -\ 3\ 2\ 5\\ \hline 1\ 3\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (5 - 1) \quad (7 + 10) - 8\\ 4\ 5\ 7\\ -\ 3\ 2\ 8\\ \hline 1\ 2\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & (4-1) & (0+9) & (0+9) & (7+10)\\ & 4 & 0 & 0 & 7\\ - & & 3 & 2 & 8\\ \hline & 3 & 6 & 7 & 9 \end{array}$$

Аналогичные рассуждения приводят к алгоритму вычитания в *p*-ичных системах счисления.

Алгоритм вычитания натуральных чисел в р-ичной системе счисления

1. Записать вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
2. Выполнить вычитание в младшем разряде:

а) если в уменьшаемом цифра, записанная в первом (младшем) разряде не превосходит соответствующей цифры вычитаемого, то производят вычитание и переходят к действию в следующем разряде.

б) если цифра первого (младшего) разряда вычитаемого больше цифры в первом (младшем) разряде уменьшаемого, т.е. $b_0 > a_0$, а цифра второго разряда уменьшаемого отлична от *0*, то

- уменьшают цифру второго разряда уменьшаемого на *1*, одновременно увеличив цифру первого разряда на р;
- вычитают из числа $(a_0 + p)$ число b_0;
- записывают разность в первом разряде искомого числа;
- переходят к действию в следующем разряде.

в) Если цифра первого (младшего) разряда вычитаемого больше цифры в первом (младшем) разряде уменьшаемого, т.е. $b_0 > a_0$ и цифры, стоящие во втором, третьем и т.д. разрядах уменьшаемого, равны 0, то

- уменьшают на *1* первую, отличную от 0, цифру в уменьшаемом (после первого разряда);
- все цифры в младших разрядах (до второго разряда включительно) увеличивают на $p - 1$;
- цифру в первом разряде увеличивают на *p*;
- вычитают из числа $(a_0 + p)$ число b_0;
- записывают разность в первом разряде искомого числа;
- переходят к действию в следующем разряде.

3. Процесс вычитания заканчивается тогда, когда произведено вычитание в старшем разряде уменьшаемого.

Примеры. *Выполнить вычитание в указанной системе счисления.*

1) $3712_8 - 645_8 = 3045_8$. 2) $5401_6 - 3052_6 = 2305_6$.

$$\begin{array}{ccccc} & {\scriptstyle(3-0)} & {\scriptstyle(7-1)} & {\scriptstyle(0+8)} & {\scriptstyle(2+8)} \\ & \uparrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ - & 3 & 7 & 1 & 2 \\ & & 6 & 4 & 5 \\ \hline & 3 & 0 & 4 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle(4-1)} & {\scriptstyle(0+5)} & {\scriptstyle(1+6)} \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ - & 5 & 4 & 0 & 1 \\ & 3 & 0 & 5 & 2 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & 5 \end{array}$$

5.3. Умножение чисел

Выведем правило умножения многозначного числа на однозначное число в общем виде. Пусть требуется умножить число $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$ на однозначное число y:

$x\cdot y=(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0)\cdot y=(a_n\cdot y)\cdot 10^n+(a_{n-1}\cdot y)\cdot 10^{n-1}+\ldots+$
$+(a_1\cdot y)\cdot 10+(a_0\cdot y)$.

Здесь преобразования выполнены на основании законов умножения. После этого, используя таблицу умножения, заменяем все произведения $a_k\cdot y$, где $0 \le k \le n$, соответствующими значениями $a_k\cdot y=q_k\cdot 10+c_k$ и получаем выражение

$x\cdot y=(q_n\cdot 10+c_n)\cdot 10^n+(q_{n-1}\cdot 10+c_{n-1})\cdot 10^{n-1}+\ldots+(q_1\cdot 10+c_1)\cdot 10+(q_0\cdot 10+c_0)=$
$=q_n\cdot 10^{n+1}+(c_n+q_{n-1})\cdot 10^n+\ldots+(c_1+q_0)\cdot 10+c_0$.

В таблице сложения заменяем суммы q_k+c_{k-1}, $0 \le k \le n$, их значениями. Если, например, c_0 однозначно, то последняя цифра произведения равна c_0. Если же $c_0=10+m_0$, то последняя цифра произведения равна m_0, а к скобке (c_1+q_0) надо прибавить 1. Продолжая этот процесс, получим десятичную запись числа $x\cdot y$.

Описанный процесс позволяет сформулировать в общем виде ***алгоритм умножения многозначного числа x на однозначное число y***.

1. Записываем второе число под первым.
2. Умножаем цифры разряда единиц числа x на число y. Если произведение меньше 10, то записываем его в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду (десятков).
3. Если произведение цифр единиц числа x на число y больше или рана 10, то представляем его в виде $10\cdot q_1+c_0$, где c_0 – однозначное

число. Записываем c_0 в разряд единиц ответа и запоминаем q_1 – перенос в следующий разряд.

4. Умножаем цифры разряда десятков на число y, прибавляем к полученному произведению число q_1 и повторяем процесс, описанный в пунктах 2) и 3).
5. Процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.

Опишем теперь процесс умножения числа x на степени числа 10. Пусть требуется умножить число $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$ на 10^k.

$x\cdot 10^k=(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0)\cdot 10^k=a_n\cdot 10^n\cdot 10^k+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}\cdot 10^k+\ldots+$
$+a_1\cdot 10\cdot 10^k+a_0\cdot 10^k=a_n\cdot 10^{n+k}+a_{n-1}\cdot 10^{n+k-1}+\ldots+a_1\cdot 10^{k+1}+a_0\cdot 10^k+0\cdot 10^k+\ldots+$
$+0\cdot 10+0.$

Таким образом, умножение числа x на 10^k свелось к приписыванию k нулей к десятичной записи этого числа.

Пусть теперь требуется перемножить многозначные числа x и y, причем $y=b_n\cdot 10^n+b_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+b_1\cdot 10+b_0$. В силу дистрибутивности умножения относительно сложения, а так же ассоциативного закона умножения можно записать

$x\cdot y=x\cdot(b_n\cdot 10^n+b_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+b_1\cdot 10+b_0)=(x\cdot b_n)\cdot 10^n+(x\cdot b_{n-1})\cdot 10^{n-1}+\ldots+$
$+(x\cdot b_1)\cdot 10+x\cdot b_0$. Последовательно умножая число x на однозначные числа $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$, а затем на $10^n, 10^{n-1}, \ldots, 10, 1,$ получим слагаемые, сумма которых равна $x\cdot y$.

Описанное правило дает обоснование обычно применяемому способу умножения столбиком.

Алгоритм умножения многозначных чисел

1. Записываем множитель x под ним второй множитель y.
2. Умножаем число x на младший разряд b_0 числа y и записываем произведение $x\cdot b_0$ под числом y.
3. Умножаем число x на следующий разряд b_1 числа y и записываем произведение $x\cdot b_1$, но со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению $x\cdot b_1$ на 10.
4. Продолжаем вычисление произведений до вычисления $x\cdot b_n$.
5. Полученные $n+1$ произведения складываем.

Пример. *Найдем произведение чисел* 325 *и* 13.

Решение.

$$\begin{array}{r}
325\\
\times\quad 13\\
\hline
+\;975\\
325\\
\hline
4225
\end{array}$$

Точно так же производится умножение в других позиционных системах счисления. При этом можно пользоваться таблицами умножения однозначных чисел в этой системе счисления. Например, приведем такие таблицы в двоичной и троичной системах счисления.

p=2

$x \backslash y$	0	1
0	0	0
1	0	1

p=3

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Примеры. *Найти произведение чисел: а*) 111_2 *и* 101_2 ; *б*) 1202_3 *и* 12_3.

Решение.

Пользуясь приведенными таблицами и алгоритмами сложения и умножения, будем иметь:

$$\begin{array}{r} \times\ 1\ 1\ 1_2 \\ 1\ 0\ 1_2 \\ \hline +\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 1\ 2\ 0\ 2_3 \\ 1\ 2_3 \\ \hline +\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 0\ 2\ \\ \hline 2\ 2\ 2\ 0\ 1_3 \end{array}$$

Этот способ не совсем удобен, так как связан с постоянным дополнительным составлением таблиц. Поэтому чаще пользуются способом, который основан на переводе результатов действий из десятичной системы счисления в ту, в которой на данный момент производятся вычисления. Приведем пример умножения этим способом с подробным описанием производимых действий.

Пример. *Найти произведение чисел* 35_8 *и* 47_8 .

Решение.

$$\begin{array}{r} \times\ 3\ 5_8 \\ 4\ 7_8 \\ \hline +\ 3\ 1\ 3 \\ 1\ 6\ 4\ \\ \hline 2\ 1\ 5\ 3_8 \end{array}$$

$5 \cdot 7 = 35$

$$\begin{array}{r|l} -\ 35 & 8 \\ \cline{2-2} 32 & 4 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$3 \cdot 7 = 21 \quad 21 + 4 = 25$

$$\begin{array}{r|l} -\ 25 & 8 \\ \cline{2-2} 24 & 3 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Аналогично производим умножение на 4.

5.4. Деление чисел

Деление многозначного числа на многозначное рассматривается как действие деления с остатком. Пусть надо разделит 256 на 6 с остатком. Так как 60 < 256 < 600, то неполное частное заключено между 10 и 100. Более точную оценку дает использование таблицы умножения. Так как $6 \cdot 40 = 240$, а $6 \cdot 50 = 300$ и $240 < 256 < 300$, то неполное частное заключено между 40 и 50. Это означает, что цифра десятков неполного частного равна 4, т.е. оно имеет вид $q = 4 \cdot 10 + q_0$. Но тогда должны выполняться неравенства

$$(40 + q_0) \cdot 6 \le 256 \le (40 + q_0 + 1) \cdot 6,$$
$$240 + 6q_0 \le 256 \le 240 + 6q_0 + 6,$$
$$6q_0 \le 16 \le 6(q_0 + 1).$$

Вторично применяя таблицу умножения, получаем, что $q_0 = 2$. Значит неполное частное равно 42, а тогда остаток от деления равен $256 - 42 \cdot 6 = 4$. Итак, при делении 256 на 6 получается неполное частное 42 и остаток 4: $256 = 42 \cdot 6 + 4$. Это деление записывают так

$$\begin{array}{r|l} 2\ 5\ 6 & 6 \\ \cline{2-2} \underline{2\ 4\ } & 4\ 2 \\ 1\ 6 & \\ \underline{1\ 2} & \\ 4 & \end{array}$$

В общем виде ***алгоритм деления*** «углом» имеет следующий вид.

I. Если $a = b$, то частное $q = 1$, остаток $r = 0$.

II. Если $a > b$ и число разрядов в числах a и b одинаково, то частное q находим перебором, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так как $a = 10b$. Этот перебор можно ускорить, выполнив деление с остатком цифр старших разрядов чисел a и b.

III. Если $a > b$ и число разрядов в числе a больше, чем в числе b, то записываем делимое a и справа от него делитель b, который отделяем от a углом, и ведем поиск частного и остатка в такой последовательности:

1). Выделяем в числе a столько старших разрядов сколько их в числе b или, если необходимо, на один разряд больше, но так, чтобы они образовали число d_1 большее или равное b. Перебором находим частное q_1 чисел d_1 и b, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Записываем q_1 под уголком (ниже b).

2). Умножаем b на q_1 и записываем произведение под числом a так, чтобы младший разряд числа $b \cdot q_1$ был написан под младшим разрядом выделенного числа d_1 .

3). Проводим черту под $b \cdot q_1$ и находим разность $r_1 = d_1 - b \cdot q_1$.

4). Записываем разность r_1 под числом $b \cdot q_1$, приписываем справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого a и сравниваем полученное число d_2 с числом b.

5). Если полученное число d_2 больше или равно b, то относительно него поступаем согласно пунктам I или II. Частное q_2 записываем после q_1 .

6). Если полученное число d_2 меньше b, то приписываем еще столько следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получилось число d_3 большее или равное b. В этом случае записываем после q_1 такое же количество нулей. Затем относительно d_3 поступаем согласно пунктам I или II. Частное q_2 записываем после нулей. Если при использовании младшего разряда числа a окажется, что d_3 меньше b, то частное чисел d_3 и b равно нулю, и этот нуль записываем последним разрядом к частному, а остаток $r = d_3$.

Точно так же выполняется деление в других системах счисления.

Примеры.

1)
$$
\begin{array}{r|l}
-\,3\;2\;5\;4\;5_6 & 2\;1\;5_6 \\
\underline{2\;1\;5} & \overline{1\;3\;0_6} \\
-\,1\;1\;0\;4 & \\
\underline{1\;0\;5\;3} & \\
1\;1\;5 &
\end{array}
$$

2)
$$
\begin{array}{r|l}
-\,1\;5\;2\;7_8 & 1\;7_8 \\
\underline{1\;5\;1} & \overline{7\;1_8} \\
-\,1\;7 & \\
\underline{1\;7} & \\
0 &
\end{array}
$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

5.1. Решите задачи в десятичной системе счисления:

1) Сумма цифр двузначного числа равна 9, причём цифра десятков вдвое больше цифры единиц. Найдите это число.

2) Каждая цифра пятизначного числа на единицу больше предыдущей, а сумма его цифр равна 30. Какое это число?

3) Найдите все такие двузначные натуральные числа, при перестановке цифр в которых это число: а) увеличивается на 9; б) уменьшается на 63; в) увеличивается на 75%.

4) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 7. Найдите это число.

5) Найдите двузначное число, если цифра его десятков на 2 больше цифры единиц, а произведение числа и суммы его цифр равно 900.

6) Найти двузначное число, зная, что число его единиц двумя больше числа десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

7) Одна из цифр двузначного числа на 3 меньше другой, а сумма квадратов этого числа и числа, полученного перестановкой его цифр, равна 1877. Найдите это число.

8) Двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы в 2,25 раза больше самого числа. Найдите это число.

9) Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 17, а сумма квадратов его цифр равна 109. Если из этого

числа вычесть 495, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

10) Ученику надо было умножить 78 на двузначное число, в котором цифра десятков втрое больше цифры единиц. По ошибке он переставил цифры во втором сомножителе, отчего получил произведение на 2808 меньше истинного. Чему равно истинное произведение?

11) Трехзначное десятичное число начинается с 1, если поменять местами старший и младший разряды, то вновь полученное число будет меньше усемеренного исходного на 48. Найти исходное число.

12) Шестизначное десятичное число начинается слева с 1, если переместить ее в младший разряд, то новое число будет втрое больше исходного. Найти исходное число.

5.2. Запишите первые 30 чисел в а) пятеричной системе счисления; б) шестеричной системе счисления; в) восьмеричной системе счисления; г) двенадцатеричной системе счисления.

5.3. Верно ли записаны числа а) в пятеричной системе счисления: 1213_5 , 5023_5 , 2003_5 , 30162_5 ; б) в семеричной системе счисления: 2360_7 , 35721_7 , 608512_7 ?

5.4. Определить в какой системе счисления ведется рассказ:

1) «Необыкновенная девочка»

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила –
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно…
Но станет все сейчас обычным,
Когда поймете мой рассказ.
(А.Н.Стариков)

2) Один мудрец писал «Мне 33 года. Моей матери 124 года, а отцу 131 год. Вместе нам 343 года». Какую систему счисления использовал мудрец, и сколько ему лет».

3) Один человек имел 100 монет. Он поровну разделил их между двумя своими детьми. Каждому досталось по 11 монет и одна осталась лишней. Какая система счисления использовалась, и сколько было монет?

5.5. Запишите числа в десятичной системе счисления:

1) 111011_2; 2) 212_3; 3) 362_7; 4) 2323_6; 5) 534_8; 6) 247_9; 7) $\alpha79_{11}$; 8) $\alpha481\beta_{12}$.

5.6. Найти запись следующих чисел в p-ичной системе счисления:

1) 125, p=2; 2) 46, p=3; 3) 374, p=8; 4) 19510, p=12;
5) 675, p=5; 6) 1441, p=7; 7) 2005, p=4; 8) 15, p=2.

5.7. Запишите число

1) 32014_5 в восьмеричной системе счисления;
2) 369 в троичной системе счисления;
3) 11011_2 в семеричной системе счисления;
4) 1020_8 в пятеричной системе счисления;
5) 3455_6 в двенадцатеричной системе счисления;
6) 1321_4 в семеричной системе счисления.

5.8. Сравните числа:

1) 762_8 и 1043_5; 2) 342_5 и 10121_3; 3) 5341_6 и 639_{11}; 4) 121212_3 и 456_7 .

5.9. Выполните действия:

1) $101111011_2+11011101_2$; 2) $121011_3 + 22120_3$;
3) $103501_6 + 235544_6$; 4) $1312031_4 + 232320_4$;
5) $3712_8 – 645_8$; 6) $4725_8 – 647_8$;
7) $210211_3 – 12021_3$; 8) $\beta917\alpha_{12} – \alpha6835_{12}$;
9) $5401_6 – 3052_6 + 3455_6$; 10) $4306_8 + 543_8 – 1063_8$;
11) $43\alpha\beta5_{12} + 3\alpha6_{12} + 4\beta25_{12}$; 12) $202112_3 + 210210_3 – 12020_3$;
13) $352_6 \cdot 245_6$; 14) $1202_3 \cdot 120_3$;
15) $3470_8 \cdot 761_8$; 16) $132_6 \cdot 45_6$;
17) $120111_3 : 102_3$; 18) $2134_5 : 12_5$;
19) $51\alpha3406_{11} : 548_{11}$; 20) $32430_6 : 215_6$.

5.10. Выполнить действия. Результат проверить в десятичной системе счисления:

1) $2012_3 + 1221_3 – 2101_3$; 2) $403_5 – 324_5 + (201_5 – 144_5)$;
3) $(4230_5 – 241003_5 : 43_5) \cdot 12_5$;
4) $125021_6 : (4311_6 – 3450_6) – (25443_6 + 3303_6) : 453_6$;
5) $(12422_8 + 14222_8) : (145_8 – 116_8)$;
6) $5406_{12} : 126_{12} + 21_{12} \cdot (483_{12} – 189_{12}) – 13\beta9_{12} : 129_{12}$;
7) $2331_7 : (220_7 – 153_7) + 256_7 \cdot 13_7$;
8) $(563_8 + 217_8) \cdot 15_8 + (2365_8 – 636_8) \cdot 17_8$;
9) $3842_{11} \cdot (8971_{11} : 117_{11} +3607_{11} – 35\alpha7_{11})$.

5.11. В какой системе счисления 1) 69_{10} запишется как 105? 2) 103_{10} запишется как 403? 3) 221_{10} запишется как 25?

5.12. Найдите основание системы счисления, если верно равенство:

1) $236_x = 1240_5$; 2) $306_x + 124_x = 220$; 3) $752_x - 647_x = 67$.

Образец контрольной работы по теме

1. В десятичной системе счисления число 7542_8 запишется как

1) 3938 2) 3939 3) 4038 4) 3940.

2. В восьмеричной системе счисления число 8791_{10} равно

1) 22127_8 2) 21127_8 3) 22117_8 4) 21117_8.

3. Число 56_9 в четверичной системе счисления запишется как

   1) 313_4 2) 303_4 3) 133_4 4) 113_4.

4. Результат вычитания $1020_8 - 534_8$ равен

   1) 246_8 2) 426_8 3) 224_8 4) 264_8.

5. В какой системе счисления 69_{10} запишется как 105?

   1) $n = 6$ 2) $n = -8$ 3) $n = 8$ 4) $n = 7$.

6. Решите задачу в десятичной системе счисления и укажите правильный ответ.

"В двузначном числе десятков в три раза больше, чем единиц. Если между цифрами этого числа вставить цифру 0, то число увеличится на 540. Найдите двузначное число".

   1) 61 2) 60 3) 59 4) 62.

ТЕМА 6.
АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§1. *Понятие об аксиоматическом методе в математике*

Аксиоматическое построение любой математической теории осуществляется следующим образом:

1) выбираются ***основные понятия***, которые не определяются, только указывается какие объекты и какие отношения между ними будут рассматриваться;

2) перечисляются основные предложения (***аксиомы***), которые принимаются при построении данной математической теории;

3) каждое предложение теории, которое не содержится в списке аксиом, доказывается, а каждое понятие, которого нет в списке основных, определяется.

В аксиоматической теории аксиомы не доказываются, но это не значит, что их можно формулировать произвольно. При аксиоматическом построении теории по существу все утверждения выводятся из аксиом, поэтому к системе аксиом предъявляют особые требования.

Система аксиом должна быть:

- ✓ ***непротиворечивой***: все возможные логические выводы из данной системы аксиом никогда не приведут к взаимно-исключающим друг друга предложениям;
- ✓ ***независимой***: никакая аксиома системы не должна быть следствием остальных аксиом этой системы.

Если построение теории осуществляется аксиоматическим методом, то говорят, что теория построена ***дедуктивно***.

При аксиоматическом построении одной и той же математической теории можно использовать разные системы аксиом. При выборе той или иной системы аксиом обращают внимание на простоту и наглядность её использования в дальнейшем построении математической теории. Учитывается так же и многовековая деятельность людей.

Аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел было осуществлено в работах двух математиков – немца Грассмана и итальянца Пеано. Они предложили аксиоматику, в которой натуральное число обосновывалось как элемент неограниченно продолжающейся последовательности.

§2. *Основные понятия и отношения при аксиоматическом построении множества целых неотрицательных чисел. Аксиомы Пеано*

При аксиоматическом построении множества целых неотрицательных чисел (обозначим его N_0) за *основные понятия* принимаются: «*нуль*» и «целое неотрицательное число», в качестве *основного отношения* выбирается отношение «*непосредственно следовать за ...*». Известными также считаются понятия множества, элемента множества и другие теоретико-множественные понятия, а также правила логики.

Целые неотрицательные числа будем обозначать малыми латинскими буквами: *a, b, c*... Нуль будем обозначать так: 0.

Число, непосредственно следующее за числом *a*, будем обозначать a'.

Запись $a = b$ означает, что буквами *a* и *b* обозначено одно и то же целое неотрицательное число. Запись $a \neq b$ означает, что буквами *a* и *b* обозначено разные целые неотрицательные числа.

Отношение «непосредственно следовать за …» удовлетворяет следующим аксиомам, предложенным в 1891 г. итальянским математиком и логиком Пеано:

Аксиома 1. *Нуль есть целое неотрицательное число, которое не следует ни за каким целым неотрицательным числом.*

Аксиома 2. *Для любого целого неотрицательного числа a существует одно и только одно непосредственно следующее за ним целое неотрицательное число* a'.

