МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. И. А. БУНИНА»

**Г. Г. Ельчанинова, Р. А. Мельников**

# ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ:
**Типовые задания с примерами решений для студентов СПО (09.02.03 Программирование в компьютерных системах; 09.02.02 Компьютерные сети)**

**Учебное пособие**



Елец – 2018

УДК 51
ББК 22.1
**Е 59**

Размещено на сайте решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина
от 29.01.2018 г., протокол № 1

Рецензенты:

***Масина Ольга Николаевна*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и компьютерных технологий (Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец).

***Корабельщикова Светлана Юрьевна*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и информационной безопасности (ФГАОУ ВО Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова).

**Е 59 Ельчанинова Г. Г., Мельников Р. А.**
Элементы высшей математики: типовые задания с примерами решений для студентов СПО (09.02.03 Программирование в компьютерных системах; 09.02.02 Компьютерные сети): учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2018. – 65 с.

Основная цель электронного учебного пособия – оказать помощь обучающимся СПО в подготовке к занятиям по дисциплине «Элементы высшей математики», а также организация текущего контроля по этой дисциплине.

УДК 51
ББК 22.1

## *ВВЕДЕНИЕ*

Дисциплина «Элементы высшей математики» относится к обязательным дисциплинам математического и общего естественнонаучного цикла учебного плана по специальностям СПО 09.02.03 – Программирование в компьютерных системах и 09.02.02 – Компьютерные сети.

Для освоения дисциплины «Элементы высшей математики» необходим комплекс знаний, умений, навыков, способов деятельности и установок, полученных и сформированных у студентов в ходе изучения дисциплины «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия» общеобразовательного блока.

Освоение данной дисциплины в качестве предшествующей необходимо при изучении «Теории вероятностей и математической статистики», а также дисциплин профессионального цикла.

Цель курса «Элементы высшей математики» состоит в формировании у обучающихся представлений о математике как науке, предоставляющей фундамент и большие возможности для развития многих отраслей научного знания.

Уровень строгости и, соответственно, «теоретичности» соответствует поставленным задачам:

- знакомство с основными разделами высшей математики;
- развитие математического аппарата, необходимого для успешного выполнения профессиональных задач;
- воспитание математической культуры;
- формирование знаний, достаточных для самостоятельного освоения математического материала;
- привитие осознания значимости приобретаемых знаний и умений для дальнейшей профессиональной деятельности.

Безусловно, применение математических методов расширяет возможности каждого специалиста, поэтому основной специфической задачей преподавателя системы среднего профессионального образования является обучение решению задач с опорой на фундаментальные и прикладные положения теории, которые в большинстве случаев не подлежат доказательству в рамках данного курса.

Пособие содержит систематизацию основных теоретических положений, необходимых для работы с практическим материалом. Тематика соответствует 4 семестру.

Каждый блок теории снабжён задачным материалом, который может быть использован для комплектования индивидуальных семестровых заданий.

## *Раздел 1. Действительные числа*

### 1.1 . Расширение понятия числа

**Опр. 1:** *Скаляром* или *скалярной величиной* называется величина, значение которой характеризуется одним числом без учёта направления или какой-либо другой оценки.

Действительные числа – это:
1) объединение положительных, отрицательных действительных чисел и множества, состоящего из числа ноль;
2) объединение рациональных и иррациональных чисел.

Каждому действительному числу соответствует точка на координатной прямой и обратно.

**Опр. 2:** Числа, представимые в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, а $q \in N$ называются *рациональными*.

Каждое рациональное число представимо в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Чтобы записать обыкновенную дробь в виде десятичной, достаточно разделить числитель на знаменатель «уголком». Результат этого процесса не всегда представим в удобном (конечная десятичная дробь) виде. В результате этого процесса может получиться как конечная, так и чистая периодическая, и смешанная периодическая дроби.
1. Если знаменатель обыкновенной дроби делится на 2, или на 5 или и на 2, и на 5, то данная дробь представима в виде конечной десятичной.
2. Если знаменатель обыкновенной дроби не делится ни на 2, ни на 5, но делится на любое другое простое число (число, делящееся только на единицу и на себя), то такая дробь представима в виде чистой периодической. То есть между запятой и первым периодом не цифр, отличных от цифр периода; период начинается сразу после запятой.
3. Если знаменатель обыкновенной дроби делится на 2, или на 5, или и на 2, и на 5, и, кроме того, делится на любое другое простое число, то данная дробь представима в виде смешанной периодической дроби. То есть такой дроби, у которой между запятой и первым периодом есть цифры, отличные от цифр периода.

Чтобы перевести бесконечную периодическую дробь в обыкновенную, нужно руководствоваться следующим правилом:
из числа, стоящего до второго периода вычесть число, стоящее до первого периода и записать эту разность в числителе, а в знаменателе записать столько девяток, сколько цифр в периоде, а после девяток столько нолей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

**Опр. 3:** Числа, которые невозможно представить в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, а $q \in N$ называются *иррациональными*.

Всякое иррациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной непериодической дроби. *Непериодическая* дробь – такая, у которой в десятичной записи после запятой нельзя выделить повторяющуюся группу цифр.

К появлению иррациональных чисел приводит действие извлечения корня степени $n$ из рационального числа. Однако иррациональные числа не порождаются только корнями. И таких чисел значительно больше, например, $\pi$ и $e$.

Иррациональные числа появляются также как результат выполнения какого-либо бесконечного процесса.

Например, число

$$\sqrt{2} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}.$$

Ошибочно думать также, что всякое действительное (вещественное) число обязательно является корнем какого-либо многочлена с целыми коэффициентами. Такие числа, кстати, называются алгебраическими.

Действия над действительными числами подчинены обычным законам.

Множество действительных чисел *упорядочено*.

Также говорят, что множество $\boldsymbol{R}$ обладает свойством *непрерывности*.

Это свойство существенно отличает множество действительных чисел от множества рациональных чисел.

Важная характеристика числа во множестве действительных чисел - его модуль.

**Опр. 4:** *Абсолютной величиной* (или *модуле*м) действительного числа $a$ называется число $|a|$, если $a$ положительно или равно нулю, и число $-a$, если $a$ отрицательно, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Иначе говоря, модуль неотрицательного числа равен самому этому числу; модуль отрицательного числа равен этому числу, взятому с противоположным знаком.

В качестве модуля действительного числа $a \neq 0$ берут большее из двух чисел $a$, $-a$.

Основным источником появления модуля в алгебре является операция извлечения квадратного корня из полного квадрата, т. е.

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

*Свойства модуля*

1°. Из определения непосредственно следует, что для любого $a \in \boldsymbol{R}$: $|-a| = |a|$.

2°. Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ справедливо двойное неравенство $-|a| \leq a \leq |a|$.

Действительно, из определения также следует, что для любого действительного числа $a$ справедливы неравенства: $a \le |a|$, $-a \le |a|$, а также $a \le |a|$ и $a \ge -|a|$.

Для всех $a, b \in \boldsymbol{R}$:

3°. $|a| \le b \Leftrightarrow -b \le a \le b$.

4°. $|a+b| \le |a| + |b|$.

5°. $|a-b| \ge |a| - |b|$.

6°. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

7°. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \ne 0$.

Геометрически модуль числа можно интерпретировать как *расстояние:* модуль числа $a$ – это расстояние от начала отсчета (на координатной прямой) до точки, соответствующей числу $a$.

*Числовое множество* – это любое множество, элементами которого являются действительные числа. Числовые множества делятся на ограниченные и неограниченные.

**Опр. 5:** Числовое множество X называется

- *ограниченным сверху*, если существует число $B$, такое, что $\forall x \in X : x \le B$ ($B$ при этом называется верхней границей);
- *ограниченным снизу*, если существует число а, такое, что $\forall x \in X : x \ge a$ ($a$ при этом называется нижней границей);
- *ограниченным*, если оно ограничено как сверху, так и снизу;
- *неограниченным*, если оно не является ограниченным.

Числовые множества могут иметь границы - нижнюю (inf) и верхнюю (sup).

**Опр.6:** Число $m$ называется *нижней границей* множества $E$, если: 1) в множестве $E$ нет ни одного числа, меньшего $m$ и 2) для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ во множестве $E$ существует хотя бы одно число х, которое будет меньше, чем $m + \varepsilon$.

**Опр. 7:** Число $M$ называется *верхней границей* множества $E$, если: 1) в множестве $E$ нет ни одного числа, большего $M$ и 2) для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ во множестве $E$ существует хотя бы одно число х, которое будет больше, чем $M - \varepsilon$.

Символически: $m = \inf E, M = \sup E$.

**Теорема.** Если множество $E$ ограничено сверху, то оно имеет верхнюю грань, снизу – нижнюю грань.

**Следствие:** если множество ограничено, то существует наименьший отрезок, содержащий всё множество $E$, а именно $[m; M] = [\inf E, \sup E]$.

Среди числовых множеств часто рассматриваются так называемые *промежутки*.

Пусть $a$ и $b$ – произвольные действительные числа, взятые при условии $a<b$.

**Опр. 8:** *Интервалом* $(a,b)$ называется множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих неравенству $a<x<b$.

**Опр. 9:** *Отрезком* (*сегментом*) $[a,b]$ называется множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$.

**Опр. 10:** *Полусегментом* $(a;b]$ ($[a;b)$) называется множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x \le b$ ($a \le x < b$).

**Опр. 11:** Пусть $\varepsilon$ – положительное, достаточно малое действительное число, $a$ – любое действительное число. Множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ называется *окрестностью* или $\varepsilon$*-окрестностью* точки $a$. $a$ – центр окрестности, $\varepsilon$ – радиус окрестности. Интервал $(a-\varepsilon;a)$ – *левая полуокрестность*, $(a;a+\varepsilon)$ – *правая полуокрестность* точки $a$.

## 1.2. Комплексные числа

Расширением множества действительных чисел, является множество *комплексных чисел* ***C***.

**Опр. 1:** Упорядоченная пара $(a;b)$ называется *комплексным числом*. $a$ – действительная , $b$ – мнимая его часть.

**Замечание:**

- $a \ne 0, b \ne 0$ – мнимое число;
- $a = 0, b \ne 0$ – чисто мнимое число;
- $a \ne 0, b = 0$ – действительное число.

**Опр. 2:** Два комплексных числа называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

**Опр. 3:** *Суммой* двух комплексных чисел называется комплексное число, действительная часть которого равна сумме действительных частей слагаемых, а мнимая часть равна сумме мнимых частей, т. е.

$$z_1 = (a_1;b_1), z_2 = (a_2;b_2) \Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2).$$

**Опр. 4:** *Разностью* двух комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны соответственно разности действительной и мнимой частей уменьшаемого и вычитаемого, т. е.

$$z_1 = (a_1;b_1), z_2 = (a_2;b_2) \Rightarrow z_1 - z_2 = (a_1 - a_2; b_1 - b_2).$$

**Опр. 5:** *Произведением* комплексных чисел $z_1 = (a_1;b_1), z_2 = (a_2;b_2)$ называется комплексное число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2; a_1 b_2 + a_2 \cdot b_1).$$

**Опр. 6:** *Частным* двух комплексных чисел называется комплексное число

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2};\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right).$$

**Опр. 7:** Число $z=(-a;-b)$ называется *противоположным* для числа $z=(a;b)$.

**Опр. 8:** Число $z=(a;-b)$ называется *сопряжённым* для числа $z=(a;b)$.

**Теорема.** Всякое комплексное число $z=(a;b)$ можно записать в виде $z=a+bi$.

Такое представление называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

*i* – мнимая единица, *i* =(0;1) и по закону умножения комплексных чисел $i^2=-1$.

Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме можно производить по правилам:

- $(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i$;
- $(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$;
- $(a_1+b_1i):(a_2+b_2i)=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i\right)$.

**Теорема.** Целые степени числа *i* вычисляются по формулам:

$$i^{4к}=1, i^{4к+1}=i, i^{4к+2}=-1, i^{4k+3}=-i.$$

Комплексное число $z=a+bi$ изображается точкой координатной плоскости с абсциссой a и ординатой b. Точка *M(a;b)* – точка, изображающая комплексное число $z=a+bi$. Соответственно, координатная плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Действительные числа изображаются точками оси абсцисс. Ось ОХ называется *действительной*.

Чисто мнимые числа изображаются точками оси ординат, которая называется *мнимой*.

Сопряжённые числа изображаются точками, симметричными относительно действительной оси.

Взаимно противоположные числа изображаются точками, симметричными относительно начала координат.

Комплексное число $z=a+bi$ изображают ещё и вектором $\overrightarrow{OM}$, где *M(a;b)*.

Соответственно двум способам геометрического изображения комплексных чисел существует взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством всех точек координатной плоскости, а также между множеством комплексных чисел и множеством всех векторов координатной плоскости, выходящих из начала координат.

При сложении комплексных чисел как векторов, операция производится по правилу параллелограмма.

Комплексные числа можно представлять ещё и в тригонометрической форме.

**Опр. 9:** Тригонометрической формой комплексного числа $z = a + bi$ называется его представление в виде $z = r(cos\varphi + i\,sin\varphi)$, где $r \geq 0$, $\varphi \in R$. Число $r$ называется *модулем* комплексного числа (это расстояние от начала координат до точки, изображающей данное комплексное число), а $\varphi$ – *аргументом* комплексного числа (величина направленного угла между положительным направлением оси абсцисс и вектором, изображающим комплексное число). Модуль комплексного числа обозначается $|z|$ или $|a + bi|$, аргумент – $argz$.

**Теорема.** Всякое комплексное число можно записать в тригонометрической форме.

Для записи в тригонометрической форме комплексных чисел $z \neq 0$ используют соотношения:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \begin{cases} cos\varphi = \dfrac{a}{r}, \\ sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

Обычно аргумент комплексного числа $z$ выбирают из промежутка $\left[0; 2\pi\right)$, в этом случае он определяется однозначно.

Над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме также можно выполнять арифметические операции:
если $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + i\,sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + i\,sin\varphi_2)$, то

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 - \varphi_2))$\$
- $z^n = r^n(cos\,n\varphi + i\,sin\,n\varphi)$ (формула Муавра);
- $\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}\left(cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\,sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2,...,n-1$.

**Теорема.** Если $n \in N, n \geq 2$, то все значения корня $n$-й степени из единицы вычисляются по формуле: $\sqrt[n]{1} = cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\,sin\dfrac{2\pi k}{n}, k = 0,1,2,...,n-1$.

**Теорема.** Если $u$ – одно из значений корня $n$-й степени из комплексного числа $z$, то все значения $\sqrt[n]{z}$ получим умножением $u$ на все значения корня $n$-й степени из единицы.

**Теорема:** Квадратный корень из комплексного числа $z = a + bi$, записанного в алгебраической форме, где $b \neq 0$, может быть вычислен по формулам:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

знак "+" берётся, если b>0, знак "–", если b<0.

