МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А.БУНИНА»

Л.В. Жук, О.Н. Прокуратова

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Практикум по решению задач

Елец – 2018

УДК 513.56/58
ББК 22.151.5
Ж 85

Размещено на сайте по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета имени И.А. Бунина
от 29. 01. 2018 г., протокол № 1

Рецензенты:

Масина О.Н., доктор физико-математических наук, профессор
(Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина);

Трофимова Е.И., доктор педагогических наук, профессор
(Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина)

Жук Л.В., Прокуратова О.Н.

Ж 85 Линии и поверхности второго порядка: учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2018. – 81 с.

Настоящий практикум по решению задач аналитической геометрии предназначен для студентов-бакалавров первого курса математических специальностей вузов и призван оказать помощь в приобретении ими необходимых практических навыков при самостоятельной работе, при выполнении контрольных заданий, а также содействовать более глубокому усвоению теоретического материала.

В пособии кратко изложены основные теоретические сведения, приведены типовые примеры и задачи для самостоятельного решения по разделам «Линии второго порядка» и «Поверхности второго порядка», описаны некоторые приложения аналитической геометрии в оптике, механике.

УДК 513.56/58
ББК 22.151.5

Содержание

РАЗДЕЛ I. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§1.1. Понятие линии второго порядка

Напомним некоторые понятия из курса алгебры.

1. Выражение вида $\boldsymbol{ax^iy^j}$, где $a \in R$, $i, j \in N \cup \{0\}$, называется ***одночленом*** от переменных *x* и *y* с коэффициентом a.

Если $a \neq 0$, то число ***i+j*** называется ***степенью одночлена***.

2. ***Многочленом*** от переменных *x* и *y* называется алгебраическая сумма конечного числа одночленов.

Например, $F(x, y) = -4x^3 + 2xy + 5y + 1$.

3. ***Степенью многочлена*** называется наибольшая из степеней одночленов, входящих в него.

Приведенный выше многочлен имеет степень 3.

Многочлен, не имеющий ненулевых членов, называется **нулевым многочленом** (0). Для него степень не определена.

4. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется ***алгебраическим уравнением*** с двумя неизвестными, если его левая часть $F(x, y)$ является многочленом от двух переменных. Степень многочлена $F(x, y)$ называется ***степенью алгебраического уравнения***.

Например, $-4x^3 + 2xy + 5y + 1 = 0$ есть алгебраическое уравнение третьей степени.

Определение 1. Алгебраической линией порядка k *на плоскости называется множество L точек M(x,y), координаты которых удовлетворяют некоторому алгебраическому уравнению степени k от двух неизвестных x и y.*

То есть $L=\{M(x,y) \mid F(x,y)=0\}$, где *F(x,y)* – многочлен степени *k*.

Примеры.

1. Напомним, что любую прямую на плоскости можно задать уравнением вида *Ax+By+C=0*, где A и B одновременно не равны нулю. Таким образом, прямая – алгебраическая линия первого порядка.

2. Окружность в некоторой аффинной системе координат задается алгебраическим уравнением $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ второй степени и потому является алгебраической линией второго порядка.

Можно доказать, что *если линия L является алгебраической порядка k, то в любой аффинной системе координат она может быть задана алгебраическим уравнением степени k*. То есть понятие алгебраической линии не зависит от выбора аффинной системы координат, является геометрическим понятием.

Однако не всякая линия на плоскости является алгебраической.

Пример 3. В прямоугольной декартовой системе координат рассмотрим синусоиду L_1: $\sin x - y = 0$. Предположим, что линия L_1 является алгебраической, тогда она имеет уравнение *F(x,y)=0*. Рассмотрим многочлен *f(x)=F(x,0)*. Ось *Ox* (*y=0*) пересекает синусоиду в бесконечном множестве точек $\{(k\pi,0) \mid k\in Z\}$.Следовательно, $f(k\pi)=F(k\pi,0)=0$ для всех $k\in Z$, то есть многочлен *f(x)* имеет бесконечное множество корней. Это возможно лишь в случае, если *f(x)* является нулевым многочленом. Следовательно, $F(x,0)\equiv 0$. Поскольку по предположению *F(x,y)=0* есть уравнение синусоиды, то приходим к выводу, что каждая точка оси *Ox* лежит на синусоиде, что невозможно.

Линия, не являющаяся алгебраической, называется ***трансцендентной***. Таким образом, мы показали, что синусоида является трансцендентной кривой.

Замечание. Не всякое уравнение *F(x,y)=0* есть уравнение линии. Множество точек, удовлетворяющих *F(x,y)=0*, может оказаться пустым, содержать некоторую область на плоскости или состоять из конечного числа точек.

Например, рассмотрим в прямоугольной системе координат множества, определяемые уравнениями

$$L_1: x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

$$L_2: x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2 = 0$$

$$L_3: |x^2 + y^2 - 1| + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Очевидно, L_1 – пустое множество точек. L_2 состоит из двух точек O(0;0) и A(1;0), а L_3 представляет собой круг с центром O радиуса 1 (проверить это самостоятельно!).

Мы видим, что уравнением *F(x,y)=0* могут задаваться фигуры, не согласующиеся с интуитивным представлением о линии.

Определение 2. *Множество точек плоскости M(x,y), координаты которых удовлетворяют уравнению*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad \textbf{(1.1)}$$

где A, B, C, D, E, F *– действительные числа, причем* A, B, C *одновременно не равны нулю, называется* ***линией второго порядка.***

Уравнение (1.1) называется ***общим уравнением*** линии второго порядка.

Заметим, что одна и та же линия на плоскости в разных системах координат задается различными уравнениями, поэтому, выбирая должным образом систему координат, уравнение (1.1) можно упростить. Системы координат, в которых это уравнение принимает наиболее простой вид, в дальнейшем будут названы ***каноническими.*** Как правило, в канонических системах координат одна из осей координат или обе оси являются осями симметрии линии, а начало системы координат совпадает с центром симметрии линии.

§1.2. Эллипс

Определение 1. Эллипсом *называется множество точек* γ *на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек* F_1 *и* F_2*, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между* F_1 *и* F_2*:*

$$MF_1+MF_2=\text{const}, \qquad \textbf{(2.1)}$$

и $MF_1+MF_2>F_1F_2$ (рис. 1).

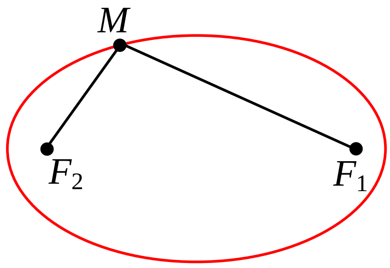


Рис. 1

Отрезки MF_1 и MF_2 называются *фокальными радиусами* точки M. Расстояние между фокусами F_1 и F_2 – *фокальным расстоянием*.

Если обозначить $MF_1+MF_2=2a$, $F_1F_2=2c$, то в силу определения эллипса $a>c$.

Эллипс легко вычертить следующим способом. Если концы нити заданной длины закреплены в точках F_1 и F_2 (рис. 2), то линия, описываемая острием карандаша, скользящим по туго натянутой нити, имеет форму эллипса. Если точки F_1 и F_2 совпадают, то эллипс превращается в окружность.

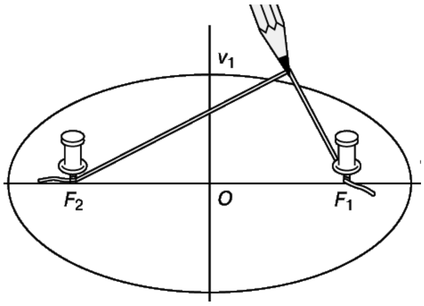


Рис. 2

Составим уравнение эллипса в декартовых координатах. Начало координат поместим в середину отрезка F_1F_2, и направим $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF_1}$ (рис. 3). Фокусы будут иметь координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$.

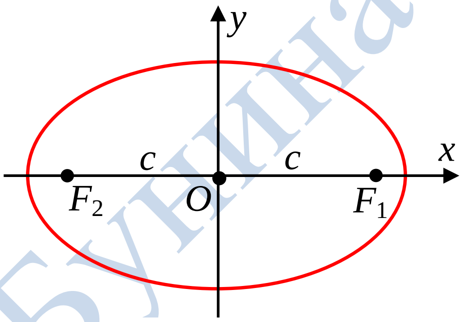


Рис. 3

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда

$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $\quad MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.

Согласно определению (2.1) имеем

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.

Возведем обе части равенства в квадрат и сократим одинаковые слагаемые:

$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$.

$-4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \iff a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc.$

Еще раз возводим в квадрат, сокращаем и группируем:

$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2,$

$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

Согласно определению $a > c$, поэтому можем обозначить $\boldsymbol{b^2=a^2-c^2}$, и, разделив на a^2b^2, окончательно получаем

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}\ . \qquad \textbf{(2.2)}$$

Мы доказали, что координаты произвольной точки эллипса удовлетворяют уравнению (2.2).