Аксиома 3. *Любое целое неотрицательное число непосредственно следует не более чем за одним целым неотрицательным числом.*

Аксиома 4 (аксиома индукции). *Всякое множество M целых неотрицательных чисел, которое содержит 0 (нуль) и которое вместе с каждым содержащимся в нём целым неотрицательным числом a содержит и непосредственно следующее за ним целое неотрицательное число* a', *совпадает с множеством* N_0.

Используя основное отношение и аксиомы 1–4, можно сформулировать следующее определение множества целых неотрицательных чисел.

Определение 1. *Множество* N_0, *для элементов которого установлено отношение «непосредственно следовать за ...», удовлетворяющее аксиомам 1–4, называется* ***множеством целых неотрицательных чисел.***

§3. *Простейшие следствия из аксиом Пеано*

Определение 1. *Если целое неотрицательное число b непосредственно следует за целым неотрицательным числом a, то число a называют* ***непосредственно предшествующим (предшествующим)*** *числу b.*

При помощи аксиом 1–4 установим свойства отношения «предшествовать», которые сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. *Нуль не имеет предшествующего числа.*

Справедливость этого утверждения вытекает из аксиомы 1.

Теорема 2. *Любое целое неотрицательное число a, отличное от нуля, имеет предшествующее число и притом единственное.*

Доказательство.

1. Докажем существование предшествующего числа для любого целого неотрицательного числа a, отличного от нуля.

Пусть M – множество целых неотрицательных чисел, которое содержит нуль и все целые неотрицательные числа a, каждое из которых имеет хотя бы одно предшествующее число.

Итак, по условию: $0 \in M$.

Пусть $a \in M$, покажем, что и $a' \in M$.

Число a' имеет предшествующее число a (так мы условились обозначать), поэтому $a' \in M$.

Значит, если $a \in M$, то и $a' \in M$.

Таким образом, по аксиоме 4 имеем: $M = N_0$. Следовательно, каждое целое неотрицательное число, кроме 0, имеет предшествующее целое неотрицательное число.

2. Докажем единственность предшествующего числа, используя метод доказательства от противного.

Предположим противное, т.е. предположим, что целое неотрицательное число a имеет два предшествующих числа b и c.

Тогда по аксиоме 3 имеем: $b' = a$ и $c' = a$.

Следовательно, $b' = c'$, а значит $b = c$. Получили противоречие с условием различия чисел b и c. Следовательно, сделанное предположение неверно, остается принять единственность предшествующего целого неотрицательного числа. Теорема доказана полностью.

Теорема 3. *Если последующие целые неотрицательные числа не равны, то не равны и предшествующие им целые неотрицательные числа, то есть если $a' \neq b'$, то и $a \neq b$.*

Доказательство.

Предположим противное, то есть предположим, что $a = b$. Тогда по аксиоме 2 и $a^{/} = b^{/}$. Получили противоречие с условием теоремы. Следовательно, $a \neq b$.

Теорема 4. *Если данные целые неотрицательные числа не равны, то не равны и их последующие целые неотрицательные числа, то есть если $a \neq b$, то и $a^{/} \neq b^{/}$.*

Доказательство.

Предположим противное, т. е. предположим, что $a^{/} = b^{/}$. Тогда по аксиоме 3 и $a = b$. Получили противоречие с условием теоремы. Следовательно, $a^{/} \neq b^{/}$.

Теорема 5. *Никакое целое неотрицательное число не равно своему предшествующему, то есть всегда выполняется неравенство $a^{/} \neq a$.*

Ведём обозначения: 0, $0^{/} = 1$, $1^{/} = 2$, $2^{/} =3$, $3^{/} = 4$, … Получим множество N_0={0, 1, 2, 3, 4, …}.

§4. *Метод математической индукции*

На четвертой аксиоме Пеано (аксиоме индукции) основывается метод доказательства, называемый ***методом математической индукции.*** В основе этого метода лежит следующая теорема, которую называют ***теоремой о законности индуктивных доказательств***.

Теорема. *Если утверждение $A(n)$ с целой неотрицательной переменной n истинно для $n = 0$ и из того, что утверждение $A(n)$ истинно для $n = k$ следует, что оно верно и для $n = k + 1$, то утверждение $A(n)$ верно для любого целого неотрицательного числа n.*

Доказательство.

Обозначим через M множество всех тех и только тех целых неотрицательных чисел, для которых утверждение $A(n)$ истинно. Тогда из условия теоремы имеем:

1) $0 \in M$;
2) $k \in M$, следовательно, $k + 1 = k^{/} \in M$.

Отсюда на основании аксиомы 4 заключаем, что $M = N_0$, т.е. утверждение $A(n)$ истинно для любого целого неотрицательного числа n.

Таким образом, доказательство методом математической индукции состоит из двух частей:

1) проверяют справедливость математического утверждения для $n = 0$, т.е. доказывают истинность высказывания $A(0)$.

2) предполагают, что утверждение $A(n)$ верно для некоторого натурального числа $n = k$, т.е. $A(k)$ – истинно, и доказывают, что это математическое утверждение верно для $n = k+1$, т.е. что $A(k + 1)$ – истинно.

После доказательства пунктов 1) и 2) на основании теоремы о законности индуктивных доказательств можно утверждать, что рассматриваемое математическое утверждение верно для любого целого неотрицательного числа.

Замечание 1. *Доказательство методом математической индукции можно начинать с подтверждения истинности утверждения с любого натурального числа* m; *в этом случае утверждение* $A(n)$ *будет доказано для всех натуральных чисел* $n \geq m$.

Замечание 2. *Метод математической индукции может быть использован для доказательства свойств чисел натурального ряда, к решению вопросов о делимости чисел, а также к решению разных задач.*

Пример 1. Доказать, что $(\forall n \in N)$: $(1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2)$.

Решение.

1) При $n = 1$ имеем: $1 = 1^2$. Следовательно, утверждение верно при $n = 1$, т.е. $A(1)$ – истинно.

2) Докажем, что $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Пусть k – любое натуральное число и пусть утверждение справедливо при $n = k$, т.е. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.

Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т.е. что

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

В самом деле:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) =$$
$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Итак, $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

На основании принципа математической индукции заключаем, что предположение $A(n)$ истинно для любого $n \in N$.

Пример 2. Доказать, что $(11^{n+2}+12^{2n+1})$ делится на 133 без остатка.

Решение.

1) Пусть $n = 1$, тогда

$$11^3 + 12^3 = (11 + 12)(11^2 - 132 + 12^2) = 23 \cdot 133.$$

Но $(23 \cdot 133)$ делится на 133 без остатка, значит при n=1 утверждение верно. Следовательно, $A(1)$ - истинно.

2) Предположим, что $(11^{k+2} + 12^{2k+1})$ делится на 133 без остатка.

Докажем, что в таком случае $(11^{k+3} + 12^{2k+3})$ делится на 133 без остатка. В самом деле:

$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} =$

$= 11 \cdot 11^{k+2} + (11 + 133) \cdot 12^{2k+1} = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}$.

Полученная сумма делится на 133 без остатка, так как первое её слагаемое делится на 133 без остатка по предположению, а во втором одним из множителей выступает 133.

Итак, $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

В силу метода математической индукции утверждение доказано.

Пример 4. *Доказать, что при n > 6 справедливо неравенство*

$$3^n > n \cdot 2^{n+1}.$$

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\left(\frac{3}{2}\right)^n > 2n$.

1) При $n = 7$ имеем: $\frac{3^7}{2^7} = \frac{2187}{128} > 14 = 2 \cdot 7$– неравенство верно.

2) Предположим, что неравенство справедливо при $n = k$, то есть $\left(\frac{3}{2}\right)^k > 2k$. Докажем верность неравенства при $n = k + 1$.

Имеем:

$$\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{3^k}{2^k} \cdot \frac{3}{2} > 2k \cdot \frac{3}{2} = 3k > 2(k+1).$$

Так как k > 7, последнее неравенство очевидно.

В силу метода математической индукции неравенство справедливо для любого натурального n.

§5. *Операция сложения целых неотрицательных чисел*

Определение 1. ***Алгебраической операцией****, заданной на непустом множестве M, называют правило, которое позволяет любым двум элементам a и b из множества M, взятым в определенном порядке, поставить в соответствие элемент c, принадлежащий множеству M.*

Определение 2. ***Сложением*** *целых неотрицательных чисел называется алгебраическая операция, определенная на множестве всех целых неотрицательных чисел N_0 и обладающая следующими свойствами:*

1) $(\forall a \in N_0):(a + 0 = a)$;

2) $(\forall a,b \in N_0):(a+b' = (a+b)')$.

Число a + b называют ***суммой*** *чисел a и b, а сами числа a и b –* ***слагаемыми****.*

Теорема. *Сложение целых неотрицательных чисел существует и единственно.*

Доказательство.

I. Докажем единственность операции сложения, предполагая её существование.

Предположим, что во множестве N_0 существуют две операции сложения, обладающие свойствами 1и 2 из определения 2. Одну из них обозначим +, а другую – ⊕. Тогда для этих операций имеем:

1) $a + 0 = a$;	1) $a \oplus 0 = a$;
2) $a + b' = (a + b)'$.	2) $a \oplus b' = (a \oplus b)'$.

Докажем, что

$$(\forall a,b \in N_0):(a+b = a \oplus b) \tag{1}$$

Доказательство будем вести индукцией по b, зафиксировав a.

Обозначим через M – множество всех тех и только тех целых неотрицательных чисел b, для которых равенство (1) выполняется.

Покажем, что $M = N_0$.

1. Пусть $b = 0$. Докажем, что $(\forall a,b \in N_0):(a+0 = a \oplus 0)$.

Действительно, $a + 0 = a$ и $a \oplus 0 = a$ по свойству 1) определения сложения.

Следовательно, $\underline{0 \in M}$.

3. Пусть $\underline{b \in M}$. Тогда, $a + b = a \oplus b$. Докажем, что и $b' \in M$, т.е. докажем, что $a + b' = a \oplus b'$. Действительно,

$$a + b' = (a + b)' = (a \oplus b)' = a \oplus b'.$$

Значит, и $\underline{b' \in M}$.

Таким образом, по аксиоме 4 Пеано, $M = N_0$.

Итак, при выбранном a равенство (1) выполняется для всех целых неотрицательных чисел b. А т.к. число a было выбрано произвольно, то равенство (1) выполняется для любых целых неотрицательных чисел a и b, т.е. операции + и ⊕ совпадают.

II. Докажем, что для любых целых неотрицательных чисел a и b, можно указать такое правило, что будут выполняться аксиомы 1) и 2) определения 2.

Доказательство проведем индукцией по a.

Пусть M – множество всех тех и только тех целых неотрицательных чисел a, для которых при любом b операция сложения существует. Докажем, что $M = N_0$.

1. Если $a = 0$, то при любом значении числа b сложение можно производить по правилу:

$$0 + b = b. \qquad (2)$$

Покажем, что правило (2) удовлетворяет свойствам 1) и 2) определения 2.

1) $0 + 0 =$ *(по правилу (2))* $= 0$, т.е. выполняется свойство 1) определения сложения.
2) $0 + b' =$*(по правилу (2))* $= b' =$*(по свойству 1)определения сложения)* $= (0 + b)'$, т.е. выполняется равенство 2) определения сложения.

Из 1) – 2) следует, что <u>$0 \in M$.</u>

2. Предположим теперь, что $a \in M$**,** т.е. для любого a существует сложение, удовлетворяющее свойствам 1) и 2) определения сложения. Покажем, что операция сложения существует и для числа a', т.е. что, $a' \in M$.

Определим правило сложения числа a' и любого числа b так, чтобы выполнялись условия 1) и 2) определения 1 формулой:

$$a' + b = (a + b)'. \qquad (3)$$

Покажем, что правило (3) удовлетворяет определению сложения. Проверим выполнимость условий 1) и 2) определения сложения. По правилу (3) имеем:

1) $a' + 0 = (a+0)' = a'$,

2) $a' + b' = (a + b')' = ((a + b)')' = (a' + b)'$.

Значит, правило (3) определяет операцию сложения для числа a' и любого b.

Итак, $0 \in M$ и вместе с каждым числом a в M содержится и число a'. По аксиоме 4 Пеано заключаем, что $M = N_0$.

Таким образом, существует правило, которое позволяет для любых двух целых неотрицательных чисел a и b однозначно найти такое целое неотрицательное число $a + b$, что выполняются свойства 1) и 2), сформулированные в определении сложения.

Теорема доказана полностью.

Следствие 1. $(\forall b \in N_0)\colon 0 + b = b + 0 = b$.

Следствие 2. $(\forall a, b \in N_0)\colon a + b' = a' + b$.

Из определения сложения целых неотрицательных чисел, теоремы и следствий можно вывести хорошо известную **таблицу сложения однозначных чисел.**

По определению сложения:

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

$0 + 2 = 2$ и т.д.

$1 + 1 = 1' = 2$
$1 + 2 = 1 + 1' = (1 + 1)' = 2' = 3$
$1 + 3 = 1 + 2' = (1 + 2)' = 3' = 4$ и т.д.
Аналогично:
$4 + 1 = 4' = 5$
$4 + 2 = 4 + 1' = (4 + 1)' = 5' = 6$
$4 + 3 = 4 + 2' = (4 + 2)' = 6' = 7$

§6. *Законы сложения целых неотрицательных чисел*

Теорема 1. (*коммутативность сложения*)

$$(\forall a, b \in N_0):(a + b = b + a). \qquad (1)$$

Доказательство.

Доказательство проведём индукцией по a. Фиксируем b.

Пусть M – множество всех тех и только тех чисел a, для которых теорема верна, т.е. выполняется равенство (1).

Пусть $a = 0$. По следствию из теоремы существования и единственности $0 + b = b + 0$. Следовательно, для $a = 0$ равенство (1) выполняется. Значит, $\underline{0 \in M}$.

Предположим, что $a \in M$, т.е. что $a + b = b + a$ – верно. Докажем, что $a' \in M$.

Действительно, $a' + b$*=(по следствию 2)=*$(a + b)'$*=(по индуктивному предположению)=* $(b + a)'$*=(по следствию 2)=*$b + a'$.

Следовательно, равенство (1) справедливо для $a' \Rightarrow a' \in M$.

Итак, $0 \in M$ и вместе с каждым числом a в M содержится и число a'. По аксиоме 4 Пеано заключаем, что $M = N_0$.

Теорема 2. (*ассоциативность сложения*)

$$(\forall a, b, c \in N_0):((a + b) + c = a + (b + c)).$$

Доказательство.

Пусть целые неотрицательные числа a и b выбраны произвольно, а число c принимает различные значения.

Обозначим через M множество тех и только тех целых неотрицательных чисел c, для которых равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$ верно. Докажем, что $M = N_0$.

При $c = 0$ имеем: $(a + b) + 0 = a + b = a + (b + 0)$.

Предположим, что $c \in M$, т.е. верно равенство

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Исходя из этого предположения докажем, что и $c' \in M$, т.е. докажем истинность равенства $(a + b) + c' = a + (b + c')$.

Действительно,
$(a + b) + c' =$ *(по определению сложения)* $= ((a + b) + c)' =$ *(по индуктивному предположению)* $= (a + (b + c))' =$ *(по определению сложения)* $= a + (b + c)' =$ *(по определению сложения)* $= a + (b + c')$.

Итак, мы показали, что множество M содержит 0 и из того, что $c \in M$ следует, что и $c' \in M$. Согласно аксиоме индукции: $M = N_0$, т.е. доказываемое равенство истинно для любого целого неотрицательного числа c, а поскольку числа a и b выбирались произвольно, то оно истинно для любых $a, b \in N_0$.

§7. *Аксиоматическое определение умножения целых неотрицательных чисел*

Определение 1. ***Умножением*** *целых неотрицательных чисел называется алгебраическая операция, определенная на множестве всех целых неотрицательных чисел* N_0 *и обладающая следующими свойствами:*

1) $(\forall a \in N_0):(a \cdot 0 = 0)$;

2) $(\forall a, b \in N_0):(a \cdot b' = ab + a)$.

Число $a \cdot b$ *называют* ***произведением*** *чисел* a *и* b, *а сами числа* a *и* b - ***сомножителями***.

Теорема. *Умножение целых неотрицательных чисел существует и единственно.*

Доказательство.

1. Докажем единственность. Пусть во множестве N_0 существует две операции умножения, которые обозначим символами $\cdot$ и $\odot$. Покажем, что

$$(\forall a, b \in N_0): (a \cdot b = a \odot b) \qquad (1)$$

Доказательство будем вести индукцией по b. Фиксируем a.

Пусть M – множество всех тех и только тех чисел b, для которых теорема верна, т.е. выполняется равенство (1).

Покажем, что $M = N_0$.

На основании определения операции умножения целых неотрицательных чисел $a \cdot 0 = 0$ и $a \odot 0 = 0$. Итак, для $b=0$ результаты операций $\cdot$ и $\odot$ совпадают, т.е. равенство (1) для $b=0$ выполняется. Поэтому <u>$0 \in M$.</u>

Пусть <u>$b \in M$</u>, т.е. $a \cdot b = a \odot b$ - верно. Покажем, что $b' \in M$, т.е. что $a \cdot b' = a \odot b'$.

Действительно, $a \cdot b' =$(*акс.2 определения умножения*)$= a \cdot b + a =$*(индуктивное предположение)*$= a \odot b + a =$(*акс.2 определения умножения*)$= a \odot b'$.

Итак, $a \cdot b' = a \odot b'$. Следовательно, $\underline{b' \in M}$. По аксиоме 4 Пеано заключаем, что $M = N_0$. Так как число a было выбрано произвольно, то равенство (1) выполняется для любых целых неотрицательных чисел a и b, т.е. операции $\cdot$ и $\odot$ совпадают.

2. Докажем существование во множестве N_0 операции умножения, т.е. докажем, что для любых $a, b \in N_0$ можно указать такое правило**,** что будут выполняться аксиомы 1 и 2 определения умножения.

Доказательство будем вести индукцией по a. Фиксируем b.

Пусть M – множество всех тех и только тех целых неотрицательных чисел a, для которых при любом b операция сложения существует. Докажем, что $M = N_0$.

Если $a = 0$, то при любом значении числа b умножение можно производить по правилу:

$$0 \cdot b = 0. \tag{2}$$

Покажем, что правило (2) удовлетворяет свойствам 1) и 2) определения умножения.

1) $0 \cdot 0 =$ *(по правилу (2))* $= 0$, т.е. выполняется свойство 1) определения умножения.

2) $0 \cdot b' =$ *(по правилу (2))* $= 0 =$ *(акс.1 определения сложения)* $=0+0=$ $=$ *(по правилу (2))* $= 0 \cdot b+0$, т.е. выполняется равенство 2) определения умножения.

Из 1) – 2) следует, что $\underline{0 \in M}$.

Предположим теперь, что $a \in M$**,** т.е. для любого a существует умножение, удовлетворяющее свойствам 1) и 2) определения умножения. Покажем, что операция умножения существует и для числа a', т.е. что, $a' \in M$.

Определим правило умножения числа a' и любого числа b так, чтобы выполнялись условия 1) и 2) определения умножения формулой:

$$a' \cdot b = a \cdot b + b\,. \tag{3}$$

Покажем, что правило (3) удовлетворяет определению умножения. Проверим выполнимость условий 1) и 2) определения умножения. По правилу (3) имеем:

1) $a' \cdot 0 =$ *(по правилу(3))* $= a \cdot 0+0 =$ *(акс.1 определения сложения)* $=$ $= a \cdot 0 = 0,$

2) по правилу (3) свойствам 1) и 2) определения сложения , коммутативному и ассоциативному законам сложения имеем:

$a' \cdot b' = a \cdot b' + b' = (a \cdot b + a) + b' = a \cdot b + (a + b') = a \cdot b + (a + b)' = a \cdot b +$ $+ (b + a)' = a \cdot b + (b + a') = (a \cdot b + b) + a' = a' \cdot b + a'.$

Итак, $a' \cdot b' = a' \cdot b + a'$. Следовательно, аксиома 2 определения умножения выполняется. Значит, правило (3) определяет операцию умножения для числа a' и любого b.

Итак, $0 \in M$ и вместе с каждым числом a в M содержится и число a'. По аксиоме 4 Пеано заключаем, что $M = N_0$.

Таким образом, существует правило, которое позволяет для любых двух целых неотрицательных чисел a и b однозначно найти такое целое неотрицательное число $a \cdot b$, что выполняются свойства 1) и 2), сформулированные в определении умножения.
Теорема доказана полностью.

Следствие 1. $0 \cdot b = b \cdot 0 = 0.$

Следствие 2. $a' \cdot b' = a' \cdot b + a' = a \cdot b' + b'.$

Используя определение умножения, теорему о существовании и единственности произведения целых неотрицательных чисел можно вывести **таблицу умножения натуральных однозначных чисел**.

Сначала рассматриваем умножение на 0 и пользуемся при этом свойством 1) определения умножения:

$0 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$2 \cdot 0 = 0$ и т.д.

Рассматриваем умножение на 1, пользуясь при этом свойством 2) определения умножения:

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 1 = 1 \cdot 0' = 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

$2 \cdot 1 = 2 \cdot 0' = 2 \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$

и т.д.

Рассмотрим теперь умножение на 2:

$1 \cdot 2 = 1 \cdot 1' = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2$

$2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$

и т.д.

Аналогично на 3:

$1 \cdot 3 = 1 \cdot 2' = 1 \cdot 2 + 1 = 2 + 1 = 3$

$2 \cdot 3 = 2 \cdot 2' = 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2 = 6$

и т.д.

Замечание. $a \cdot 1 = a \cdot 0' = a \cdot 0 + a = 0 + a = a$, т.е.

$$(\forall a \in N_0): a \cdot 1 = a$$

§8. *Законы умножения целых неотрицательных чисел*

Теорема 1. (*коммутативность умножения*)

$$(\forall a, b \in N_0):(a \cdot b = b \cdot a). \qquad (1)$$

Доказательство.

Доказательство проведём индукцией по a. Фиксируем b.

Пусть M – множество всех тех и только тех чисел a, для которых теорема верна, т.е. выполняется равенство (1). Докажем, что $M = N_0$.

Пусть $a = 0$. По следствию из теоремы существования и единственности $0 \cdot b = b \cdot 0$. Следовательно, для $a = 0$ равенство (1) выполняется. Значит, $\underline{0 \in M}$.

Предположим, что $a \in M$, т.е. что $a \cdot b = b \cdot a$ – верно. Докажем, что $a' \in M$.