### *Задания для самостоятельного решения к Разделу 1*

**Задание 1.** Перевести заданную периодическую дробь в обыкновенную (а) и выяснить, в какую десятичную дробь можно обратить данную обыкновенную (б), обращать последнюю в десятичную дробь не нужно.

| **№ варианта** | **а** | **б** | **№ варианта** | **а** | **б** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,7(2) | $\frac{1}{15}$ | **13** | -3,7(4) | $\frac{31}{12}$ |
| **2** | 3,(13) | $\frac{3}{11}$ | **14** | 2,(3) | $\frac{3}{63}$ |
| **3** | -1,(2) | $\frac{7}{18}$ | **15** | 1,5(1) | $\frac{1}{27}$ |
| **4** | 0,(31) | $\frac{1}{15}$ | **16** | -1,9(23) | $\frac{31}{165}$ |
| **5** | 4,(7) | $\frac{23}{69}$ | **17** | 13,(13) | $\frac{3}{9}$ |
| **6** | 1,(9) | $\frac{13}{66}$ | **18** | -0,(1) | $\frac{22}{63}$ |
| **7** | -0,1(73) | $\frac{13}{61}$ | **19** | 3, 5(1) | $\frac{1}{22}$ |
| **8** | 1,7(3) | $\frac{3}{61}$ | **20** | -10,11(2) | $\frac{1}{6}$ |
| **9** | 5, (5) | $\frac{3}{63}$ | **21** | 0,(1231) | $\frac{35}{77}$ |
| **10** | 0,(71) | $\frac{3}{63}$ | **22** | 1,(8) | $\frac{73}{3}$ |
| **11** | 0,12(1) | $\frac{1}{19}$ | **23** | 7,(7) | $\frac{13}{6}$ |
| **12** | -4,2(3) | $\frac{2}{27}$ | **24** | 100,(7) | $\frac{2}{12}$ |

**Задание 2.** Выполнить действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме:

- найти $z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$,

- записать число $z_1$ в тригонометрической форме,
- возвести его в степень *n*,
- извлечь из $z_1$ корень степени *m*, если

| **№ варианта** | $z_1$ | $z_2$ | ***n*** | ***m*** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $2+\sqrt{3}i$ | $7-7\sqrt{3}i$ | 5 | 4 |
| **2** | $2-2i$ | $1-2i$ | 2 | 2 |
| **3** | $2+2i$ | $\sqrt{3}-i$ | 3 | 5 |
| **4** | $5-2i$ | $2+i$ | 4 | 3 |
| **5** | $2+3i$ | $2-2i$ | 3 | 4 |
| **6** | $2-0{,}5i$ | $0{,}5-2i$ | 2 | 3 |
| **7** | $0{,}6-0{,}6\sqrt{3}i$ | $2+0{,}2i$ | 3 | 3 |
| **8** | $2-2i$ | $2+2\sqrt{2}i$ | 5 | 2 |
| **9** | $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}i$ | $\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i$ | 2 | 3 |
| **10** | $11-4i$ | $1+i$ | 2 | 2 |
| **11** | $1+i$ | $5-5i$ | 5 | 3 |
| **12** | $0{,}5+i$ | $i-2$ | 2 | 4 |
| **13** | $2-\sqrt{3}i$ | $7+7\sqrt{3}i$ | 5 | 4 |
| **14** | $2+2i$ | $1+2i$ | 2 | 2 |
| **15** | $2-2i$ | $\sqrt{3}+i$ | 3 | 5 |
| **16** | $5+2i$ | $2-i$ | 4 | 3 |
| **17** | $2-3i$ | $2+2i$ | 3 | 4 |
| **18** | $2+0{,}5i$ | $0{,}5+2i$ | 2 | 3 |
| **19** | $0{,}6+0{,}6\sqrt{3}i$ | $2-0{,}2i$ | 3 | 3 |
| **20** | $2+2i$ | $2-2\sqrt{2}i$ | 5 | 2 |
| **21** | $\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i$ | $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}i$ | 2 | 3 |
| **22** | $11+4i$ | $1-i$ | 2 | 2 |
| **23** | $1-i$ | $5+5i$ | 5 | 3 |
| **24** | $0{,}5-i$ | $i+2$ | 2 | 4 |

**Задание 3.** Решить уравнение.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $x^4-4x^2+16=0$ | **13** | $ix^2+(3+2i)x-6=0$ |
| **2** | $x^6-28x^3+27=0$ | **14** | $x^2+(5-6i)x-(1+9i)=0$ |
| **3** | $x^4-2x^2+4=0$ | **15** | $4x^2+(8+i)x-i=0$ |
| **4** | $(2x+3)^6-9(2x+3)+8=0$ | **16** | $x^2+(1-2i)x-2i=0$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **5** | $x^2+(-5+6i)x-(1+9i)=0$ | **17** | $ix^2+(-3+2i)x-6=0$ |
| **6** | $ix^2+(3-2i)x-6=0$ | **18** | $4x^2+(-8-i)x-i=0$ |
| **7** | $4x^2+(8-i)x-i=0$ | **19** | $x^2+(5+6i)x-(1+9i)=0$ |
| **8** | $x^4+4x^2+16=0$ | **20** | $ix^2+(-3+2i)x-6=0$ |
| **9** | $x^4+2x^2+4=0$ | **21** | $x^2+(5+6i)x-(1-9i)=0$ |
| **10** | $x^6+28x^3+27=0$ | **22** | $x^2+(1+2i)x-2i=0$ |
| **11** | $(2x+3)^6+9(2x+3)+8=0$ | **23** | $x^2+(5+6i)x-(-1-9i)=0$ |
| **12** | $x^2+(-5-6i)x-(1+9i)=0$ | **24** | $4x^2+(-8+i)x-i=0$ |

## *Раздел 2. Основы линейной алгебры*

### 2.1. Матрицы

Матрица – удобный способ организации данных во многих задачах.

**Опр. 1:** *Матрицей* размера $n\times m$ ($n,m\in N$) называют прямоугольную таблицу чисел, содержащую $n$ строк и $m$ столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Запись такой таблицы обычно заключают в круглые скобки. Для обозначения матриц обычно используют заглавные буквы латинского алфавита. Если нужно указать размеры матрицы, то пишут $A_{n\times m}$. Для обозначения позиций элементов, образующих матрицу, применяют двойную индексацию – $ij$, первое число – номер строки, второе – номер столбца. Элемент матрицы, стоящий в позиции $ij$, обозначают $a_{ij}$, или $A_{ij}$, или $(A_{ij})$, или $A(i,j)$.

Матрицы одинакового размера называются *однотипными*.

**Опр. 2:** Две однотипные матрицы размера $n\times m$ называются *равными*, если равны их соответствующие элементы.

По определению:

$$A=B \Leftrightarrow a_{ik}=b_{ik} \ (i=1,2,\dots,n, \ \ k=1,2,\dots m).$$

Матрица размера $1\times m$ называется *матрицей-строкой* длины $m$, матрица размера $n\times 1$ называется *матрицей-столбцом* высоты $n$.

$$A=A, \ A=B \Leftrightarrow B=A, \ \ A=B\wedge B=C \Rightarrow A=C.$$

В случае, когда $n=m$, матрица называется *квадратной* порядка $n$, если же $n\neq m$, матрица называется *прямоугольной*.

**Опр. 3:** *Нуль-матрицей* размера $n \times m$ называется матрица, обозначаемая $O_{n\times m}$ (или просто 0), определённая следующим условием: $O_{ij} = 0$.

**Опр. 4:** *Противоположной* к матрице А называется матрица тех же размеров, обозначаемая –А, определённая следующим образом: $(-A)_{ij} = -A_{ij}$.

**Опр. 5:** *Суммой* матриц А и В одинаковых размеров называется матрица, обозначаемая А+В, имеющая те же размеры, что и матрицы-слагаемые, и определяемая следующим образом: $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, то есть матрицы складываются поэлементно (каждый элемент матрицы-суммы равен $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ – элемент матрицы А+В, стоящий в $i$-той строке и к-том столбце, равен сумме элементов матриц А и В, стоящих в $i$-той строке и к-том столбце).

Сложение матриц обладает следующими свойствами:

1. А+В=В+А.
2. (А+В)+С=А+(В+С)=А+В+С.
3. А+0=0+А=А.
4. А+(-А)=(-А)+А=0.

**Опр. 6:** Пусть $\alpha \in R$, А – матрица размера $n \times m$. *Произведением* действительного числа $\alpha$ на матрицу А называется матрица, обозначаемая $\alpha A$, определяемая следующим образом: $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$, то есть матрица умножается на число поэлементно.

Свойства умножения матрицы на число:

1. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ - первый дистрибутивный закон.
2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ - второй дистрибутивный закон.
3. -1$\cdot A = -A$.
4. 1$\cdot A = A$.
5. $0 \cdot A = O$.
6. $\alpha \cdot O = O$.

**Опр. 7:** Пусть А – матрица размера $n \times p$, В – матрица размера $p \times m$. *Произведением* матрицы А на матрицу В называется матрица, обозначаемая АВ размера $n \times m$ и определяемая так: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$ (каждый её элемент вычисляется по формуле: $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i1}b_{2k} + \ldots + a_{im}b_{nk}$, т. е. элемент $c_{ik}$ матрицы АВ, стоящий в $i$-той строке и к-том столбце, равен сумме произведений элементов $i$-той строки матрицы А на соответствующие элементы к-того столбца матрицы В).

**Замечание 1***:* перемножать можно только матрицы, размеры которых согласованы, а именно: число столбцов первого сомножителя должно быть равно числу строк второго сомножителя. В результате перемножения получается матрица с числом строк, равным числу строк первого сомножителя, и числом столбцов, равным числу столбцов второго сомножителя.

**Замечание 2:** при умножении матрицы-строки на матрицу получается матрица-строка, при умножении матрицы на матрицу-столбец получается матрица-столбец.

**Теорема.** Умножение матриц (в размерах, больших чем $1\times 1$) некоммутативно.

**Теорема.** Умножение матриц ассоциативно, то есть $(AB)C = A(BC)$.

**Теорема.** Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения: $(A+B)C = AC + BC$.

**Теорема.** Чтобы умножить число на произведение матриц достаточно это число умножить на одну из матриц или числовой множитель произведения двух матриц можно относить к любой матрице произведения: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

**Теорема.** Во множестве матриц (размеров, больших чем $1\times 1$) существуют такие матрицы $A \neq 0$ и $B \neq 0$, что AB=0.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицы, удовлетворяющие условию последней теоремы, называются делителями нуля.

**Опр. 8:** Квадратная матрица $E_n$, заданная равенством $(E)_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases}$, называется *единичной* порядка $n$, т. е. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Очевидно, справедливо равенство EA=AE=A, где, если A – матрица размера $m\times n$, слева в равенстве стоит $E_m$, а справа $E_n$.

**Опр. 9:** Элементарные преобразования

1) перестановка любых двух строк (столбцов) матрицы;
2) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;
3) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца) той же матрицы, умноженной на любое число;
4) исключение из матрицы нулевой строки (столбца)

называются *неособенными элементарными преобразованиями* строк (столбцов) матрицы.

*Рангом* матрицы называется количество ненулевых строк эквивалентной ей матрицы, приведенной (с помощью элементарных преобразований) к ступенчатому виду.

**Опр. 10:** *Столбцовым рангом* матрицы A $n\times m$ называется ранг системы её столбцов $\langle A^1, A^2, ..., A^m \rangle$. *Строчечным рангом* матрицы A называется ранг системы её строк, то есть ранг системы векторов $\langle A_1, A_2, ..., A_n \rangle$ Строчечный и столбцовый ранги матрицы A равны и поэтому называются *рангом* матрицы.

Обозначение: строчечный ранг – $r(A)$, столбцовый – $\rho(A)$, ранг матрицы – $r_A$.

**Опр. 11:** Квадратная матрица называется *невырожденной*, если её ранг равен порядку матрицы. Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ранг матрицы меньше её порядка.

**Теорема.** Всякую невырожденную квадратную матрицу при помощи цепочки элементарных преобразований строк можно преобразовать в единичную матрицу.

**Опр. 12:** Квадратная матрица $n \times n$ называется *диагональной*, если $(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases}$, т. е. диагональная матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

**Опр. 13:** Квадратная матрица $n \times n$ называется *скалярной*, если $A = \alpha \cdot E, \alpha \in R$, т. е. скалярная матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$.

**Замечание:** после того, как введена скалярная матрица, умножение матрицы на число логично заменить умножением на скалярную матрицу.

**Опр. 14:** *Транспонированной* матрицей для матрицы А размера $n \times m$ называется матрица, обозначаемая $A^t$ или $A'$, размера $m \times n$, определяемая следующим: $\left(A^t\right)_{ij} = (A)_{ji}$.

Имеют место следующие свойства:

1. $\left(A^t\right)^t = A$;
2. $(\lambda A^t) = \lambda A^t$;
3. $(A+B)^t = A^t + B^t$;
4. $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$.

**Опр. 15:** Матрица А называется *обратимой* слева (справа), если существует матрица $A_л^{-1}$ ($A_п^{-1}$), называемая левой (правой) обратной, такая, что

$$A_л^{-1} \cdot A = E \ (\mathrm{A}\, A_п^{-1} = E).$$

**Опр. 16:** Квадратная матрица А называется *обратимой*, если существует матрица $A^{-1}$, называемая обратной к А, такая, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

**Теорема.** Если цепочка неособенных элементарных преобразований строк $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ преобразует матрицу А в единичную матрицу Е, то эта же цепочка элементарных преобразований преобразует Е в матрицу $A^{-1}$.

Из теоремы вытекает *правило вычисления обратной матрицы*:
Чтобы вычислить матрицу, обратную к А, достаточно:

1) приписать к А справа единичную матрицу того же порядка;

2) полученную матрицу A⋮E при помощи элементарных преобразований строк привести к виду E⋮C (то есть, матрицу A преобразовать в единичную). Тогда полученная матрица C будет обратной к матрице A.

**Опр. 17:** Матрица называется *ступенчатой*, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) в матрице нет нулевых строк; 2) первый неравный нулю элемент каждой строки, начиная со второй, расположен правее первого неравного нулю элемента предыдущей строки. Матрица, состоящая из одной ненулевой строки, также считается ступенчатой.

**Теорема.** Всякую ненулевую матрицу при помощи элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

**Теорема.** Если A – ненулевая и неступенчатая матрица, то её ранг равен рангу ступенчатой матрицы, полученной из матрицы A с помощью элементарных преобразований строк.

## 2.2. Системы линейных уравнений и определители матриц

Рассмотрим систему из $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

**Замечание:** число уравнений в системах линейных уравнений не должно быть равно числу неизвестных (в общем случае).

Образуем матрицу A размера $m \times n$ по правилу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Она называется матрицей системы (матрицей коэффициентов системы).

Обозначим через $x$ матрицу-столбец из неизвестных, т. е. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, а через $b$ матрицу-столбец свободных членов (правых частей СЛАУ), т.е. $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$, тогда система линейных уравнений может быть записана в виде: $Ax = b$, который называется *матричной записью системы линейных алгебраических уравнений*.

Если матрица А квадратная, то и систему линейных уравнений называют *квадратной*; если $b=0$, то СЛАУ называют *однородной* системой линейных уравнений (ОСЛАУ).

Формально всю информацию о СЛАУ (кроме обозначений неизвестных) сохраняет матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & \dots & .. & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемая *расширенной матрицей* системы. В записи расширенной матрицы системы применяют разделитель – вертикальную черту, отделяющую столбец правых частей от матрицы коэффициентов.

**Опр. 18:** Упорядоченный набор из $n$ чисел называется *решением системы линейных уравнений* с $n$ неизвестными, если при подстановке его элементов вместо неизвестных во все уравнения системы получаются верные числовые равенства.

В зависимости от того, каково множество решений СЛАУ, они делятся на *совместные* ($r_{A|b}\neq 0$, непротиворечивая, имеющая решение) и *несовместные* ($r_{A|b}=0$, противоречивая, не имеющая решений). Кроме того, если $r_A\neq r_{A|b}$, то система несовместна, если $r_A=r_{A|b}=n$, то система имеет единственное решение, если же $r_A=r_{A|b}<n$, то система имеет бесконечно много решений.

Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, т.е. если $\left|r_{A|b}\right|=1$, в противном случае она называется *неопределённой*.

**Теорема.** Однородная система всегда совместна.

Очевидно, решением однородной СЛАУ всегда является нулевое решение, которое называется *тривиальным*. Решение однородной СЛАУ, отличное от нулевого называется *нетривиальным*.

**Теорема.** Если СЛАУ имеет более одного решения, то она имеет бесконечно много решений.

**Опр. 19:** Системы линейных уравнений называются *равносильными*, если множества их решений совпадают ($r_{A_1|b_1}=r_{A_2|b_2}$).

Процесс решения СЛАУ – это цепочка переходов от исходной системы к равносильной такой, что для последней в цепочке СЛАУ можно найти множество решений.

Выделяют следующие равносильные преобразования СЛАУ (их называют *гауссовыми* в честь известного немецкого математика К.Ф. Гаусса):

1. Перемена местами уравнений системы.
2. Умножение одного из уравнений системы на число, отличное от нуля и прибавление к нему другого уравнения системы, умноженного на число.