Можно доказать и обратное: если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (2.2), то M лежит на эллипсе. Для этого из (2.2) выразим $y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$ и подставим в выражение для MF_1, учитывая при этом обозначение $b^2=a^2-c^2$:

$$MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+(a^2-c^2)(1-\frac{x^2}{a^2})}=$$
$$=\sqrt{x^2-2xc+c^2+a^2-c^2-x^2+\frac{c^2x^2}{a^2}}=\sqrt{a^2-2xc+\frac{c^2x^2}{a^2}}=$$
$$=\sqrt{(a-\frac{cx}{a})^2}=\left|a-\frac{cx}{a}\right|.$$

Аналогично получаем, что $MF_2=a+\frac{cx}{a}$. Из (2.2) следует, что $|x|\le a$, а по определению, $a>c$ $\Rightarrow$ оба выражения под модулем неотрицательны. Поэтому

$$MF_1+MF_2=a-\frac{cx}{a}+a+\frac{cx}{a}=2a.$$

Уравнение (2.2) называется *каноническим уравнением* эллипса, а выбранная нами система координат, в которой оно было получено, – *канонической системой*.

По каноническому уравнению выясним *геометрические свойства эллипса*.

1. Из (2.2) следует, что $|x|\le a$, $|y|\le b$. Значит, эллипс целиком содержится в прямоугольнике, определяемыми этим неравенствами (рис. 4).

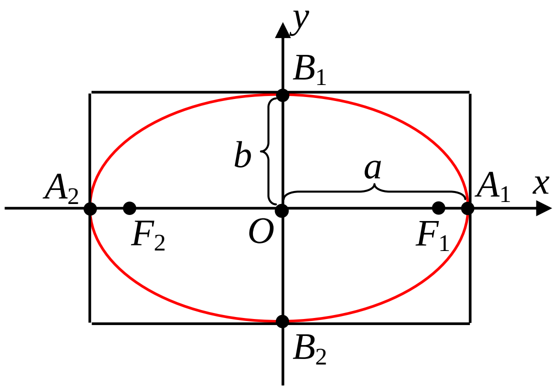


Рис. 4

2. Координатные оси пересекают эллипс в точках $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$, которые называются его *вершинами*. Отрезки $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$ называются *большой и малой осями эллипса*. Числа a и b называются *большой и малой полуосями*.

3. Координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром симметрии (рис. 5).

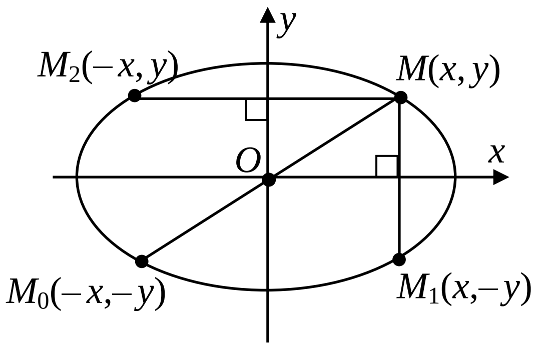


Рис. 5

Действительно, пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда пара (x,y) удовлетворяет уравнению (2.2).

Но тогда этому уравнению удовлетворяют также и пары (x,–y), (–x,y), (–x,–y), которые задают точки, симметричные M относительно Ox, Oy и точки O соответственно.

4. Эллипс γ может быть получен из окружности γ': $X^2 + Y^2 = a^2$ в результате равномерного ее сжатия вдоль оси Oy с коэффициентом $k=a/b$ (рис. 6). Действительно, при таком сжатии точка $M'(X, Y) \in \gamma'$ будет переходить в точку $M(x, y)$, где

$$\begin{cases} x = X, \\ y = \dfrac{b}{a} Y. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = x, \\ Y = \dfrac{a}{b} y. \end{cases}$$

Подставляя последние формулы в уравнение окружности, получим, что координаты точки M удовлетворяют (2.2), т.е. $M \in \gamma$.

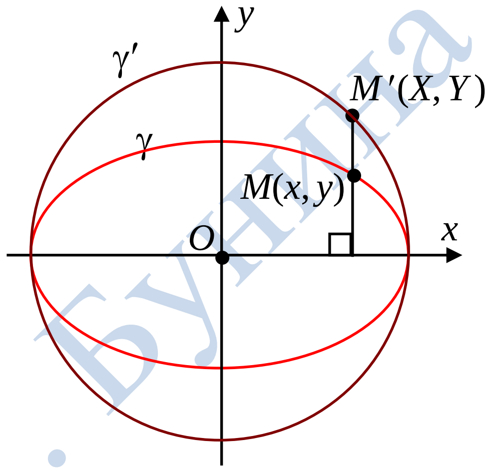


Рис. 6

Определение 2.2. Эксцентриситетом эллипса *называется отношение половины его фокального расстояния к большой полуоси:*

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Так как $a > c$, то $0 \leq \varepsilon < 1$. Случай $\varepsilon=0$ соответствует окружности.

Как зависит форма эллипса от эксцентриситета?

Заметим, что $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Отсюда следует, что среди эллипсов, имеющих одну и ту же большую полуось, но разные эксцентриситеты, более продолговатым является тот, у которого эксцентриситет больше. На рис. 7 $0=\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3$.

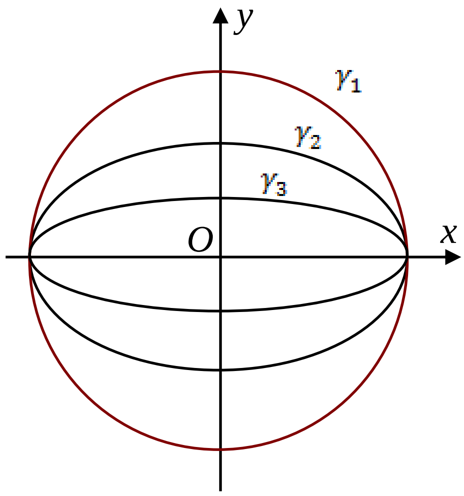


Рис. 7

Определение 2.3. *Прямые d_1, d_2, параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$, называются* ***директрисами эллипса*** (рис. 8).

Окружность как частный случай эллипса (ε=0) не имеет директрис.

В канонической системе координат директрисы имеют уравнения:

$d_1\colon x = \frac{a}{\varepsilon}$,

$d_2\colon x = -\frac{a}{\varepsilon}$,

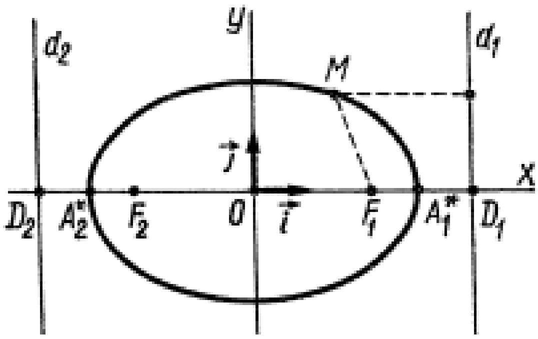


Рис. 8

Можно доказать важное ***директориальное свойство эллипса***: *эллипс есть множество всех точек плоскости, отношение расстояния от каждой из которых до фокуса F к расстоянию до соответствующей директрисы d постоянно и равно эксцентриситету ε* (рис. 8).

То есть $\boldsymbol{\gamma=\{M \mid \frac{\rho(M,F)}{\rho(M,d)}=\varepsilon\}}$.

Где встречаются эллипсы?

Немецкий астроном Иоганн Кеплер, продолжатель дела Коперника, доказал, что орбиты всех планет представляют собой вытянутые окружности – эллипсы, то есть все тела Солнечной системы движутся вокруг Солнца по эллипсам. По эллипсам движутся вокруг Земли ее искусственные спутники и естественный спутник – Луна (рис. 9).

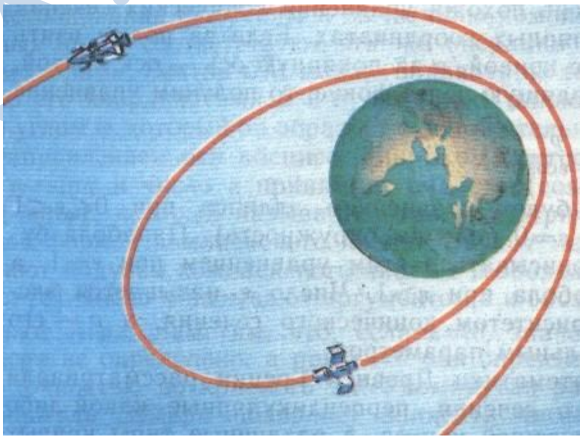


Рис. 9

Кольца Урана и Сатурна также имеют эллиптическую форму:

Рис. 10

С понятием эллипса в астрономии связаны и эллиптические галактики (рис. 11). Они составляют примерно 25% от общего числа галактик высокой светимости. Их принято обозначать буквой Е (англ. elliptical). Типичная Е-галактика выглядит как сфера или эллипсоид, диск в ней практически полностью отсутствует. Эллиптические галактики, как и сферические компоненты у галактик других типов, почти лишены межзвездного газа, а, следовательно, и молодых звезд. Звезды эллиптических галактик обращаются вокруг центра галактики очень медленно (скорость вращения обычно не превышает нескольких десятков км /с).