Действительно, $a' \cdot b$=*(по следствию 2)*=$a\cdot b + b$=*(по индуктивному предположению)*= $b\cdot a + b$=*(по следствию 2)*=$b \cdot a'$.

Следовательно, равенство (1) справедливо для $a' \Rightarrow a' \in M$.

Итак, $0 \in M$ и вместе с каждым числом a в M содержится и число a'. По аксиоме 4 Пеано заключаем, что $M = N_0$. Так как b фиксировалось произвольно, то можно утверждать, что теорема верна для любых $a, b \in N_0$.

Теорема 2. (*дистрибутивность умножения*)

правый дистрибутивный закон:

$$(\forall a, b,c \in N_0): ((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c), \qquad (2)$$

левый дистрибутивный закон:

$$(\forall a, b,c \in N_0): (c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b).$$

Доказательство.

Пусть целые неотрицательные числа a и b выбраны произвольно, а число c принимает различные значения.

Обозначим через M множество тех и только тех целых неотрицательных чисел c, для которых равенство $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ верно. Докажем, что $M = N_0$.

Пусть $c = 0$, тогда $(a + b) \cdot 0 = 0=0+0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$. Следовательно, для $c = 0$ равенство (2) выполняется. Значит, $\underline{0 \in M}$.

Предположим, что $c \in M$, т.е. верно равенство $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. Исходя из этого предположения докажем, что и $c' \in M$, т.е. докажем истинность равенства $(a + b) \cdot c' = a \cdot c' + b \cdot c'$.

Действительно:

$(a + b) \cdot c'$ = *(по определению умножения)* = $(a + b) \cdot c + (a + b)$ = = *(по индуктивному предположению)* = $(a \cdot c + b \cdot c) + (a + b)$ = *(по свойству ассоциативности сложения)* = $(a \cdot c + b \cdot c + a) + b$ = *(по свойству коммутативности сложения)* = $(a \cdot c + a + b \cdot c) + b$ = *(по свойству ассоциативности сложения)* = $(a \cdot c + a) + (b \cdot c + b)$ = *(по определению умножения)* = $a \cdot c' + b \cdot c'$.

Итак, мы показали, что множество M содержит нуль и из того, что $\underline{c \in M}$ следует, что и $\underline{c' \in M}$. Согласно аксиоме индукции: $M = N_0$, т.е. доказываемое равенство истинно для любого целого неотрицательного числа c, а поскольку числа a и b выбирались произвольно, то оно истинно для любых $a, b \in N_0$.

Теорема 3. (*ассоциативность умножения*)

$$(\forall a, b, c \in N_0): ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)). \qquad (3)$$

Доказательство.

Доказательство будем вести индукцией по c. Пусть целые неотрицательные числа a и b выбраны произвольно, а число c принимает различные значения.

Обозначим через M множество тех и только тех целых неотрицательных чисел c, для которых равенство (3) верно.

Докажем, что $M = N_0$.

При $c = 0$ имеем: $(a \cdot b) \cdot 0 = 0 = a \cdot 0 = a \cdot (b \cdot 0)$. Следовательно, для $c = 0$ равенство (3) выполняется. Значит, $\underline{0 \in M}$.

Предположим, что $c \in M$, т.е. верно равенство $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Исходя из этого предположения докажем, что и $c' \in M$, т.е. докажем истинность равенства $(a \cdot b) \cdot c' = a \cdot (b \cdot c')$.

Действительно,
$(a \cdot b) \cdot c' =$ *(по определению умножения)* $= (a \cdot b) \cdot c + a \cdot b =$ *(по индуктивному предположению)* $= a \cdot (b \cdot c) + a \cdot b =$ *(по дистрибутивному закону)* $= a \cdot (b \cdot c + b) =$ *(по определению умножения)* $= a \cdot (b \cdot c')$.

Итак, мы показали, что множество M содержит нуль и из того, что $\underline{c \in M}$ следует, что и $\underline{c' \in M}$. Согласно аксиоме индукции: $M = N_0$, т.е. доказываемое равенство истинно для любого целого неотрицательного числа c, а поскольку числа a и b выбирались произвольно, то оно истинно для любых $a, b \in N_0$.

§9. *Отношение порядка на множестве целых неотрицательных чисел. Дискретность множества N_0*

Введём на множестве N_0 отношение порядка. Пусть a и b – целые неотрицательные числа.

Определение 1. *Число a* ***меньше*** *числа b тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число k, что выполняется равенство $b = a + k$.*

Символически пишут: $a < b$. Если $a < b$, то говорят также, что b больше a и пишут $b > a$.

Из определения 1 следует, что

$$(\forall a, b \in N_0)\ (\exists k \in N):\ (a < b \ \Leftrightarrow a = b + k).$$

Теорема 1 *(свойство связанности). Для любых целых неотрицательных чисел a и b имеет место только одно из следующих соотношений: $a = b$, $a > b$, $a < b$.*

Теорема 2 (*свойство транзитивности*). *Если $a < b$, $b < c$, то $a < c$.*

Доказательство.

По условию $a < b$ и $b < c$, значит по определению отношения «меньше» найдутся такие натуральные числа k и l, что

$$b = a + k \quad \text{и} \quad c = b + l.$$

Тогда $c = b + l = (a + k) + l = a + (k + l)$.

Но сумма $k + l$ – натуральное число, следовательно, согласно определению отношения «меньше», $a < c$.

Следствие. *Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$.*

Замечание. *Из теоремы 1 следует, что отношение «меньше» («больше») антирефлексивно и антисимметрично. Из теоремы 2 следует, что отношение «меньше» («больше») транзитивно. Следовательно, отношение «меньше» («больше») является отношением строгого порядка, а множество N_0 с заданным на нём отношением порядка является упорядоченным множеством.*

Определение 2. *Упорядоченное множество называется **плотным**, если, взяв любые два его элемента, можно указать для них, по крайней мере, один промежуточный элемент того же множества.*

Определение 3. *Множество называют **дискретным** (прерывным), если не у всяких двух его элементов имеется промежуточный элемент того же множества.*

Примером плотного множества может служить множество точек отрезка прямой, множество R всех действительных чисел. Множество N_0 – дискретно, так как, например, между числами 2 и 3 нельзя найти промежуточного числа, принадлежащего N_0 .

Свойства отношения «меньше»

Теорема 4. *Из всех натуральных чисел единица является наименьшим числом, т.е. $(\forall a \in N):(1 < a)$.*

Доказательство.

Рассмотрим некоторое натуральное число a. Возможны только 2 случая: $a = 1$ и $a \neq 1$.

Если $a \neq 1$, то существует натуральное число b, за которым следует число a, т.е. $a = b^{/} = b + 1 = 1 + b$, а значит по определению отношения «меньше» $1 < a$.

Получили, что любое натуральное число либо равно 1, либо больше единицы, а значит, возможен вывод: единица – наименьшее натуральное число.

Теорема 5. $(\forall a,b,c \in N):(a = b \Leftrightarrow a + c = b + c \wedge a \cdot c = b \cdot c)$.

$(\forall a,b,c \in N):(a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \wedge a \cdot c < b \cdot c)$.

$(\forall a,b,c \in N):(a > b \Leftrightarrow a + c > b + c \wedge a \cdot c > b \cdot c)$.

Теорема 6. $(\forall a,b \in N):(\exists n \in N):(nb > a)$

Теоремы 5 и 6 доказываются с помощью определения 1. Читателю предлагается самостоятельно провести доказательство этих теорем.

Из рассмотренных свойств отношения «меньше» вытекают важные особенности множества натуральных чисел, которые мы приведем без доказательства.

1. Свойство дискретности. *Ни для одного натурального числа a не существует такого натурального числа n, чтобы выполнялось неравенство:* $a < n < a + 1$.

2. *Любое натуральное подмножество множества натуральных чисел N содержит наименьшее число.*

3. *Если M – непустое подмножество множества натуральных чисел N и существует такое число b, что для всех x из множества M выполняется неравенство x < b, то во множестве M есть наибольшее число.*

§10. *Вычитание целых неотрицательных чисел*

Определение 1. ***Вычитанием*** *целых неотрицательных чисел a и b называется операция, обратная сложению, т.е. такое соответствие, при котором целым неотрицательным числам a и b сопоставляется число c = a – b, называемое разностью, такое, что b + c = a.*

Число a называют ***уменьшаемым****, а число b –* ***вычитаемым****.*

Теорема. *Разность во множестве целых неотрицательных чисел существует тогда и только тогда, когда* $b \leq a$. *Если разность целых неотрицательных чисел существует, то она единственна.*

Доказательство.

Пусть разность $a - b$ существует. Тогда, по определению разности, найдется такое целое неотрицательное число c, что выполняется равенство $b + c = a$. А это значит, что $b \leq a$.

Если же $b \leq a$, то существует такое целое неотрицательное число c, что $b + c = a$. Тогда по определению разности $c = a - b$, т.е. разность $a - b$ существует.

Докажем теперь единственность.

Предположим противное, т.е. предположим, что существуют две различные разности чисел a и b:

$$c_1 = a - b \text{ и } c_2 = a - b, \text{ причем } c_1 \neq c_2.$$

Тогда по определению разности имеем: $b + c_1 = a$ и $b + c_2 = a$. А значит $b + c_1 = b + c_2$. Следовательно, $c_1 = c_2$. Пришли к противоречию. Значит, сделанное предположение неверно. Остается принять, что теорема верна.

С помощью данного определения разности можно доказать используемые уже в начальной школе правила, связывающие сложение и вычитание натуральных чисел.

Правило вычитания числа из суммы. Чтобы вычесть из суммы число, достаточно вычесть это число из одного из слагаемых и к полученному результату прибавить другое слагаемое.

Правило вычитания суммы из числа. Чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим.

Правило вычитания числа из разности. Чтобы из разности двух чисел вычесть третье число, достаточно из уменьшаемого вычесть сумму двух других чисел.

Правило вычитания разности из числа. Чтобы вычесть из числа a разность двух чисел b и c, достаточно к данному числу a прибавить вычитаемое c и из полученного результата вычесть уменьшаемое b. При $a > b$ можно вычесть из числа a уменьшаемое b и к полученному результату прибавить вычитаемое c.

Правило прибавления разности к числу. Чтобы прибавить к числу a разность $b - c$, достаточно прибавить к a уменьшаемое b и из полученного результата вычесть число c или из данного числа a вычесть c и к полученному результату прибавить b.

§11. *Деление целых неотрицательных чисел*

Определение 1. ***Делением*** *целого неотрицательного числа a на натуральное число b называется алгебраическая операция, обратная умножению, т.е. такое соответствие, при котором целому неотрицательному числу a и натуральному числу b сопоставляется целое неотрицательное число c = a : b, называемое их частным, такое, что* $b \cdot c = a$.

Число a называется ***делимым****, число b –* ***делителем****.*

Теорема 1. *Для того чтобы существовало частное от деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b, необходимо чтобы* $b \le a$.

Доказательство.

Пусть частное чисел a и b есть натуральное число c.

Тогда $b \cdot c = a$. Так как для любого натурального числа c справедливо неравенство $1 \le c$, то умножив обе его части на натуральное число b , получим: $b \le b \cdot c$, т.е. $b \le a$.

Теорема 2. *Если частное натуральных чисел существует, то оно единственно.*

Доказательство.

Предположим противное, т.е. предположим, что существуют два различных частных чисел a и b: $c_1 = a : b$ и $c_2 = a : b$, причем $c_1 \neq c_2$.

Тогда по определению частного имеем: $b \cdot c_1 = a$ и $b \cdot c_2 = a$. А значит $b \cdot c_1 = b \cdot c_2$. Следовательно, $c_1 = c_2$. Пришли к противоречию. Значит, сделанное предположение неверно. Остается принять, что теорема верна.

Отметим следующие свойства деления натуральных чисел.

Правило деления суммы на число. Если частные натуральных чисел a и c, b и c существуют, то частное, получаемое при делении суммы $a + b$ на число c, равно сумме частных, получаемых при делении a на c и b на c.

Правило деления разности на число. Если частные натуральных чисел a и c, b и c существуют и $a > b$, то частное, получаемое при делении разности $a - b$ на число c, равно разности частных, получаемых при делении a на c и b на c.

Правило деления произведения на число. Если частное натуральных чисел a и c существует, то частное, получаемое при делении произведения ab (где b – любое натуральное число) на число c, равно произведению частного, получаемого при делении a на c и числа b.

Теорема 3. *Деление на нуль невозможно.*

Доказательство.

Пусть дано целое неотрицательное число a и число $b = 0$. Рассмотрим все возможные случаи.

Пусть $\underline{a \neq 0}$. Предположим, что $a \vdots b$, т.е. $a \vdots 0$. Тогда по определению деления: $(\exists\, c \in N_0) : (a = c \cdot 0)$. Но тогда, a должно равняться нулю. Получили противоречие, следовательно, сделанное предположение неверно.

Остаётся принять, что частное чисел $a \neq 0$ и $b = 0$ не существует.

Пусть теперь $\underline{a = 0.}$ Предположим опять, что частное чисел a и b существует, т.е. $(\exists\, c \in N_0) : (0 = c \cdot 0)$.

Последнее равенство истинно при любых значениях c. Таким образом, частным чисел $a = 0$ и $b = 0$ может быть любое целое неотрицательное число с, но тогда результат деления определяется неоднозначно. Поэтому в математике считают, что деление нуля на нуль не определено.

Рассматривая деление на множестве целых неотрицательных чисел, мы имеем в виду деление *нацело*, т.е. такое деление, при котором частное также является целым неотрицательным числом. Но такое частное существует не всегда. Например, нельзя нацело разделить *31* на *9*. Но существуют числа *3* и *4* такие, что $31 = 9 \cdot 3 + 4$. Говорят, что можно разделить *31* на *9* с остатком.

Определение. *Разделить с остатком целое неотрицательное число a на натуральное число b – значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что* $a = b \cdot q + r$; *причём* $0 \leq r < b$. *Число q называется* ***неполным частным****, а число r –* ***остатком****.*

Замечание. *Очевидно, что* $r = 0$ *в том случае, если частное чисел a и b существует. При* $a < b$ *имеем:* $q = 0$ *и* $r = a$.

Теорема. *Если число a не делится на число b, то существуют и притом единственные целые неотрицательные числа q и r, такие что выполняются условия: $a = b \cdot q + r$ и $0 \leq r < b$.*

Доказательство.

1. *Докажем существование.*

Обозначим через M множество целых неотрицательных чисел, которые делятся на b, но не превосходят a, т.е. $M = \{x \mid x = by, x \leq a\}$.

Так как для всех чисел из этого множества выполняется неравенство

$$x < a + 1,$$

то во множестве M есть наибольшее число, которое обозначим x_0.

Это число имеет вид: $x_0 = b \cdot q$, причем число $b \cdot (q + 1)$ уже не принадлежит M и поэтому $b \cdot (q + 1) > a$.

Итак, найдено число q такое, что $b \cdot q \leq a < b \cdot (q + 1)$. Отсюда следует, что $0 \leq a - b \cdot q < b$.

Если обозначить $a - b \cdot q = r$, то $a = b \cdot q + r$ и $0 \leq r < b$.

Это означает, что q – неполное частное, а r – остаток при делении числа a на число b.

2. *Докажем единственность.*

Предположим, что:

$$a = b \cdot q_1 + r_1 \text{ и } 0 \leq r_1 < b$$

и

$$a = b \cdot q_2 + r_2 \text{ и } 0 \leq r_2 < b.$$

Кроме того, предположим, что, например, $r_2 < r_1$.
Тогда $b \cdot q_1 + r_1 = b \cdot q_2 + r_2$, поэтому $r_1 - r_2 = b \cdot (q_2 - q_1)$.

Поскольку $0 \leq r_2 < r_1 < b$, то $r_1 - r_2 < b$. Но с другой стороны, $r_1 - r_2 = b \cdot (q_2 - q_1)$ и поэтому делится на b.

Пришли к противоречию, т.к. натуральное число, меньшее, чем b, не может делиться на b.

Следовательно, теорема и в этом случае верна – деление с остатком однозначно определено.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

6.1. Докажите с помощью метода математической индукции следующие равенства:

1) $(\forall n \in N)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $(\forall n \in N)$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

3) $(\forall n \in N)$: $-1 + 3 - 5 + \ldots + (-1)^n \cdot (2n - 1) = (-1)^n \cdot n$;

4) $(\forall n \in N)$: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

5) $(\forall n \in N)$: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

6) $(\forall n \in N)$: $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$;

7) $(\forall n \in N)$: $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$;

8) $(\forall n \in N)$: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

9) $(\forall n \in N)$: $\dfrac{1}{a(a+1)} + \dfrac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \dfrac{n}{a(a+n)}$;

10) $(\forall n \in N)$: $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$;

11) $(\forall n \in N)$: $\dfrac{0}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{n-1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{n!}$.

12) $(\forall n \in N)$: $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

6.2. Доказать, что при любом натуральном *n* число
1) $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ делится на 3;
2) $a_n = n^3 + 5n$ делится на 6;
3) $a_n = n^3 - n$ делится на 3;
4) $a_n = 11^{6n+3} + 1$ делится на 148;
5) $a_n = 7^{2n} - 4^{2n}$ делится на 33;
6) $a_n = 9^{n+1} - 18n - 9$ делится на 18;
7) $a_n = 5^{n+3} + 11^{3n+1}$ делится на 17;
8) $a_n = 3^{2n+1} + 40n - 67$ делится на 64.

6.3. Используя аксиоматическое определение операции сложения целых неотрицательных чисел, найти следующие суммы:
1) 3 + 4; 2) 6 + 5; 3) 2 + 7; 4) 4 + 3.

6.4. Примените законы сложения и вычислите результат; каждый случай использования законов объясните:
1) 7091 + (1819 + 509); 2) (9073 + 1329) + 2671;
2) 386 + 287+213 +564; 4) 3057+1561+1513+829+2564.

6.5. Используя аксиоматическое определение операции умножения целых неотрицательных чисел, найдите значение выражений:
1) 3·2; 2) 1·4; 3) 2·5; 4) 5·2; 5) 4·1; 6) 2·3.

6.6. Какие законы умножения могут быть использованы при нахождении значений следующих выражений:

1) 5·(10+4); 2) 125·15·6; 3) (8·379)·125 4) 16·13+4·8.

6.7. Используя аксиоматическое определение отношения «меньше», докажите, что оно транзитивно.

6.8. Докажите, что если *a, b, c* – натуральные числа, то $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

6.9. Докажите, что
1) если $b > c$, то $(a + b) - c = a + (b - c)$;
2) если $a > b + c$, то $a - (b + c) = (a - b) - c$.

6.10. Опишите возможные способы вычисления выражения вида $a - b - c$ и проиллюстрируйте их на конкретных примерах.
6.11. Докажите, что при $b < a$ и любых натуральных c верно равенство $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$. (Указание: доказательство основывается на аксиоме 4 Пеано)

6.12. Докажите, что если числа a и b делятся на c и $a > b$, то $(a - b){:}\, c = a{:}\, c - b{:}\, c$.

6.13. Найдите значение выражения рациональным способом; свои действия обоснуйте:
1) (7·63) : 7; 2) (3·4·5) : 15; 3) (15·18) : (5·6); 4)(12·21) : 14.

6.14. Не выполняя деления углом, найдите наиболее рациональным способом частное; выбранный способ обоснуйте:
1) 954 : 18; 2) 882 : 18; 3) 480 : 32; 4) 425 : 85; 5) 225 : 9; 6) 455 : 65.

6.15. Опишите возможные способы вычисления выражения вида $(a \cdot b){:}\, c$. Предложенные способы проиллюстрируйте на примерах.

6.16. Пользуясь определением деления с остатком, разделите 37 на 5; 32 на 7; 83 на 4. Выполните соответствующие записи.

Образец контрольной работы по теме

1) Докажите с помощью метода математической индукции следующее утверждение:
$$(\forall n \in N):\ \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$
2) Доказать, что сумма кубов любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

3) Используя аксиоматическое определение операции сложения целых неотрицательных чисел, найти сумму 5+6.
4) Используя аксиоматическое определение операции умножения целых неотрицательных чисел, найдите значение $3 \cdot 7$.
5) Опишите возможные способы вычисления выражения вида $(a + b) : c$. Предложенные способы проиллюстрируйте на примерах.

ТЕМА 7.
ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§1. *Счёт. Порядковые и количественные натуральные числа*

Одно из важнейших применений натуральных чисел в практической деятельности – это счёт предметов. В чём сущность счёта? Рассмотрим, как считает ребёнок свои камешки. Он перекладывает камешек в другое место и говорит «раз», перекладывает следующий из оставшихся и говорит «два» и так далее, пока не переложит все. Последнее названное число и есть результат счёта. Само перекладывание к сущности счёта не относится, а лишь облегчает его. Можно просто указывать на считаемые предметы или отмечать их каким-либо образом. Важно, однако, при счёте соблюдать следующие требования:

1) первому отмеченному предмету ставится в соответствие число 1;
2) каждый раз отмечается предмет, ещё не отмеченный ранее, и ему ставится в соответствие число, следующее за последним из названных;
3) после окончания счёта каждому из сосчитанных предметов будет поставлено в соответствие одно число, двум разным предметам будут соответствовать разные числа, и числа, использованные при счёте, следуют одно за другим без пропусков, т.е. образуют некоторый отрезок натурального ряда.

Итак, сущность счёта заключается в установлении взаимно однозначного соответствия между множествами, подлежащими счёту, и некоторым отрезком натурального ряда. Процесс счёта закончится тогда и только тогда, когда считаемое множество конечно.

Введём точное определение отрезка натурального ряда и рассмотрим его свойства.

Определение 1. ***Отрезком*** N_a *натурального ряда называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа а.*

Например, $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Из определения 1 следует, что $N_a = \{b \in N:\ b \le a\}$.
Отрезки натурального ряда обладают рядом свойств.

Свойство 1. $(\forall a \in N)$: $1 \in N_a$.

Доказательство.

Действительно, при a=1 имеем, что $1 \in N_1 = \{1\}$. Если же $a > 1$, то $1 < a$ и, следовательно, 1 содержится в отрезке N_a.

Свойство 2. *Если число b содержится в отрезке N_a и $b \neq a$, то и число b+1 также содержится в отрезке N_a.*

Доказательство.

Действительно, при $b \in N_a$ и $b \neq a$ имеем, что $b < a$, а потому существует такое натуральное число c, что a=b+c.

Если c=1, то b+1= a, и значит, оно содержится в отрезке N_a.