Основной метод решения СЛАУ – *метод Гаусса* (метод исключения неизвестных). Процедура исключения неизвестного такова. В СЛАУ определяется уравнение, в котором есть неизвестное с ненулевым коэффициентом, это уравнение объявляется ведущим, а неизвестное, подлежащее исключению – главным. Ведущее уравнение с помощью преобразования 1 ставится на первое место, а затем с помощью ведущего уравнения преобразованиями типа 2 главное неизвестное исключается из остальных уравнений.

Процесс применения процедуры исключения обрывается за конечное число шагов, так как число уравнений и неизвестных конечно, а ведущие уравнения и главные неизвестные предыдущих шагов выбывают из рассмотрения на каждом следующем шаге.

В процессе исключения неизвестных одновременно с исключением одного неизвестного из уравнения может исключиться сразу несколько неизвестных или сразу все неизвестные: $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$ или $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_j' \neq 0$. В первом случае уравнение превращается в тождество и его можно опустить в СЛАУ, а во втором случае уравнение превратилось в неверное числовое равенство, что означает несовместность системы.

**Опр. 25:** *Определителем* (или детерминантом) квадратной матрицы А называется число, равное сумме произведений элементов матрицы, взятых по одному и только одному из каждой строки и каждого столбца, так, для матрицы

- второго порядка в эту сумму входят:

1) произведение элементов главной диагонали со своим знаком;
2) произведение элементов побочной диагонали с противоположным знаком;

- третьего порядка в эту сумму входят:

1) произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, образующих треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали, со своими знаками;
2) произведение элементов побочной диагонали и произведение элементов, образованных треугольниками с основаниями, параллельными побочной диагонали, с противоположными знаками.

**Замечание:** правило для вычисления определителя третьего порядка называется правилом треугольника.

Основные свойства определителей:

1. Если в квадратной матрице строки заменить соответствующими столбцами (транспонировать матрицу), то величина определителя не изменится.
2. Если в квадратной матрице есть нулевая строка (столбец), то её определитель равен 0.
3. Если в квадратной матрице переставить местами две строки (столбца), определитель изменит только знак.

4. Если в матрице есть одинаковые строки (столбцы), то её определитель равен 0.
5. Если все элементы какой-либо строки (столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя (или наоборот, можно умножить все элементы строки (столбца) на одно и то же число, определитель тоже умножится на это число).
6. Если в матрице есть две пропорциональные строки (столбца), то определитель матрицы равен 0.
7. Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) квадратной матрицы является суммой двух слагаемых, то определитель матрицы равен сумме двух определителей (справедливо и для $m$ слагаемых).
8. Если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число, то величина определителя не изменится.
9. Если какая-либо строка (столбец) квадратной матрицы является линейной комбинацией других строк (столбцов), то её определитель равен 0.

**Теорема.** Определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей этих матриц.

Пусть дана система из $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...................................... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

**Опр. 26:** Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы* (главным определителем системы).

Составим также определители $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$, где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k-1} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k-1} & b_2 & ... & a_{2n} \\ .. & .. & ... & .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nk-1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(определитель $\Delta_k$ получается из определителя $\Delta$ путём замены $k$-го столбца столбцом свободных членов).

**Теорема (Крамера).** Если определитель системы $n$ линейных уравнений с $n$ переменными отличен от 0, то система имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

**Замечание:** если $\Delta=0$, то систему по правилу Крамера решить нельзя.

**Теорема.** Система $n$ линейных однородных уравнений с $n$ переменными имеет нетривиальное (ненулевое) решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю.

**Замечание:** правило Крамера применимо только к системам линейных уравнений с невырожденной матрицей, а метод Гаусса универсален, т. е. всегда применим.

### *Задания для самостоятельного решения к Разделу 2*

**Задание 1.** По заданной матрице А вычислить её определитель и составить обратную матрицу $A^{-1}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ | **13** | $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **2** | $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ | **14** | $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ |
| **3** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ | **15** | $A=\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$ |
| **4** | $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ | **16** | $A=\begin{pmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{pmatrix}$ |
| **5** | $A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ | **17** | $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ |
| **6** | $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ | **18** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **7** | $A=\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$ | **19** | $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **8** | $A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ | **20** | $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}$ |
| **9** | $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ | **21** | $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ |
| **10** | $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | **22** | $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **11** | $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$ | **23** | $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 5 & 3 & -2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ |
| **12** | $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ | **24** | $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$ |

**Задание 2.** Исследовать совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{cases}2x+7y+3z+u=6,\\ 3x+5y+2z+2u=4,\\ 9x+4y+z+7u=2\end{cases}$ | **13** | $\begin{cases}4x-6y+5z=0,\\ 6x-9y+10z=0\end{cases}$ |
| **2** | $\begin{cases}2x-3y+5z+7u=1,\\ 4x-6y+2z+3u=2,\\ 2x-3y-11z-15u=1\end{cases}$ | **14** | $\begin{cases}5x+3y+4z=0,\\ 6x+5y+6z=0\end{cases}$ |
| **3** | $\begin{cases}3x+4y+z+2u=3,\\ 6x+8y+2z+5u=7,\\ 9x+12y+3z+10u=13\end{cases}$ | **15** | $\begin{cases}x-y+z=0,\\ x+3y-z=0,\\ 2x+3y+z=0\end{cases}$ |
| **4** | $\begin{cases}3x-5y+2z+4u=32\\ 7x-4y+z+3u=5,\\ 5x+7y-4z-6u=3\end{cases}$ | **16** | $\begin{cases}x+2y+3z=5,\\ x+3y+4z=3,\\ x+4y+5z=1\end{cases}$ |
| **5** | $\begin{cases}2x+5y-8z=8,\\ 4x+3y-9z=9,\\ 2x+3y-5z=7,\\ x+8y-7z=12\end{cases}$ | **17** | $\begin{cases}x-y+z=0,\\ 2x+3y+z=0,\\ 3x+y-4z=0\end{cases}$ |
| **6** | $\begin{cases}2x-y+3z-7u=5,\\ 6x-3y+z-4u=7,\\ 4x-2y+14z-31u=18\end{cases}$ | **18** | $\begin{cases}x-3y+4z=-4,\\ 2x+2y+10z=-2,\\ 3x-y+14z=-7\end{cases}$ |
| **7** | $\begin{cases}9x-3y+5z+6u=4,\\ 6x-2y+3z+u=5,\\ 3x-y+3z+14u=-8\end{cases}$ | **19** | $\begin{cases}2x+3y-4z=-16,\\ 3x-4y+5z=26,\\ 4x+y-2z=-4\end{cases}$ |
| **8** | $\begin{cases}3x+2y+2z+2u=2,\\ 2x+3y+2z+5u=3,\\ 9x+y+4z-5u=1,\\ 2x+2y+3z+4u=5,\\ 7x+y+6z-u=7\end{cases}$ | **20** | $\begin{cases}2x-y-9z-5u=41\\ 6x-6y+5z+u=-30,\\ 5x-y+3z+3u=-5,\\ x-2y-2z-2u=4\end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **9** | $\begin{cases} x+2y+4z-3u=0, \\ 3x+5y+6z-4u=0, \\ 4x+8y+24z-19u=0, \\ 3x+8y+24z-19u=0 \end{cases}$ | **21** | $\begin{cases} 3x+4y+2z+u=3, \\ 2x+3y-3z-2u=-8, \\ x+y+5z+3u=11, \\ 5x+7y-z-u=-5 \end{cases}$ |
| **10** | $\begin{cases} 2x-4y+5z+3u=0, \\ 3x-6y+4z+2u=0, \\ 4x-8y+17z+11u=0 \end{cases}$ | **22** | $\begin{cases} 3x+2y-5z+u=3, \\ 2x-3y+z+5u=-3, \\ x+2y-4u=-3, \\ x-y-4z+9u=22 \end{cases}$ |
| **11** | $\begin{cases} 3x+5y+2z=0, \\ 4x+7y+5z=0, \\ x+y-4z=0, \\ 2x+9y+6z=0 \end{cases}$ | **23** | $\begin{cases} 4x-3y+z+5u-7=0, \\ x-2y+-2z-3u-3=0, \\ 3x-y+2z+1=0, \\ 2x+3y+2z-8u+7=0 \end{cases}$ |
| **12** | $\begin{cases} 2x-y-4z=0, \\ 3x+5y-7z=0, \\ 4x-5y-6z=0 \end{cases}$ | **24** | $\begin{cases} 2x-2y+u+3=0, \\ 2x+3y+z-3u+6=0, \\ 3x+4y-z+2u=0, \\ x+3y+z-u-2=0 \end{cases}$ |

**Задание 3.** Решите систему уравнений, используя матричное уравнение:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{cases} x-y+z=0, \\ x+3y-z=0, \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$ | **13** | $\begin{cases} 2x+7y+3z+u=5, \\ x+3y+5z-2u=3, \\ x+5y-9z+8u=1, \\ 5x+18y+4z+5u=12 \end{cases}$ |
| **2** | $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ x+3y+4z=3, \\ x+4y+5z=1 \end{cases}$ | **14** | $\begin{cases} 2x+3y-z+u=1, \\ 8x+12y-9z+8u=3, \\ 4x+6y+3z-2u=3, \\ 2x+3y+9z-7u=3 \end{cases}$ |
| **3** | $\begin{cases} x-y+z=0, \\ 2x+3y+z=0, \\ 3x+y-4z=0 \end{cases}$ | **15** | $\begin{cases} 4x-3y+2z-u=8, \\ 3x-2y+z-3u=7, \\ 2x-y-5u=6, \\ 5x-3y+z-8u=1 \end{cases}$ |
| **4** | $\begin{cases} x-3y+4z=-4, \\ 2x+2y+10z=-2, \\ 3x-y+14z=-7 \end{cases}$ | **16** | $\begin{cases} 2x-y+z-u=3, \\ 4x-2y-2z+3u=2, \\ 2x-y+5u-6u=1, \\ 2x-y-3z+4u=5 \end{cases}$ |
| **5** | $\begin{cases} 2x+3y-4z=-16, \\ 3x-4y+5z=26, \\ 4x+y-2z=-4 \end{cases}$ | **17** | $\begin{cases} y+3z=-1, \\ 2x+3y+5z=3, \\ 3x+5y+7z=6 \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **6** | $\begin{cases}2x-y-9z-5u=41\\6x-6y+5z+u=-30,\\5x-y+3z+3u=-5,\\x-2y-2z-2u=4\end{cases}$ | **18** | $\begin{cases}x-y+z=-5,\\x+2y+3z=3,\\-4x+y-6z=7\end{cases}$ |
| **7** | $\begin{cases}3x+4y+2z+u=3,\\2x+3y-3z-2u=-8,\\x+y+5z+3u=11,\\5x+7y-z-u=-5\end{cases}$ | **19** | $\begin{cases}x+z=4,\\2y-z=1,\\3x-y=1\end{cases}$ |
| **8** | $\begin{cases}3x+2y-5z+u=3,\\2x-3y+z+5u=-3,\\x+2y-4u=-3,\\x-y-4z+9u=22\end{cases}$ | **20** | $\begin{cases}2x+y+z=-1,\\-x-y+3z=-1,\\-2x+3y+2z=5\end{cases}$ |
| **9** | $\begin{cases}4x-3y+z+5u-7=0,\\x-2y+-2z-3u-3=0,\\3x-y+2z+1=0,\\2x+3y+2z-8u+7=0\end{cases}$ | **21** | $\begin{cases}2x+y-z=3,\\3x+2y+2z=-7,\\x+z=-2\end{cases}$ |
| **10** | $\begin{cases}2x-2y+u+3=0,\\2x+3y+z-3u+6=0,\\3x+4y-z+2u=0,\\x+3y+z-u-2=0\end{cases}$ | **22** | $\begin{cases}x+y-2z=2,\\2x-3y-z=1,\\x-4y+z=3\end{cases}$ |
| **11** | $\begin{cases}x+y-6u-4u=6,\\3x-y-6z-4u=2,\\2x+3y+9z+2u=6,\\3x+2y+3z+8u=-7\end{cases}$ | **23** | $\begin{cases}2x+3y-z=4,\\x+y+3z=5,\\3x-4y+z=0\end{cases}$ |
| **12** | $\begin{cases}2x-3y+3z+2u-3=0,\\6x+9y-2z-=4=0,\\10x+3y-3z-2u-3=0,\\8x+6y+z+3u+7=0\end{cases}$ | **24** | $\begin{cases}3x-2y+4z=21,\\3x+4y-2z=9,\\2x-y-z=10.\end{cases}$ |

## *Раздел 3. Основы аналитической геометрии*

### 3.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Многие геометрические и физические величины полностью определены, если задана их числовая характеристика. Такими величинами являются длина линии, объём тела, масса и т.д. Число, характеризующее ту или иную величину, получается в результате сравнения с выбранным эталоном, принятым за единицу измерения. Например, длина тела 5 см. Эталоном, принятым в этом случае за единицу измерения, является 1 см. Такие величины в математике называются *скалярными*. Но встречаются величины более сложной природы, которые не могут быть полностью охарактеризованы их числовым значением. К ним относятся сила, скорость, ускорение и т.д. Для полной характеристики указанных величин кроме числового значения необходимо указать их направление. Такие величины называются *векторными*. Для графического изображения векторов пользуются направленными отрезками.

Заметим, что большая часть изложенной (актуализированной) ниже

**Опр. 1:** Отрезок АВ называется *направленным*, если принимается во внимание тот порядок, в котором заданы его концы.

Если сначала задана точка А, а затем точка В, то А называется началом, а В – концом. На чертеже направленный отрезок отмечается стрелкой, поставленной у его конца.

**Опр. 2:** *Вектором* называется направленный отрезок.

Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ …

**Опр. 3:** *Координатами* вектора $\overrightarrow{AB}$ называются числа $x, y, z,$ где $x=x_B-x_A$, $y=y_B-y_A$, $z=z_B-z_A$, $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$.

Обозначение: $\overrightarrow{AB}(x, y, z)$ или $\overrightarrow{AB}=(x, y, z)$.

**Опр. 4:** *Нулевым* вектором или *нуль-вектором* называется вектор, у которого начало совпадает с концом.

Обозначение: $\vec{0}$, $\vec{0}(0,0,0)$.

**Опр. 5:** Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых или на одной и той же прямой.

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны:

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}\ (\overrightarrow{AB}=(x\ ,y\ ,z),\ \overrightarrow{CD}=(x_1,y_1,z_1)).$$

**Опр. 6:** *Длиной* или *модулем* ненулевого вектора называется длина отрезка, изображающего данный вектор.

Обозначение: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\vec{a}\right|$.

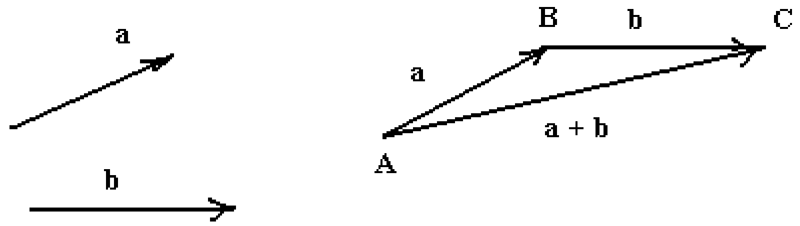
Если $\overrightarrow{AB}=(x,y,z,)$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

**Опр. 7:** Два вектора называются *противоположными*, если они имеют одну и ту же длину, но противоположное направление.

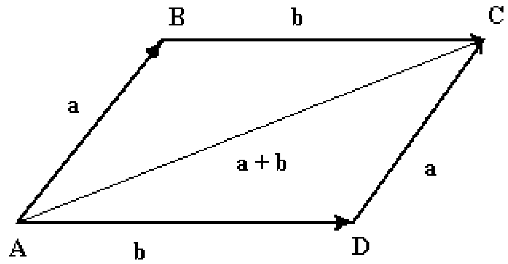
**Опр. 8:** Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они удовлетворяют следующим условиям: 1) длины (модули) этих векторов равны; 2) они коллинеарны; 3) векторы сонаправлены (имеют одно направление).

**Опр. 9:** *Суммой* двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{p}$, который получается следующим образом: от произвольной точки О откладывается $\vec{a}$, от его конца (точки А), откладывается $\vec{b}$. Конец $\vec{b}$ обозначают точкой В. Полученный в результате такого построения $\overrightarrow{OB}$ и есть $\vec{p}$.