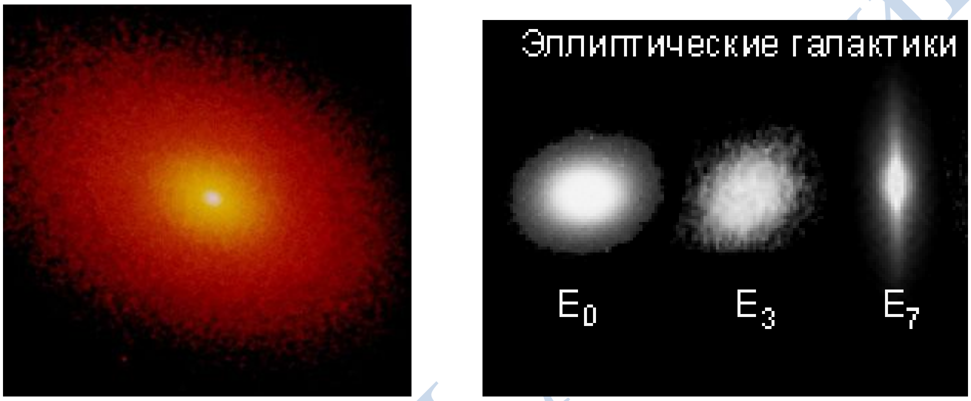


Рис. 11. *Эллиптическая галактика М32*

Орбиты большинства комет – сильно вытянутые эллипсы. Так, комета Галлея движется по эллиптической орбите в направлении, противоположном направлению вращения планет (рис. 12).

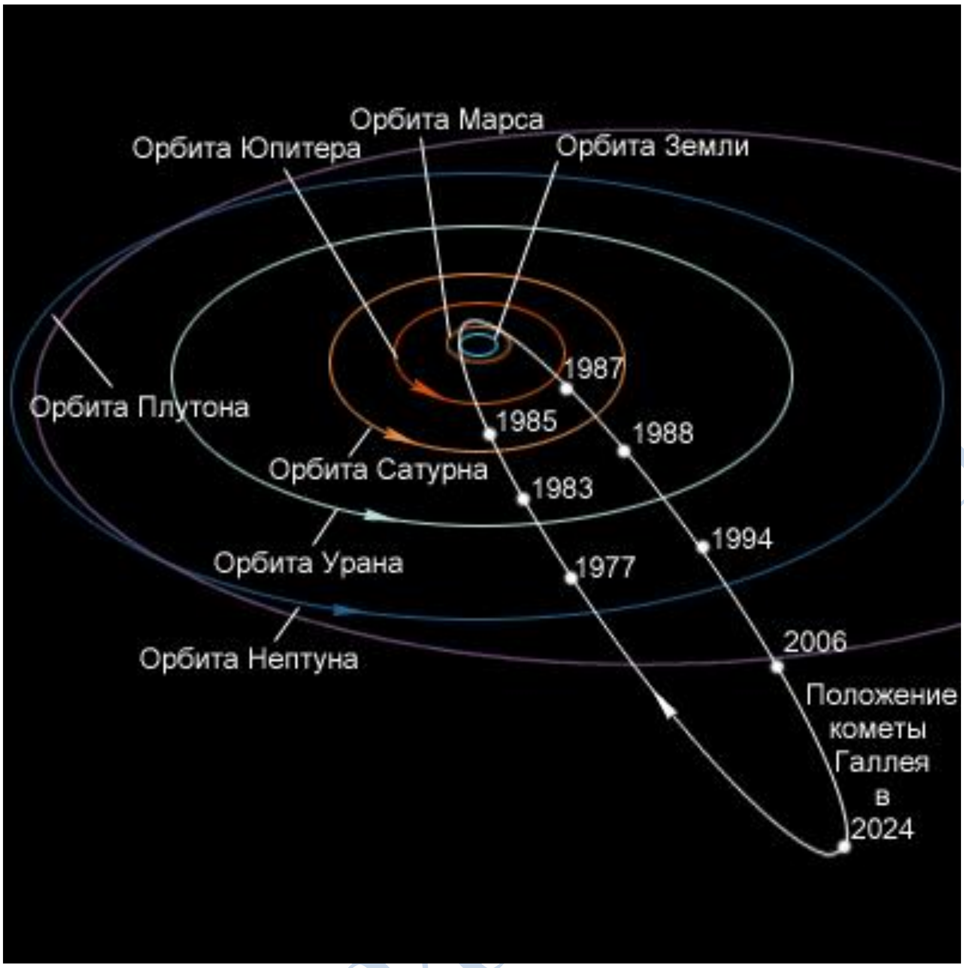


Рис. 12

На практике довольно широкое применение находит ***оптическое свойство эллипса***: *фокальные радиусы точки эллипса составляют с касательной к эллипсу в этой точке равные углы* (рис. 13). А это значит, что луч, пущенный из одного фокуса, после отражения попадает в другой.

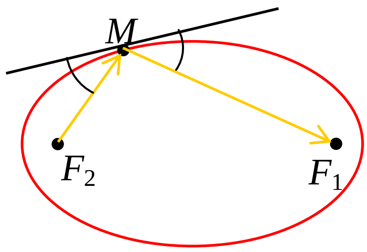


Рис. 13

Это свойство лежит в основе интересного акустического эффекта, наблюдаемого в некоторых пещерах и искусственных сооружениях, своды которых имеют эллиптическую форму (рис. 14): если находиться в одном из фокусов, то речь человека, стоящего в другом фокусе, слышна так хорошо, как будто он находится рядом, хотя на самом деле расстояние велико.

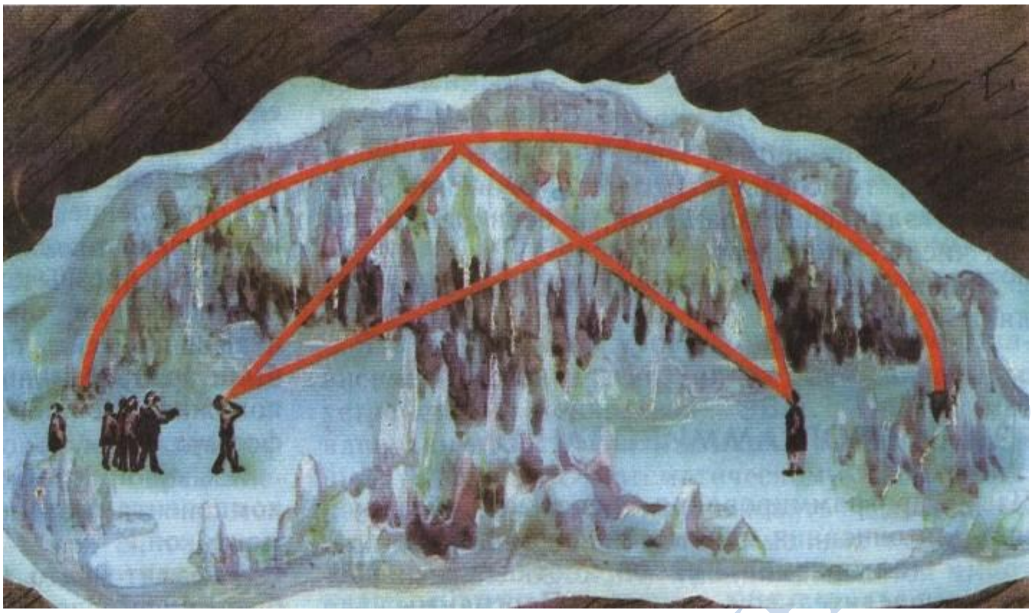


Рис. 14

Примеры решения задач

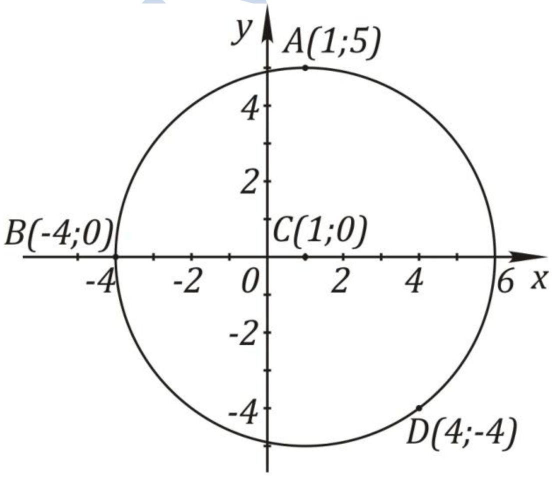
1. *Составить уравнение окружности, проходящей через точки* $A(1;5)$, $B(-4;0)$ *и* $D(4;-4)$.

Решение.

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0;y_0)$ имеет вид: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Так как точки A, B, D лежат на окружности, то их координаты должны удовлетворять этому уравнению:

$$\begin{cases} (1-x_0)^2+(5-y_0)^2=R^2 \\ (-4-x_0)^2+(0-y_0)^2=R^2 \\ (4-x_0)^2+(-4-y_0)^2=R^2 \end{cases}$$



Вычитая из первого уравнения системы второе, а затем третье, получим $x_0=1, y_0=1$, а далее и $R=5$, т. е. уравнение окружности: $(x-1)^2+y^2=25$.