Если же с > 1, то $c - 1$ – натуральное число и, следовательно, $a = b + c = (b + 1) + (c - 1)$. Но тогда $b + 1 < a$, т.е. $b + 1$ – натуральное число, принадлежащее отрезку N_a.

Определение 2. *Множество А называется конечным, если существует взаимно однозначное отображение этого множества на некоторый отрезок N_a натурального ряда чисел, а само отображение А→N_a есть счёт элементов множества А.*

Пример. *Множество вершин треугольника – конечное множество, т.к. его можно взаимно однозначно отобразить на отрезок N_3 ={1, 2, 3}. Отображение множества вершин треугольника на отрезок {1, 2, 3} есть счёт элементов этого множества.*

В связи с данным определением конечного множества и счёта его элементов возникает вопрос: «Можно ли отобразить конечное множество *А* на различные отрезки натурального ряда чисел?». Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема. *Одно и тоже множество А не может быть взаимно однозначно отображено на два различных отрезка натурального ряда чисел.*

Доказательство.

Если бы множество *А* можно было взаимно однозначно отобразить на два различных отрезка натурального ряда N_a и N_b $(a \neq b)$, то существовало бы и взаимно однозначное отображение N_a на N_b. Поэтому достаточно доказать, что при $a \neq b$ взаимно однозначное отображение N_a на N_b невозможно. Кроме того, между любыми неравными натуральными числами имеет место только одно из соотношений: $a < b$ либо $a > b$. Поэтому доказательство данной теоремы сводится к доказательству утверждения: если $a < b$, то не существует взаимно однозначного отображения N_a на N_b.

Доказательство этого утверждения проведём индукцией по a. Пусть a = 1. Покажем, что не существует взаимно однозначного отображения множества $N_1 = \{1\}$ на множество N_b, где b > 1.

Действительно, при b > 1 множество N_b содержит число $b \neq 1$, и поэтому при любом отображении N_1 в N_b хотя бы одно из чисел 1 или b не будет образом числа 1.

Предположим теперь, что для некоторого числа a невозможно взаимно однозначное отображение N_a на N_b при $a < b$, и докажем, что при $a + 1 < c$ невозможно взаимно однозначное отображение N_{a+1} на N_c. Если бы такое отображение существовало и образом числа $a + 1$ было бы число x, то выбрасывая $a + 1$ из N_{a+1} и x из N_c, мы получили бы взаимно однозначное отображение N_a на $N_c \backslash \{x\}$. Но очевидно множество $N_c \backslash \{x\}$ можно взаимно однозначно отобразить на N_{c-1}. Поэтому существовало бы взаимно однозначное отображение N_a на N_{c-1}, что невозможно, так как из $a + 1 < c$ следует, что $a < b = c - 1$, а мы предположили, что при $a < b$ нет взаимно однозначного отображения N_a на N_b.

Итак, теорема верна при a = 1 и из её справедливости при a следует, что она выполняется и при a + 1. Значит, теорема верна для любых a и b.

Замечание. *Из теоремы следует, что конечное множество A равносильно только одному отрезку натурального ряда* N_a*, и потому ему может быть поставлено в соответствие единственное число a. Это число a называют* ***числом элементов*** *в множестве A и пишут n(A)=a. Число a есть количественное натуральное число.*

Таким образом, при пересчёте элементы конечного множества не только расставляются в определённом порядке, но и устанавливается, сколько элементов содержит множество. В первом случае натуральное число представляет собой порядковый номер некоторого элемента и называется в силу этого порядковым. Во втором случае мы имеем дело с числом количественным. Эти две роли натуральных чисел нашли отражение в русском языке: порядковые натуральные числа выражаются числительными первый, второй, третий и т.д., количественные – числительными один, два, три и т.д.

Итак, ***с теоретико-множественных позиций натуральное число рассматривается как число элементов конечного множества***.

Число нуль тоже имеет теоретико-множественное истолкование – оно ставится в соответствие пустому множеству: $0 = n(\emptyset)$.

Если множествам A и B соответствует одно и тоже число a, то они могут быть взаимно однозначно отображены на один и тот же отрезок N_a натурального ряда чисел, а потому друг на друга. Два множества, которые можно взаимно однозначно отобразить друг на друга, равномощны. Следовательно, для конечных множеств утверждение «Множества A и B равномощны» равносильно утверждению «Множества A и B содержат поровну элементов», т.е. им соответствует одно и то же натуральное число a. Так как любому конечному множеству соответствует лишь одно натуральное число, то вся совокупность конечных множеств распадается на классы равномощных множеств. Например, в один из классов попадает множество сторон треугольника, множество его вершин, множество букв в слове «дом»; в другой класс – множество вершин квадрата, множество сторон параллелограмма, множество ножек у стола и т.д.

Каждый класс равномощных конечных множеств однозначно задаётся выбором какого-нибудь представителя. Обычно в качестве такого представителя выбирают соответствующий отрезок натурального ряда чисел. Например, совокупность конечных множеств, содержащая множество пальцев на руке, задаётся отрезком натурального ряда чисел $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Вместо этого отрезка обычно записывают лишь его последний элемент 5, подразумевая при этом все предыдущие числа. Тем самым количественное натуральное число отождествляется с порядковым натуральным числом, а потом с символом для обозначения соответствующего числа.

§ 2. Теоретико-множественное истолкование отношения порядка

Установленная связь между конечными множествами и числами позволяет дать теоретико-множественное истолкование отношениям между натуральными числами. В частности, очевидно, теоретико-множественное истолкование отношения «меньше»: ***$a < b$ в том и только том случае, когда отрезок натурального ряда N_a является собственным подмножеством отрезка натурального ряда N_b, т.е. $N_a \subset N_b$ и $N_a \neq N_b$.***

Так, справедливость неравенства $3 < 7$ вытекает из того, что отрезок натурального ряда $N_3 = \{1, 2, 3\}$ является подмножеством отрезка $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Данная трактовка отношения «меньше» позволяет вести сравнение чисел, опираясь на знание их места в натуральном ряду. Однако сравнение чисел часто выполняют иначе, используя связь чисел с конечными множествами.

Пусть даны два целых неотрицательных числа a и b. С теоретико-множественной точки зрения они представляют собой число элементов конечных множеств A и B: $n(A) = a$, $n(B) = b$.

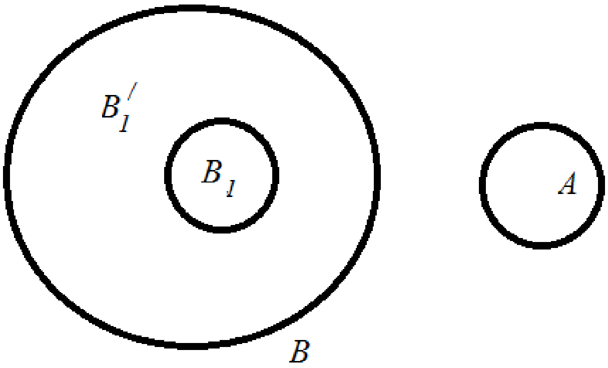
Определение 1. *Числа а и b* ***равны****, если они определяются равномощными множествами A и B, т.е.* $a = b \Leftrightarrow A \sim B$*, где* $n(A) = a$*,* $n(B) = b$*.*

Если A и B не равномощны, то числа a и b различны.

Определение 2. *Если множество A равномощно собственному подмножеству множества B, то говорят, что а* ***меньше*** *b или b* ***больше*** *а, т.е.* $a < b \Leftrightarrow A \sim B_1$*, где* $B_1 \subset B$*,* $B_1 \neq B$*,* $B_1 \neq \emptyset$*,* $n(A) = a$*,* $n(B) = b$*.*

Рассмотрим ещё один способ сравнения целых неотрицательных чисел a и b, где $a = n(A), b = n(B)$.

Пусть $a < b$ в смысле данного выше определения. Следовательно, $A \sim B_1$, где $B_1 \subset B$, $B_1 \neq B$, $B_1 \neq \emptyset$.



Обозначим дополнение B_1 до B через $B_1^/$. Тогда $B = B_1 \cup B_1^/$ и $n(B) = n(B_1 \cup B_1^/)$. Так как $B_1 \cap B_1^/ = \emptyset$, то $n(B) = n(B_1) + n(B_1^/)$. Так как $A \sim B_1$, то $n(B) = n(A) + n(B_1^/)$. Обозначим $n(B_1^/) = c$. Тогда $b = a + c$.

Итак, положив $a < b$, мы получили $b = a + c$. Справедливо будет и обратное утверждение.

Таким образом, приходим к другому определению отношения «меньше».

Определение 3. *Число а* ***меньше*** *числа b, тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число с, что* $b = a + c$*.*

Неравенство $0 < a$, $a \in N$ связано с тем, что пустое множество является подмножеством любого множества.

§ 3.Теоретико-множественное истолкование сложения целых неотрицательных чисел

Сложение натуральных чисел связано с операцией объединения попарно непересекающихся конечных множеств. Например, если множество $A = \{a, b, c, d, e\}$ содержит 5 элементов, а множество $B = \{t, x, y, z\}$ содержит 4 элемента и при этом никакой элемент не принадлежит обоим множествам сразу, то объединение этих множеств $A \cup B = \{a, b, c, d, e, t, x, y, z\}$ состоит из 9 элементов, причём 5+4=9. Точно так же обстоит дело в общем случае.

Определение 1. ***Суммой*** *целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов в объединении непересекающихся множеств A и B, таких что $n(A) = a$, $n(B) = b$.*

Пример 1. *Используя определение суммы, показать, что* 1+4=5.

Решение.

Возьмем множество A, содержащее один элемент: $A = \{l\}$ и множество B, содержащее 4 элемента: $B = \{a, b, c, d\}$. Множества A и B должны удовлетворять условию $A \cap B = \emptyset$. Найдём их объединение: $A \cup B = \{a, b, c, d, l\}$. Оно содержит 5 элементов. Следовательно, 1+4=5.

Теорема 1. *Сумма целых неотрицательных чисел всегда существует и единственна.*

Доказательство.

Пусть $a = n(A), b = n(B)$. Какие бы два конечных множества A и B мы не взяли всегда существует их объединение $A \cup B$ и притом единственное. Следовательно, и сумма $a + b$ двух целых неотрицательных чисел всегда существует и единственна.

Теорема 2. *Сложение целых неотрицательных чисел подчиняется коммутативному закону, т.е.*

$$(\forall a, b \in N_0): (a + b = b + a).$$

Доказательство.

Пусть $a = n(A), b = n(B)$, $A \cap B = \emptyset$. По определению 1 и свойству коммутативности операции объединения множеств имеем:

$$a + b = n(A \cup B) = n(B \cup A) = b + a.$$

Следовательно, $a + b = b + a$.

Теорема 3. *Сложение целых неотрицательных чисел подчиняется ассоциативному закону, т.е.*

$$(\forall a, b \in N_0): (a + b) + c = a + (b + c).$$

Доказательство.

Пусть $a = n(A),\ b = n(B),\ c = n(C),\ A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset$. По определению 1 и свойству ассоциативности операции объединения множеств имеем:

$$(a+b)+c = n\big((A \cup B) \cup C\big) = n\big(A \cup (B \cup C)\big) = a + (b+c).$$

Следовательно, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Понятие суммы двух слагаемых, коммутативный и ассоциативный законы сложения легко обобщаются на случай нескольких слагаемых. Коммутативность означает, что сумма не изменится при любой перестановке слагаемых, а ассоциативность означает, что сумма не меняется при любой группировке слагаемых.

§ 4.Теоретико-множественное истолкование вычитания целых неотрицательных чисел

Операция вычитания целых неотрицательных чисел связана с операцией нахождения разности множеств. Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{c, d, e\}$, $B \subset A$. Тогда $A \setminus B = \{a, b\}$. Во множестве $A \setminus B$ два элемента.

Таким образом, если $n(A) = 5, n(B) = 3,\ B \subset A$, то $5 – 3 = 2$, где $2 = n(A \setminus B) = n(B_A^/)$. Получаем, что разность чисел 5 и 3 является числом элементов дополнения *B* до *A*.

Определение 1. ***Разностью*** *целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов в дополнении множества B до множества A при условии, что n(A) = a, n(B) = b, B ⊂ A, т.е.*

$$a - b = n(A \setminus B) = n(B_A^/),\ \text{где } a = n(A),\ b = n(B), B \subset A\ .$$

Пример 1. *Используя определение разности, показать, что* 7 – 4 = 3.

Решение.

Возьмем множество A, содержащее семь элементов:

$$A = \{a, b, c, d, e, f, k\}.$$

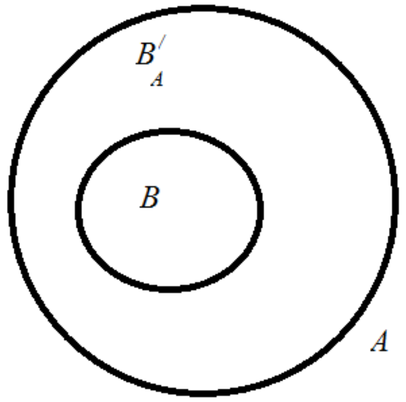
Выделим из него подмножество, в котором четыре элемента: $B = \{d, e, f, k\}$.

Найдем разность множеств $A \setminus B$: $A \setminus B = \{a, b, c\}$. В этом множестве три элемента. Следовательно, 7 – 4 = 3.

Так как $A \setminus \emptyset = A$, то $a - 0 = a$. Из соотношения $A \setminus A = \emptyset$ следует, что $a - a = 0$.

Определение 2. *Действие, при котором находят разность, называется* ***вычитанием***. *Число a называется* ***уменьшаемым***, *b –* ***вычитаемым***.

Пусть даны целые неотрицательные числа a и b такие, что $a = n(A),\ b = n(B),\ B \subset A$. Пусть разность этих чисел есть число элементов множества $B_A^{/}$, т.е. $a - b = n(A \setminus B) = n(B_A^{/})$,



Из диаграммы Эйлера следует, что $A = B \cup B_A^{/} = B \cup (A \setminus B)$.
Следовательно,
$n(A) = n\big(B \cup (A \setminus B)\big) = n(B) +$
$+ n(A \setminus B) = b + (a - b)$.
Значит, $a = b + (a - b)$.
Приходим к другому определению разности.

Определение 3. ***Разностью*** *целых неотрицательных чисел a и b называется такое целое неотрицательное число c, сумма которого с числом b равна a.*

Мы показали, что из определения 1 следует определение 3. Можно доказать и обратное утверждение. Таким образом,

$$a - b = c \iff b + c = a. \qquad (1)$$

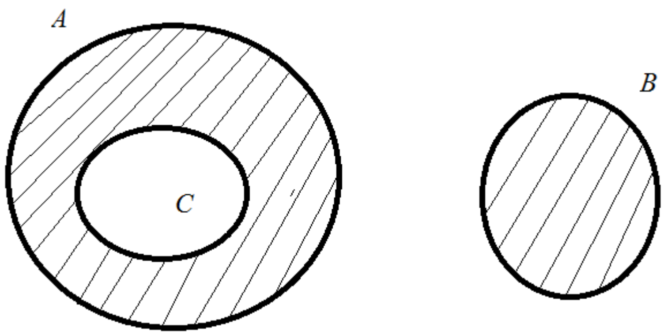
Так как и при аксиоматическом, и при теоретико-множественном подходе мы приходим к определению разности в виде (1), то доказательство теоремы о существовании и единственности разности целых неотрицательных чисел осуществляется так же, как и в § 10 темы 6. Остановимся на теоретико-множественном обосновании правил вычитания. Например, рассмотрим правило вычитания числа из суммы:

$(a + b) - c = (a - c) + b$, если $a \geq c$ или

$(a + b) - c = a + (b - c)$, если $b \geq c$.

Докажем первое из этих равенств.

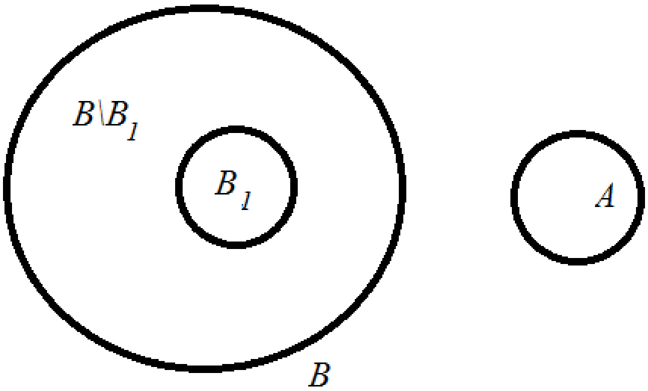
Пусть $A,\ B,\ C$ – конечные множества. $n(A) = a,\ n(B) = b,$ $n(C) = c,\ A \cap B = \emptyset,\ C \subset A$. Но для этих множеств имеет место равенство $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$ (заштрихованная часть).



Но $n\big((A \cup B) \setminus C\big) = (a+b) - c$, а $n\big((A \setminus C) \cup B\big) = (a-c) + b$. Следовательно, $(a+b) - c = (a-c) + b$. Аналогично доказывается и второе из равенств.

С теоретико-множественных позиций можно истолковывать и смысл отношений «больше на…» и «меньше на…».

Пусть $a = n(A)$, $b = n(B)$ и пусть $a < b$. Значит во множестве B можно выделить собственное подмножество B_1, равномощное множеству A, и $B \setminus B_1 \neq \emptyset$.



Пусть $n(B \setminus B_1) = c \quad (c \neq 0)$. Тогда во множестве B элементов столько, сколько их во множестве A и ещё c элементов. В этом случае говорят, что число a меньше числа b на c или число b больше числа a на c.

§ 5. Теоретико-множественное истолкование умножения целых неотрицательных чисел

Рассмотрим следующее определение произведения целых неотрицательных чисел.

Определение 1. ***Произведением*** *целых неотрицательных чисел a и b называется такое целое неотрицательное число $a \cdot b$, которое удовлетворяет следующим условиям:*

1) $a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ раз}}$ *при* $b > 1$,

2) $a \cdot 1 = a$ *при* $b = 1$,

3) $a \cdot 0 = 0$ *при* $b = 0$.

Теоретико-множественный смысл этого определения следующий: пусть даны множества $A_1, A_2, \dots, A_b$, которые попарно не пересекаются, и в каждом множестве содержится по a элементов. Тогда их объединение будет содержать $a \cdot b$ элементов.

Таким образом, с теоретико-множественных позиций: *произведение чисел a и b представляет собой число элементов в объединении b множеств, каждое из которых содержит по a элементов и никакие два из них не пересекаются.*

Определение 2. *Действие, при помощи которого находят произведение, называется* ***умножением****; числа, которые умножают, называются* ***множителями****.*

Существование и единственность произведения целых неотрицательных чисел вытекают из определения операции объединения множеств. Для вывода законов умножения целых неотрицательных чисел удобнее другое теоретико-множественное истолкование произведения. Оно связано с декартовым произведением множеств.

Пусть даны множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{u, t, x, y, z\}$. Найдем декартово произведение $A \times B$.

A \ B	u	t	x	y	z
a	(a, u)	(a, t)	(a, x)	(a, y)	(a, z)
b	(b, u)	(b, t)	(b, x)	(b, y)	(b, z)
c	(c, u)	(c, t)	(c, x)	(c, y)	(c, z)

В каждой строке таблицы все пары имеют одинаковый первый элемент, а в каждом столбце – одинаковый второй элемент. При этом никакие две строки не имеют хотя бы одной одинаковой пары. Отсюда следует, что число элементов таблицы равно 5+5+5=15. С другой стороны, $n(A) = 3$, $n(B) = 5$ и $5 \cdot 3 = 15$. На этом примере видно, что число элементов в декартовом произведении двух конечных множеств равно произведению чисел элементов в этих множествах. Это утверждение справедливо и в общем случае, т.е. справедливо равенство $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

Таким образом, можно дать следующее определение произведения целых неотрицательных чисел.

Определение 3. *Произведением целых неотрицательных чисел* a *и* b *называется число элементов в декартовом произведении множеств A и B, таких что a = n(A), b = n(B), т.е.*

$a \cdot b = n(A \times B)$, *где* $a = n(A),\ b = n(B)$.

Докажем законы умножения, используя определение 3.

Теорема 1. (*коммутативность умножения*)

$$(\forall a, b \in N_0)\colon\ (a \cdot b = b \cdot a).$$

Доказательство.

Пусть $a = n(A),\ b = n(B)$. Тогда на основании определения 3 $a \cdot b = n(A \times B)$. Как известно, $A \times B \neq B \times A$. Однако множества $A \times B$ и $B \times A$ равномощны: каждой паре (a, b) из множества $A \times B$ можно поставить в соответствие пару (b, a) из множества $B \times A$ и наоборот. Значит, $n(A \times B) = n(B \times A)$ и поэтому $a \cdot b = b \cdot a$.

Теорема 2. (*ассоциативность умножения*)

$$(\forall a, b, c \in N_0)\colon ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)).$$

Доказательство.

Рассмотрим множества:

$$(A \times B) \times C \qquad (1)$$

и

$$A \times (B \times C) \qquad (2)$$

Множество (1) состоит из пар вида $\big((a, b), c\big)$. Множество (2) состоит из пар вида $\big(a, (b, c)\big)$. Эти множества не равны, но равномощны (можно установить взаимно однозначное отображение).

Пусть $a = n(A),\ b = n(B),\ c = n(C)$, тогда по определению 3 имеем:

$$(a \cdot b) \cdot c = n\big((A \times B) \times C\big) = n\big(A \times (B \times C)\big) = a \cdot (b \cdot c).$$

Следовательно, для любых целых неотрицательных чисел *a, b,c* справедливо равенство $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Теорема 3. (*дистрибутивность умножения*)

$$(\forall a, b, c \in N_0)\colon ((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c).$$

Доказательство.

Этот закон выводится из равенства $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup$ $\cup\, (B \times C)$. Пусть $a = n(A),\ b = n(B),\ c = n(C),\ A \cap B = \emptyset$. Пользуясь теоретико-множественными трактовками суммы и произведения, получим:

$$(a + b) \cdot c = n\big((A \cup B) \times C\big) = n\big((A \times C) \cup (B \times C)\big) = n(A \times C) +$$
$$+\, n(B \times C) = a \cdot c + b \cdot c.$$

Следовательно, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ для любых целых неотрицательных чисел *a, b, c*.

Теорема 4. $(\forall\, a, b, c \in N_0)$: $((a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c)$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3 и вытекает из равенства $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$, где $B \subset A$.