Описанный в определении способ построения суммы векторов иначе называется *правилом треугольника*.




Складывать два неколлинеарных вектора можно также, пользуясь *правилом параллелограмма.*




Координаты вектора-суммы равны суммам координат векторов-слагаемых.

Свойства операции сложения векторов:

1) для любого вектора $\vec{a}$ существует ему противоположный -$\vec{a}$, для которого $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$;
2) для любого вектора $\vec{a}:\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;
3) сложение векторов ассоциативно: для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$;
4) сложение векторов коммутативно: для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$: $\vec{a}$ + $\vec{b}$= $\vec{b}$ + $\vec{a}$.

**Опр. 10:** *Разностью* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$, такой, что $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$.

Чтобы из $\vec{a}$ вычесть $\vec{b}$, нужно к $\vec{a}$ прибавить вектор, противоположный $\vec{b}$.

Координаты вектора-разности равны разностям координат вектора-уменьшаемого и вектора-вычитаемого.

**Замечание**: Скалярами называются вещественные (действительные) числа.

**Опр. 11:** *Произведением* ненулевого $\vec{a}$ на действительное число $\alpha \neq 0$ называется вектор $\vec{p}$, удовлетворяющий условиям: 1) $\left|\vec{p}\right|=|\alpha|\left|\vec{a}\right|$; 2) если $\alpha \geq 0$, то $\vec{p}$ и $\vec{a}$ сонаправлены, если $\alpha < 0$, то $\vec{p}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены.

При умножении вектора на скаляр на этот же скаляр умножается каждая координата данного вектора.

**Теорема.** Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $\exists! \alpha \in R \ / \ \vec{b}=\alpha\vec{a}$.

**Теорема.** Если $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, то $\overrightarrow{\beta b}=(\beta\alpha)\vec{a}$, где $\alpha, \beta \in R$.

Возьмём конечную систему векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ (1) и $n$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$.

**Опр. 12:** $\vec{b} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

**Опр. 13:** Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$, среди которых хотя бы одно отлично от 0 и такие, что $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ (2). Если же это равенство выполняется при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*.

**Теорема.** При $n > 1$ векторы (1) будут линейно зависимыми тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных векторов этой системы.

**Теорема.** Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

**Опр. 14:** Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *компланарны*, если они параллельны одной и той же плоскости.

**Теорема.** Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

**Теорема.** Всякие четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ линейно зависимы.

**Опр. 15:** *Базисом* векторного пространства называется упорядоченная система векторов этого пространства, которая удовлетворяет двум условиям: 1) векторы системы линейно независимы, 2) любой вектор, не входящий в базис, является линейной комбинацией векторов базиса.

Количество векторов в базисе называется *размерностью* данного векторного пространства.

Если вектор $\vec{d}$ представлен формулой $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, то говорят, что он *разложен по векторам базиса* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Числа $\alpha, \beta, \gamma$ называются координатами данного вектора относительно данного базиса. Пишут $\vec{d} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, говорят «вектор $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ имеет координаты $\alpha, \beta, \gamma$».

**Теорема.** Умножение векторов на скаляр и сложение векторов связаны двумя формами закона дистрибутивности: 1) $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}, \alpha \in R$, 2) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \alpha, \beta \in R$.

**Опр. 16:** *Проекцией вектора на ось* (в частности, в качестве оси можно взять другой вектор, например, $\vec{a}$) называется длина направленного отрезка, началом которого является проекция начала вектора, а концом – проекция конца вектора.

Проекция вектора на ось, в частности, на другой вектор, обозначается: $np_{\vec{a}}\vec{b}$. Проекция вектора на ось равна произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью, т. е. $np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\angle(\vec{b}, \vec{a})$.

Свойства проекций:

- если вектор образует с осью острый угол, то его проекция на эту ось положительна, если же тупой угол - то отрицательна;
- проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой;
- проекция суммы векторов на одну и ту же ось равна сумме проекций векторов-слагаемых на эту ось;
- при умножении вектора на число проекция этого вектора умножается на это же число.

Проекции вектора на координатные оси - это его координаты. Линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями.

**Опр. 17:** *Скалярным произведением* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Из определения следует:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}), \vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0};$$

но

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0, \text{ если } \vec{a}=\vec{0}\vee\vec{b}=\vec{0} \text{ или } \vec{a}\perp\vec{b}.$$

Скалярное произведение выражается через координаты. Числовое его значение равно сумме произведений одноимённых координат векторов-множителей.

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ - коммутативность;
2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ - скалярный квадрат вектора;
3) $\vec{a}\neq\vec{0}, \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\vec{a}$;
4) $(\alpha\vec{a})\vec{b}=\alpha(\vec{a}\vec{b}), \alpha\in R$;
5) $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$;
6) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ - дистрибутивность.

Угол между векторами можно найти, используя скалярное произведение:

$$\cos\varphi=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

где $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$.

Отсюда следует условие перпендикулярности двух ненулевых векторов.

Физический смысл скалярного произведения – работа постоянной силы при прямолинейном перемещении её точки приложения:

$$A=FS\cos\varphi=\vec{F}\cdot\vec{S}.$$

*Радиус-вектором* точки в пространстве называется вектор, имеющий начало в начале координат и конец в этой точке. Соответственно, координаты этого вектора совпадают с координатами точки.

## 3.2. Прямая и плоскость в пространстве

**Опр. 18:** Всякий ненулевой вектор $\vec{p}$, параллельный прямой $d$, называется *направляющим* вектором прямой $d$.

**Опр. 19:** Всякий ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой $d$, называется *нормальным* вектором прямой $d$.

Прямая в пространстве может быть задана:

- начальной точкой $M_0(x_0; y_0)$ и направляющим (параллельным прямой) вектором $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$: $d = \lfloor M_0, \vec{p} \rfloor$. В этом случае получаем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha p_1 \\ y = y_0 + \alpha p_2 \\ z = z_0 + \alpha p_3 \end{cases}$$

или каноническое уравнение

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3};$$

- двумя точками $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$. В этом случае получается каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0};$$

- как линия пересечения плоскостей

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}.$$

В этом случае получаются параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t \\ y = y_0 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} t \\ z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t \end{cases};$$

- начальной точкой $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно плоскости $ax + by + cz + d = 0$.

В этом случае получаем каноническое уравнение

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- длинами отрезков на координатных осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, здесь $a$, $b$, $c$ – длины этих отрезков.

Термин «общее уравнение прямой» для пространства несостоятелен. На плоскости же общее уравнение прямой записывается в виде $ax + by + d = 0$.

**Опр. 20:** *Расстоянием от точки до прямой* в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

Расстояние от точки до прямой:

$$\rho(M_0, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Опр. 21:** *Расстоянием между двумя прямыми* называется длина перпендикуляра, опущенного из точки, взятой на одной прямой, на другую.

**Опр. 22:** *Углом между двумя прямыми* называется угол между параллельными данным прямыми, проходящими через одну точку.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{l}\,\vec{l'}}{|\vec{l}||\vec{l'}|} = \frac{l_1 l_1' + l_2 l_2' + l_3 l_3'}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_{31}^2}\sqrt{l_1'^2 + l_2'^2 + l_3'^2}},$$

здесь $\vec{l}$ и $\vec{l'}$ - направляющие векторы прямых $d$ и $d'$.

Если $d_1 \perp d_2, \Rightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Leftrightarrow 1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2 = 0$, здесь $k_1$ и $k_2$ – угловые коэффициенты прямых.

Прямые $d_1$ и $d_2$ параллельны, если они совпадают или содержатся в одной плоскости и не пересекаются. Если $k_1 = k_2$, то $d_1 \| d_2$.

**Опр. 23:** *Векторным произведением* $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $[\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$,

2) $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$, $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$,

3) тройки векторов $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $\{\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]\}$ ориентированы одинаково (то есть с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму вектору совершается против часовой стрелки).

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – направляющие векторы координатных осей в пространстве. Из определения векторного произведения вытекает соотношение между ними: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

**Теорема.** Для того, чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

Свойства векторного произведения:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ (антикоммутативность);
2. $[\alpha\vec{a}, \vec{b}] = \alpha\,[\vec{a}, \vec{b}]$ или $[\vec{a}, \alpha\vec{b}] = \alpha\,[\vec{a}, \vec{b}]$ (ассоциативность относительно линейного множителя $\alpha \in R$);
3. $[\vec{a} + \vec{a_1}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a_1}, \vec{b}]$ (дистрибутивность).

**Теорема.** Если $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \vec{i} \\ a_2 & b_2 & \vec{j} \\ a_3 & b_3 & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Площадь треугольника, заданного координатами своих вершин:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]\right|.$$

Физические приложения векторного произведения:

- нахождение момента силы относительно точки $A$ $\overrightarrow{OA}\times\vec{F}=\overrightarrow{M}$;
- нахождение линейной скорости вращения $\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{v}$.

**Опр. 24:** *Смешанным произведением* векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, взятых в указанном порядке, называется скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$.

Обозначение: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Из определения следует, что смешанное произведение компланарных векторов равно 0.

**Теорема (геометрический смысл смешанного произведения).** Если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарны, и направленные отрезки $\overrightarrow{OA}\in\vec{a},\overrightarrow{OB}\in\vec{b},\overrightarrow{OC}\in\vec{c}$ – есть представители этих векторов, то абсолютная величина смешанного произведения $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ численно равна объёму параллелепипеда, имеющего отрезки OA, OB, OC своими рёбрами, $V=\left|(\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right])\right|$.

Свойства смешанного произведения:

1. $\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]>0(<0)$, если $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ и $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ ориентированы одинаково (ориентированы противоположно).
2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами векторного и скалярного умножения.
3. Перестановка двух векторов меняет знак смешанного произведения на противоположный: $\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]=-\vec{a}\left[\vec{c},\vec{b}\right]=-\vec{b}\left[\vec{a},\vec{c}\right]$. Циклическая же перестановка не меняет смешанного произведения.
4. Линейный множитель, стоящий перед любым из сомножителей смешанного произведения можно вынести и поставить перед смешанным произведением: $(\alpha\vec{a})\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\alpha\,(\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right])$, $\alpha\in R$, $\vec{a}\left[\alpha\vec{b},\vec{c}\right]=\alpha\,(\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right])$, $\alpha\in R$ (ассоциативность относительно скалярного множителя).
5. Дистрибутивность относительно любого сомножителя: $(\vec{a}+\vec{a}')\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]+\vec{a}'\left[\vec{b},\vec{c}\right]$.

Объём тетраэдра, заданного координатами своих вершин (четырёх):

$$V_{тетр}=\frac{1}{6}V_{пар-педа}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right])\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

**Теорема.** Если $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ относительно ортонормированного базиса $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, то

$$\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ещё одним приложением смешанного произведения, помимо установления компланарности и нахождения объёма параллелепипеда, является определение взаимной ориентации векторов в пространстве и нахождение объёма треугольной пирамиды (как шестой части от объёма параллелепипеда).

**Опр. 25:** Плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ параллельны, если $\pi_1$ совпадает с $\pi_2$ или $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$.

Прямые $d_1$ и $d_2$ параллельны, если они совпадают или содержатся в одной плоскости и не пересекаются.

Прямая $d$ и плоскость $\pi$ параллельны, если прямая содержится в плоскости или прямая и плоскость не пересекаются.

Плоскость может задаваться:

- параметрически – $\pi = \left[M_0, \vec{l}, \vec{m}\right]$, $\begin{cases} x = x_0 + ul_1 + vm_1 \\ y = y_0 + ul_2 + vm_2 \\ z = z_0 + ul_3 + vm_3 \end{cases}$. Здесь $\vec{l} = \{l_1, l_2, l_3\}$ и $\vec{m} = \{m_1, m_2, m_3\}$ - неколлинеарные друг другу векторы, принадлежащие одной плоскости, которые называются направляющими векторами; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - любая точка этой же плоскости, которая называется начальной;
- общим уравнением – $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A = \begin{vmatrix} l_2 & m_2 \\ l_3 & m_3 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} l_3 & m_3 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$, $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ ($A, B, C$ - координаты вектора $\vec{n} \perp \pi$); в частности, если $\vec{p}\,||\,\pi \Leftrightarrow p_1A + p_2B + p_3C = 0$;
- тремя заданными точками на ней – $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$, где заданные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$; в частности, если $M_0(a,0,0)$, $M_1(0,b,0)$, $M_2(0,0,c)$, то $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ - уравнение прямой «в отрезках».

**Опр. 26:** *Углом между плоскостями* $\pi_1$ и $\pi_2$ называется угол (любой из двухгранных), образованный этими плоскостями.

$\cos\varphi = \cos\angle(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = \dfrac{\vec{n_1}\vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, здесь $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ – векторы нормали плоскостей $\pi_1$ и $\pi_2$ соответственно.

Пусть $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Выясним особенности взаимного расположения этих плоскостей. Координаты некоторой точки $M(x, y, z) = \pi_1 \cap \pi_2$ являются решением системы уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$. Пусть $r$ – ранг матрицы $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$, а через $r'$ – ранг расширенной матрицы $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix}$, ясно, что $r \geq 1$.

Возможны случаи:

1) $\pi_1$ совпадает с $\pi_2$ тогда и только тогда $r = r' = 1$;
2) $\pi_1$ и $\pi_2$ различны и:
   - $\pi_1 \neq \pi_2$ тогда и только тогда, когда $r' = 2$;
   - если $r = 2$, то $\pi_1 \cap \pi_2$;
   - если же $r = 1$ $\pi_1 \,||\, \pi_2$.

Или:

1) плоскости параллельны, если координаты нормальных векторов пропорциональны, то есть, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (это условие достаточно для параллельности, если плоскости не совпадают);
2) плоскости перпендикулярны, если $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

**Опр. 27:** *Углом* между прямой $d$ и неперпендикулярной к ней плоскостью $\pi$ называется острый угол между прямой и её ортогональной проекцией на плоскость.

$$\sin\Theta = \frac{|\vec{n}\vec{l}|}{|\vec{n}||\vec{l}|} = \frac{|Al_1 + Bl_2 + Cl_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}},$$

здесь $\vec{n}$ – вектор нормали плоскости $\pi$, а $\vec{l}$ – направляющий вектор прямой $d$.

Пусть имеются плоскость и прямая, заданные уравнениями: $Ax + By + Cz + D = 0$ и $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$. Так как вектор с координатами $(A, B, C)$ перпендикулярен плоскости, а вектор $(p_1, p_2, p_3)$ параллелен прямой, то прямая и плоскость будут:

- параллельны, если эти векторы перпендикулярны, то есть, если $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$;
- перпендикулярны, если эти векторы параллельны, то есть, если $\frac{A}{p_1} = \frac{B}{p_2} = \frac{C}{p_3}$.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\pi$:

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Напомним приложения метода координат на плоскости, которые могут использоваться при решении задач аналитической геометрии в пространстве.