2. *Найти значение параметра* a, *при котором окружность* $x^2 + y^2 - 4x + a = 0$ *касается прямой* $y = x\sqrt{3}$. *Найти радиус окружности, её центр и точку касания.*

Решение.

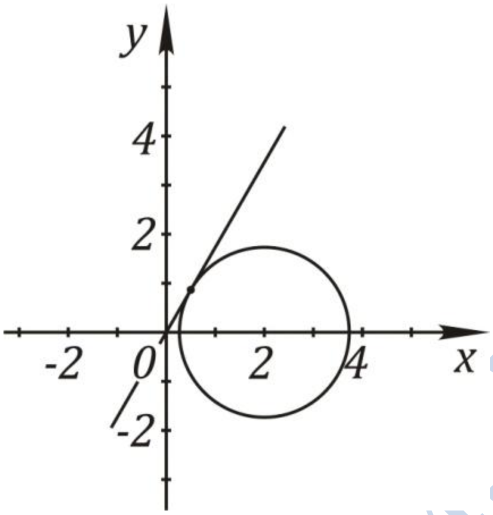
По условию окружность и прямая имеют одну общую точку, следовательно, система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + a = 0 \\ y = x\sqrt{3} \end{cases}$$

или уравнение

$$x^2 + \left(x\sqrt{3}\right)^2 - 4x + a = 0$$

должны иметь единственное решение.



Это произойдёт, если дискриминант полученного квадратного уравнения $4x^2 - 4x + a = 0$ будет равен нулю,

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 4a = 16(1 - a) = 0$,

откуда $a = 1$.

Решая квадратное уравнение при $a = 1$, находим $x = \frac{1}{2}$, т. е. точка касания $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Для определения радиуса окружности приведём уравнение к нормальному виду, группируя члены содержащие x, и дополняя их до полного квадрата:

$(x^2 - 4x) + y^2 + 1 = 0,$

$(x^2 - 4x + 4) - 4 + y^2 + 1 = 0,$

откуда $(x - 2)^2 + y^2 = 3$, т. е. центр окружности $(2; 0)$ и радиус $R = \sqrt{3}$.

3. *Показать, что при равномерном сжатии к диаметру окружность отображается в эллипс.*

Решение.

Воспользуемся каноническим уравнением окружности:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Будем осуществлять равномерное сжатие окружности по оси Oy (к оси Ox). Это означает, что абсциссы точек окружности остаются без изменения, а все ординаты умножаются на некоторое фиксированное число k. Таким образом, точка с координатами $(x;y)$, переходит в точку с координатами $(x';y')$, где $x = x', y = ky'$.

Из соотношения $x^2 + y^2 = r^2$ следует, что координаты x' и y' будут связаны зависимостью: $(x')^2 + k^2(y')^2 = r^2$ или $\frac{(x')^2}{r^2} + \frac{(y')^2}{\left(\frac{r}{k}\right)^2} = 1$.

Последнее уравнение действительно определяет эллипс с полуосями r и $\frac{r}{k}$.

4. *Определить вид и расположение кривой* $x^2+2y^2-4x+16y=0$.

Решение.

Дополняя члены, содержащие x и y, до полного квадрата, получим $(x-2)^2 + 2(y+4)^2 = 36$, или

$$\frac{(x-2)^2}{6^2} + \frac{(y+4)^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$$

Следовательно, уравнение $x^2+2y^2-4x+16y=0$ задает эллипс с полуосями $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$, центр которого находится в точке $O'(2;-4)$.

§1.3. Гипербола

Определение 1. Гиперболой *называется множество точек γ на плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между F_1 и F_2:*

$$|MF_1 - MF_2| = \text{const}, \qquad \textbf{(3.1)}$$

и $|MF_1 - MF_2| < F_1F_2$ (рис. 1).

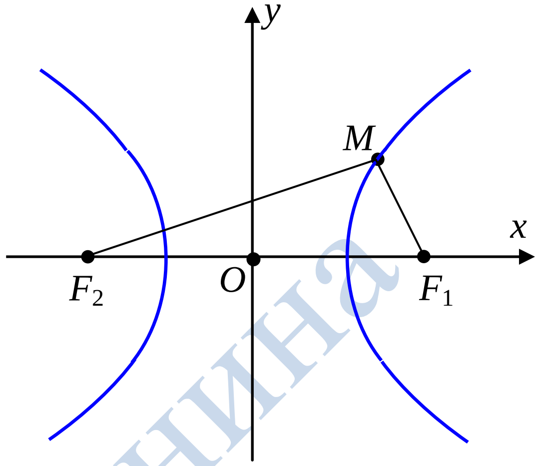


Рис. 1

Отрезки MF_1 и MF_2 называются *фокальными радиусами* точки M. Расстояние между фокусами F_1 и F_2 – *фокальным расстоянием*. Если обозначить $|MF_1 - MF_2| = 2a$, $F_1F_2 = 2c$, то в силу определения гиперболы $a < c$.

Вычертить гиперболу можно так. Точка P, острие карандаша, фиксируется на нити, которая свободно скользит по шпенькам, установленным в точках F_1 и F_2, как показано на рис. 2. Расстояния подобраны так, что отрезок PF_2 превосходит по длине отрезок PF_1 на фиксированную величину, меньшую расстояния F_1F_2. При этом один конец нити проходит под шпеньком F_1 и оба конца нити проходят поверх шпенька F_2. (Острие карандаша не должно скользить по нити, поэтому его нужно закрепить, сделав на нити маленькую петлю и продев в нее острие). Одну ветвь гиперболы (PV_1Q) мы вычерчиваем, следя за тем, чтобы нить оставалась все время натянутой, и потягивая оба конца нити вниз за точку F_2, а когда точка P окажется ниже отрезка F_1F_2, придерживая нить за оба конца и осторожно потравливая (т.е. отпуская) ее. Вторую ветвь гиперболы (PV_2Q) мы вычерчиваем, предварительно поменяв ролями шпеньки F_1 и F_2.

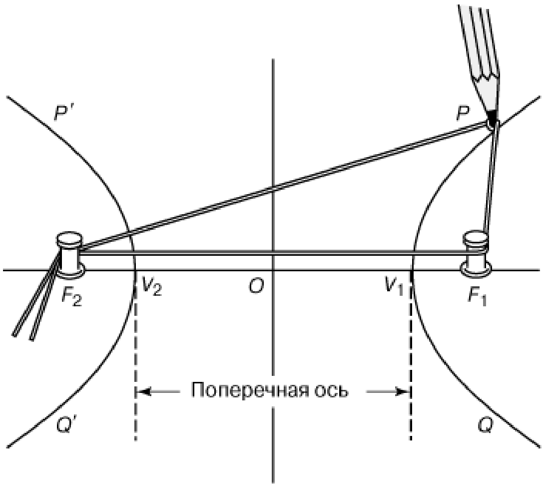


Рис. 2

Составим уравнение гиперболы в декартовых координатах. Начало координат поместим в середину отрезка F_1F_2, и направим $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF_1}$. Фокусы будут иметь координаты $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка гиперболы. Тогда

$MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$.

Согласно определению (3.1) имеем

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$.

Далее совершаем дословно такие же преобразования, что и для эллипса. В результате получим уравнение

$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$.

По определению $a<c$; поэтому можем обозначить $\boldsymbol{b^2=c^2-a^2}$, и, разделив на a^2b^2, окончательно получаем

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}\ . \qquad \textbf{(3.2)}$$

Мы доказали, что координаты произвольной точки гиперболы удовлетворяют (3.2).

Покажем обратное: если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют (3.2), то M лежит на гиперболе. Из (3.2) выразим $y^2=b^2(\frac{x^2}{a^2}-1)$ и подставим в выражение для MF_1, учитывая при этом обозначение $b^2=c^2-a^2$. Точно так же, как и для эллипса получим

$$MF_1=\left|a-\frac{cx}{a}\right|, \quad MF_2=\left|a+\frac{cx}{a}\right|.$$

Из (3.2) вытекает, что $x^2 = a^2(1+\frac{y^2}{b^2}) \Rightarrow |x| \geq a$, и по определению $c>a$. Значит, слагаемое $\frac{cx}{a}$ по модулю больше a и при $x \geq a$ получаем $MF_1 = \frac{cx}{a} - a$, $MF_2 = a + \frac{cx}{a}$, а при $x \leq -a$ получаем $MF_1 = a - \frac{cx}{a}$, $MF_2 = -a - \frac{cx}{a}$. В обоих случаях выполняется (3.1).

Уравнение (3.2) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Выясним по каноническому уравнению *геометрические свойства гиперболы*.

1. Для любой точки $M(x, y)$ на гиперболе

$x^2 = a^2(1+\frac{y^2}{b^2}) \Rightarrow |x| \geq a$,

кроме того $x^2 > \frac{a^2y^2}{b^2} \Leftrightarrow |x| > \frac{a}{b}|y|$.

Значит, вся гипербола содержится в области, определяемой этими неравенствами. Эта область заштрихована на рис. 3.