Произведение целых неотрицательных чисел, коммутативный и ассоциативный законы легко обобщаются на случай любого конечного числа множителей. Коммутативность позволяет переставлять множители, ассоциативность – заключать в скобки любую группу множителей.

§ 6. Теоретико-множественное истолкование деления

Рассмотрим задачи.

Задача 1. *Восемь яблок разложили на тарелки по два яблока на каждую. Сколько надо тарелок?*

В этой задаче рассматривается множество, в котором 8 элементов. Оно разбивается на подмножества, в каждом из которых 2 элемента, т.е. на равномощные подмножества. Вопрос: сколько будет таких подмножеств?

Задача 2. *Двенадцать карандашей раздали трём учащимся поровну. Сколько карандашей получил каждый?*

В задаче дано множество, в котором 12 элементов. Число подмножеств известно – 3. Надо узнать, сколько элементов в каждом из равномощных подмножеств, которые не пересекаются.

Таким образом, с теоретико-множественной точки зрения деление чисел связано с разбиением конечного множества на равночисленные попарно непересекающиеся подмножества и с его помощью решаются обе задачи: отыскание числа элементов в каждом подмножестве разбиения (деление на равные части) и отыскание числа таких подмножеств (деление по содержанию). Приходим к следующему определению.

Определение 1. *Пусть $a = n(A)$ и множество A разбито на попарно непересекающиеся равномощные подмножества. Если b – число подмножеств в разбиении множества A, то* ***частным*** *чисел a и b называется число элементов каждого подмножества; если b – число элементов каждого подмноже-*

ства в разбиении множества A, то ***частным*** *чисел a и b называется число подмножеств в этом разбиении.*

Действие, с помощью которого находят частное, называется ***делением****; a –* ***делимое****, b –* ***делитель***.

Действия деления и умножения взаимосвязаны. Пусть $a = n(A)$ и множество A разбито на b попарно непересекающихся равномощных подмножеств: $A_1, A_2, \dots, A_b$. Тогда по определению 1 $a : b = c$ есть число элементов в каждом таком подмножестве, т.е. $c = n(A_1) = = n(A_2) = \dots = n(A_b)$. Так как по условию $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b$, то $n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_b) =$ $\underbrace{= c + c + \cdots c}_{b \text{ раз}}$.

Следовательно, по определению произведения имеем $a = c \cdot b$ (произведение b слагаемых, каждое из которых рано c, это и есть $c \cdot b$).

Получаем ещё одно определение частного.

Определение 2. ***Частным*** *от деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b называется такое число c, что* $a = c \cdot b$.

Здесь деление определено через умножение, поэтому говорят, что деление – действие, обратное умножению.

Рассмотрим случаи:

1). Пусть $a = 0$, b – любое натуральное число. Найдём частное от деления a на b. По определению это такое число c, что $0 = c \cdot b$. Так как $b \neq 0$, то значит $c = 0$. Следовательно, $0 : b = 0$, $b \in N$.

2). Пусть $a \neq 0$, $b = 0$. Найдём частное от деления a на b. По определению это такое число c, что $a = c \cdot 0$. Так как по условию $a \neq 0$, то равенство $a = c \cdot 0$ не выполняется ни для каких c. Следовательно, частное $a \neq 0$ и нуля не существует. Говорят: «На нуль делить нельзя!».

3). Пусть $a = 0$, $b = 0$. Найдём частное от деления a на b. По определению это такое число c, что $0 = c \cdot 0$. Очевидно, что последнее равенство выполняется для любых чисел c. В этом случае говорят, что деление нуля на нуль не определено.

Используя теоретико-множественный подход к действиям над целыми неотрицательными числами, можно дать теоретико-множественное истолкование правила деления суммы на число: если частные $a : c$ и $b : c$ существуют, то $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Пусть $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \cap B = \emptyset$. Если множества A и B можно разбить на равночисленные подмножества, состоящие из c элементов каждое, то и множество $A \cup B$ допускает такое же разбиение. Если при этом множество A содержит $a:c$ подмножеств, а множество B – из $b:c$ подмножеств, то множество $A \cup B$ состоит из $a:c + b:c$ подмножеств. Это значит, что $(a + b):c = a:c + b:c$.

С теоретико-множественной точки зрения можно рассмотреть и смысл отношений «меньше в» и «больше в».

Если $a = n(A),\ b = n(B)$ и известно, что «a меньше числа b в c раз», то поскольку $a < b$, то во множестве B можно выделить собственное подмножество, равномощное множеству A. Так как известно, что a меньше числа b в c раз, то множество B можно разбить на c подмножеств, равномощных множеству A. Если c – это число подмножеств в разбиении множества B, содержащего b элементов, а в каждом подмножестве содержится a элементов, то $c = b:a$.

Рассмотрим теоретико-множественный смысл деления с остатком.

Пусть конечное множество A можно разбить на множества $A_1, A_2, \dots, A_q, R$ так, что множества $A_1, A_2, \dots, A_q$ равномощны, а множество R содержит меньше элементов, чем каждое из подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_q$.

Тогда, если $a = n(A)$, $n(A_1) = n(A_2) = \dots = n(A_q) = b$, $n(R) = r$, то $a = b \cdot q + r,\ 0 \le r < b$. Это значит, что число q равномощных множеств является неполным частным при делении a на b, b – числом элементов в каждом из множеств $A_1, A_2, \dots, A_q$, а число элементов в множестве R – остатком при этом делении.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

7.1. Придумайте множества C и D, для которых выполняются условия:
1) $n(C) = n(D)$ и $C \neq D$; 2) $n(C) = n(D)$ и $C = D$.

7.2. Известно, что $a = n(A),\ b = n(B),\ c = n(C),\ A \cap B = \emptyset, C \subset B$. Найдите: 1) $n(A \cup B)$; 2) $n(C'_B)$; 3) $n(A \times B)$; 4) $n(B \cup C)$; 5) $n(A \cup C)$; 6) $n(B \times C)$.

7.3. В множестве K содержится 15 элементов, в множестве M – 17, в множестве P – 30 элементов. Множества K и M не пересекаются и множество M является подмножеством P. Найдите:
1) $n(K \cup M)$; 2) $n(M'_P)$; 3) $n(K \times P)$; 4) $n(M \cap P)$.

7.4. Используя теоретико-множественное определение суммы целых неотрицательных чисел, обоснуйте, что:
1) 6+1=7; 2) 4+5=9; 3) 0+3=3; 4) 5+2+4=11.

7.5. Запишите коммутативный и ассоциативный законы сложения целых неотрицательных чисел и дайте их истолкование с теоретико-множественных позиций.

7.6. Найдите значение выражения рациональным способом и объясните, какие законы сложения при этом были использованы:
1) 79+24+21; 2) 38+89+32+11; 3) 23+88+77; 4) 76+19+24+81;
5) 64+125+36+75; 6) 213+287+386+564; 7) 3057+1561+829+1513.

7.7. Объясните, почему нижеприведённые задачи решаются сложением:
1) Оля сорвала 3 белых гриба и 4 подосиновика. Сколько грибов собрала Оля?
2) Из вазы взяли сначала 3 конфеты, а потом ещё 2. Сколько всего конфет взяли из вазы?
3) У Коли было 5 марок, а у Саши на 4 марки больше. Сколько марок было у Саши?
4) В парке 9 берёз. Их на 3 меньше, чем елей. Сколько елей в парке?

7.8. Может ли сумма двух целых неотрицательных слагаемых быть равной: 1) одному из слагаемых; 2) нулю?

7.9. Может ли сумма двух натуральных слагаемых быть равной: 1) одному из слагаемых; 2) нулю?

7.10. Используя теоретико-множественную трактовку отношения «меньше», покажите, что: 1) $3 < 7$; 2) $1 < 4$; 3) $0 < 5$.

7.11. Сравните числа $n(A)$ и $n(B)$, если: 1) $A \subset B$; 2) $A \subset B$ и $A \neq B$.

7.12. Используя теоретико-множественное определение разности целых неотрицательных чисел, покажите, что:
1) $7 - 5=2$; 2) $3 - 3=0$; 3) $5 - 2=3$; 4) $4 - 0=4$.

7.13. Объясните, почему нижеприведённые задачи решаются вычитанием:
1) На станцию прибыло 8 вагонов с углём. 5 вагонов разгрузили. Сколько вагонов осталось разгрузить?
2) У Васи было 6 книг. 2 книги он подарил Пете. Сколько книг осталось у Васи?
3) В зоопарке 6 медведей, а верблюдов на 2 меньше. Сколько верблюдов в зоопарке?

4) На столе 10 чашек, их на 2 больше, чем ложек. Сколько ложек на столе?

7.14. Может ли разность целых неотрицательных чисел быть равной: 1) уменьшаемому; 2) вычитаемому; 3) нулю?

7.15. Может ли разность натуральных чисел быть равной: 1) уменьшаемому; 2) вычитаемому; 3) нулю.

7.16. Какими способами можно найти разность: 1) 12 – (5+2); 2) (6+8) – 5? Дайте теоретико-множественное истолкование проведенных операций.

7.17. Найдите $n(A)$, $n(B)$ и $n(A \times B)$, если $A = \{k, l, m, n, s\}$, а множество B таково: 1) $B = \{r, p\}$; 2) $B = \{m\}$; 3) $B = \emptyset$.

7.18. Используя определения целых неотрицательных чисел, покажите, что: 1) 4·2=8; 2) 1·5=5; 3) 4·3=12; 4) 0·7=0.

7.19. Может ли произведение двух целых неотрицательных чисел быть равным: 1) одному из них; 2) каждому из них; 3) нулю?

7.20. Объясните, почему нижеприведённые задачи решаются действием умножения:
1) Сколько кроликов поместили в 6 клетках, если в каждую поместили по 2 кролика?
2) Девочка прочитала в первый день 8 листов книги, а во второй в 2 раза больше, чем в первый. Сколько страниц книги прочитала девочка во второй день?
3) Для урока Маша принесла 4 листа красной бумаги, это в два раза меньше, чем синей. Сколько листов синей бумаги принесла Маша?

7.21. Используя определение частного чисел, покажите (двумя способами), что: 1) 6:3=2; 2) 7:7=1; 3) 5:1=5.

7.22. Можно ли: 1) разделить на нуль число, отличное от нуля; 2) нуль разделить на число, отличное от нуля; 3) нуль разделить на нуль? Ответы поясните.

7.23. Объясните, почему приведённые ниже задачи решаются действием деления:
1) 6 кусков сахара разложили в стаканы с чаем, по 2 куска в каждый. На сколько стаканов хватило сахара?

2) 10 тетрадей раздали 5 ученикам поровну. Сколько тетрадей получил каждый ученик?
3) В коробке лежало 6 цветных карандашей, их в 2 раза больше, чем простых. Сколько простых карандашей лежало в коробке?
4) У Коли 16 значков, а у Володи в 2 раза меньше. Сколько значков у Володи?

Образец контрольной работы по теме

1. Известно, что $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$, $A \cap B = \emptyset, C \subset B$. Найдите: 1) $n(A \cup B)$; 2) $n(C_B^/)$; 3) $n(A \times B)$.
2. Используя теоретико-множественное истолкование определений суммы, разности, произведения и частного целых неотрицательных чисел обоснуйте соответственно, что: 1) 2+4=6; 2) 7 – 4=3; 3) 2·3=6; 4) 4:1=4.
3. Обоснуйте выбор действия при решении задачи: «В одной коробке было 12 карандашей, их в 3 раза больше, чем во второй коробке. Сколько карандашей во второй коробке?
4. Какие законы умножения могут быть использованы при нахождении значения следующих выражений: 1) 5·(4+7); 2) 125·15·6; 3) (8·379)·125.

Тема 8.
ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ ВО МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Отношение делимости и его простейшие свойства

Рассмотрим множество Z_0 целых неотрицательных чисел. Будем называть целое неотрицательное число – числом (для краткости).

Определение. *Число a делится на число b, если существует такое целое неотрицательное число q, что выполняется равенство $a = b \cdot q$.*

По определению: $a \vdots b \Leftrightarrow (\exists q \in Z_0): a = b \cdot q$

Примеры:

1) $15 \vdots 3$, *так как существует число* $5 \in Z_0$ *такое, что* $3 \cdot 5 = 15$;

2) $15 \,\bar{\vdots}\, 4$, так как $15 = 4 \cdot \frac{15}{4}$, но $\frac{15}{4} \notin Z_0$.

Замечание. *Если* $a \vdots b$ **,** *то число b называется* ***делителем*** *числа a, а число a –* ***кратным*** *числа b.*

Свойства отношения делимости

Свойство 1. *Отношение делимости рефлексивно, т.е. любое число делится на само себя.*

Доказательство.

Любое число a можно представить в виде $a = a \cdot 1$. $1 \in Z_0$, значит по определению $a \vdots a$.

Свойство 2. *Если* $a \vdots b$ *и* $a>0$, *то* $a \geq b$.

Доказательство.

По определению $a \vdots b \Leftrightarrow (\exists q \in Z_0): a = b \cdot q$. Так как $a>0$, то $b \cdot q \geq 0$ и так как $q \in Z_0$, то $q > 0$.

Рассмотрим разность $a - b$: $a - b = b \cdot q - b = b \cdot (q - 1)$. Из этого равенства видно, что $q \geq 1$. Умножая обе части последнего неравенства на b, получим $b \cdot q \geq b$. Следовательно, $a \geq b$.

Свойство 3. *Отношение делимости антисимметрично, т.е. выполняется* $(\forall a, b \in Z_0)\ (a \vdots b \wedge b \vdots a) \Rightarrow (a = b)$.

Доказательство.

По свойству 2 : $(a \vdots b) \Rightarrow (a \geq b)$ и $(b \vdots a) \Rightarrow (b \geq a)$. Одновременно неравенства $a \geq b$ и $b \geq a$ выполняются тогда и только тогда, когда $a = b$.

Свойство 4. *Отношение делимости транзитивно, то есть* $(\forall a, b, c \in Z_0)\ (a \vdots b \wedge b \vdots c) \Rightarrow (a \vdots c)$.

Доказательство.

По определению:
$a \vdots b \Leftrightarrow (\exists q_1 \in Z_0):\ a = b \cdot q_1$,
$b \vdots c \Leftrightarrow (\exists q_2 \in Z_0):\ b = c \cdot q_2$.

Следовательно, $a = b \cdot q_1 = (c \cdot q_2) \cdot q_1 = c \cdot (q_1 \cdot q_2) = c \cdot q$, где $q \in Z_0$. Следовательно, $a = c \cdot q \ \wedge\ q \in Z_0$. Значит по определению $a \vdots c$.

Свойство 5. *Число 0 делится на любое число, то есть*

$$(\forall b \in Z_0):\ 0 \vdots b.$$

Доказательство.

По определению $(\exists q \in Z_0):\ 0 = b \cdot q \Rightarrow q = 0\ \wedge 0 \in Z_0$. Следовательно, $0 \vdots b$.

Свойство 6. *Ни одно, отличное от нуля число, не делится на 0, т.е.* $(\forall a \in N)\ a \overline{\vdots}\ 0$.

Доказательство.

Так как $a \neq 0$, то равенство $a = b \cdot 0$ не может выполняться ни для какого значения b . Следовательно, на 0 делить нельзя.

Свойство 7. *Любое число делится на 1, т.е.* $(\forall a \in Z_0):\ a \vdots 1$.

Доказательство.

По определению
$a = 1 \cdot q\ \wedge q \in Z_0\ \Rightarrow q = a\ \wedge a \in Z_0\ \Rightarrow a \vdots 1$.

§ 2. Делимость суммы, разности и произведения целых неотрицательных чисел

Теорема 1. *Если числа a и b делятся на число c, то и их сумма a+b делится на число c:*

$$(\forall a, b, c \in Z_0)\ (a \vdots c \wedge b \vdots c)\ \Rightarrow \big((a + b) \vdots c\big).$$

Доказательство.

По условию
$a \vdots c \Leftrightarrow (\exists q_1 \in Z_0):\ a = c \cdot q_1$,
$b \vdots c \Leftrightarrow (\exists q_2 \in Z_0):\ b = c \cdot q_2$.

Следовательно, $a + b = cq_1 + cq_2 = c(q_1 + q_2) = cq \wedge q \in Z_0$. Таким образом, $a + b = c \cdot q \wedge q \in Z_0 \Rightarrow (a + b) \vdots c$. Теорема доказана.

Теорема 1 справедлива для любого числа слагаемых.

Теорема 2. *Если числа a и b делятся на c и a ≥ b, то и разность (a – b) делится на c, т.е.*

$$(\forall a, b, c \in Z_0)\ (a \vdots c \wedge b \vdots c) \Rightarrow ((a - b) \vdots c).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание. *Условие a ≥ b необходимо за тем, чтобы обеспечить существование разности a – b в множестве* Z_0 .

Теорема 3. *Если один из множителей произведения делится на c, то и все произведение делится на c, т.е.*

$$(\forall a, b \in Z_0)\ (\exists c \in N): (a \vdots c \wedge b \vdots c) \Rightarrow ((a \cdot b) \vdots c) .$$

Доказательство.

Рассмотрим все возможные случаи:

1) Пусть $a \vdots c, \Rightarrow a = c \cdot q_1 \wedge q_1 \in Z_0$, тогда $a \cdot b = (c \cdot q_1) \cdot b =$
$= c \cdot (q_1 \cdot b) = c \cdot \underbrace{(b \cdot q_1)}_{d} = c \cdot d$ и $d \in Z_0, \Rightarrow (a \cdot b) \vdots c.$

2) Пусть $b \vdots c, \Rightarrow b = c \cdot q_2 \wedge q_2 \in Z_0$, тогда $a \cdot b = a \cdot (c \cdot q_2) = (a \cdot c) \cdot$
$\cdot q_2 = (c \cdot a) \cdot q_2 = c \cdot \underbrace{(a \cdot q_2)}_{q} = c \cdot q \wedge q \in Z_0 \Rightarrow (a \cdot b) \vdots c.$

3) Пусть $a \vdots c$ и $b \vdots c$, тогда по определению 1 $a = c \cdot q_1$, $b = c \cdot q_2$, $(q_1, q_2 \in Z_0)$.
Тогда $a \cdot b = (c \cdot q_1) \cdot (c \cdot q_2) = (c \cdot q_1) \cdot (q_2 \cdot c) = c \cdot (q_1 \cdot q_2) \cdot c = c \cdot c \cdot$
$\cdot (q_1 \cdot q_2) = c \cdot c \cdot \underbrace{(q_1 \cdot q_2)}_{q} = c \cdot c \cdot q = c \cdot (\underbrace{c \cdot q}_{g}) = c \cdot g \wedge g \in Z_0, \Rightarrow (a \cdot b) \vdots c.$

Из 1) – 3) следует справедливость теоремы.

Теорема 4. *Если в произведении a · b множитель a делится на натуральное число m, а множитель b – на натуральное число n, то произведение a · b делится на произведение m · n.*

Теорема 5. *Если в сумме одно из слагаемых не делится на число m, а все остальные слагаемые делятся на число m, то вся сумма на число m не делится.*

Принимаем обе теоремы без доказательства.

§ 3. Теорема о делении с остатком

Определение 1. ***Разделить число а на число b с остатком*** *– это значит найти два таких числа q и r, чтобы выполнялись условия:*

1) $a = b \cdot q + r$;

2) $0 \le r < b$.

Число q называется ***неполным частным****, а r –* ***остатком****.*

Теорема. *Если a и b – некоторые натуральные числа, то всегда можно, и притом единственным образом, разделить a на b с остатком.*

Доказательство.

I. Докажем возможность деления с остатком.

Рассмотрим случаи:

а) $a = 1$; $b = 1$.

В этом случае $a = 1 \cdot b + 0$, т.к. $1 = 1 \cdot 1 + 0$, $r = 0$; следовательно, теорема в этом случае справедлива.

б) $a = 1$; b – любое натуральное число.

Но и в этом случае число a можно представить в виде $1 = b \cdot 0 + 1$, где $r = 1$.

в) a – любое число; $b = 1$.

И в этом случае справедливо равенство $a = 1 \cdot a + 0$; $r = 0$.

г) a и b – некоторые натуральные числа, большие 1.

Рассмотрим множество всех натуральных чисел, кратных b и расположим его элементы в порядке возрастания: $b \cdot 1$; $b \cdot 2$; $b \cdot 3$; …

Пусть $b \cdot q$ – наибольшее кратное числа b, не превосходящее числа a, т.е. $b \cdot q \le a < b \cdot (q + 1)$.

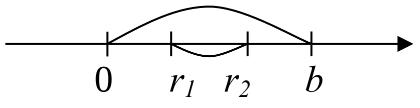
Вычтем из всех частей двойного неравенства произведение $b \cdot q$, получим $0 \le a - b \cdot q < b$. Обозначим $a - b \cdot q = r$.

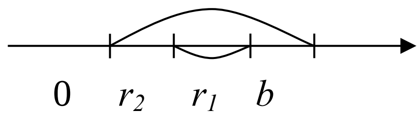
Получим $a = b \cdot q + r$ и $0 \le r < b$. Следовательно, деление с остатком возможно.

II. Докажем единственность деления с остатком.

Предположим противное, пусть при делении a на b с остатком можно найти, по крайней мере, два неполных частных q_1 и q_2 и два остатка r_1 и r_2 таких, что

$$\left.\begin{matrix} a = b \cdot q_1 + r_1, & 0 \le r_1 < b \\ a = b \cdot q_2 + r_2, & 0 \le r_2 < b \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \cdot q_1 + r_1 = b \cdot q_2 + r_2 \Rightarrow b(q_1 - q_2) =$$
$$= r_2 - r_1 \Rightarrow (r_2 - r_1) \vdots b.$$





Из соотношений $0 \le r_1 < b$ и $0 \le r_2 < b$ следует $0 \le |r_2 - r_1| < b$. Следовательно, так как $(r_2 - r_1) \vdots b$ и $0 \le |r_2 - r_1| < b$, то $r_2 - r_1 = 0 \Rightarrow r_2 = r_1$. А значит $q_1 = q_2$.
Итак: сделанное предположение неверно, остается принять: деление с остатком однозначно.

Пример. *Выполнить деление с остатком*: а) 105 на 17; б) 2 на 7

Решение.

а) Число 105 можно представить в виде $105 = 6 \cdot 17 + 3$, где 6 – неполное частное, а 3 – остаток, причем выполняется неравенство
$0 \le 3 < 6$.

б) Число 2 можно представить в виде $2 = 0 \cdot 7 + 2$, где 0 – неполное частное, а 2 – остаток, причем выполняется неравенство
$0 \le 2 < 7$.