1. Формулы деления отрезка в данном отношении: $x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$, $z = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}$ (точка *M(x,y,z )*.делит отрезок *AB* в отношении $\lambda$, где $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$).
2. Площадь треугольника, заданного координатами вершин

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3-x_1 & x_2-x_1 \\ y_3-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}.$$

### *Задания для самостоятельного решения к Разделу 3*

**Задание 1.** Даны векторы $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Найдите неизвестную координату при условии, что $\vec{a}\perp\vec{b}$:

| № варианта | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | –2 | **$a_2$** | 1 | 3 | –1 | 2 |
| **2** | 3 | **$a_2$** | 5 | –1 | 6 | 4 |
| **3** | **$a_1$** | 1 | –3 | 17 | 2 | 1 |
| **4** | **$a_1$** | 2 | –1 | 3 | 5 | 9 |
| **5** | 4 | 6 | **$a_3$** | 1 | 1 | 5 |
| **6** | 1 | 7 | **$a_3$** | 8 | 3 | 1 |
| **7** | 11 | –5 | 3 | **$b_1$** | 2 | 6 |
| **8** | 10 | 8 | -1 | **$b_1$** | 5 | 16 |
| **9** | 5 | 2 | 1 | –1 | **$b_2$** | -3 |
| **10** | 7 | 1 | 12 | 12 | **$b_2$** | 5 |
| **11** | 0 | 1 | 7 | 5 | –1 | **$b_3$** |
| **12** | –4 | 3 | 0,5 | 2 | –5 | **$b_3$** |
| **13** | –1 | **$a_2$** | 4 | 3 | –5 | 2 |
| **14** | 3 | **$a_2$** | –5 | 1 | 6 | 0,4 |
| **15** | **$a_1$** | 12 | –3 | 10 | 2 | 1 |
| **16** | **$a_1$** | –2 | 15 | 3 | 2,5 | 0,9 |
| **17** | 3 | 1 | **$a_3$** | 1 | 1 | –1 |
| **18** | 1 | 0,7 | **$a_3$** | 8 | –3,1 | 1 |
| **19** | 1 | –0,5 | 0,3 | **$b_1$** | 0,2 | 16 |
| **20** | 1 | –8 | –1 | **$b_1$** | 5 | 1,6 |
| **21** | 0,5 | –2 | –1 | –1 | **$b_2$** | –2,7 |
| **22** | –1,7 | 10 | –1 | 1,2 | **$b_2$** | –1,5 |
| **23** | 0,1 | 10 | 17 | –5 | –1,4 | **$b_3$** |
| **24** | 4 | 11 | 5 | 2 | –5 | **$b_3$** |

**Задание 2.** Найдите координаты и модуль векторного произведения векторов $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ и $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, смешанное произведение векторов $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ и $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$:

| № варианта | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | –2 | 1 | 1 | 3 | –1 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| **2** | 3 | 1 | 5 | –1 | 6 | 4 | 1 | –1 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | –3 | 17 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **4** | 1 | 2 | –1 | 3 | 5 | 9 | 2 | 2 | 2 |
| **5** | 4 | 6 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | –1 | –1 |
| **6** | 1 | 7 | 1 | 8 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **7** | 11 | –5 | 3 | 1 | 2 | 6 | 3 | –1 | 1 |
| **8** | 10 | 8 | –1 | 1 | 5 | 16 | 0 | 1 | 0 |
| **9** | 5 | 2 | 1 | –1 | 1 | –3 | –1 | –1 | –1 |
| **10** | 7 | 1 | 12 | 12 | 1 | 5 | 2 | 1 | 2 |
| **11** | 0 | 1 | 7 | 5 | –1 | 1 | 7 | 4 | 5 |
| **12** | –4 | 3 | 0,5 | 2 | –5 | 1 | –2 | 3 | 3 |
| **13** | –1 | 1 | 4 | 3 | –5 | 2 | 1 | 5 | 2 |
| **14** | 3 | 1 | –5 | 1 | 6 | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 1 |
| **15** | 1 | 12 | –3 | 10 | 2 | 1 | 1 | 5 | 1 |
| **16** | 1 | –2 | 15 | 3 | 2,5 | 0,9 | 2 | 3 | 3 |
| **17** | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | –1 | –1 | –1 | 3 |
| **18** | 1 | 0,7 | 1 | 8 | –3,1 | 1 | 2 | 8 | 7 |
| **19** | 1 | –0,5 | 0,3 | 1 | 0,2 | 16 | 14 | 10 | 5 |
| **20** | 1 | –8 | –1 | 1 | 5 | 1,6 | 21 | 2 | 0,5 |
| **21** | 0,5 | –2 | –1 | –1 | 1 | –2,7 | 5 | 1 | 0,2 |
| **22** | –1,7 | 10 | –1 | 1,2 | 1 | –1,5 | 0,5 | 1 | 1 |
| **23** | 0,1 | 10 | 17 | –5 | –1,4 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| **24** | 4 | 11 | 5 | 2 | –5 | 1 | 0 | 0 | 3 |

**Задание 3.** Являются ли векторы $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ линейно зависимыми и, если не являются, то найдите угол между ними:

| № варианта | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | –2 | 1 | 1 | 3 | –1 | 2 |
| **2** | 3 | –18 | 6 | –1 | 6 | –2 |
| **3** | 1 | 1 | –3 | 7 | 7 | 1 |
| **4** | 1 | 3 | –1 | 3 | 9 | –3 |
| **5** | 4 | 6 | 1 | 1 | 1,5 | 5 |
| **6** | 1 | 7 | 1 | 7 | 49 | 7 |
| **7** | 11 | –55 | 3 | 1 | –5 | 6 |
| **8** | 10 | 50 | –10 | 1 | 5 | –1 |
| **9** | 5 | 2 | 1 | –1 | 1 | –3 |
| **10** | 7 | 0,7 | 14 | 10 | 1 | 20 |
| **11** | 0 | 1 | 7 | 5 | –1 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **12** | –4 | 3 | 0,5 | 2 | –1,5 | 0,25 |
| **13** | –1 | 1 | 4 | 3 | –5 | 2 |
| **14** | 3 | 18 | –15 | 1 | 6 | –5 |
| **15** | 1 | 12 | –3 | 10 | 2 | 1 |
| **16** | 1 | –2 | –15 | 3 | –6 | 45 |
| **17** | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | –1 |
| **18** | 1 | 0,7 | 1 | 8 | 5,6 | 8 |
| **19** | 1 | –0,5 | 0,3 | 1 | 0,5 | 0,3 |
| **20** | 1 | –8 | –1 | 1 | –8 | 1 |
| **21** | 0,5 | –2 | –1 | –1 | 4 | –2 |
| **22** | –1,7 | 17 | –17 | 1,2 | 12 | –1,2 |
| **23** | 1 | 10 | 1 | –5 | –50 | 1,5 |
| **24** | 4 | 11 | 2 | 2 | –5,5 | 1 |

**Задание 4.** Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, где числовые значения координат – в таблице к задаче № 3.

**Задание 5**: Заданы точки A $(a_1; a_2; a_3)$, B $(b_1; b_2; b_3)$, C$(c_1; c_2; c_3)$, D$(d_1; d_2; d_3)$.

Записать:
1) уравнение плоскости ABC,
2) уравнение прямой AD,
3) уравнение медианы BM,
найти:
1) угол между прямой AD и плоскостью ABC,
2) площадь грани ABC,
3) расстояние от точки D до плоскости ABC,
4) объём пирамиды ABCD.

| № варианта | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 2 |
| **2** | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | -1 | 1 | -2 |
| **3** | 1 | 1 | 1 | 7 | 7 | 1 | 5 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| **4** | 1 | 3 | -1 | 3 | 3 | -3 | -3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **5** | 4 | 6 | 1 | 1 | 4 | 6 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| **6** | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| **7** | 1 | 5 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **8** | 1 | 5 | -1 | 1 | 5 | -1 | 3 | -2 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| **9** | 5 | 2 | 1 | -1 | 1 | -3 | 3 | -2 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| **10** | 7 | 7 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| **11** | 0 | 1 | 7 | 5 | -1 | 1 | 1 | -1 | 5 | 0 | 2 | 5 |
| **12** | -4 | 3 | 0 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 | 3 |
| **13** | -1 | 1 | 4 | 3 | -5 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | -1 | 0 |
| **14** | 3 | 1 | -1 | 1 | 6 | -5 | 5 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | 1 | 2 | -3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| **16** | 1 | -2 | -1 | 3 | -6 | 4 | 4 | 1 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| **17** | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | -3 |
| **18** | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 8 | 8 | 1 | 1 | 1 | 5 | 2 |
| **19** | 1 | -5 | 3 | 1 | 5 | 3 | 1 | 5 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| **20** | 1 | -8 | -1 | 1 | -8 | 1 | 1 | 8 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| **21** | 5 | -2 | -1 | -1 | 4 | -2 | 5 | 1 | 1 | 1 | 2 | 5 |
| **22** | -1 | 1 | -1 | 2 | 2 | -2 | -1 | 1 | 5 | 5 | 1 | 2 |
| **23** | 1 | 1 | 1 | -5 | -5 | 1 | -2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| **24** | 4 | 1 | 2 | 2 | -5 | 1 | 1 | 4 | 2 | 5 | 1 | 3 |

## *Раздел 4. Кривые второго порядка*

Уравнению с переменными $x$ и $y$ соответствует на плоскости некоторая линия как множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Верно и обратное утверждение: линии на плоскости, представляющей множество точек, соответствует некоторое уравнение с переменными $x$ и $y$.

Чтобы составить по условию конкретной задачи уравнение множества точек на плоскости, нужно установить зависимость между переменными величинами $x$ и $y$ (координатами произвольной точки, принадлежащей этому множеству точек) и данными в задаче постоянными величинами (параметрами) и записать эту зависимость в виде уравнения.

### *4.1. Окружность*

**Опр. 1:** *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки этой плоскости, которая называется центром.

Уравнение окружности с центом в начале координат и радиусом $r$ имеет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Уравнение окружности с центом в точке $A$ $(a;b)$ и радиусом $r$ имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

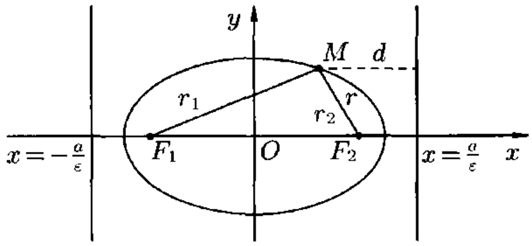
Уравнение окружности в общем виде записывается так:

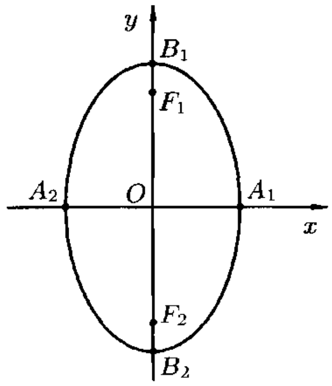
$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ – постоянные коэффициенты.

## *4.2. Эллипс*

**Опр. 2:** *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная ($2a$), большая расстояния между фокусами ($2c$).




Уравнение (каноническое) эллипса, фокусы которого лежат на оси ОХ, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b.$$

Здесь $a$ – длина большей полуоси, $b$ – длина малой полуоси.

Зависимость между параметрами выражается соотношением:

$$a^2-b^2=c^2.$$

Вершины эллипса: $A_1$ ($a$;0), $A_2$ (-$a$;0), $B_1$ (0;$b$), $B_2$(0;-$b$). Отрезки $A_1A_2$ и $B_1B_2$ – оси эллипса. Все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, вершинами которого являются вершины эллипса.

*Эксцентриситетом* эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ к большей оси $2a$:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1.$$

Если же фокусы эллипса лежат на оси ОУ, то его уравнение выглядит так:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,\ a>b.$$

Решая задачи на эллипс, принимают допущение, что оси симметрии эллипса совпадают с осями координат.

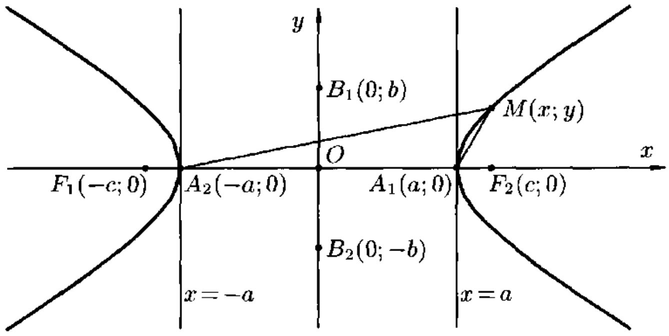
Прямые $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса. Вообще *директриса*, соответствующая данному фокусу – это прямая, параллельная второй оси, отстоящая от неё на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ и лежащая с данным фокусом по одну сторону от второй оси эллипса (или, забегая вперёд, гиперболы). Исходя из этого эллипсу можно дать другое определение.

Эллипс – это множество всех точек плоскости, таких, что отношение расстояния от каждой точки на эллипсе до фокуса к расстоянию от неё до соответствующей директрисы равно $\varepsilon$.

Если $a$=$b$, то эллипс вырождается в окружность.

### *4.3. Гипербола*

**Опр. 3:** *Гиперболой* называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная ($2a$), меньшая расстояния между двумя фокусами ($2c$).




Уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси OX, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$a>b$.

Здесь $a$ – длина действительной полуоси, $b$ – длина мнимой полуоси. Зависимость между параметрами выражается соотношением:

$$b^2=c^2-a^2.$$

Точки $A_1$ ($a$;0), $A_2$ (-$a$;0) – вершины гиперболы.

*Эксцентриситетом* гиперболы называется отношение фокусного расстояния $2c$ к действительной оси $2a$:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1.$$

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Если же фокусы гиперболы лежат на оси ОУ, то её уравнение:

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$$

или

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

а уравнения асимптот такой гиперболы

$$y=\pm\frac{a}{b}x.$$

Если действительная и мнимая оси гиперболы равны между собой, то она называется равносторонней и её уравнение имеет вид: $x^2-y^2=a^2$ (фокусы на OX) или $y^2-x^2=a^2$, а уравнения её асимптот $y=\pm x$.

Во всех задачах на гиперболу предполагается, что оси симметрии гиперболы совпадают с осями координат. Одна из осей проходит через фокусы и пересекает гиперболу. Эта ось называется первой (*фокальной*). Перпендикулярная ей ось называется второй (*мнимой*). Точка пересечения осей – центр симметрии гиперболы (центр гиперболы).

В случае гиперболы, в отличие от эллипса, точек, принадлежащих ей внутри прямоугольника с вершинами $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ нет. Гипербола имеет две ветви. Одна из них лежит в полуплоскости $x\geq a$, а вторая – в полуплоскости $x\leq -a$

Прямые $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Определение, использующее директрисы, можно дать и для гиперболы (см. определение для эллипса).

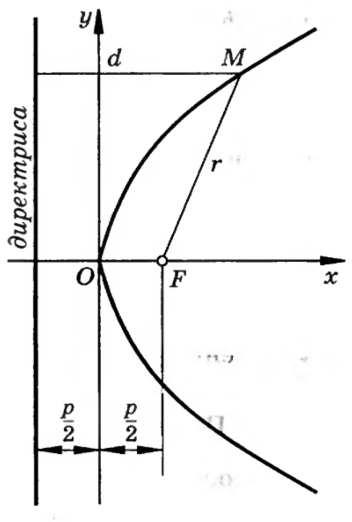
Итак, если $\varepsilon>1$, то линия – гипербола, если же $\varepsilon<1$ – эллипс.

### *4.4. Парабола*

**Опр. 4:** *Параболой* называется множество точек на плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии OX и ветвями, направленными вправо имеет вид

$$y^2=2px.$$




Здесь p >0 – параметр параболы, расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы: $x=-\frac{p}{2}$.

При сохранении оси симметрии, но противоположном направлении ветвей (влево), уравнение гиперболы выглядит так:

$$y^2 = -2px.$$

Уравнение её директрисы: $x = \frac{p}{2}$.

Аналогично, уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии ОУ и ветвями, направленными вверх имеет вид $x^2 = 2py$. Уравнение директрисы в этом случае: $y = -\frac{p}{2}$.

Если же ветви направлены вниз, то уравнение параболы и её директрисы соответственно: $x^2 = -2py$ и $y = \frac{p}{2}$.

Уравнение параболы с вершиной в точке *A* (*a;b*) с осью симметрии, параллельной оси ОХ, и ветвями, направленными

- вправо имеет вид $(y-b)^2 = 2p(x-a)$;
- влево имеет вид $(y-b)^2 = -2p(x-a)$.

Уравнение параболы с вершиной в точке *A* (*a;b*) с осью симметрии, параллельной оси ОУ, и ветвями, направленными

- вверх имеет вид $(x-a)^2 = 2p(y-b)$;
- вниз имеет вид $(x-a)^2 = -2p(y-b)$.

В каждом из случаев параметр *p >0* имеет тот же смысл, что и для параболы с вершиной в начале координат.

### *Задания для самостоятельного решения к Разделу 4*

**Задание 1.** Составить уравнение

а) *окружности*

1. Проходящей через точки $A(3;1), B(-2;6), C(-5;-3)$.
2. Касающейся оси абсцисс в точке А(3;0) и имеющей радиус, равный 6.
3. Касающейся оси ординат и проходящей через точки *A* (4;5) и *B* (18;–9).
4. Касающейся осей координат и проходящей через точку *A* (18;–4).
5. Проходящей через *A* (5;7) и *B* (–2;4), если центр её лежит на прямой $4x+3y-18=0$.
6. Центр которой находится в точке $O_1$ (–3;1) и она касается прямой 4x+3y-16=0.