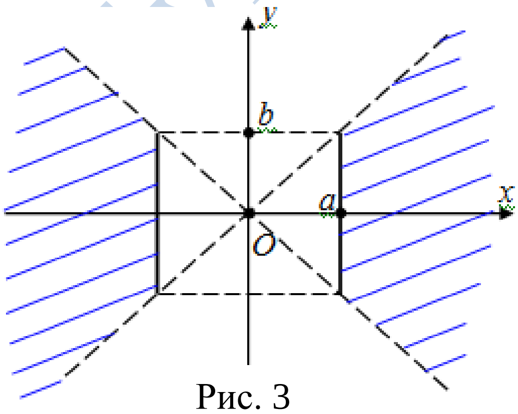


Рис. 3

2. Ось Ox пересекает гиперболу в точках $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, которые называются *вершинами гиперболы*. Ось Oy ее не пересекает. Числа a и b называются *полуосями гиперболы – действительной и мнимой соответственно*.

3. Как и для эллипса, доказывается, что координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром симметрии.

4. Прямые l_1: $y = \frac{b}{a}x$ и l_2: $y = -\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы*.

Гипербола неограниченно к ним приближается, но нигде не пересекает.

Действительно, пусть $M(x, y)$ – точка на гиперболе, а $M'(x, y')$ – на соответствующей асимптоте (рис. 4). Тогда расстояние от точки M до асимптоты меньше, чем MM'. При этом

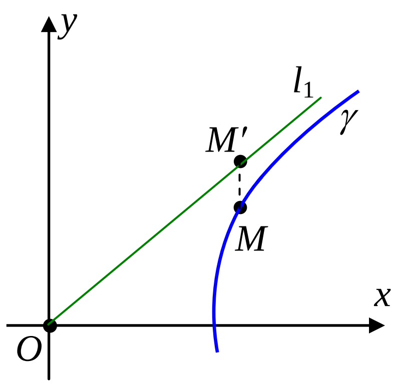


Рис. 4

$MM' = |y'| - |y|$.

$$(y')^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad y^2 = b^2(\frac{x^2}{a^2} - 1).$$

Из этих равенств вытекает, что при $|x| \to \infty$ будет $|y'| \to \infty$ и $|y| \to \infty$. Кроме этого,

$$(y')^2 - y^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; |y'| - |y| = \frac{b^2}{|y'| + |y|} \to 0 \text{ при } |x| \to \infty.$$

Заметим, что обе асимптоты вместе можно задать одним уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Асимптоты проходят через диагонали прямоугольника, который определяется неравенствами $|x| \le a$, $|y| \le b$. Для построения гиперболы рекомендуется сначала изобразить этот прямоугольник.

5. При $a = b$ гипербола называется *равнобокой*. Ее уравнение

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2}, \qquad \textbf{(3.3)}$$

а асимптоты имеют уравнения l_1: $y = x$, l_2: $y = -x$. Очевидно, что $l_1 \perp l_2$, и мы можем выбрать их за оси новой декартовой системы координат $Ox'y'$, которая получается из Oxy поворотом на угол -45° (рис. 5). Тогда формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y'). \end{cases}$$

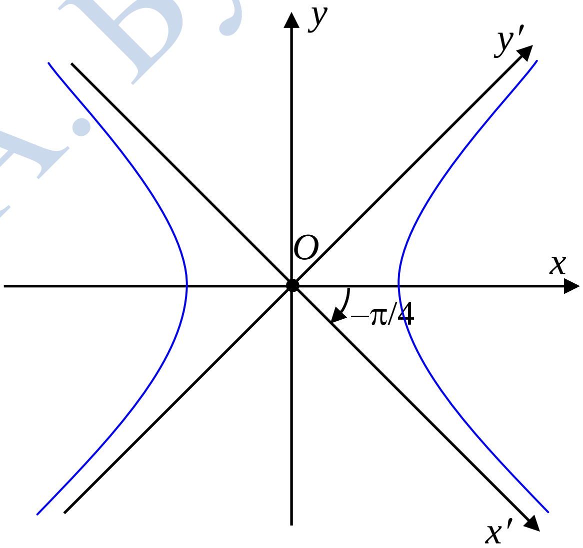


Рис. 5

Подставим их в (3.3) и получим уравнение

$$2x'y' = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{k}{x'}, \text{где } k = a^2/2.$$

Таким образом, *равнобокая гипербола является графиком обратной пропорциональности.*

6. Гипербола γ': $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ называется *сопряженной к гиперболе* γ, заданной уравнением (3.2). Она имеет те же асимптоты, только расположена в другой паре вертикальных углов, образованных ими (рис. 6).

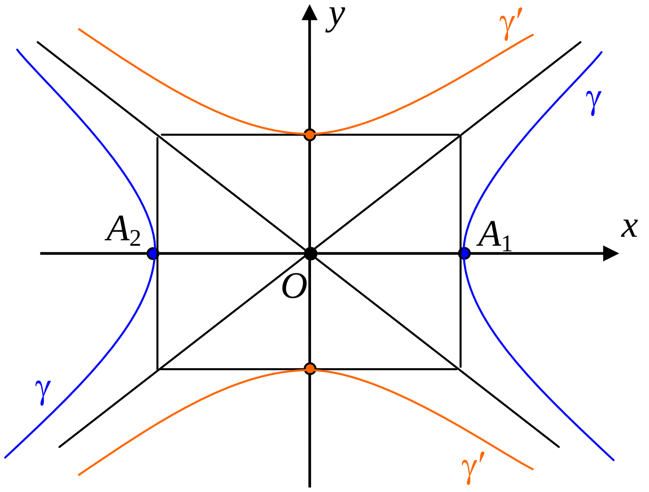


Рис. 6

Определение 2. Эксцентриситетом гиперболы *называется отношение половины ее фокального расстояния к большой полуоси:*

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{c}{a}} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Так как $\boldsymbol{a} < c$, то для гиперболы ε>1.

Как зависит форма гиперболы от эксцентриситета?

Заметим, что $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

Отсюда следует, что среди гипербол, имеющих одну и ту же действительную полуось, но разные эксцентриситеты, более «прижатой» к оси *Oy* является та, у которой эксцентриситет больше. На рис. 7 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

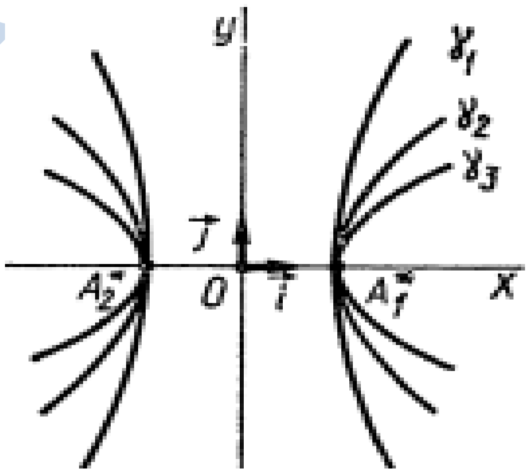


Рис. 7

Определение 3. *Прямые* d_1, d_2, *параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстояние* $\frac{a}{\varepsilon}$, *называются* ***директрисами гиперболы*** (рис. 8).

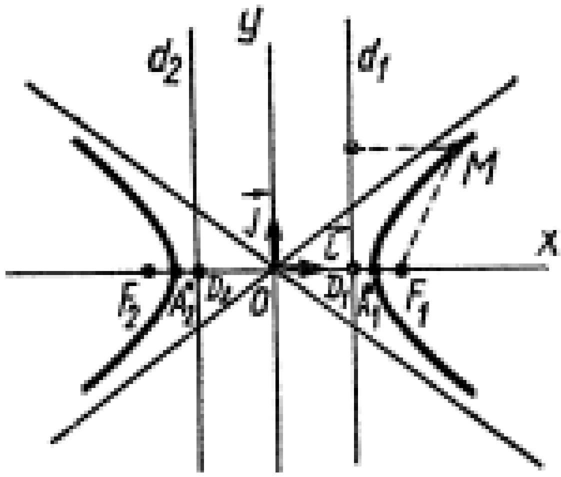


Рис. 8

В канонической системе координат директрисы имеют уравнения:

$d_1\colon x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad d_2\colon x = -\frac{a}{\varepsilon},$

Можно доказать важное ***директориальное свойство гиперболы***: *гипербола есть множество всех точек плоскости, отношение расстояния от каждой из которых до фокуса F к расстоянию до соответствующей директрисы d постоянно и равно эксцентриситету ε* (рис. 8).

То есть $\boldsymbol{\gamma = \{M \mid \frac{\rho(M,F)}{\rho(M,d)} = \varepsilon\}}$.

Применение гиперболы

1. Гипербола является графиком многих физических соотношений. Например, закона Бойля–Мариотта, связывающего давление и объем идеального газа (PV=const), закона Ома, задающего электрический ток как функцию сопротивления при постоянном напряжении ($I = \frac{U}{R}$).

2. Семейство софокусных гипербол вместе с семейством софокусных эллипсов образуют двумерную эллиптическую систему координат (рис. 9).

Эллиптические координаты применяются в некоторых разделах математики и механики.