§ 4. Признаки делимости в десятичной системе счисления

Определение. *Признаком делимости* *называют правило, которое позволяет по записи числа в десятичной системе счисления установить делится ли данное число на некоторое натуральное число а, не выполняя самого процесса деления.*

Рассмотренные свойства отношения делимости позволяют доказать известные признаки делимости чисел, записанных в десятичной системе счисления.

Признак делимости на 2. *Для того чтобы число x делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8*.

Доказательство.

Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т.е.

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $a_n \ne 0$ и a_0 принимает значение 0, 2, 4, 6, 8.

Докажем тогда, что $x \vdots 2$.

$10 \vdots 2, \Rightarrow 10^2 \vdots 2, \Rightarrow 10^3 \vdots 2, \Rightarrow \ldots \Rightarrow 10^n \vdots 2.$

$$x = \underbrace{a_n \cdot \underbrace{10^n}_{\vdots 2}}_{\vdots 2} + \underbrace{a_{n-1} \cdot \underbrace{10^{n-1}}_{\vdots 2}}_{\vdots 2} + \ldots + \underbrace{a_1 \cdot \underbrace{10}_{\vdots 2}}_{\vdots 2} + \underbrace{a_0}_{\vdots 2}$$

Таким образом, x представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых нацело делится на 2, следовательно, по свойству отношения делимости $x \vdots 2$.

Докажем обратное: если число x делится нацело на 2, то его десятичная запись оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \text{ тогда}$$

$$a_0 = x - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10).$$

По теореме о делимости разности (§2 теорема 2), $a_0 \vdots 2$. Известно, что для того чтобы однозначное число a_0 делилось на 2, оно должно принимать значения 0, 2, 4, 6, 8. Что и требовалось доказать.

Признак делимости на 5. *Для того чтобы число x делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущего признака – признака делимости на 2.

Признак делимости на 4. *Для того чтобы число x делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа x.*

Доказательство.

Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т.е.

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; $a_n \neq 0$ и две последние цифры этой записи образуют число, которое делится на 4. Докажем, что $x \vdots 4$.

Известно, что $100 \vdots 4, \Rightarrow (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2) \vdots 4$.

По условию, $a_1 \cdot 10 + a_0$ (это и есть запись двузначного числа, образованного двумя последними цифрами) также делится на 4, поэтому число x можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 4. Следовательно, согласно признаку делимости суммы (§2, теорема 1), $x \vdots 4$.

Пусть $x \vdots 4$. Докажем, что двузначное число, образованное последними цифрами его десятичной записи, тоже делится на 4.

Так как $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, то

$$a_1 \cdot 10 + a_0 = \underbrace{x}_{\vdots 4} - (a_n \cdot \underbrace{10^n}_{\vdots 4} + a_{n-1} \cdot \underbrace{10^{n-1}}_{\vdots 4} + \ldots + a_2 \cdot \underbrace{10^2}_{\vdots 4}).$$

По теореме о делимости разности $(a_1 \cdot 10 + a_0) \vdots 4$. Но выражение $a_1 \cdot 10 + a_0$ есть запись двузначного числа, образованного последними цифрами записи числах. Что и требовалось доказать.

Признак делимости на 9. *Для того чтобы число x делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делалась на 9.*

Доказательство.

Докажем сначала, что числа вида $(10^n - 1)$ делятся на 9.

Действительно,

$10^n - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 10^{n-1}) - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-2}) - 1 =$
$=(9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + 9 \cdot 10^{n-3} + 10^{n-3}) - 1 = \ldots =$
$= 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9.$

Каждое слагаемое полученной суммы делится на 9, значит, и число $(10^n - 1)$ нацело делится на 9.

Пусть $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ и $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \vdots 9$. Докажем, что $x \vdots 9$.

Перепишем десятичную запись числа x в виде:

$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 - (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \ldots + a_1 \cdot (10 - 1) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0).$

В последней сумме каждое из слагаемых делится на 9:

$a_n \cdot (10^n - 1) \vdots 9$, так как $(10^n - 1) \vdots 9$,
$a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) \vdots 9$, так как $(10^{n-1} - 1) \vdots 9$,
……………………………………………..
$a_1 \cdot (10 - 1) \vdots 9$, так как $(10 - 1) \vdots 9$,
$(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) \vdots 9$ по условию.

По теореме о делимости суммы (§2, теорема 1) , $x \vdots 9$.

Пусть $x \vdots 9$, докажем, что сумма цифр его десятичной записи делится на 9.

Так как $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, то
$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = x - (a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \ldots + a_1 \cdot (10 - 1)).$

Так как в правой части этого равенства и уменьшаемое и вычитаемое кратны 9, то по теореме о делимости разности (§2, теорема 2) имеем $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) \vdots 9$.

Признак делимости на 3. *Для того чтобы число x делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.*

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 9.

Признак делимости на 25: *Для того чтобы число x делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы две последние цифры в его десятичной записи образовывали число, которое делится на 25.*
Доказательство аналогично доказательству признака делимости на 4.

Общий признак делимости чисел *(признак Паскаля).* *Для того чтобы число x делилось на d, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений цифр этого числа на остатки, полученные от деления на d соответствующих степеней десяти, делилось на d.*

Доказательство.

Пусть дано число x в десятичной системе счисления. Требуется установить, делится ли число x на натуральное число d.

Пусть

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 .$$

Разделим каждую из степеней числа 10 на d. В процессе деления будем получать некоторые частные $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и остатки $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Имеем

$$10^n = d \cdot q_n + r_n;$$
$$10^{n-1} = d \cdot q_{n-1} + r_{n-1};$$
$$10^{n-2} = d \cdot q_{n-2} + r_{n-2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$10^2 = d \cdot q_2 + r_2;$$
$$10 = d \cdot q_1 + r_1 .$$

Тогда число x может быть представлено в виде

$$x = a_n(dq_n + r_n) + \ \ldots + a_2(dq_2 + r_2) + a_1(dq_1 + r_1) + a_0 =$$
$$= a_n dq_n + a_n r_n + \cdots + a_2 dq_2 + a_2 r_2 + a_1 dq_1 + a_1 r_1 + a_0 =$$
$$= d(a_n q_n + \cdots + a_2 q_2 + a_1 q_1) + (a_n r_n + \cdots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0) =$$
$$= dq + r.$$

$(aq) \vdots d$, следовательно, для того, чтобы число x делилось на число d, необходимо и достаточно, чтобы $r \vdots d$.

Пользуясь признаком делимости Паскаля, можно вывести любой признак делимости. Например, выведем признак делимости на 25.

Пусть

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Разделим каждую из степеней числа 10 на 25 с остатком:

$$10^1 = 25 \cdot 0 + 10 \Rightarrow r_1 = 10 ,$$
$$10^2 = 25 \cdot 4 + 0 \Rightarrow r_2 = 0 ,$$
$$10^3 = 25 \cdot 40 + 0 \Rightarrow r_3 = 0 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$10^n = 25 \cdot 40..0 + 0 \Rightarrow r_n = 0 .$$

Составим выражение $r = a_n r_n + \cdots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0 = a_n \cdot 0 + \cdots + {}$ $+ a_2 \cdot 0 + a_1 \cdot 10 + a_0 = a_1 \cdot 10 + a_0$.

Следовательно, $x \vdots 25 \Leftrightarrow (a_1 \cdot 10 + a_0) \vdots 25$.

Выражение $a_1 \cdot 10 + a_0$ – это число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа. Отсюда следует, что запись числа, которое делится на 25, должна оканчиваться 00, 25, 50, 75.

§ 5. Простые числа и их свойства

Всякое натуральное число *a* имеет, по крайней мере, два делителя: 1 и само число *a*.

Определение 1. *Натуральные числа большие 1 и имеющие только два делителя: 1 и само число, называются* ***простыми****.*

Например, 5 – число простое, так как имеет только два делителя 1 и 5; 12 не является простым числом, так как имеет более двух делителей.

Определение 2. *Числа, которые имеют более двух делителей, называются* ***составными****.*

Например, 12 и 21 – составные числа.

Замечание 1. *Число 1 имеет лишь один делитель, поэтому не является ни простым, ни составным.*

Замечание 2. *Число 0 имеет бесконечно много делителей. Это число не является ни простым, ни составным.*

Таким образом, множество целых неотрицательных чисел разбивается на четыре класса:

1) класс, содержащий лишь число 0 (имеет бесконечно много делителей);
2) класс, содержащий лишь число 1 (имеет лишь один делитель);
3) класс простых чисел (имеющих только два делителя);
4) класс составных чисел (имеющих более двух делителей, отличных от нуля).

Свойства простых чисел

Свойство 1. *Если p – простое число и p нацело делится на n и $n \neq 1$, то $p = n$.*

Доказательство.

Предположим противное, то есть, предположим, что $n \neq p$.

Число p имеет (по условию теоремы) делителями числа 1, p, n. Причем $n \neq 1$ и $n \neq p$. Получили противоречие – согласно определению 1 число p может иметь только два натуральных делителя 1 и p. Значит, сделанное предположение неверно, следовательно остается принять, что $n = p$.

Свойство 2. *Если p_1 и p_2 – простые числа и $p_1 \vdots p_2$, то $p_1 = p_2$.*

Доказательство.

По условию теоремы p_2 – число простое. Следовательно, $p_2 \neq 1$. Также по условию p_1 – простое число и $p_1 \vdots p_2$. По свойству 1 $p_1 = p_2$.

Свойство 3. *Всякое натуральное число n, большее 1, имеет хотя бы один простой натуральный делитель.*

Доказательство.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что существуют натуральные числа большие 1, которые не имеют ни одного простого делителя. Обозначим через M множество таких чисел.

Во всяком непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьшее число, следовательно, во множестве M есть наименьшее натуральное число. Обозначим его через q . Так как $q > 1$, то оно либо простое, либо составное.

Число q не является простым, так как принадлежит множеству M. Число q не может быть и составным, так как если бы число q было составным, то имело бы натуральный делитель m, отличный от 1 и q. Тогда $m < q \Rightarrow m \notin M$ и, следовательно, имеет простой делитель p, то есть $m \vdots p$, а так как $q \vdots m$, то $q \vdots p$, что противоречит предположению.

Следовательно, наше предположение неверно и чисел, больших 1 и не имеющих простых делителей не существует.

§ 6. Бесконечность множества простых чисел

Теорема (*Евклида*). *Множество простых чисел бесконечно.*

Доказательство.

Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что множество простых чисел конечно. Пусть оно исчерпывается простыми числами $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Рассмотрим число $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Это число должно быть либо простым, либо составным. Это число не может быть простым, потому что множество всех простых чисел исчерпывается числами $p_1, p_2, \dots, p_n$. Число x не может быть и составным, потому что, если бы оно было составным, то оно имело бы хоть один простой делитель. Но нетрудно видеть, что $x \not\vdots\, p_1$, $x \not\vdots\, p_2, \dots$, $x \not\vdots\, p_n$. Значит, число x не является ни простым, ни составным. Получили противоречие. Следовательно, множество простых чисел бесконечно.

§ 7. Решето Эратосфена

Рассмотрим метод составления таблицы простых натуральных чисел, не превосходящих данного числа.

Теорема 1. *Если n – составное натуральное число, то оно имеет, по крайней мере, один простой натуральный делитель, не превосходящий $\sqrt{n}$.*

Доказательство.

По условию n – составное число, поэтому $n > 1$. Тогда число n имеет простой натуральный делитель.

Пусть p – наименьший простой натуральный делитель числа n, значит число n можно представить в виде $n = p \cdot n_1$, где $1 < n_1 < n$, следовательно, n_1 имеет простой натуральный делитель. Пусть q – простой делитель n_1. Тогда $n = p \cdot n_1 \Rightarrow n \vdots n_1 \wedge n_1 \vdots q \Rightarrow n \vdots q \Rightarrow q$ – простой делитель n.

Так как p – наименьший простой делитель n, то $q \geq p$.

По предположению $n_1 \vdots q$. Пусть $n_1 = q \cdot n_2$.

Тогда $n = p \cdot n_1 = p \cdot q \cdot n_2 \geq p \cdot p \cdot n_2 = p^2 \cdot n_2$, а тем более $n \geq p^2 \Rightarrow p \leq \sqrt{n}$.

Следовательно, составное натуральное число n имеет простой делитель p, который не превосходит $\sqrt{n}$.

Теорема 2. *Если натуральное число n, которое больше 1, не делится ни на одно простое натуральное число, не превосходящее $\sqrt{n}$, то оно простое.*

Доказательство.

По условию $n > 1$ и если p – простое натуральное число и $p \leq \sqrt{n}$, то $n \,\overline{\vdots}\, p$. Требуется доказать, что n – простое число.

Предположим противное: n – составное число. Следовательно, по теореме 1 число n имеет простой делитель $p \leq \sqrt{n}$.

Получили противоречие с условием теоремы, следовательно, сделанное предположение неверно, остается принять: n – простое число

Рассмотрим метод составления таблицы простых натуральных чисел, называемый ***решетом Эратосфена*** (III в. до н. э.).

Пусть надо составить таблицу простых натуральных чисел, не превосходящих числа n.

Выпишем подряд все натуральные числа от 2 до n:

2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20;…; n.   (1)

2 – число простое.

Вычеркнем в числовой последовательности (1) каждое второе число после двух (т.е. вычеркнем числа, кратные двум, кроме 2). Первое из не зачеркнутых чисел после двух – 3.

3 – число простое.

Вычеркнем каждое третье число после трех (причем надо считать и те числа, которые уже вычеркнуты, т.е. вычеркнем числа, кратные трем, кроме 3). Первое не зачеркнутое число, следующее за тремя, – число 5.

5 – простое число.

Вычеркнем каждое пятое число после пяти и т.д.

Это вычеркивание продолжаем до тех пор, пока не дойдем до первого простого числа, большего $\sqrt{n}$.

Все оставшиеся числа не делятся на простые натуральные числа, не превосходящие $\sqrt{n}$, значит по теореме 2, они будут простыми числами, превосходящими n.

Пример. *Составить таблицу простых натуральных чисел, не превосходящих* 30.

Решение.

Так как $\sqrt{30} < 6$, то простыми натуральными числами меньшими или равными $\sqrt{30}$ будут 2, 3, 5.

Выпишем подряд все натуральные числа от 2 до 30:

2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10;
11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20;   (2)
21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30.

Вычеркнем в (2) каждое второе число после двух (т.е. вычеркнем числа, кратные двум, кроме 2):

2; 3; ~~4~~; 5; ~~6~~; 7; ~~8~~; 9; ~~10~~;
11; ~~12~~; 13; ~~14~~; 15; ~~16~~; 17; ~~18~~; 19; ~~20~~;
21; ~~22~~; 23; ~~24~~; 25; ~~26~~; 27; ~~28~~; 29; ~~30~~.

Вычеркнем каждое третье число после трех:

2; 3; ~~4~~; 5; ~~6~~; 7; ~~8~~; ~~9~~; ~~10~~;
11; ~~12~~; 13; ~~14~~; ~~15~~; ~~16~~; 17; ~~18~~; 19; ~~20~~;
~~21~~; ~~22~~; 23; ~~24~~; 25; ~~26~~; ~~27~~; ~~28~~; 29; ~~30~~.

и каждое пятое число после пяти:

2; 3; ~~4~~; 5; ~~6~~; 7; ~~8~~; ~~9~~; ~~10~~;
11; ~~12~~; 13; ~~14~~; ~~15~~; ~~16~~; 17; ~~18~~; 19; ~~20~~;
~~21~~; ~~22~~; 23; ~~24~~; ~~25~~; ~~26~~; ~~27~~; ~~28~~; 29; ~~30~~.

Все оставшиеся числа не делятся на простые натуральные числа, не превосходящие $\sqrt{30}$, значит по теореме 2, они будут простыми числами, превосходящими 30.
Итак, простые числа не превосходящие 30: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29.

§ 8. Разложение чисел на простые множители

8.1. Разложение на простые множители натуральных чисел

Определение 1. *Натуральные числа a и b называются взаимно простыми, если они имеют только один общий натуральный делитель, равный единице.*

Примеры: 1) *числа* 4 *и* 7 *– взаимно простые, так как имеют только один общий делитель* 1;

2) *числа* 4 *и* 8 *– не взаимно простые, так как их общие делители: единица, двойка, четверка.*

Лемма 1. *Если a – натуральное число, p – простое натуральное число, и $a \,\overline{\vdots}\, p$, то a и p – числа взаимно-простые.*

Доказательство.

По условию p – число простое, следовательно, оно делится только на 1 и p. $a \,\overline{\vdots}\, p$, следовательно, a и p имеют только один общий натуральный делитель – единицу, а значит по определению1 числа a и p – взаимно простые.

Лемма 2. *Если a и b взаимно простые натуральные числа, то существуют целые числа x_0, y_0 такие, что $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = 1$.*

Доказательство.

Рассмотрим множество $У$ всех целых чисел, представимых в виде $ax + by$, где $x, y \in Z$. Число a можно представить в виде:

$$a = 1 \cdot a + 0 \cdot b \Rightarrow a \in У$$

и $a \in N$ (по условию). Следовательно в $У$ есть натуральные числа.

Пусть d – наименьшее натуральное число, принадлежащее множеству $У$. Так как

$$d \in У, \text{ то } (\exists\, x_0, y_0 \in Z): (a \circ x_0 + b \circ y_0 = d). \qquad (1)$$

Докажем, что $d = 1$.

Разделим a на d с остатком. Пусть $a = d \cdot q + r$, где $0 \le r < d$.

Докажем, что $r = 0$. Предположим, что $r \neq 0$, тогда $0 < r < d$, т.е. r – число натуральное.

$r = a - d \cdot q = a - (a \cdot x_0 + b \cdot y_0) \cdot q = a - a \cdot x_0 \cdot q - b \cdot y_0 \cdot q =$

$= a \cdot \underbrace{(1 - x_0 q)}_{x'} + b \cdot \underbrace{(-y_0 q)}_{y'} = ax' + by'$, где $x', y' \in Z$.

Следовательно, число $r \in У$ и $r > 0$ и $r < d$. Получили противоречие (во множестве $У$ нет натурального числа, меньшего d).

Следовательно, предположение, что $r \neq 0$ неверно, остается принять $r = 0$, но тогда $a = d \cdot q \Rightarrow a \,\vdots\, d$, значит d – натуральный делитель числа a.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что d – натуральный делитель числа b. Следовательно, d – общий натуральный делитель a и b.

По условию числа a и b взаимно простые, следовательно, $d = 1$ и равенство (1) можно записать так: $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = 1$.

Следовательно, если a и b – взаимно просты, то $(\exists\ x_0,\ \ y_0 \in Z)$: $(a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = 1)$.

Лемма 3. *Если a и b натуральные числа и произведение $(a \cdot b) \,\vdots\, p$, где p –простое натуральное число, то хотя бы один из сомножителей делится на p.*

Доказательство.

Возможны случаи:

а) $a \,\vdots\, p$. В этом случае лемма справедлива.

б) $\overline{a \,\vdots\, p}$. В этом случае по лемме 1 числа a и p взаимно простые. Следовательно, по лемме 2 существуют целые числа x и y, такие что

$$a \cdot x + p \cdot y = 1.$$

Умножим обе части последнего равенства на b и применим известные законы умножения чисел:

$$(a \cdot x + p \cdot y) \cdot b = 1 \cdot b \Rightarrow \underbrace{(a \cdot b) \cdot x}_{\vdots\, p} + \underbrace{p \cdot (b \cdot y)}_{\vdots\, p} = b \ \Rightarrow\ b \,\vdots\, p.$$

И в этом случае лемма справедлива.

Итак, если $(a \cdot b) \,\vdots\, p$ и p – простое число, то $a \,\vdots\, p$ или $b \,\vdots\, p$.

Лемма 4. *Если произведение натуральных чисел $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ делится на p, где p – простое число, то хотя бы один из сомножителей делится на p.*

Доказательство.

Лемму докажем методом математической индукции.

1) Пусть $n = 2$. Тогда $(a_1 \cdot a_2) \vdots p$, где p –простое число. Следовательно, по лемме 3 $a_1 \vdots p$ или $a_2 \vdots p$. Таким образом, при $n = 2$ лемма 4 справедлива.

2) Предположим, что при $n = k$ лемма 4 также справедлива, т.е. предположим, что если $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) \vdots p$, где p – простое число, то

$$a_1 \vdots p \lor a_2 \vdots p \lor \ldots \lor a_k \vdots p.$$

При сделанном предположении докажем, что лемма 4 будет справедлива и для произведения $(k + 1)$ сомножителей.

Действительно, $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+1} = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) \cdot a_{k+1}$. Это произведение делится на p. Следовательно, по лемме 3

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) \vdots p \text{ или } a_{k+1} \vdots p.$$

Если $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) \vdots p$, то по индуктивному предположению

$$a_1 \vdots p \lor a_2 \vdots p \lor \ldots \lor a_k \vdots p.$$

Если $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) \overline{\vdots}\, p$, то $a_{k+1} \vdots p$. Следовательно, если лемма справедлива для произведения k множителей, то она справедлива и для произведения $(k+1)$ сомножителей.

Из 1), 2) по аксиоме математической индукции следует, что лемма 4 справедлива для произведения n сомножителей, где $n \geq 2$.

Теорема 1. *Если n – натуральное число, большее 1, то оно или простое, или его можно представить в виде произведения простых чисел. Это представление единственно с точностью до порядка сомножителей (два разложения с разным порядком сомножителей различными не считаются).*

Доказательство.

1) Докажем возможность разложения числа n на простые множители. Если n – простое число, то теорема справедлива.

Пусть n – составное число. Предположим, что существуют составные числа, которые нельзя разложить на простые множители. Пусть M – множество таких чисел, n – наименьший элемент множества M.

n – число составное, следовательно, $n = n_1 \cdot n_2$, где $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$. Значит, $n_1 \notin M$ и $n_2 \notin M$. Следовательно, эти числа либо простые, либо их можно представить в виде произведения простых множителей: $n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, $n_2 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$. Тогда

$$n = n_1 \cdot n_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m ,$$

что противоречит предположению. Остается принять, что составных чисел, которые не разлагаются в произведение простых множителей, не существует.

2) Докажем единственность такого представления.

Предположим, что существуют натуральные числа, имеющие различные разложения на простые множители. Пусть M – множество таких чисел. Так как $M \neq \emptyset$, то существует наименьший элемент $n \in M$, причем $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ и $n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$.