б) *эллипса*

7. Две вершины которого находятся в точках $A_1$ (–6;0) и $A_2$ (6;0), а фокусы – в точках $F_1$ (4;0) и $F_2$ (–4;0).
8. Две вершины которого находятся в точках $B_1$ (–6;0) и $B_2$ (6;0), а фокусы – в точках $F_1$ (0;6) и $F_2$ (0;–6).
9. Расстояние между фокусами которого равно 6, фокусы лежат на оси ОХ, большая ось равна 10.

10. Фокусы которого $F_1$ (4;0) и $F_2$ (–4;0), а эксцентриситет равен 0,8.
11. Фокусы которого находятся на оси ОХ, если его большая ось равна 14, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$
12. Фокусы которого находятся на оси ОХ и он проходит через точки $A(\sqrt{3};\sqrt{6}), B(3;\sqrt{2})$.
с) *гиперболы*
13. Две вершины которой находятся в точках $A_1$ (–3;0) и $A_2$ (3;0), а фокусы – в точках $F_1$(5;0) и $F_2$(–5;0).
14. Координаты фокусов которой (20;0) и (–20;0), а эксцентриситет равен $\frac{5}{3}$.
15. Фокусы которой находятся на оси ОХ, длина действительной оси 12, а эксцентриситет $\frac{4}{3}$.
16. Фокусы которой находятся на оси ОХ и она проходит через точки (6;3) и $(5\sqrt{2};-4)$.
17. Асимптоты которой заданы уравнениями $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$ и она проходит через точку (6;-4).
18. Координаты фокусов которой $(2\sqrt{2};0)$ и $(-2\sqrt{2};0)$, а $\varepsilon = 2$.
d) *параболы*
19. С вершиной в начале координат, симметричной относительно ОХ и проходящей через (5;–3).
20. С вершиной в начале координат, симметричной относительно ОУ и проходящей через (2;–3).
21. С вершиной в точке $A$ (2;3), фокусом которой является точка (6;3).
22. С вершиной в точке $A$ (4;6), директрисой которой является прямая $x$=–2.
23. С осью симметрии, параллельной ОХ и проходящей через точку (1;3).
24. С осью симметрии, параллельной ОУ и проходящей через точку (0;0).

## *Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной*

### 5.1. Элементы теории пределов

Предел – важнейшее понятие математики. Понятие предела опирается на интуитивное представление о процессе изменения и неограниченного приближения. Понятие предела внесло в математику совершенно новый метод рассуждений – метод пределов, применение и развитие которого привели к созданию дифференциального и интегрального исчислений, и математического анализа.

Суть метода состоит в том, что для определения неизвестной величины находят её приближения, при этом не одно – два, а неограниченное число их. Если эти приближения становятся всё более точными, отличаются от определяемой величины всё меньше и меньше, то сама величина находится как предел этих приближений.

**Опр.** 1: Число а называется *пределом последовательности* $a_п$. если для любого $\varepsilon > 0$, которое может быть и сколь угодно малым, существует номер N, зависящий от $\varepsilon$, такой, что все члены последовательности $a_п$ с номерами $n > N_\varepsilon$, удовлетворяют неравенству $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $\underset{n\to\infty}{a_n} \to a$.

**Опр.** 2: Если последовательность имеет конечный предел, то она называется *сходящейся*. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ или не существует, то – *расходящейся*.

**Опр. 3**: Последовательность $a_п$ называется *неубывающей*, если выполняется неравенство $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots$ или *невозрастающей*, если $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*. Невозрастающая последовательность будет ограниченной, если она ограничена снизу, неубывающая в этом случае должна быть ограничена сверху.

**Теорема.** Если неубывающая последовательность ограничена сверху, то она имеет предел. Если невозрастающая последовательность ограничена снизу, то она имеет предел.

Во многих случаях приходится исследовать функции, заданные в бесконечных промежутках вида $(-\infty;+\infty)$, $(-\infty;a)$ или $(b;+\infty)$.

**Опр. 4**: Число А называется пределом функции $f(x)$ на бесконечности, если для сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ найдётся такое число N, зависящее от $\varepsilon$, что из неравенства $|x| > N_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана в окрестности некоторой точки $x_0$, за исключением, быть может, самой этой точки.

**Опр. 5:** Число А называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x_0$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$, что $\forall x \ne x_0$ и $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $\underset{x\to x_0}{f(x)} \to A$.

**Теорема (о пределе промежуточной функции).** Если $\varphi(x) \le f(x) \le \Psi(x)$ для всех x из некоторой окрестности точки $x_0$, за исключением, быть может, самой точки $x_0$ и функции $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$ в точке $x_0$ имеют один и тот же предел, равный А, то и функция $f(x)$ в точке $x_0$ имеет пределом число А.

**Первый замечательный предел:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Теорема.** Если функция $y = f(x)$ в точке $x_0$ имеет предел, то этот предел единственный.

**Теорема (правило замены переменной).** Пусть соотношениями $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, заданными, соответственно на множествах $D'$ и $D$, задаётся композиция функций $y = F(x) = f(\varphi(x))$, тогда:

- если функция $u = \varphi(x)$ в некоторой точке $x_0$ из множества $D$ имеет предел, равный $u_0$, причём существует такая окрестность точки $x_0$, что для всех $x \in D$ и $x \neq x_0$ $\varphi(x) \neq u_0$;
- если в точке $u_0 \in D'$ функция $y = f(u)$ имеет предел, равный а, который может быть как конечным, так и бесконечным, то и композиция функций также имеет предел, равный а, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = a$.

Теорема имеет силу и в тех случаях, когда $x_0$ или $u_0$ означают один из символов $\pm\infty$.

С помощью этой теоремы вычисляют пределы методом подстановки (методом замены переменной).

**Теорема (предельный переход в неравенствах).** Если $f(x) < \varphi(x)$ для любого х из окрестности точки $x_0$, кроме, быть может, самой этой точки, и каждая из функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x_0$ имеют предел, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$.

**Замечание**: теорема справедлива и для неравенства $f(x) \leq \varphi(x)$.

По аналогии с ограниченными множествами, свойством ограниченности обладают и функции.

**Опр. 6**: Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется

- *ограниченной на множестве X*, если существует такое положительное число В, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq B$;
- *неограниченной на множестве X*, если какое бы положительное число В мы ни взяли, на этом множестве X найдётся точка x, такая, что $|f(x)| > B$.

**Теорема:** Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to \infty$, то существует такое число *n,* что функция будет ограничена на интервале $(n;+\infty)$.

**Опр. 7:** Число А называется *пределом функции* $y = f(x)$ *по множеству E на бесконечности*, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon > 0)$, что $\forall x \in E$ и $|x| > N_\varepsilon$ имеем $|f(x) - A| < \varepsilon$.

**Опр. 8:** Число А называется *частичным пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* $x_0$ по множеству Q, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)$, что $\forall x \neq x_0$, $x \in Q$ и $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ имеем $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символически пишут: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Q}} f(x) = A$.

Из всех частичных пределов наиболее употребительными являются пределы, когда функция задана в окрестности точки $x_0$, а в качестве множества Q берётся левая или правая половина окрестности (частичный правый или частичный левый пределы).

**Опр. 9**: Число А называется

- *левым односторонним пределом* (левосторонним) функции $y = f(x)$ в точке $x_0$, если $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta_\varepsilon > 0)$, что $\forall x \neq x_0$, $x - x_0 > 0, x_0 - x < \delta_\varepsilon$ имеем $|f(x) - A| < \varepsilon$;
- *правым односторонним пределом* (правосторонним) функции $y = f(x)$ в точке $x_0$, если $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta_\varepsilon > 0)$, что $\forall x \neq x_0$, $x - x_0 > 0, x - x_0 < \delta_\varepsilon$ имеем $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символически пишут $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A = f(x_0 - 0)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A = f(x_0 + 0)$ соответственно.

**Теорема.** Для того чтобы существовал предел функции в точке $x_0$, необходимо и достаточно, чтобы пределы слева и справа в этой точке существовали, были конечны и равны.

**Опр. 9:** Функция, предел которой равен нулю при $x \to +\infty$ называется *бесконечно малой* при $x \to +\infty$.

**Опр. 10:** Функция, предел которой равен нулю при $x \to -\infty$ называется *бесконечно малой* при $x \to -\infty$.

**Теорема.** Для того, чтобы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы разность $f(x) - A$ была бы бесконечно малой при $x \to +\infty$.

*Следствие:* Функция, имеющая предел равна сумме своего предела и бесконечно малой.

Имеется ряд теорем, которые используются в практике вычисления пределов.

**Теорема.** Сумма двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая (при одном и том же условии).

*Следствие:* теорема справедлива и для суммы любого конечного числа бесконечно малых функций.

**Теорема:** произведение ограниченной функции на бесконечно малую является функцией бесконечно малой (при одном и том же условии).

*Следствия:*

- произведение функции, имеющей конечный предел на бесконечно малую является функцией бесконечно малой (при одном и том же условии);
- произведение двух бесконечно малых функций является функцией бесконечно малой (при одном и том же условии).

**Теорема.** Если функции $f$ и $\varphi$ в точке $x_0$ имеют конечные пределы, то в этой точке имеют пределы $f + \varphi$, $f\varphi$ и $\dfrac{f}{\varphi}$, при дополнительном условии, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, причём предел суммы функций равен сумме их пределов, предел произведения функций равен произведению их пределов, предел частного равен частному пределов.

***Замечание:*** для суммы и произведения последняя теорема справедлива и на случай любого конечного числа слагаемых и сомножителей соответственно.

Кроме того:

- постоянную величину можно вносить под знак и выносить из-под знака предела;
- если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x_0$ имеют конечные пределы, то в этой точке разность этих функций имеет конечный предел, который равен разности исходных пределов;
- если предел основания степени и предел показателя конечны и одновременно не равны нулю, то предел степени равен пределу основания в степени, равной пределу показателя.

Особую роль при вычислении пределов играет процесс сравнения бесконечно малых. Для сравнения, как правило, составляют их частное. Так, если $\alpha(x), \beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, то

- $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,
- $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$,
- $\alpha(x)$ называется бесконечно малой того же порядка малости, что и $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$; если же c=1, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентные бесконечно малые;
- $\alpha(x)$ называется бесконечно малой, несравнимой с $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует;
- $\alpha(x)$ называется бесконечно малой к-того порядка малости по сравнению с $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\left[\beta(x)\right]^{\kappa}} = c \neq 0$.

Кроме того, если $\alpha(x), \alpha_1(x), \beta(x), \beta_1(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$ и эквиваленты соответственно $\alpha(x), \alpha_1(x)$ и $\beta(x), \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

**Опр. 11:** Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to +\infty$, если функция $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно мала при том же условии.

Иначе: функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to +\infty$, если для любого $b > 0$ найдётся число с, такое, что для всех $x > c$ будет выполняться неравенство $|f(x)| > b$.

Знак бесконечности при оценке бесконечно больших функций определяется согласно знаку промежутка-условия и знака самой функции.

Для бесконечно больших функций справедливы следующие теоремы:

1. Сумма двух бесконечно больших функций одного и того же знака есть функция бесконечно большая того же знака.
2. Сумма бесконечно большой функции и функции ограниченной есть бесконечно большая функция.
3. Произведение двух бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая.
4. Произведение бесконечно большой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть бесконечно большая функция.

С понятием бесконечно малой и бесконечно большой величины связан **второй замечательный предел**:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e(\approx 2,7).$$

При нахождении пределов могут возникнуть ситуации, в которых ничего определённого сказать нельзя. В этом случае говорят о так называемых неопределённостях.

Рассмотрим основные виды неопределенностей, которые могут возникать при вычислении пределов. Решение задач указанных типов будет способствовать шлифовке техники вычисления пределов.

**Замечание**: deg (degree) – степень.

| Неопределенность | Случаи пределов | Способ устранения неопределенности |
|---|---|---|
| $\frac{0}{0}$ | $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ | Разложить на множители многочлены $f(x)$ и $g(x)$, сократить дробь на бесконечно малый сомножитель. |
| | $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{Q(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}$ | Умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное выражению, содержащему иррациональность; применить формулу сокращенного умножения; разложить многочлены $Q(x), P(x)$ на множители; сократить дробь на бесконечно малый сомножитель. |
| | $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}}{Q(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}}$ | Умножить числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат разности (суммы); применить формулу сокращенного умножения; разложить многочлены $Q(x), P(x)$ на множители; сократить дробь на |

| | | |
|---|---|---|
| | | бесконечно малый сомножитель. |
| | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и / или $g(x)$ – одна из функций: $\sin x$, $\arcsin x$, $tgx$, $\mathrm{arc}tgx$, $a^x-1$, $e^x-1$ $1-\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}-1$ | Заменить $f(x)$ и / или $g(x)$ на эквивалентную при $x\to 0$ функцию. *Замечание.* Если $x\to x_0$, то замена $x-x_0=t\to 0$ приводит к указанным бесконечно малым функциям. |
| | $\lim\limits_{x\to a\,(a>0)}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $\lim\limits_{x\to a\,(a>0)}\dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}$, $\lim\limits_{x\to a\,(a>0)}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$. | Использовать готовое значение $a^a\cdot\ln\dfrac{a}{e}$, $\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot a^{\alpha-\beta}$, $a^a\cdot\ln(a\cdot e)$. |
| $\dfrac{\infty}{\infty}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ | 1) Если $\deg P(x)<\deg Q(x)$, то предел равен 0. 2) Если $\deg P(x)>\deg Q(x)$, то предел равен $\infty$. 3) Если $\deg P(x)=\deg Q(x)$, то предел равен отношению коэффициентов перед старшими степенями многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. |
| $0\cdot\infty$ | $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ | Свести неопределенность к одному из видов $\dfrac{0}{0}:\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ $\dfrac{\infty}{\infty}:\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ |
| $\infty-\infty$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}\right)$ | Умножить и разделить данное выражение, на сопряженное ему. |
| | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)$ | Привести к общему знаменателю, если возможно. |
| $1^{\infty}$ | $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ | Выделить второй замечательный предел. |

<table>
<tr><td>$0^0$</td><td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$</td><td rowspan="2">Рассмотреть функцию $y = f(x)^{g(x)}$, прологарифмировать её по основанию e: $\ln y = g(x)\cdot\ln\big(f(x)\big)$. Найти предел $\lim\limits_{x\to x_0}\big\{g(x)\cdot\ln\big(f(x)\big)\big\} = k$, используя правило раскрытия неопределенности $0\cdot\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^k$.</td></tr>
<tr><td>$\infty^0$</td></tr>
</table>

Одним из применений производной (см. тему «Производная» настоящего пособия) является эффективное средство для нахождения предела функции в случаях, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции. Это осуществляется с помощью *правила Лопиталя*. Правило используется в случае неопределённостей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Суть правила состоит в том, что отношение величин заменяется отношением их производных, т.е. $\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim \frac{f_1''(x)}{f_2''(x)} = \ldots$ Если последний предел существует или равен бесконечности, то он будет равен исходному пределу. Если же отношение производных также будет представлять случай $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то можно снова применить правило Лопиталя до получения результата.

### 5.2. Непрерывность

С понятием предела функции связано и такое её свойство, как непрерывность. Это важнейшее понятие современной математики. Иногда говорят, что функция непрерывна, если её график можно изобразить, не отрывая пишущего инструмента от бумаги.

**Опр. 12:** Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0$, взятой из области её определения, если для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Символически пишут: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(x_0)$.

Связь понятия предела функции в точке и непрерывности функции в точке: функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если она обязательно определена в окрестности этой точки, имеет предел в этой точке, который совпадает со значением функции в точке. Соответственно, функция не будет непрерывной в точке, если: 1) в этой точке она не имеет предела и 2) если функция в точке $x_0$ имеет конечный предел, но он не совпадает со значением функции в точке $x_0$.

Можно дать другую формулировку определения непрерывности функции через приращения функции и аргумента.