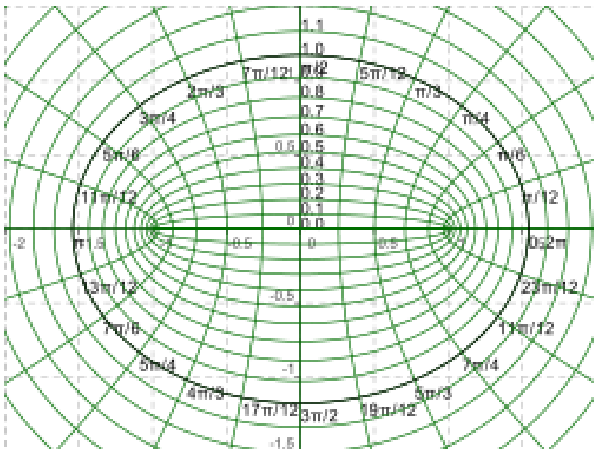


Рис. 9

3. В оптике используется *оптическое свойство гиперболы:* свет от источника, находящегося в одном из фокусов гиперболы, отражается ветвью гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе. Поэтому луч света, исходящий из одного фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы, кажется исходящим из второго фокуса (рис. 10).

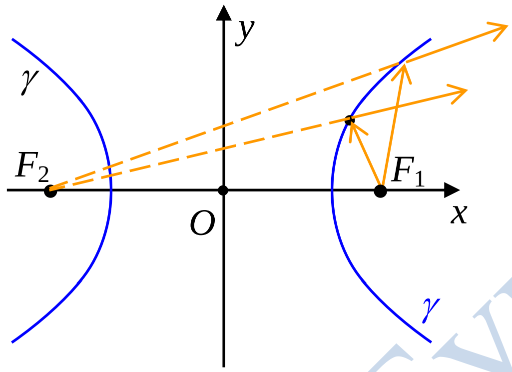


Рис. 10

Примеры решения задач

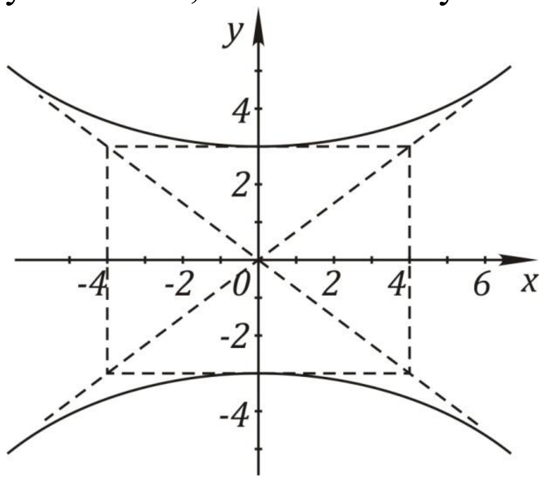
1. *Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы* $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$.

Решение.

Приведём уравнение гиперболы к каноническому виду, разделив обе части уравнения на (-144):

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Следовательно, гипербола имеет фокусы на оси Oy, её действительная полуось $a = 3$, а мнимая полуось $b = 4$.



Асимптоты гиперболы по формуле:

$x = \pm\frac{4}{3}y$ или $y = \pm\frac{3}{4}x$

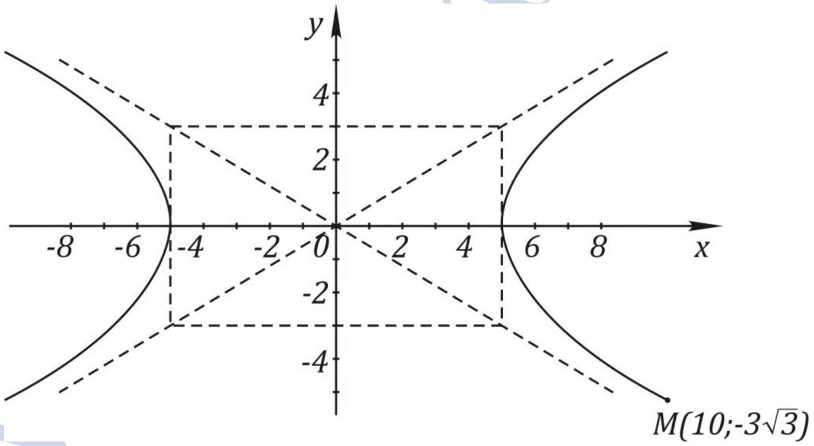
Вершины данной гиперболы $A_1(0;-3), A_2(0;3)$. Далее $c = \sqrt{16+9} = 5$, поэтому фокусы расположены в точках $F_1(0;-5), F_2(0;5)$. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

2. *Составить уравнение гиперболы, если её асимптоты заданы уравнениями* $y = \pm\frac{3}{5}x$ *и она проходит через точку* $M(10;-3\sqrt{3})$. *Найти расстояние между фокусами и вершинами гиперболы.*

Решение.

Так как точка $(10;-3\sqrt{3})$ лежит на гиперболе, то её координаты должны удовлетворять уравнению: $\frac{100}{a^2} - \frac{27}{b^2} = 1$. Кроме того, $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$, так как асимптоты гиперболы $y = \pm\frac{3}{5}x$. Решив полученную систему двух уравнений, найдём $a = 5, b = 3$, т. е. уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$



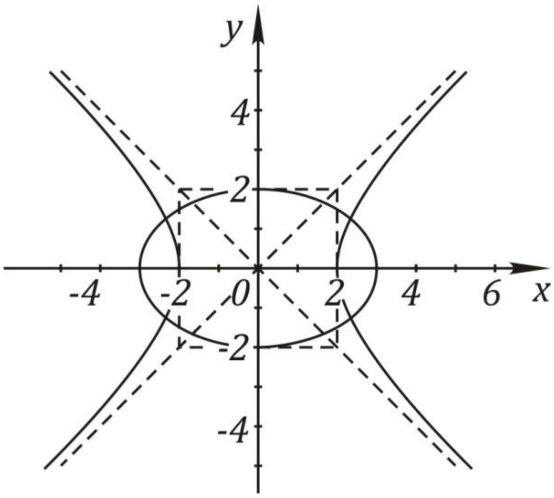
Расстояние между вершинами гиперболы $2a = 10$, между фокусами $2c = 2\sqrt{34}$, где $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$.

3. *Дан эллипс* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. *Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.*

Решение.

Полуоси эллипса $a_э = 3, b_э = \sqrt{5}, c_э = \sqrt{9-5} = 2$. По условию для гиперболы $a_г = c_э = 2, c_г = a_э = 3$. Следовательно, $b_г = \sqrt{c_г^2 - a_г^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ и уравнение искомой гиперболы:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1\,.$$



4. *Составить уравнение гиперболы, зная, что фокусы её находятся в точках $F_1(2;3)$ и $F_2(1;0)$ и что гипербола проходит через точку $P(2;0)$.*

Решение.

Находим $PF_1=3$ и $PF_2=1$. Тогда $2a=PF_1-PF_2$=2.

Следовательно, искомая гипербола есть множество точек $M(x;y)$, для которых $|MF_1-MF_2|=2$. Поэтому её уравнение запишется так:

$$\left|\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right|=2.$$

Это уравнение после преобразований приводится к виду:

$$3x^2+5y^2-6xy+24y-12=0.$$

5. *Даны уравнения асимптот гиперболы $y=\pm 3x$ и уравнения её директрис $x=\pm 1$. Составить каноническое уравнение гиперболы.*

Решение.

Так как уравнения асимптот гиперболы записываются в виде $y=\pm\frac{b}{a}x$, то в данном случае $\frac{b}{a}=3$. С другой стороны, директрисы записываются уравнениями $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ или $x=\pm\frac{a^2}{c}$. Значит, $\frac{a^2}{c}=1$.

Итак, $b = 3a,\ c = a^2$. По определению $b^2 = c^2 - a^2$. Полученные соотношения позволяют найти a^2 и b^2: $a^4 - a^2 = 9a^2,\ a^2 = 10$. Значит, $b^2 = 9a^2 = 90$, и каноническое уравнение данной гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{90} = 1.$$

§ 1.4. *Парабола*

Определение 1. Параболой *γ называется множество всех точек плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F (рис. 1).*

Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая d – ее *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *фокальным параметром* параболы и обозначается p: $\boldsymbol{p=\rho(F,d)}$.

Составим уравнение параболы в декартовой системе координат. Пусть $p=FF'$ – расстояние от фокуса до директрисы. Начало координат поместим в середину отрезка FF' и направим $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF}$. Тогда ось Oy определится однозначно. Фокус будет иметь координаты $F(p/2,\ 0)$, а директриса – уравнение d: $x=-p/2$.

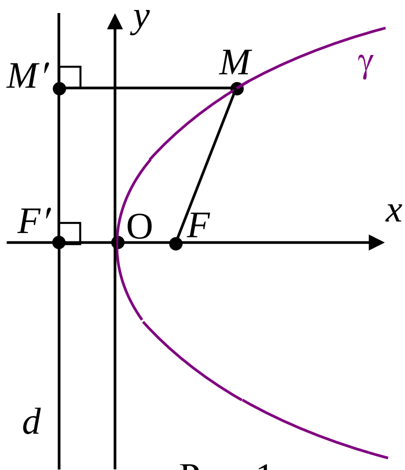


Рис. 1

Пусть $M(x,\ y)$ – произвольная точка параболы. Тогда $MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$,

$$MM' = x + \frac{p}{2}.$$

Согласно определению $MF^2 = MM'^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\mathbf{y^2 = 2px\,. \quad (4.1)}$$

Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (4.1), то

$$MF^2 = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = MM'^2$$

Уравнение (4.1) называется *каноническим уравнением параболы*.