Тогда $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ (1)

Правая часть равенства (1) делится на q_1, значит и левая часть делится на q_1. Следовательно, хотя бы один из множителей $p_1, p_2, \ldots, p_k$ делится на q_1. Переставляя, если понадобится, множители, можно считать, что $p_1 \vdots q_1$, но p_1 и q_1 – числа простые, следовательно, $p_1 = q_1$.

Разделим обе части равенства (1) на p_1, получим равенство $c = p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$, где $c = n : p_1$. Так как $p_1 > 1$, то $c < n$. Но по предположению n – наименьшее из чисел, имеющих различные разложения на простые множители. Значит c имеет лишь одно разложение на простые множители. Но тогда поскольку $p_1 = q_1$ разложения $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ и $n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ отличаются друг от друга лишь порядком множителей.

Следовательно, натуральных чисел, имеющих различные представления в виде произведения простых множителей, не существует.

Замечание 1. *Доказанную теорему называют основной теоремой арифметики.*

Замечание 2. *Пусть* $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. *В этом разложении могут быть одинаковые простые числа. Если одинаковые простые множители объединить, то разложение запишется так:*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *– различные простые числа,* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *– натуральные числа.*

Замечание 3. *Представление числа* n *в виде* $= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ *называется каноническим разложением числа* n *на простые множители.*

Пример. *Найти каноническое разложение числа* 792 *на простые множители:*

$$\begin{array}{r|l} 792 & 2 \\ 396 & 2 \\ 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11.$

8.2. Разложение целых чисел на простые множители

Теорема 2. *Всякое целое число a, отличное от 0 и ± 1, единственным образом представимо в виде произведения* $a = \varepsilon \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, *где* $p_1, p_2, \ldots p_k$ *- простые натуральные числа,* $\varepsilon = \pm 1$.

Доказательство.

Из условия теоремы следует, что $|a|$- натуральное число, большее единицы. Значит, по основной теореме арифметики $|a|$ единственным образом можно представить в виде:

$$|a| = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k. \quad (2)$$

Если $a > 0$, то $|a| = a$.

Если $a < 0$, то $|a| = -a$, а значит равенство (2) можно переписать так:

$$\pm a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

$$a = \pm (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k),$$

$a = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, p_2, \ldots p_k$ - простые натуральные числа, $\varepsilon = \pm 1$. Теорема доказана.

§ 9. Число и сумма натуральных делителей натурального числа

Теорема 1. *Если* $= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$– *каноническое разложение натурального числа n, то числа вида* $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$, *где* $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$; $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$; *...;* $0 \le \beta_s \le \alpha_k$ *и только они являются натуральными делителями числа n.*

Доказательство.

Пусть $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$ – число, удовлетворяющее условию теоремы.

Тогда число

$$n = d \cdot \underbrace{(p_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s-\beta_s})}_{q\ -\ нат.число}$$

Следовательно, $n = d \cdot q$ и $q \in N$, следовательно, $n \vdots d$. А это означает, что все числа вида $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$ являются натуральными делителями числа n.

Пусть теперь $n \vdots d$. Тогда верно равенство $n = d \cdot q$ и $q \in N$.

Следовательно, все простые делители числа d будут делителями и числа n.

В разложение числа d могут входить только простые числа p_1, p_2, ..., p_s, притом с показателями β_1, β_2, ..., β_s, удовлетворяющими условиям: $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$; $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$; …; $0 \le \beta_s \le \alpha_k$.

Следовательно, если число d – натуральный делитель n, то оно имеет вид: $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_s^{\beta_s}$, где β_1, β_2,…, β_s – целые числа, такие что $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, причем $i = 1, 2, …, k$ и только они являются натуральными делителями числа n.

Пример 1. *Найти все натуральные делители числа n = 12.*

Решение.

Каноническое разложение числа 12 имеет вид $12 = 2^2 \cdot 3^1$; следовательно, $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$.

По теореме 1 $d = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$; $0 \le \beta_1 \le 2$; $0 \le \beta_2 \le 1$. Можно составить таблицу:

β_1	β_2	$d_i = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$
0	0	$d_1 = 2^0 \cdot 3^0 = 1$
0	1	$d_2 = 2^0 \cdot 3^1 = 3$
1	0	$d_3 = 2^1 \cdot 3^0 = 2$
1	1	$d_4 = 2^1 \cdot 3^1 = 6$
2	0	$d_5 = 2^2 \cdot 3^0 = 4$
2	1	$d_6 = 2^2 \cdot 3^1 = 12$

Ответ: множество чисел $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ содержит все натуральные делители числа 12.

Замечание. *Число натуральных делителей числа n обозначают через $\tau(n)$; сумму всех натуральных делителей числа n обозначают через $\sigma(n)$. Функции $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ являются числовыми функциями.*

Пример 2. *В рассмотренном выше примере* $n = 12$, $\tau(n) = 6$, $\sigma(n) = 28$.

Теорема 2. *Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_s^{\alpha_s}$ – каноническое разложение натурального числа n на простые множители, то число натуральных делителей числа n вычисляется по формуле:*

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_s + 1).$$

Доказательство.

По теореме 1 числа $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_s^{\beta_s}$, где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ – целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$; $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$; … ; $0 \leq \beta_s \leq \alpha_s$ и только они являются натуральными делителями числа n.

Каждому натуральному делителю d числа n соответствует система показателей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ и обратно: каждой системе показателей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ соответствует натуральный делитель числа n.

Поэтому, чтобы подсчитать число натуральных делителей числа n достаточно подсчитать число возможных упорядоченных систем показателей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$.

Показатель β_1 может принимать (α_1+1) значений: $0, 1, 2, \ldots, \alpha_1$.

Показатель β_2 может принимать (α_2+1) значений: $0, 1, 2, \ldots, \alpha_2$.

……………………………………………………………………

Показатель β_s может принимать (α_s+1) значений: $0, 1, 2, \ldots, \alpha_s$.

Согласно правилам комбинаторики, число возможных систем показателей будет равно произведению $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_s + 1)$.

Теорема доказана.

Пример 3. *Найдите* $\tau(180)$.

Решение.

Каноническое разложение числа 180 имеет вид: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, то есть $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$.

Следовательно, $\tau(180) = (2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$.

Теорема 3. *Если* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_s^{\alpha_s}$ *– каноническое разложение натурального числа n на простые множители, то сумма всех натуральных делителей числа n вычисляется по формуле:*

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot ... \cdot \frac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1}.$$

Доказательство.

Рассмотрим произведение:

$$\left(p_1^0 + p_1^1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \left(p_2^0 + p_2^1 + \cdots + p_2^{\alpha_2}\right) \cdot ... \cdot \\ \cdot \left(p_s^0 + p_s^1 + \cdots + p_s^{\alpha_s}\right) \qquad (3)$$

Если в произведении (3) раскрыть скобки, то получится сумма членов вида

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_s^{\beta_s}, \text{ где } \quad 0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1; \quad 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2; \ldots; \quad 0 \leq \beta_s \leq \alpha_s.$$

Следовательно, все члены полученной суммы будут натуральными делителями числа n, причем каждый натуральный делитель числа n входит в сумму и притом один раз. Поэтому произведение (3) равно сумме всех натуральных делителей числа n.

Значит,

$$\sigma(n) = \left(p_1^0 + p_1^1 + \dots + p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \left(p_2^0 + p_2^1 + \dots + p_2^{\alpha_2}\right) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot \left(p_s^0 + p_s^1 + \dots + p_s^{\alpha_s}\right).$$

Каждая из сумм, заключенных в скобки, является суммой членов геометрических прогрессий. Применив формулу суммы членов геометрической прогрессии, получим выражение для вычисления суммы всех делителей числа *n*

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1}.$$

Пример 4. *Найдите* $\sigma(60)$.

Решение.

Каноническое разложение числа 60 имеет вид: $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5$; то есть $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$, тогда:

$$\sigma(60) = \frac{2^3-1}{2-1} \cdot \frac{3^2-1}{3-1} \cdot \frac{5^2-1}{5-1} = \frac{7}{1} \cdot \frac{8}{2} \cdot \frac{24}{4} = 7 \cdot 4 \cdot 6 = 28 \cdot 6 = 168.$$

§ 10. Наибольший общий делитель целых неотрицательных чисел

Рассмотрим два натуральных числа *a* и *b*.

Определение 1. *Число d называется* ***общим делителем*** *натуральных чисел a и b, если a ⋮ d и b ⋮ d.*

Чтобы найти общие делители чисел *a* и *b,* надо найти пересечение множества делителей числа *a* и множества делителей числа *b*.

Пример 1. *Даны числа a* = 20, *b* = 30. *Найдите общие натуральные делители чисел.*

Решение.

Множество всех делителей числа 20: {1, 2, 4, 5, 10, 20}; множество делителей числа 30: {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}.

Общие натуральные делители чисел 20 и 30 составят множество чисел {1; 2; 5; 10}.

Определение 2. *Число D называется* ***наибольшим общим делителем*** *чисел a и b, если D – общий делитель a и b и, кроме того, D делится на любой общий делитель чисел a и b.*

Наибольший общий делитель чисел *a* и *b* будем обозначать через НОД (*a*;*b*) или (*a*; *b*).

Замечание 1. *Если D_1 и D_2 – наибольшие общие делители чисел a и b, то $D_1 = D_2$.*

Теорема 1. *Если $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ и $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$– канонические разложения чисел a и b на простые множители, то наибольший общий делитель чисел a и b вычисляется по формуле:*

$(a; b) = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\lambda_s}$, *где $\lambda_i = min\,(\alpha_i; \beta_i)$, i =1, 2, …, s.*

Доказательство.

Рассмотрим число $d = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\lambda_s}$, d – натуральное число. Так как $\lambda_1 \le \alpha_1$; $\lambda_2 \le \alpha_2$; …; $\lambda_s \le \alpha_s$, то $a \vdots d$. Так как $\lambda_1 \le \beta_1$; $\lambda_2 \le \beta_2$; …; $\lambda_s \le \beta_s$, то $b \vdots d$. Следовательно, d – общий делитель чисел a и b.

Пусть c – общий делитель чисел a и b.

Тогда $c = p_1^{\tau_1} \cdot p_2^{\tau_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\tau_s}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Так как } a \vdots c, \text{то } \tau_i \le \alpha_i \\ \text{Так как } b \vdots c, \text{то } \tau_i \le \beta_i\end{array}\right\} \Rightarrow \tau_i \le \lambda_i, i = 1, 2, \ldots , s\ .$$

Так как $\tau_1 \le \lambda_1$, $\tau_2 \le \lambda_2$, …, $\tau_s \le \lambda_s$, то $d \vdots c$.

Итак: d – общий делитель чисел a и b, и $d > 0$, следовательно, d – наибольший общий делитель чисел a и b.

Значит $(a; b) = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\lambda_s}$.

Замечание 2. *Теорема 1 справедлива для любого конечного числа чисел.*

Из теоремы 1 вытекает правило нахождения НОД чисел.

Правило. *Для нахождения НОД нескольких чисел необходимо:*

1) *выписать канонические разложения данных чисел;*
2) *перечислить все* ***общие*** *простые множители, входящие в канонические разложения каждого из данных чисел;*
3) *возвести каждый из перечисленных простых множителей в наименьшую степень, с которой этот простой множитель входит в канонические разложения данных чисел.*

Произведение полученных степеней простых множителей и будет НОД данных чисел.

Пример 2. *Заданы числа a* = 135; *b* = 180. *Найти* (*a*; *b*).

Решение.

Разложим числа a и b на простые множители и запишем их канонические представления:

$$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$135 = 3^3 \cdot 5^1;$

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1.$

$(a;b) = (135;180) = 3^2 \cdot 5^1 = 45.$

Наибольший общий делитель двух чисел можно найти, не находя их канонических разложений на простые множители. Этот прием предложен Евклидом (III в. до н.э.) и основан на следующих леммах.

Лемма 1. *Если a и b – целые числа и a* $\vdots$ *b, то* (*a;b*) =|*b*|.

Доказательство.

По условию: $a \vdots b \Rightarrow a \vdots |b|$;

$b \vdots b \Rightarrow b \vdots |b|$.

Следовательно, |*b*| – общий делитель чисел *a* и *b*.

Пусть *c* – любой общий делитель чисел *a* и *b*, тогда $a \vdots c$ и $b \vdots c$. Так как $b \vdots c$, то и $|b| \vdots c$, следовательно, наибольшим делителем чисел *a* и *b* является |*b*|.

Следствие. *Если a и b – натуральные числа и a* $\vdots$ *b, то (a; b) = b.*

Лемма 2. *Если a и b – целые неотрицательные числа,* $a \overline{\vdots} b$, *r – остаток от деления a на b, то (a;b) = (b;r).*

Доказательство.

Пусть (*a;b*) = *d*, тогда *d* > 0, $a \vdots d$ и $b \vdots d$.

Так как при делении *a* на *b* получаем остаток *r*, то *a* = *b*·*q* + *r*, следовательно, *r* = *a* – *b* · *q*.

Можно сделать вывод: $a \vdots d$; $b \vdots d \Rightarrow r \vdots d$. Итак, $b \vdots d$ и $r \vdots d$, следовательно, *d* – общий делитель чисел *b* и *r*.

Пусть *c* – любой общий делитель чисел *b* и *r*, тогда $b \vdots c$ и $r \vdots c$. Так как

$$\underbrace{a}_{\vdots a} = \underbrace{bq}_{\vdots c} + \underbrace{r}_{\vdots c},$$

то $b \vdots c$ и $a \vdots c$, т.е. *c* – общий делитель *a* и *b*; но *d* = (*a; b*) $\Rightarrow d \vdots c$.

Итак, *d* = (*a; b*) является общим делителем чисел *b* и *r* и *d* делится на любой общий делитель *b* и *r*. Следовательно, *d* = (*b*; *r*), а значит (*a; b*) = (*b; r*).

Пусть a и b – целые (натуральные) неотрицательные числа, $b \neq 0$. Рассмотрим следующий процесс последовательного деления a на b:

Разделим a на b; пусть $a = b \cdot q_1 + r_1$; $0 < r_1 < b$.

Разделим b на r_1; пусть $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$; $0 < r_2 < r_1$.

Разделим r_1 на r_2; пусть $r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$; $0 < r_3 < r_2$.

………………………………………………………….

Разделим r_{n-2} на r_{n-1}; пусть $r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n$; $0 < r_n < r_{n-1}$.

Разделим r_{n-1} на r_n; пусть $r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + r_{n+1}$.

Процесс последовательного деления всегда конечен.

Действительно: $b > r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-2} > r_{n-1} > r_n$. Последовательные остатки убывают, следовательно, число положительных остатков конечно. Поэтому на каком-то шаге мы обязательно получим остаток, равный 0 (будем считать, что $r_{n+1} = 0$). На этом шаге процесс последовательного деления обрывается.

Процесс последовательного деления a на b, b на r_1, r_1 на r_2, r_2 на r_3 и так далее, до тех пор, пока не получится остаток равный 0, называют ***алгоритмом Евклида для чисел a и b.***

Теорема 2. *Если a и b – натуральные числа и* $a \,\overline{\vdots}\, b$, *то наибольший общий делитель чисел a и b равен последнему не равному 0 остатку в алгоритме Евклида для чисел a и b.*

Доказательство.

Требуется доказать, что $(a;\, b) = r_n$, если $r_{n+1} = 0$.

По лемме 2 имеем:

$$\left.\begin{array}{c} (a;b) = (b;r_1) \\ (b;r_1) = (r_1;r_2) \\ (r_1;r_2) = (r_2;r_3) \\ \ldots \\ (r_{n-2};r_{n-1}) = (r_{n-1};r_n) \end{array}\right\} \Rightarrow (a;b) = (r_{n-1};r_n) \qquad (1)$$

Так как $r_{n+1} = 0$, то $r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} \Rightarrow r_{n-1} \,\vdots\, r_n$. Так как $r_n > 0$, то по лемме 1

$$(r_{n-1};\, r_n) = r_n. \qquad (2)$$

Из (1) и (2): $(a;\, b) = r_n$. Теорема доказана.

Пример 3. *Найти наибольший общий делитель чисел 525 и 231, т.е. найти (525; 231).*

Решение.

Воспользуемся алгоритмом Евклида, т.е. применим процесс последовательного деления:

525 | 231
462 | 2
231 | **63**
189 | 3
63 | **42**
42 | 1
42 | **21**
42 | 2
0

(Жирным шрифтом выделены остатки, получаемые при последовательном делении).

Последний не равный нулю остаток равен 21, следовательно: (525; 231) = 21.

§ 11. Взаимно простые числа

Определение 1. *Целые числа a и b называются* ***взаимно простыми****, если (a; b) = 1.*

Замечание. *Это определение равносильно определению: числа a и b называются взаимно простыми, если они имеют только один общий натуральный делитель, равный 1.*

Теорема 1. *Для того чтобы целые числа a и b были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы существовали целые числа x и y, такие, что выполняется равенство:*

$$a \cdot x + b \cdot y = 1.$$

Доказательство.

1. Необходимость условия.

Дано: a и b – взаимно простые числа.

Требуется доказать: существуют числа x и y, принадлежащие множеству Z целых чисел, такие что выполняется равенство $a\,x+b\,y = 1$.

Числа a и b взаимно простые, поэтому $(a;b)=1$. Следовательно, на основании теоремы о линейном представлении НОД имеем:

$$\exists\ (x,\ y\in Z) : ax+by=(a;b)=1.$$

2. Достаточность условия.

Дано: $\exists\ (x,\ y\in Z) : ax + by=1$.

Требуется доказать: a и b – взаимно просты.

$a \,\vdots\, 1$ и $b \,\vdots\, 1 \Rightarrow 1$ – общий делитель чисел a и b.

$ax+by = 1$ по условию.

Следовательно, $1=(a;b)$, а значит числа a и b взаимно простые.

Теорема 2. *Если произведение $a \cdot b$ делится на c и числа a и c взаимно просты, то $b \vdots c$.*

Доказательство.

Числа a и c взаимно просты, следовательно, по теореме 1 выполняется равенство $ax + cy = 1 \mid \cdot b$ причем, $x, y \in Z_0$.
Получим $(ab)x + (cb)y = b$

$$\underbrace{(ab) \cdot x}_{\vdots c \text{ по усл.}} + \underbrace{c \cdot (by)}_{\vdots c} = b \Rightarrow b \vdots c$$

Следствие. *Если произведение $(a \cdot b)$ делится на p, где p – простое число и $a \overline{\vdots} p$, то $b \vdots p$.*

Доказательство.

По условию $a \overline{\vdots} p$ и p – простое число, Следовательно, a и p – взаимно простые числа. Имеем $(ab) \vdots p$; a и p – взаимно просты. Следовательно, по теореме 2 $b \vdots p$.

Теорема 3. *Если $a \vdots b$, $a \vdots c$, причем b и c числа взаимно простые, то $a \vdots (bc)$.*

Доказательство.

По условию $a \vdots b \Rightarrow ac \vdots bc$; $a \vdots c \Rightarrow ab \vdots bc$. Числа b и c взаимно простые, следовательно, для них выполняется равенство $bx + cy = 1 \mid \cdot a$, где $x, y \in Z$;

$$\underbrace{(ab)x}_{\vdots bc} + \underbrace{(ca)y}_{\vdots bc} = a \Rightarrow a \vdots (bc).$$

Теорема 4. *Если числа a и b – взаимно просты с c, то их произведение (ab) тоже взаимно просто с c.*

Доказательство.

Введем обозначение: $d=(ab;c)$. Требуется доказать: $d=1$.

Так как $d=(ab;c)$, то $ab \vdots d \wedge c \vdots d$. По условию a и c взаимно просты, следовательно, для них выполняется равенство $ax+cy=1 \mid \cdot\ b$, $x,y \in Z$; $\underbrace{(ab)x}_{\vdots d} + \underbrace{(cb)y}_{\vdots d} = b$. Значит $b \vdots d$. Итак: $b \vdots d$ и $c \vdots d$. Поэтому d – общий делитель чисел b и c. Так как b и c взаимно просты, то $d=1$. Следовательно, $(ab;c)=d=1 \Rightarrow ab$ и c – взаимно простые числа.

§ 12. Линейные представления наибольших общих делителей

Лемма 1. *Если $d = (a; b)$, то частные от деления чисел a и b на число d являются взаимно простыми числами.*

Доказательство.

Пусть $a \vdots d = a_1$, $b \vdots d = b_1$. Требуется доказать a_1 и b_1 – взаимно простые числа.

Предположим противное: a_1 и b_1 – не взаимно простые числа, тогда существует общий делитель чисел a_1 и b_1, больший 1. Пусть $a_1 \vdots c$ и $b_1 \vdots c$ и $c > 1$.

Пусть $a_1 = c \cdot q_1$; $b_1 = c \cdot p_1$; тогда $a = a_1 \cdot d = (c \cdot q_1) \cdot d = (c \cdot d) \cdot q_1 \Rightarrow a \vdots (c \cdot d)$; $b = b_1 \cdot d = (c \cdot p_1) \cdot d = (c \cdot d) \cdot p_1 \Rightarrow b \vdots (c \cdot d)$.

Значит $(c \cdot d)$ – общий делитель чисел a и b. $d = (a; b) \Rightarrow d \vdots (c \cdot d) \Rightarrow 1 \vdots c$ и $c > 1$.

Получили противоречие, следовательно, сделанное предположение неверно. Остается принять: a_1 и b_1 – взаимно простые числа.

Теорема 1. *Если $d = (a; b)$, то существуют числа x и y такие, что выполняется равенство: $d = a \cdot x + b \cdot y$.*

Доказательство.

Разделим числа a и b на d. Получим числа a_1 и b_1, т.е. $a_1 = a \cdot d$; $b_1 = b \cdot d$.

Числа a_1 и b_1 взаимно простые, следовательно, существуют числа x и y, такие что $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = 1$. Умножим обе части последнего равенства на d, получим:

$a_1 \cdot d \cdot x + b_1 \cdot d \cdot y = d \Rightarrow a \cdot x + b \cdot y = d$. Теорема доказана.

Определение. *Представление НОД чисел a и b в виде $d=ax+by$, где $x, y \in Z$, называется* ***линейным представлением НОД*** *чисел a и b.*

Теорема 2. *Если d – общий делитель чисел a и b и d можно представить в виде $d = a \cdot x + b \cdot y$, где $x, y \in Z$, то d – наибольший общий делитель чисел a и b.*

Доказательство.