Пусть задана функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, и пусть $x_0$ – некоторое значение аргумента из $(a;b)$. Тогда, если $x \in (a;b)$ – другое фиксированное значение аргумента, то разность $x - x_0$ называется приращением аргумента и обозначается $\Delta x$, т. е. $\Delta x = x - x_0$. В этих обозначениях $x = x_0 + \Delta x$.

Разность $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением* функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $\Delta f$.

Если функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 1} \Delta f = 0$. То есть, малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции и наоборот, или, точнее, приращение функции $f$ есть функция, бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

**Теорема**. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x_0$ непрерывны, то в этой точке непрерывны $f + \varphi$, $f\varphi$ и $\dfrac{f}{\varphi}$, при дополнительном условии, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$.

**Опр. 13:** Точка $x_0$ называется *предельной точкой* некоторого множества D, если в любой окрестности этой точки содержится по крайней мере одна точка x из этого множества, отличная от точки $x_0$.

**Теорема (о предельном переходе под знаком непрерывной функции).** Пусть соотношениями $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ в некоторой области D задана композиция функций $y = F(x) = f(\varphi(x))$. Тогда если в некоторой предельной точке $x_0 \in D$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$, причём выполняется равенство: $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(u_0) = f(\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x))$.

**Теорема (непрерывность композиции функций).** Пусть функциями $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ в некоторой области D задана композиция функций $y = F(x) = f(\varphi(x))$. Тогда если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в некоторой точке $x_0 \in D$, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то в этой точке непрерывна и композиция функций $y = F(x) = f(\varphi(x))$.

При исследовании характера непрерывности используют понятие односторонней непрерывности.

**Опр. 14:** Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$

- справа, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$,
- слева, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Заметим, что функция, непрерывная во внутренней точке промежутка, будет непрерывной и справа, и слева и обратно. То есть, $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$. Последнее равенство выражает необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке.

Функция будет непрерывна

- на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала,
- на отрезке, если она непрерывна в каждой точке соответствующего отрезку интервала и, кроме того, в левом конце отрезка справа, а в правом – слева.

*Точка разрыва функции* – точка, в которой функция не является непрерывной.

Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от того, в каком смысле нарушено условие непрерывности.

**Опр. 15:** Если в точке $x_0$ функция $y = f(x)$ имеет конечные пределы слева и справа, эти пределы равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то $x_0$ – *точка устранимого разрыва.*

В этом случае достаточно изменить значение функции только в одной точке $x_0$, и она станет непрерывной.

**Опр. 16:** Если в точке $x_0$ функция $y = f(x)$ имеет конечные пределы слева и справа, но эти пределы не равны между собой, причём безразлично, равен ли один из них значению функции в этой точке, то $x_0$ – *точка разрыва с конечным скачком*.

***Замечания*:**

1. Название обусловлено тем, что при переходе аргумента через эту точку значение функции резко изменяется.
2. Точки устранимого разрыва и точки разрыва с конечным скачком называются точками разрыва I рода.

**Опр. 17:** Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке $x_0$ не является конечным или вовсе не существует, то эта точка называется *точкой разрыва II рода*.

Свойство непрерывности функции используется при вычислении пределов. Примером тому служит сформулированная выше теорема о предельном переходе под знаком непрерывности. Кроме того:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

**Теорема.** Монотонная функция может иметь точки разрыва только первого рода.

**Теоремы (о промежуточном значении непрерывной функции):**

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и на его концах принимает значение противоположных знаков, то на этом отрезке найдётся хотя бы одна точка с, такая, что $f(c) = 0$.

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке она принимает любое значение, промежуточное между $f(a)$ и $f(b)$.

## *Задания для самостоятельного решения к Разделу 5*

**Задание 1.** Найти пределы функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$ | **13** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\lvert x\rvert^7+2x^2}{1+x^7}$ |
| **2** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x+7}{3x^3-5x+2}$ | **14** | $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ |
| **3** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$ | **15** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}+5}{2x^2+x+1}$ |
| **4** | $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$ | **16** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt[3]{1+x^6+x}}$ |
| **5** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-6x-5}{x^5+2x^2-3}$ | **17** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$ |
| **6** | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$ | **18** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^{40}+x^{39}}{1+2x^{40}+x^{17}}$ |
| **7** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$ | **19** | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$ |
| **8** | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$ | **20** | $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-1}+1}{x}$ |
| **9** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x+x^8}{x^7+2x^8+3}$ | **21** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+1}$ |
| **10** | $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ | **22** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^2}{x^2+3}$ |
| **11** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-x+5}{5x^6+x^5+7}$ | **23** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$ |
| **12** | $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ | **24** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10^n-2}{10^{n+1}+5}$ |

**Задание 2**. Найти точки разрыва функции, если они существуют, определить их тип и показать эскиз графика:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $y=\begin{cases} x+1, x<0 \\ x^2+1, 0\le x<1 \\ 1, x\ge 1 \end{cases}$ | **13** | $y=\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$ |
| **2** | $y=\begin{cases} x^2+1, x<0 \\ 1-x, 0\le x\le 2 \\ 2, x>2 \end{cases}$ | **14** | $y=\dfrac{x^2-x^3}{\lvert x-1\rvert}$ |
| **3** | $y=\begin{cases} -x, x\le 0 \\ tgx, 0<x<\dfrac{\pi}{4} \\ 2, x\ge\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ | **15** | $y=\lg(2x+1)$ |
| **4** | $y=\begin{cases} x+1, x\le 0 \\ x^2, 0<x\le 2 \\ \dfrac{1}{2}x+3, x>2 \end{cases}$ | **16** | $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ |
| **5** | $y=\begin{cases} \sin x+1, x<0 \\ 1+x^2, 0\le x<1 \\ 1+2x, x\ge 1 \end{cases}$ | **17** | $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| **6** | $y=\begin{cases} \ln x^2, x\le -l \\ 2, -l<x<l \\ \ln x, x\ge l \end{cases}$ | **18** | $y=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$ |
| **7** | $y=\begin{cases} \sqrt{\lvert x\rvert}, x\le 0 \\ -x^2, 0\le x<1 \\ 1+x, x\ge 1 \end{cases}$ | **19** | $y=x+\dfrac{x+2}{\lvert x+2\rvert}$ |
| **8** | $y=\begin{cases} x+\pi, x<-\pi \\ \sin\lvert x\rvert, -\pi\le x\le\pi \\ x+\pi, x<\pi \end{cases}$ | **20** | $y=\dfrac{2\lvert x-1\rvert}{x^2-x^3}$ |
| **9** | $y=\begin{cases} \lvert x\rvert, x<0 \\ tgx, 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{2}{\pi}x, x\ge\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ | **21** | $y=\sqrt[x]{2}-1$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **10** | $y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2, x\le 2\\ x, x>2\end{cases}$ | **22** | $y=\begin{cases}-x, x\le -1\\ \frac{2}{x-1}, x>-1\end{cases}$ |
| **11** | $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\le x\le 1\\ 4-2x, 1<x<2,5\\ 2x-7, 2,5\le x<+\infty\end{cases}$ | **23** | $y=\frac{x+1}{(x^2-4)(8+x)}$ |
| **12** | $y=\begin{cases}2x+5, -\infty<x<-1\\ \frac{1}{x}, -1\le x<+\infty\end{cases}$ | **24** | $y=\mathrm{arc}\,ctg\frac{1}{x}$ |

## *Раздел 6. Производная*

Дифференциальное исчисление – это раздел математического анализа, связанный, главным образом, с понятиями производной и дифференциала функции. В дифференциальном исчислении изучаются правила вычисления производных (законы дифференцирования) и применение производных к исследованию функций.

Центральные понятия дифференциального исчисления – производная и дифференциал – возникли при рассмотрении большого числа задач естествознания и математики, приводящих к вычислению пределов одного и того же типа. Важнейшие среди них – физическая задача определения скорости неравномерного движения и геометрическая задача построения касательной к кривой.

Пусть дана функция $f$, определённая и непрерывная в некоторой точке и её окрестности.

**Опр. 1:** Если существует предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда последний стремится к нулю, то этот предел называется *производной* функции $f$ в точке x, то есть

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Для производной существуют также следующие обозначения:

$$f'_x,\ y',\ \frac{dy}{dx}.$$

Производная функции $f$ в точке $x_0$ есть скорость изменения функции $f$ в этой точке.

*Механический смысл производной:* Производная от пути по времени есть скорость движения материальной точки в момент времени $t$.

Пусть формула $S=f(t)$ характеризует движение материальной точки в зависимости от изменения времени $t$. Зафиксируем некоторый момент времени $t$, тогда через промежуток времени $\Delta t$ получим момент времени $t+\Delta t$. Этому значению времени соответствует путь $S+\Delta S=f(t+\Delta t)$,

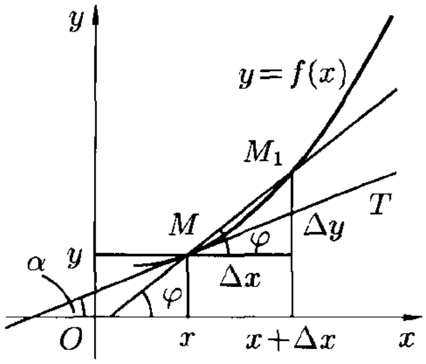
$\Delta S = f(t+\Delta t) - S = f(t+\Delta t) - f(t)$. $\Delta S$ - есть путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени $\Delta t$ с момента времени $t$ до $t+\Delta t$.

Следовательно, $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = v_{ср}$ – есть средняя скорость движения материальной точки за промежуток времени $\Delta t$. Очевидно, что чем меньше $\Delta t$, тем точнее можно судить о скорости движения точки в момент времени $t$. Чтобы получить точное представление о скорости в момент времени $t$, следует перейти к пределу при $\Delta t \to 0$. $v_{мгн} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, но $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$, $\Rightarrow v_{мгн} = S'(t)$.

*Геометрический смысл производной:* Производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой *x*.

Пусть функция $f$ в точке x имеет производную $f'$. Дадим $x$ произвольное приращение $\Delta x$, такое, чтобы точка $x+\Delta x$ не вышла из области определения функции $f$. Через точки $M$ и $N$ проведём секущую $MN$, образующую с положительным направлением оси ОХ угол $\beta$, тогда угловой коэффициент этой секущей равен $tg\beta$. Пусть теперь точка $M$ переходит в точку $N$ по кривой $y = f(x)$, тогда секущая $MN$ поворачивается вокруг точки $M$, стремясь занять положение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M$. Угол $\beta$ также непрерывно меняется так, что угловой коэффициент секущей стремится к угловому коэффициенту касательной. Пусть касательная $MP$ образует с положительным направлением оси ОХ угол $\alpha$, тогда $tg\beta \to tg\alpha$ при $\Delta x \to 0$ (точка $N$ стремится к точке $M$). Из прямоугольного треугольника $MKN$: $tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то есть, $tg\alpha = f'(x)$.

Производная – это величина приращения функции, приходящаяся на единицу приращения аргумента. Эту величину можно рассматривать как скорость изменения функции в интервале между двумя значениями аргумента. Значения производной позволяют судить о том, медленно или быстро изменяется функция по мере изменения аргумента. Там, где производная мала по абсолютной величине, касательная к кривой составляет малый угол с осью ОХ, график подымается или опускается полого и функция меняется медленно. Там, где производная велика по абсолютной величине, касательная к кривой составляет с осью ОХ угол, близкий к $90^0$, кривая подымается или опускается круто и функция меняется быстро.




Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*. Процесс дифференцирования функций основан на применении правил дифференцирования, теоремах о дифференцировании обратной и сложной функций и таблицы дифференцирования (таблицы производных).

Правила дифференцирования функции:

Если функции u и v дифференцируемы в некоторой точке, то в ней

- дифференцируема и их сумма: $(u+v)'=u'+v'$;
- дифференцируемо и их произведение: $(uv)'=u'v+v'u$;
- дифференцируемо и их частное $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ при дополнительном условии $v\neq 0$;

Кроме того, любая постоянная функция *y=const* дифференцируема, причём $y'=c'=0$.

**Теорема.** Пусть в некотором промежутке задана строго монотонная и непрерывная функция $y=f(x)$, причём в точке $x_0$ из этого промежутка для неё существует $f'(x_0)\neq 0$. Тогда в точке $y_0=f(x_0)$ обратная функция $x=f^{-1}(y)$ имеет производную $(f^{-1})'(y_0)$, причём $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ или $x'_y=\frac{1}{y'_x}$.

**Теорема.** Если функция $u=\Psi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u=\Psi(x)$, тогда и композиция функций $y=f(\Psi(x))$ в точке x имеет производную, причём справедлива формула $y'_x=f'_u\cdot u'_x$ (производная сложной функции с основным аргументом *x* и промежуточным *u* равна произведению сложной функции по промежуточному аргументу на производную от промежуточного аргумента по основному).

Можно находить производную функции $f(x)$ в точке $x_0$, исходя из её определения, тогда:

1) найти разность $f(x)-f(x_0)$;
2) найти отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

3) найти предел этого отношения при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Таблица производных представляет собой синтез и обобщение приведённых выше правил и теорем

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| **c** | 0 | **x** | 1 |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{1}{x} \log_a e$ |
| *lnx* | $\dfrac{1}{x}$ | *sinx* | *cosx* |
| *cosx* | *-sinx* | *tgx* | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| *ctgx* | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | *arcsinx* | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| *arccosx* | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | *arctgx* | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| *arcctgx* | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ | | |

Существует ряд случаев, в которых дифференцирование обычными способами не приводит к результату, так

- *логарифмическое дифференцирование;*

Если выражение, которое нужно продифференцировать упростится после логарифмирования, то целесообразно сначала искать не $y'$, а $(\ln y)'$. Формула для нахождения последней производной вытекает из теоремы дифференцирования сложной функции: $(\ln y)' = \dfrac{1}{y} y'$, $\Rightarrow y' = y(\ln y)'$.

- *дифференцирование неявно заданной функции;*

Если независимая переменная *x* и функция *y* связаны между собой уравнением $f(x, y) = 0$, неразрешимым относительно у, то говорят, что функция у задана неявно; приём нахождения производной неявно заданной функции состоит в том, что находят производную левой и правой частей данного уравнения с учётом того, что у является функцией от х, и из полученного уравнения находят $y'$.

- *дифференцирование параметрически заданной функции;*

Зависимость функции *y* от аргумента *x* не всегда выражается формулой, связывающей непосредственно *y* и *x*, связь между ними может осуществляться посредством третьей переменной $t$, называемой параметром: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \Psi(t) \end{cases}$. Тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

На практике производная важна своими применениями, среди которых связанные с исследованием поведения функций и различных зависимостей, являющихся моделями реальных ситуаций.

### *1. Касательная и нормаль к кривой*

**Опр. 2:** Прямая, имеющая с кривой одну общую точку называется *касательной*.

Понятие касательной в геометрии и касательной в дифференциальном исчислении различаются. Касательная к кривой в анализе обладает свойством локальной односторонности, т. е. в достаточно малой окрестности она имеет одну общую точку с кривой, а при значениях аргумента, не принадлежащих указанной окрестности, касательная ещё раз может пересекать кривую.

Пусть на отрезке задана функция, непрерывная и имеющая производную в точке $x_0$ из этого отрезка. Согласно геометрического смысла производной, к данной кривой в этой точке можно будет провести касательную. Пусть эта касательная образует с положительным направлением оси ОХ угол $\alpha$. $tg\alpha$ – есть угловой коэффициент. $tg\alpha = f'(x_0)$. Тогда уравнение касательной, как уравнение пучка прямых, проходящих через точку с абсциссой $x_0$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

**Опр. 3:** Прямая, проведённая к кривой $y = f(x)$ в точке касания, которая перпендикулярна касательной в этой точке, называется *нормалью*.

Уравнение нормали получается из уравнения касательной при использовании условия, выражающего перпендикулярность прямых через их угловые коэффициенты: $1 + k_1 k_2 = 0$.

Тогда уравнение нормали

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Направление кривой в каждой её точке определяется направлением касательной к ней в этой точке, поэтому для нахождения угла наклона кривой в данной её точке надо вычислить угол между касательной, проведённой в этой точке, и осью ОХ.