Заметим, что если в предыдущих рассуждениях поменять ролями оси координат Ox и Oy, уравнение параболы примет вид

$$\boldsymbol{x^2=2py} \quad \textit{(4.2).}$$

В этом случае $Ox \parallel d$, $Oy \perp d$, $F \in d$.

Геометрические свойства параболы

1. Все точки параболы принадлежат полуплоскости $x \geq 0$.

2. Если $M(x, y) \in \gamma$, т.е. пара (x,y) удовлетворяет (4.1), то этому уравнению удовлетворяет также и пара $(x,-y)$, которая задает точку, симметричную M относительно оси Ox. Поэтому Ox является осью симметрии параболы. Других симметрий у параболы нет.

3. Координатные оси пересекают параболу только в точке O, которая называется *вершиной параболы*.

Любая другая прямая, проходящая через вершину, пересекает параболу еще в одной точке.

Действительно, любую прямую l, проходящую через O, кроме оси Oy можно задать уравнением $y=kx$. Для того, чтобы найти ее общие точки с параболой, решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 2px\,, \\ y = kx\,. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2x^2 - 2px = 0, \\ y = kx\,. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(k^2x - 2p) = 0, \\ y = kx\,. \end{cases}$$

При $k \neq 0$ получаем два решения – $(0, 0)$ и $\left(\dfrac{2p}{k^2}, \dfrac{2p}{k}\right)$, а при $k = 0$ – только одно – $(0,0)$. Значение $k = 0$ соответствует оси Ox.

Аналогично, можно доказать, что любая прямая, параллельная оси параболы пересекает ее в одной точке.

4. С увеличением фокального параметра p парабола «вытягивается» вдоль Oy (рис. 2).

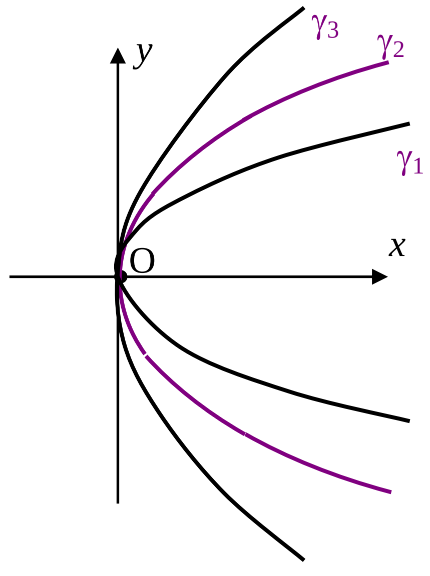


Рис. 2

5. При рассмотрении директориальных свойств эллипса и гиперболы мы выяснили геометрический смысл эксцентриситета этих линий: ε есть постоянное число, которому равно отношение расстояния от каждой точки линии γ до фокуса к соответствующему расстоянию до одноименной директрисы.

Из определения параболы видно, что ее точки обладают аналогичным свойством: отношение расстояния от точки параболы до фокуса к расстоянию до директрисы постоянно и равно 1. Поэтому ***число 1 называют эксцентриситетом любой параболы.***

Применения параболы

Траектории многих космических тел (комет, астероидов и других), проходящих вблизи звезды или планеты на достаточно большой скорости, имеют форму параболы. Эти тела вследствие своей большой скорости не захватываются гравитационным полем звезды и продолжают свободный полёт.

Это явление используется для гравитационных манёвров космических кораблей . «Во́яджер» (англ. voyager – «путешественник») — название двух американских космических аппаратов, запущенных в 1977 году, а также проекта по исследованию дальних планет Солнечной системы с участием аппаратов данной серии. Проект считается одним из самых успешных и результативных в истории межпланетных исследований. Оба «Вояджера» впервые передали качественные снимки Юпитера и Сатурна, а «Вояджер-2» впервые достиг Нептуна и Урана.

Хорошо известно, что траектория камня, брошенного под углом к горизонту, летящего футбольного мяча или артиллерийского снаряда будет параболой (при отсутствии сопротивления воздуха) (рис. 3). А также зона достижимости для пущенных нами камней вновь будет параболой.

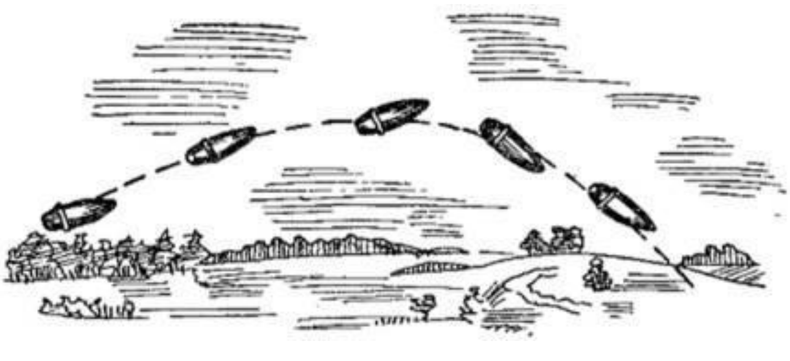


Рис. 3

На практике широкое применение находят **оптические свойства параболы:**

1. *Пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе (рис. 4).*

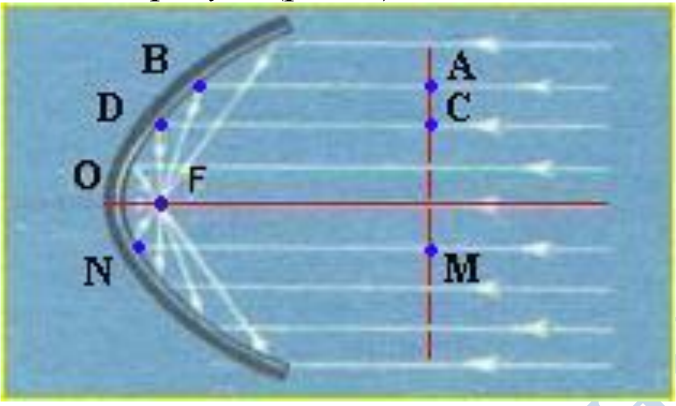


Рис. 4

На этом основана идея телескопов-рефлекторов, зеркала которых выполнены в виде параболоидов вращения (рис. 5).

Рис. 5

2. *Свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных её оси лучей* (рис. 6).

Это свойство параболы используется в конструкциях прожекторов, фонарей, фар, а также в конструкции узконаправленных (спутниковых и других) антенн, необходимых для передачи данных на большие расстояния, солнечных электростанций.

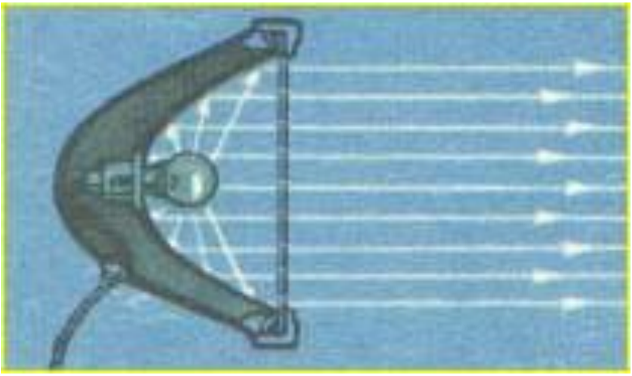


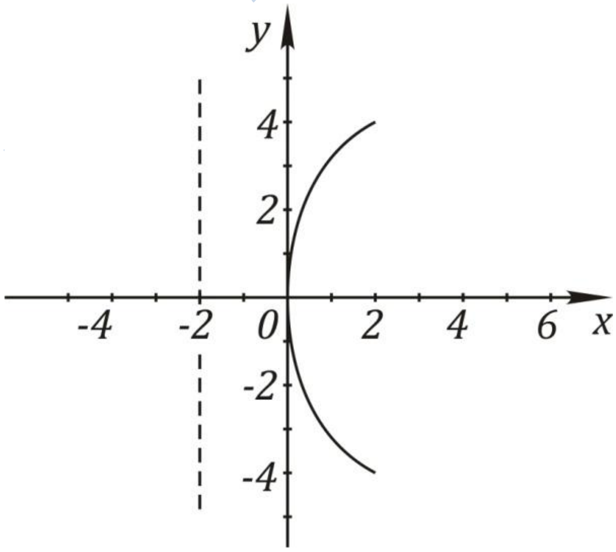
Рис. 6

Примеры решения задач

1. *Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(2;4)$ и симметрична относительно оси Ox. Найти фокус параболы и уравнение её директрисы.*

Решение.

Так как парабола проходит через точку $O(0;0)$ и симметрична относительно оси Ox, то её уравнение $y^2 = 2px$. Подставляя координаты точки A в это уравнение, т. е. $4^2 = 2 \cdot p \cdot 2$, найдём параметр $p = 4$. Следовательно, уравнение параболы $y^2 = 8x$. Уравнение её директрисы $x = -2$, фокус параболы $F(2;0)$.