По условию d – общий делитель чисел a и b, следовательно,

$$a \vdots d \text{ и } b \vdots d. \quad (1)$$

Пусть c – любой общий делитель чисел a и b. По условию

$$d = \underbrace{ax}_{\vdots c} + \underbrace{by}_{\vdots c} \Rightarrow d \vdots c. \quad (2)$$

Из (1) и (2) $\Rightarrow d = (a; b)$.

Пример. *Найти НОД (a;b) и выразить его линейно через a=117, b=15.*

Решение.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
- & 117 & & & 15 \\
 & 105 & & & 7 \\
\hline
- & 15 & | & \mathbf{12} & \\
 & 12 & | & 1 & \\
\hline
- & 12 & | & \mathbf{3} & \\
 & 12 & | & 4 & \\
\hline
 & \mathbf{0} & & &
\end{array}
$$

$\underbrace{12}_{r_1} = a - 7 \cdot b$

$\underbrace{3}_{r_2} = b - 1 \cdot r_1.$

$0 = r_3.$

Следовательно, (117;15)=3.

$3 = b - r_1 \cdot 1 = b - (0 - 7b) \cdot 1 = b - a + 7b = 8b - a = a \cdot (-1) + b \cdot 8.$

НОД (117;15)=3=117·(– 1)+15·8; $x = -1$; $y = 8$.

§ 13. Свойства НОД

Теорема 1. *Для любых натуральных чисел a, b, c: $(a \cdot c; b \cdot c) = c \cdot (a;b)$ (т.е. если числа a и b умножить на c, то и их наибольший общий делитель умножается на c).*

Доказательство.

Пусть $d=(a;b) \Rightarrow a \vdots d$ и $b \vdots d \Rightarrow (a \cdot c) \vdots (c \cdot d)$ и $(b \cdot c) \vdots (c \cdot d) \Rightarrow (c \cdot d)$ – общий делитель чисел $a \cdot c$ и $b \cdot c$.

$d=(a;b)$, следовательно, справедливо равенство $d=ax+by$, где $x, y \in Z$. Но тогда: $c \cdot d = (a \cdot c) \cdot x + (b \cdot c) \cdot y$.

Из соотношений $(a \cdot c) \vdots (c \cdot d)$ и $(b \cdot c) \vdots (c \cdot d)$ и $c \cdot d = (a \cdot c) \cdot x + (b \cdot c) \cdot y$ следует, что $c \cdot d = (a \cdot c; b \cdot c) \Rightarrow (a \cdot c; b \cdot c) = c \cdot (a;b)$. Теорема доказана.

Следствие. *Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a \vdots c; b \vdots c) = \left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right) = \frac{(a;b)}{c}$.*

Доказательство.

Действительно, пусть $a = c \cdot a_1$; $b = c \cdot b_1 \Rightarrow (c \cdot a_1; c \cdot b_1) = c \cdot (a_1; b_1) \Rightarrow$

$(a;b) = c \cdot \left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right) \Rightarrow \left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right) = \frac{(a;b)}{c}$.

Теорема 2. *Для любых чисел a, b, c: (a;b;c)=((a;b);c).*

Доказательство.

Введем обозначения: $d_1=(a;b)$; $d=(d_1;c)$. Имеем:

$$d_1=(a;b) \Rightarrow a \vdots d_1 \text{ и } b \vdots d_1 \quad (1)$$

$$d=(d_1;c) \Rightarrow d \vdots d_1 \text{ и } c \vdots d_1 \quad (2)$$

Из соотношений $a \vdots d_1$ и $b \vdots d_1$ и $d \vdots d_1$ следует $a \vdots d$ и $b \vdots d$. Кроме того, из (2) $\Rightarrow c \vdots d$, значит d – общий делитель чисел a, b, c.

Пусть m – любой общий делитель чисел a, b, c. Докажем, что $d \vdots m$.

$d_1=(a;b) \Rightarrow d_1=ax_1+by_1$, где x_1, $y_1 \in Z$,

$d=(d_1;c) \Rightarrow d=d_1x_2+cy_2$, где x_2, $y_2 \in Z$,

$d=(ax_1+by_1)x_2+cy_2 \Rightarrow d = \underbrace{a(x_1x_2)}_{\vdots m} + \underbrace{b(y_1x_2)}_{\vdots m} + \underbrace{cy_2}_{\vdots m} \Rightarrow d \vdots m.$

Итак, d – общий делитель a, b, c и d делится на любой общий делитель чисел a, b, $c \Rightarrow d=(a;b;c) \Rightarrow (a;b;c)=((a;b);c)$.

Пример. *Найти* (275; 120; 75).

Решение.

1 способ. Найдем сначала (275; 120)

$$\begin{array}{r|l} -\,275 & 120 \\ \cline{2-2} 240 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r|l} -\,120 & \mathbf{35} \\ \cline{2-2} 105 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r|l} -\,35 & \mathbf{15} \\ \cline{2-2} 30 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r|l} -\,15 & \mathbf{5} \\ \cline{2-2} 15 & 3 \\ \hline \mathbf{0} & \end{array}$$

(275; 120) =5

Найдем теперь (5; 75): $75 \vdots 5 \Rightarrow$ (5; 775)=5.

Таким образом, (275; 120; 75)=5.

2 способ. Найдем канонические разложения данных чисел:

$$\begin{array}{r|l} 275 & 5 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$275 = 5^2 \cdot 11^1;$

$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1;$

$75 = 3^1 \cdot 5^2.$

Следовательно, (275; 120; 75)= $5^1 = 5$.

§ 14. Наименьшее общее кратное

Рассмотрим натуральные числа *a* и *b*.

Определение 1. *Число c называется* ***общим кратным*** *чисел a и b, если c⋮a и c⋮b.*

Пример 1. 60⋮5 и 60⋮12, следовательно, 60 – общее кратное чисел 5 и 12.

Чтобы найти множество общих кратных чисел a и b надо найти пересечение множества чисел, кратных a, с множеством чисел, кратных *b*.

Пример 2. *Найти общие кратные чисел 4 и 6.*

Решение.

Множество чисел, кратных числу 4, есть множество *A*={4, 8, 12, 16, 20, 24, …}. Множество чисел, кратных числу 6, есть множество *B*={6, 12, 18, 24, …}. Множество общих кратных чисел 4 и 6 есть $A \cap B = \{12, 24, \dots\}$.

Определение 2. *Число m называется* ***наименьшим общим кратным*** *чисел a и b, если m – общее кратное чисел a и b, и на m делится любое общее кратное чисел a и b.*

Замечание 1. *Если m_1 и m_2 – общие кратные чисел a и b, то выполняется лишь одно из соотношений $m_1<m_2$; $m_1=m_2$; $m_1>m_2$.*

Замечание 2. *Наименьшее общее кратное чисел a и b будем обозначать через НОК (a;b) или* [*a*;*b*].

Теорема 1. *Если* $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ *и* $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}$*– канонические разложения на простые множители чисел a и b, то наименьшее общее кратное чисел a и b вычисляется по формуле:* $[a; b] = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\lambda_s}$, *где* $\lambda_i = max\ (\alpha_i;\ \beta_i)$, i =1, 2, …, s.

Доказательство.

Пусть $m = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\lambda_s}$, тогда m>0.

Так как $\alpha_1 \le \lambda_1$; $\alpha_2 \le \lambda_2$; … ; $\alpha_s \le \lambda_s$, то $m⋮a$. Так как $\beta_1 \le \lambda_1$; $\beta_2 \le \lambda_2$; … ; $\beta_s \le \lambda_s$, то $m⋮b$. Следовательно, m – общее кратное чисел a и b.

Пусть c – любое общее кратное чисел a и b, тогда $c⋮a$ и $c⋮b$. Пусть $c=a\cdot q_1$ и $c=b\cdot q_2$. Следовательно, все простые множители входят в разложение числа c, причем с показателями не меньшими, чем в разложении чисел a и b.

Следовательно, $c = p_1^{\tau_1} \cdot p_2^{\tau_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\tau_s}$.

Так как $\alpha_i \le \tau_i$ и $\beta_i \le \tau_i$, то $\lambda_i \le \tau_i$, где i=1, 2, … , s. Поэтому $c \vdots m$.

Итак, m – общее кратное чисел a и b и на m делится любое общее кратное чисел a и b, следовательно, m – наименьшее общее кратное чисел a и b. Следовательно, $[a;b] = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\lambda_s}$.

Из теоремы 1 вытекает правило нахождения НОК нескольких чисел.

Правило. *Для того чтобы найти НОК нескольких чисел, необходимо:*

1) *выписать канонические разложения данных чисел;*
2) *перечислить все простые множители, входящие хотя бы в одно из канонических разложений данных чисел;*
3) *возвести каждый из перечисленных простых множителей в наибольшую степень, с которой этот простой множитель входит в канонические разложения данных чисел.*

Произведение полученных степеней простых множителей и будет НОК данных чисел.

Пример 3. *Найти* [135;75].

Решение.

Найдем канонические разложения чисел 135 и 75.

$$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$135 = 3^3 \cdot 5; \quad 75 = 3 \cdot 5^2;$$

$$[135;75] = 3^3 \cdot 5^2 = 27 \cdot 25 = 25 \cdot (25+2) = 625 + 50 = 675$$

Теорема 2. *Если a и b – натуральные числа, то выполняется равенство* $[a;b] = \dfrac{a \cdot b}{(a;b)}$.

Доказательство.

Введем обозначения: $m = \dfrac{a \cdot b}{(a;b)}$; $(a;b)=d$. Следовательно, $m = \dfrac{a \cdot b}{d} \Rightarrow a \cdot \dfrac{b}{d} = m \Rightarrow a \cdot b_1 = m \Rightarrow m \vdots a$. Тогда

$$m=\frac{a\cdot b}{d}\Rightarrow\frac{a}{d}\cdot b=a_1b;\Rightarrow m\vdots b.$$

Значит, m – общее кратное чисел a и b.

Пусть c – любое общее кратное чисел a и b. Тогда $c\vdots a$ и $c\vdots b$. Значит $c=a\cdot q_1$ и $c=b\cdot q_2$, тогда $a\cdot q_1=b\cdot q_2 \mid :d$.

$\frac{a}{d}\cdot q_1=\frac{b}{d}\cdot q_2\Rightarrow a_1\cdot q_1=b_1\cdot q_2\Rightarrow(a_1q_1)\vdots b$. Следовательно, так как числа a_1 и b_1 взаимно простые, то $q_1\vdots b_1$, т.е. $q_1=b_1\cdot t$.

$c=a\cdot q_1=(a\cdot b_1)\cdot t=a\frac{b}{d}t=ab\frac{t}{d}=\frac{ab}{d}\cdot t\Rightarrow c\vdots m$ и $t\in Z\Rightarrow c\vdots m$.

Итак: 1) $m>0$;

2) m – общее кратное чисел a и b;

3) на m делится любое общее кратное чисел a и b.

Следовательно, $m=[a;b]\Rightarrow [a;b]=\frac{a\cdot b}{(a;b)}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если a и b взаимно простые числа, то* $[a;b]=a\cdot b$.

Следствие 2. *Если a и b целые числа, то* $[a;b]=\frac{|ab|}{(a;b)}$.

Пример 4. *Найти* $[135;75]$.

Решение.

Воспользуемся формулой из теоремы 2. Найдем сначала НОД чисел 135 и 75 (любым известным способом). $(135;75) = 15$. Тогда

$$[135;75]=\frac{135\cdot 75}{(135;75)}=\frac{135\cdot 5}{1}=675.$$

§ 15. Свойства НОК

Теорема 1. *Если a, b, c – натуральные числа, то*

$$[a\cdot c;b\cdot c] = [a;b]\cdot c.$$

Доказательство.

$$[a\cdot c;b\cdot c]=\frac{ac\cdot bc}{(ac;bc)}=\frac{ab\cdot c^2}{c(a;b)}=\frac{ab\cdot c}{(a;b)}=\frac{ab}{(a;b)}\cdot c=[a;b]\cdot c.$$

Следствие. *Если $a\vdots c$ и $b\vdots c$, то*

$$[a:c;b:c]=\left[\frac{a}{c};\frac{b}{c}\right]=[a;b]:c, т.е. \left[\frac{a}{c};\frac{b}{c}\right]=\frac{[a;b]}{c}.$$

Доказательство.

$$\left[\frac{a}{c};\frac{b}{c}\right]=\frac{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}}{\left(\frac{a}{c};\frac{b}{c}\right)}=\frac{\frac{ab}{c^2}}{\frac{(a;b)}{c}}=\frac{\frac{ab}{c}}{(a;b)}=\frac{ab}{c(a;b)}=\frac{ab}{(a;b)}\cdot\frac{1}{c}=[a;b]\cdot\frac{1}{c}=\frac{[a;b]}{c}.$$

Теорема 2. *Если a, b, c – натуральные числа, то* $[a;b;c] = [[a;b];c]$.

Доказательство.

Обозначим $[a;b]=m_1$; $[m_1;c]=m$. Требуется доказать, что $m=[a;b;c]$.

$$m_1=[a;b] \Rightarrow m_1\vdots a \text{ и } m_1\vdots b \tag{1}$$

$$m=[m_1;c] \Rightarrow m\vdots m_1 \text{ и } m\vdots c \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует $m\vdots a$, $m\vdots b$ и $m\vdots c$, следовательно, m – общее кратное чисел а, b, c.

Пусть n – любое общее кратное чисел a, b и c. Следовательно, $n\vdots a$, $n\vdots b$ и $n\vdots c$.

$n\vdots a$ и $n\vdots b$, следовательно, n – общее кратное чисел a и b. Причем по обозначению $m_1=[a;b]$, следовательно, $n\vdots m_1$.

$n\vdots m_1$ и $n\vdots c$,следовательно, n – общее кратное чисел m_1 и c. Но $m=[m_1;c]$, следовательно, $n\vdots m$.

Итак: 1) m – общее кратное чисел a, b, c;

2) на m делится любое общее кратное чисел a, b, c.

Следовательно, $m=[a;b;c] \Rightarrow [a;b;c] = [[a;b];c]$. Теорема доказана.

Пример. *Найти* [15;20;35].

Решение.

I способ. [15;20;35]=[[15;20];35].

$[15;20]=\frac{15\cdot 20}{(15;20)}=\frac{15\cdot 20}{5}=60;$ $[60;35]=\frac{60\cdot 35}{(60;35)}=\frac{60\cdot 35}{5}=420$. Следовательно, [15;20;35]= 420.

II способ. Найдем канонические разложения чисел 15, 20 и 35: $15=3\cdot 5$; $20=2^2\cdot 5$; $35=5\cdot 7$. Найдем НОК этих чисел по правилу § 14: $[15;20;35]=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=20\cdot 21=420$.

§ 16. Признаки делимости на составные числа

Признаки делимости, доказанные ранее, позволяют устанавливать делимость чисел на 2, 3, 4, 5, 9 и 25. А как узнать, не производя деления, делится ли число на 6? на 12? на 30? Можно предположить, что число будет делиться на 6, если оно делится и на 2, и на 3, но это предположение нуждается в доказательстве.

Признак делимости на 6. *Для того чтобы число x делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3 одновременно.*

Доказательство.

1. Необходимость условия.

Дано: $x \vdots 6$. Требуется доказать: $x \vdots 2$ и $x \vdots 3$.

$$\left.\begin{array}{l} x \vdots 6 \quad \text{и} \quad 6 \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 2 \\ x \vdots 6 \quad \text{и} \quad 6 \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x \vdots 2 \quad \text{и} \quad x \vdots 3.$$

2. Достаточность условия.

Дано: $x \vdots 2$ и $x \vdots 3$. Требуется доказать: $x \vdots 6$.

$x \vdots 2$ и $x \vdots 3$, следовательно, x – общее кратное чисел 2 и 3. Известно, что для любого числа выполняется $x \vdots [2;3]$. Поскольку (2;3)=1, то [2;3]=2·3=6. Следовательно, $x \vdots 6$.

Признак делимости на 12. *Для того чтобы число x делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на 3, и на 4.*

Доказательство.

1. Необходимость условия.

$$\left.\begin{array}{l} x \vdots 12, \quad 12 \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 3 \\ x \vdots 12, \quad 12 \vdots 4 \Rightarrow x \vdots 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x \vdots 3 \wedge x \vdots 4$$

2. Достаточность условия.

$x \vdots 3$ и $x \vdots 4$, следовательно, x – общее кратное 3 и 4. Известно, что любое общее кратное чисел делится на их наименьшее общее кратное, т.е. $x \vdots [3;4]$, а так как (3;4) = 1,то [3;4] = 3·4 = 12. Следовательно, $x \vdots 12$.

Признак делимости на 15. *Для того чтобы число x делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на 3, и на 5.* Доказательство аналогичное.

Список признаков делимости на составные числа можно продолжить. Их обобщением является следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы натуральное число делилось на составное число n=b·c, где числа b и c таковы, что (b;c)=1, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на b и на c.*

Доказательство этой теоремы аналогично приведенным ранее.

Замечание. *Данную теорему можно применять многократно.*

Пример. *Сформулировать признак делимости на* 60.

Решение.

1) Для того чтобы число делилось на 60, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 15, т.к. (4; 15) = 1.
2) Число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 5.

Итак, число делится на 60, если оно делится на 3, на 4 и на 5.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

8.1. Объясните, почему число 15 является делителем числа 60 и не является делителем числа 70.

8.2. Постройте граф отношения «быть делителем данного числа», заданного на множестве $X = \{2; 6; 12; 18; 24\}$. Как отражены на этом графе свойства данного отношения?

8.3. Известно, что число 24 – делитель числа 96, а число 96 – делитель числа 672. Докажите, что число 24 – делитель числа 672, не выполняя деление.

8.4. Докажите, что если в трёхзначном числе две последние цифры одинаковы, а сумма его цифр делится на 7, то и число делится на 7.

8.5. Найдите частные и остатки при делении на 7 следующие числа: 3, 5, 10, 35, 100, 0 - 1, - 7, - 12.

8.6. Число *a* при делении на 3 дает остаток 1. какой остаток при делении на 3 дадут числа a^2, a^3 ?

8.7. Из множества чисел {13; 27; 29; 51; 67} выпишите простые числа, а составные разложите на простые множители.

8.8. Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом? (Если «да», то приведите пример).

8.9. Являются ли простыми числа: 385, 176, 187, 189?

8.10. Составьте таблицу простых натуральных чисел, не превосходящих 40.

8. 11. Не пользуясь таблицей, установите, являются ли простыми следующие числа: 173, 271, 819, 463, 571.

8.12.Найдите канонические разложения на простые множители чисел: 1440; 17600; 429; 88700.

8.13. В какой степени число 2 входит в разложение на множители числа 10! ?

8.14. Какое число имеет следующее каноническое разложение на простые множители: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$?

8.15. Запишите множество всех натуральных делителей числа 36.

8.16. Найдите все натуральные делители чисел 18; 132; 200.

8.17. Найдите число и сумму всех натуральных делителей следующих натуральных чисел: 375; 720.

8.18. Докажите, что $(\forall n \in N)(n > 1)$: $n^4 + 4$ – составное число.

8.19. Найти НОД чисел 3600 и 288; 948 и 624; 120 и 418.

8.20. Пользуясь алгоритмом Евклида, найти НОД следующих чисел: 546 и 231; 1001 и 6253; 2263 и 8249.

8.21. Найти НОД чисел и выразить его линейно через заданные числа: 1672 и 1232; 2911 и 1769.

8.22. Докажите, что числа 432 и 385 взаимно простые.

8.23. Докажите, что два последовательных нечётных числа взаимно просты.

8.24. Известно, что $(a;\ b) = 1$. Докажите, что $(a;\, a+b) = (b;\, a+b) = 1$.

8.25. Ученикам двух пятых классов выдали 469 учебников. Каждый получил одинаковое количество книг. Сколько было пятиклассников, и сколько учебников получил каждый из них?

8.26. Докажите, что если n взаимно просто с 6, то $n^2 - 1$ делится на 24.

8.27. Найти a и b, если известно: $a : b = 11 : 13$; $D(a;\ b) = 5$;

8.28. В три школьных киоска отправили по одинаковому числу тетрадей. Для одной школы отправили тетради пачками, по 150 штук в каждой пачке, для второй – по 100 штук, а для третьей – по 200 штук в каждой пачке. Сколько тетрадей отправили каждой школе, если число тетрадей, отправленных всем школам, меньше 2000?

Образцы контрольных работ

Контрольная работа № 1

1. Используя алгоритм распознавания простых чисел, установите, какие из чисел являются простыми: 557, 413, 691, 671

2. Даны числа: $a = 5100$ и $b = 1001$. Запишите:

множество делителей числа a;

множество делителей числа b;

множество общих делителей данных чисел.

Каков наибольший общий делитель чисел?

3. Найдите с помощью алгоритма Евклида НОД чисел: 351 и 28. Запишите его линейное представление через заданные числа.

4. Найдите число и сумму натуральных делителей натурального числа: 572. Запишите все эти делители.

5. Решите задачу:

Мимо станции железной дороги проходят один за другим три поезда: в первом – 418 пассажиров, во втором – 494, в третьем – 456. Сколько пассажирских вагонов в каждом поезде, если известно, что в каждом вагоне находится по одинаковому числу пассажиров и их число – наибольшее из возможных.

(Задача должны содержать подробное и четкое пояснение рассуждений, используемых при решении).

Контрольная работа № 2.

1. Найти сумму остатков при делении числа 2319044969на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.

2. Докажите, что разность между трехзначным числом и числом, составленным из тех же цифр, но взятых в обратном порядке, делится на 9.

3. Найдите НОК чисел двумя способами: 536 и 1024.

4. Установите, не производя вычислений, значения каких выражений делятся на 11. Решение обоснуйте.

$8204 \cdot 594$;

$64834 \cdot 2794$.

5. Решите задачу:

Наибольший общий делитель двух чисел равен 12. А их наименьшее кратное равно 72. найдите эти числа, если известно, что одно число на 12 больше другого.

(Задача должны содержать подробное и четкое пояснение рассуждений, используемых при решении).

ʉ tsнʝ tɕɣ ʘdʑʆʝ

Учебное издание

Ирина Адольфовна Елецких,
Татьяна Михайловна Сафронова,
Наталия Вячеславовна Черноусова

МАТЕМАТИКА

(Часть I)

Техническое исполнение – В. М. Гришин
Технический редактор – О.А. Ядыкина

Лицензия на издательскую деятельность
ИД № 06146. Дата выдачи 26.10.01
Формат 60 х 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 12,8 Уч.-изд.л. 11,9
Тираж 20 экз. (1-й завод 1-50 экз.). Заказ 187

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»

399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1