Углом между пересекающимися прямой и кривой называется угол между прямой и касательной к кривой, проведённой через точку их пересечения.

Углом между двумя пересекающимися кривыми называется угол между касательными к этим кривым, проведёнными в точке их пересечения.

Согласно геометрическому смыслу производной, угол между касательной и кривой, кривыми:

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}.$$

## *2. Свойства функций*

**Теорема.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором промежутке, дифференцируема на соответствующем промежутку интервале, то она постоянна на этом промежутке тогда и только тогда, когда значение $f'(x_0)$ в каждой точке интервала равно 0.

**Теорема.** Если значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ положительно, то функция в этой точке возрастает; если же производная отрицательна – то убывает.

Для возрастания или убывания функции на интервале необходимо наличие этого условия в каждой точке интервала.

**Теорема (необходимое условие экстремума).** Если функция $y = f(x)$ в точке $x_0$ имеет экстремум, то в этой точке её производная либо равна нулю, либо не существует.

*Следствие:* Если $x_0$ – точка экстремума функции $y = f(x)$ и в этой точке существует производная, то она равна нулю.

**Теорема.** Если функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0$, то она непрерывна в этой точке.

**Опр. 4:** Точки области определения функции $y = f(x)$, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими* точками или точками, *подозрительными на экстремум*. Точки, в которых производная равна нулю, называются *стационарными*.

**Теорема (достаточное условие экстремума).** Если $x_0$ – критическая точка функции и функция в ней непрерывна и, кроме того, при переходе через эту точку производная меняет знак, то $x_0$ – точка экстремума функции.

Экстремальные точки функции можно находить двумя способами:

1) *с помощью производной* $f'(x)$

для этого

- находят все критические точки функции $y = f(x)$, являющиеся внутренними точками области определения;
- исследуют $f'(x)$ в каждой из критических точек; если при переходе через неё производная меняет свой знак, то это точка экстремума; если же производная знак не меняет, то это не экстремальная точка.

2) *с помощью второй производной* $f''(x) = (f'(x))'$

для этого

- найти стационарные точки функции $y = f(x)$, являющиеся внутренними точками области определения данной функции;
- найти вторую производную данной функции;

- вычислить значение $f''(x)$ в стационарных точках;
- определить тип стационарной точки (максимум или минимум) по знаку второй производной в ней (отрицательна – максимум, положительна – минимум).

**Опр. 5:** Говорят, что в точке $x_0$ из некоторого отрезка функция достигает *наибольшего* значения, если $\forall x \in \langle a;b \rangle : f(x) \le f(x_0)$, *наименьшего* – если $\forall x \in \langle a;b \rangle : f(x) \ge f(x_0)$.

**Теорема.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке и в точке $x_0 \in [a;b]$ она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения, то $x_0 = a$ или $x_0$=с$b$ или $x_0$ – критическая точка функции.

Правило нахождения наибольших и наименьших значений функции:

- найти критические точки, принадлежащие интервалу $(a;b)$;
- вычислить значения функции $y = f(x)$ в концевых точках и найденных критических точках;
- наибольшее из найденных чисел будет наибольшим значением функции на данном отрезке, наименьшее - наименьшим.

**Опр. 6:** Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз (вогнутой вверх)*, если для точки $x_0$ существует окрестность, такая, что для всех точек этой окрестности график функции $y = f(x)$ лежит выше касательной, проведённой к графику в точке $(x_0; f(x_0))$.

**Опр. 7:** Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх (вогнутой вниз)*, если для точки $x_0$ существует окрестность, такая, что для всех точек этой окрестности график функции $y = f(x)$ лежит ниже касательной, проведённой к графику в точке $(x_0; f(x_0))$.

Для сохранения свойства выпуклости на промежутке необходимо выполнение перечисленных в определениях условий во всех точках промежутка.

**Опр. 8:** Точка называется *точкой перегиба* функции $y = f(x)$, если в этой точке изменяется направление выпуклости.

**Опр. 9:** Если $x_0$ – точка перегиба $y = f(x)$, то точка $\mathrm{M}(x_0; f(x_0))$ называется *точкой перегиба графика* функции.

**Теорема (необходимое условие перегиба).** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале и $x_0 \in (a;b)$ - точка перегиба функции, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Точки интервала $(a;b)$, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются *точками, подозрительными на перегиб*.

**Теорема (достаточное условие перегиба).** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале и $x_0 \in (a;b)$ – точка, подозрительная на перегиб и т этой точке вторая производная меняет свой знак, то $a$ функции, то $x_0$ – точка перегиба.

Правило нахождения точек перегиба:

- найти внутренние точки области определения, подозрительные на перегиб;
- исследовать изменение знака $f''(x)$ при переходе через каждую из найденных точек (интерпретация результата будет опираться на предыдущие теоремы).

Одним из основных применений производной является исследование функций и, соответственно, построение их графиков.

При исследовании функции и построении графиков следует придерживаться следующей схемы:

1) нахождение $D(y)$;
2) исследование на периодичность;
3) исследование на чётность;
4) исследование поведения функции на границах области определения, нахождение точек разрыва функции, установление характера разрыва, нахождение асимптот;
5) нахождение точек пересечения графика с осями координат и нахождение интервалов знакопостоянства функции;
6) исследование на экстремумы, определение промежутков монотонности функции;
7) исследование направления выпуклости графика функции, нахождение точек перегиба;
8) составление таблицы значений функции для некоторых значений аргумента (контрольные точки);
9) используя полученные результаты, строим график функции.

На практике часто нет необходимости проводить исследование по всем пунктам, а также бывает удобно изменять порядок исследования.

### *Задания для самостоятельного решения к Разделу 6*

**Задание 1.** Найти производные функций

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$ | **13** | $y=x^{x^3}$ |
| **2** | $y=x^{\frac{2}{\ln^2 x}}$ | **14** | $y=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ |
| **3** | $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}-2\sqrt{6x+5}$ | **15** | $\begin{cases} x=t^2, \\ y=2t \end{cases}$ |
| **4** | $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ | **16** | $\begin{cases} x=\cos^3\varphi, \\ y=\sin^3\varphi \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **5** | $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$ | **17** | $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$ |
| **6** | $y=\sqrt{x}-arctg\sqrt{x}$ | **18** | $y=\sin^2(2x-1)$ |
| **7** | $y=\cos 2x\cdot\sin^2 x$ | **19** | $y=e^{\sin(x+1)}$ |
| **8** | $y=t^{tgx}\cdot\cos x$ | **20** | $y=\cos x^{\sin x}$ |
| **9** | $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}$ | **21** | $y=e^x\cdot\left(x^2+x-1\right)$ |
| **10** | $y=\sqrt[x]{x}$ | **22** | $xy+\sin(xy)=1$ |
| **11** | $y=\arccos\dfrac{1}{x}$ | **23** | $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ |
| **12** | $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ | **24** | $2y\ln y-x=0$ |

**Задание 2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x$ на $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ | **13** | $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$ на $[8;12]$ |
| **2** | $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+7}$ на $[2;8]$ | **14** | $f(x)=x^3-12x+7$ на $[3;7]$ |
| **3** | $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$ на $[2;8]$ | **15** | $f(x)=x^3-12x+7$ на $[3;7]$ |
| **4** | $f(x)=x^3-12x+7$ на $[0;3]$ | **16** | $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sin x$ на $[0;6]$ |
| **5** | $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sin x$ на $[-2;0]$ | **17** | $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+5}$ на $[2;8]$ |
| **6** | $f(x)=x^3+3x^2-24x+5$ на $[0;3]$ | **18** | $f(x)=x^3+3x^2-24x+5$ на $[3;5]$ |
| **7** | $f(x)=x^3+9x^2+7$ на $[-4;-1]$ | **19** | $f(x)=x^3+9x^2+7$ на $[-7;0]$ |
| **8** | $f(x)=2x^3+4x^2-8x+5$ на $[0,25;1]$ | **20** | $f(x)=2x^3+4x^2-8x+5$ на $[5;10]$ |
| **9** | $f(x)=x^3+14x^2+49x+8$ на $[-2;1]$ | **21** | $f(x)=x^3+14x^2+49x+8$ на $[-1;3]$ |
| **10** | $f(x)=\ln\lvert x\rvert+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2}$ на $[-2;-0,5]$ | **22** | $f(x)=\ln\lvert x\rvert+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2}$ на $[0;5]$ |
| **11** | $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x$ на $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ | **23** | $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2+7}$ на $[8;12]$ |
| **12** | $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+7}$ на $[8;12]$ | **24** | $f(x)=x^3-12x+7$ на $[0;2]$ |

**Задание 3.** Исследовать функцию и построить эскиз её графика

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$ | **13** | $y=x-\dfrac{1}{x}$ |
| **2** | $y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$ | **14** | $y=2x^4-3x^2++2x+2$ |
| **3** | $y=x+\ln(x^2-4)$ | **15** | $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ |
| **4** | $y=\dfrac{3x^2-7x+16}{x^2-x-6}$ | **16** | $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+2$ |
| **5** | $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$ | **17** | $y=x^4-8x^2+3$ |
| **6** | $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$ | **18** | $y=xe^{-x}$ |
| **7** | $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$ | **19** | $y=\dfrac{2x}{x-1}$ |
| **8** | $y=x^2\ln x$ | **20** | $y=\dfrac{x}{2x-1}+x$ |
| **9** | $y=x+e^{-x}$ | **21** | $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ |
| **10** | $y=\dfrac{x(x+1)}{(x+2)(x-3)}$ | **22** | $y=\dfrac{1}{x(x-1)}$ |
| **11** | $y=2x^2+\ln x$ | **23** | $y=(x^2-1)^3$ |
| **12** | $y=x^4+x^2+e^x$ | **24** | $y=x+\dfrac{x}{3x-1}$ |

**Задание 4.**

a) Записать уравнение касательной и нормали к кривой в указанной точке a

1. $y=\dfrac{1}{x}$ при a=-1  2. $y=\dfrac{3x^2}{2x+1}$ при a=1  3. $y=e^{4-x^2}$ при a=2

4. $y=x^2-x+1$ при a=-1  5. $y=tgx$ при $a=\dfrac{\pi}{3}$  6. $y=x^2+x$ при a=-1

7. $y=3x^2-x$ при a=-1  7. $y=\ln x$ при a=1  8. $y=\sin x$ при $a=0$

9. $y=x^2-x-12$ при a=1  10. $y=\sin x$ при $a=\pi$  11. $y=x^2-7x+10$ при a=4

12. $y=2x^2$ при a=-1  13. $y=tgx$ при $a=\dfrac{\pi}{4}$  14. $y=\sin x$ при $a=\dfrac{\pi}{3}$

b) На кривой найти точку, в которой касательная к ней параллельна указанной прямой

15. $y=x^2-2x-8$, $4x+y+4=0$  16. $y=-x^2+7x-10$, $x+y-1=0$

17. $y=-x^2+4$, $x-2y+2=0$  18. $y^2-x=0$, $x+y-6=0$

c) Вычислить острые углы, образованные при пересечении линий

19. $y^2-x=0$, $x+y-6=0$  20. $y=x^2$, $x=y^2$  21. $y^2=4x$, $2x^2=27y$

22. $y=\lg x$, $y=1$  23. $\dfrac{y}{2}=x^2$, $4x=y^2$  24. $4-x^2=0$, $x-2y+4=0$.

### *Список литературы*


1. **Башмаков, М.И.** Математика: учебник / М.И. Башмаков. М.: КноРус, 2013. 394 с. (Начальное и среднее профессиональное образование) [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=252172.

**2. Богомолов, Н.В.** Практические занятия по математике: [Текст] : учебное пособие для студентов средних спец. учебных заведений / Н.В. Богомолов. - 4-е изд., стер. М.: Высшая школа, 1999. 495 с.

**3. Григорьев, В.П.** Элементы высшей математики [Текст]: учебник для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, обучающихся по группе специальностей 2200 «Информатика и вычислительная техника» / Григорьев, Валерий Петрович, Дубинский, Юлий Андреевич. - 10-е изд., стереотип. М. Академия, 2014. 320 с. (Профессиональное образование).

**4. Гурова, З.И.** Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68134.

**5 Демидович, Б.П., Кудрявцев, В.А.** Краткий курс высшей математики [Текст]: [Для естеств. спец. ун-тов]. - 5-е изд., стер. М.: Наука, 1978. 623 с.

**6. Земляков, А.Н.** Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс: учебное пособие [Электронный ресурс] / А.Н. Земляков. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 326 с. [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222098.

**7. Майоровская, С.В.** Элементы высшей математики [Текст]: пособие / С.В. Майоровская, О.Н. Поддубная, Л.В. Станишевская. Минск: Вышэйшая школа, 2010. 352 с. [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.phppage=book&id=235718.

**8. Околелов, О.П.** Элементы высшей математики. Матричная алгебра и линейные уравнения [Текст]: учебное пособие / О.П. Околелов. М.: Директ-Медиа, 2013. 60 с. [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=139785.

**9. Погорелов, А. В.** Геометрия [Текст]: учебное пособие для вузов. - 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. 288 с.

10. Помощь по математике поступающему в вуз и начинающему студенту [Электронный ресурс] / Н.Ф. Квачева, В.С. Крамор, П.А. Михайлов, В.А. Треногин и др. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 658 с. [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114582.

11. Раздел действительного числа (Основные свойства, эффектив. схемы и методы решений уравнений и неравенств, примеры решения стандартных и нестандартных задач, сводка основных фактов) [Текст]: Справочное пособие / В.И. Голубев и др., Е.В. Шикин (ред.). Пущино: Пущинский Научный центр РАН, ОНТИ, 1992. 34 с.

12. Сборник заданий по элементам высшей математики [Текст] / сост. О.Ю. Глухова. Кемерово Кемеровский государственный университет, 2012. 150 с. [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232510.

**13. Шипачев, В. С.** Основы высшей математики [Текст]: Учебное пособие для студентов вузов / В.С. Щипачев; Под ред. акад. А.Н. Тихонова. – 3-е изд., стер. М.: Высшая школа, 1998. 479 с.

***Содержание***


***Введение***………………………………………………………… 3

***Раздел 1. Действительные числа***………………………………… **4**

1.1. Расширение понятия числа…………………………….............. 4

1.2. Комплексные числа……………………………………….......... 7

*Задания для самостоятельного решения к Разделу 1*…………..… 10

***Раздел 2. Основы линейной алгебры***…………………………….. **12**

2.1. Матрицы……………………………………………………….. 12

2.2. Системы линейных уравнений и определители матриц…….. 16

*Задания для самостоятельного решения к Разделу 2*……………….. 20

***Раздел 3. Основы аналитической геометрии***…………………. **23**

3.1. Векторы на плоскости и в пространстве……………………….. 23

3.2. Прямая и плоскость в пространстве…………………………….. 28

*Задания для самостоятельного решения к Разделу 3*……………….. 33

***Раздел 4. Кривые второго порядка***………………………………. **36**

4.1. Окружность…………………………………………………….… 36

4.2. Эллипс……………………………………………………….…..… 37

4.3. Гипербола……………………………………………………..…... 38

4.4. Парабола………………………………………………………….… 39

*Задания для самостоятельного решения к Разделу 4*……………… 40

***Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной***………………………………………………………….. **41**

5.1. Элементы теории пределов……………………………………… 41

5.2. Непрерывность………………………………………………….. 48

*Задания для самостоятельного решения к Разделу 5*……………….. 51

***Раздел 6. Производная***………………………………………… **53**

*Задания для самостоятельного решения к Разделу 6*……………….. 60

*Список литературы*……………………………………………………… 63

*Содержание*………………………………………………………….. 65

Учебное издание

**Галина Георгиевна Ельчанинова,**
**Роман Анатольевич Мельников**

# ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ:
## типовые задания с примерами решений для студентов СПО (09.02.03 Программирование в компьютерных системах; 09.02.02 Компьютерные сети)

## Учебное пособие

*Технический редактор – О. А. Ядыкина*
Книга издается в авторской редакции

Лицензия на издательскую деятельность
ИД № 06146. Дата выдачи 26.10.01.
Формат 60 х 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 4,1 Уч.-изд.л. 3,8
Электронная версия

Размещено на сайте: http://elsu.ru/kaf/maem/edu
Заказ 22

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1