2. *Через точку $A(3;-1)$ провести такую хорду параболы $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$, которая делилась бы в данной точке пополам.*

Решение.

Для построения параболы представим её в виде:

$$y = \frac{1}{4}(x^2 - 4x - 8) = \frac{1}{4}[(x-2)^2 - 4 - 8] = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3.$$

Уравнение прямой (хорды), проходящей через точку $A(3; -1)$, имеет вид $y + 1 = k(x - 3)$. Точки пересечения хорды с параболой определяются системой:

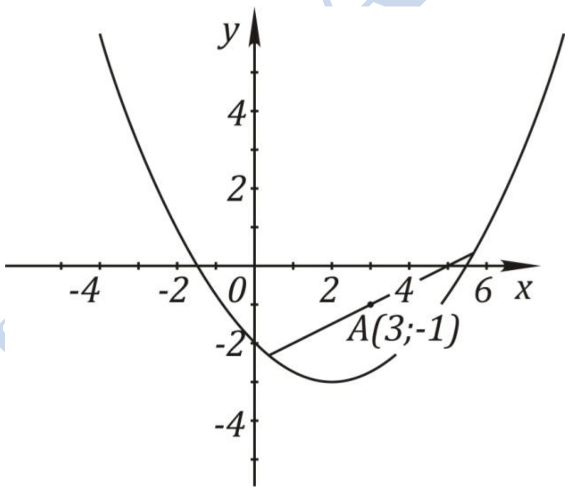
$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2 \\ y + 1 = k(x - 3) \end{cases},$$

решение которой после исключения y, сводится к уравнению:

$$\left(\frac{1}{4}x^2 - x - 2\right) + 1 = k(x - 3) \text{ или } x^2 - 4(k+1)x + 4(3k-1) = 0 \quad (*)$$

По условию точка $A(3; -1)$ делит хорду пополам, следовательно, $x_A = \frac{x_1 + x_2}{2}$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $(*)$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 4(k+1)$, следовательно, $x_A = \frac{4(k+1)}{2} = 2(k+1)$ или $x_A = 2(k+1) = 3$, откуда $k = \frac{1}{2}$, и уравнение хорды: $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$ или $x - 2y - 5 = 0$.



3. *Выяснить, как расположена парабола* $y = 3x^2 - 5x + 10$ *относительно системы координат.*

Решение.

Преобразуем данное уравнение:

$$y = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) + 10 = 3\left(x^2 - 2\cdot\frac{5}{6}x + \frac{25}{36}\right) + \frac{95}{12} =$$

$$= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{95}{12},$$

или

$$y-\frac{95}{12}=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2$$

Обозначим $y-\frac{95}{12}$ через y', а $x-\frac{5}{6}$ через x', получим каноническое уравнение параболы:

$$y'=3x'^2, \text{или } x'^2=\frac{1}{3}y'$$

Соотношения $y+\frac{95}{12}=y', x+\frac{5}{6}=x'$ показывают, что система координат $O'x'y'$ получена из первоначальной системы Oxy параллельным переносом, причём новое начало O' находится в точке с координатами $\left(\frac{5}{6};\frac{95}{12}\right)$.

Парабола $x'^2=\frac{1}{3}y'$ симметрична относительно оси $O'y'$, вершина её находится в начале O' новой системы координат, ветви направлены в сторону положительной полуоси $O'y'$.

4. *Найти условие, при котором прямая* $y=kx+b$ *касается параболы* $y^2=2px$.

Решение.

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=2px \end{cases}$$

получаем квадратное уравнение:

$$k^2x^2+2(bk-p)x+b^2=0 \qquad (*)$$

дискриминант которого $D=4p^2-8bkp$.

Прямая $y=kx+b$ будет касаться параболы $y^2=2px$ тогда и только тогда, когда корни уравнения $(*)$ будут действительными и равными. Так как $p \neq 0$, то из уравнения $4p^2 - 8bkp = 0$ следует искомое соотношение $\boldsymbol{p = 2bk}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $A(-1;5), B(-2;2)$ и $C(5;5)$.

2. Составить уравнение окружности, если она проходит через точки $A(3;1)$ и $B(-1;3)$, а центр её лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через центр окружности $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 15 = 0$ параллельно прямой $x + y = 0$.

4. Эллипс проходит через точки $M_1(2;\sqrt{3})$ и $M_2(0;2)$. Составить уравнение эллипса и найти расстояние от точки M_1 до фокусов.

5. Составить уравнение эллипса, зная что:

а) сумма длин полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8;

б) директрисы задаются уравнениями $x = +12$, $x = -12$ и эксцентриситет равен $\frac{1}{3}$.

6. Найти эксцентриситет эллипса, зная, что расстояние между его директрисами в четыре раза больше расстояния между фокусами.

7. На эллипсе, фокусы которого расположены в точках $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, найти точки, которые отстоят в пять раз дальше от директрисы $x = 7{,}2$, чем от директрисы $x = -7{,}2$.

8. Эллипс касается оси ординат в начале координат. Центр эллипса находится в точке $C(5;0)$. Составьте уравнение этого эллипса, зная, что эксцентриситет его равен $0{,}8$.

9. Какой вид получит уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

если повернуть систему координат вокруг её начала на угол 45^0?

10. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

11. Составить уравнения асимптот равносторонней гиперболы

$$y=\frac{2x-3}{x-3}$$

и найти координаты её вершин.

12. Составить уравнения осей симметрии равносторонней гиперболы

$$y=\frac{4-3x}{x-1}.$$

13. Составить каноническое уравнение гиперболы по следующим данным:

а) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$, расстояния между фокусами равно 20;

б) эксцентриситет равен $1{,}5$, расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$.

14. На правой ветви гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1,$$

найти точки, фокальные радиусы которых равны 8.

15. Составить уравнение гиперболы, эксцентриситет которой равен 3 и фокусы находятся в точках $F_1(0;-2)$, $F_2(6;-2)$.

16. Составить уравнение гиперболы, эксцентриситет которой равен 5, один из фокусов находится в точке $F(3;3)$ и уравнение соответствующей директрисы $x+y-2=0$.

17. Найдите уравнения прямых, касающихся гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и параллельных прямой $2x - y - 1 = 0$.

18. Составить уравнение параболы:

а) проходящей через точки $(0;0)$ и $(1;-3)$ и симметричной относительно оси Ox;

б) проходящей через точки $(0;0)$ и $(2;-4)$ и симметричной относительно оси Oy.

19. Составить уравнение параболы с осью симметрии параллельной оси Oy, если она проходит через точки $(-2;8)$, $(0;2)$ и $\left(3;\frac{1}{2}\right)$.

20. Составить уравнение прямой, которая проходит через вершину параболы $y = -3x^2 + 12x - 9$ параллельно прямой $\frac{x}{10} + \frac{y}{8} = 1$.

21. Составить каноническое уравнение параболы по следующим данным:

а) $p = 3$;

б) парабола проходит через точку $P(1;-4)$;

в) директриса определяется уравнением $x + 3 = 0$.

22. Вершина параболы находится в точке $M(-2;2)$, уравнение директрисы $x - 1 = 0$. Составить уравнение параболы, найти координаты фокуса и уравнение оси параболы.

23. На параболе $y^2 = 8x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 20.

24. Дано уравнение параболы $y^2 = 2x$. Найти угловые коэффициенты касательных, проходящих через точку $M(-2;0)$.

25. Арка моста имеет форму параболы. Определить параметр параболы, зная, что пролёт арки равен 24 м, а высота – 6 м.

26. Камень, брошенный под острым углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 м от начального положения. Определить параметр параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 м.

27. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой $p = 0{,}1$. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстоянии 2 м от места выхода.

28. Поперечное сечение крыши вагона имеет форму параболы. Ширина крыши $3{,}6$ м. Определить высоту крыши, если на расстоянии $1{,}44$ м от края высота крыши равна $0{,}48$ м.

29. Выяснить взаимное расположение параболы $y^2 = 2px$ и окружности $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ в зависимости от значения параметра p (пояснить результаты графически).

§ 1.5. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения

Конические сечения – это линии, которые получаются сечением прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину. Открывателем конических сечений предположительно считается Менехм (4 в. до н. э.), ученик Платона. Менехм использовал параболу и равнобочную гиперболу для решения задачи об удвоении куба. Трактаты о конических сечениях, написанные Аристеем и Евклидом в конце 4 в. до н.э., были утеряны, но материалы из них вошли в знаменитые «Конические сечения» Аполлония Пергского (ок. 260-170 до н.э.), которые сохранились до нашего времени. Аполлоний отказался от требования перпендикулярности секущей плоскости образующей конуса и, варьируя угол ее наклона, получил все конические сечения из одного кругового конуса. Аполлонию мы обязаны и современными названиями кривых – эллипс, парабола и гипербола.

В своих построениях Аполлоний использовал двухполостной круговой конус (рис. 1), поэтому впервые стало ясно, что гипербола – линия с двумя ветвями. Со времен Аполлония конические сечения делятся на три типа в зависимости от наклона секущей плоскости к образующей конуса. Эллипс образуется, когда секущая плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной его полости; парабола – когда секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса; гипербола – когда секущая плоскость пересекает обе полости конуса.

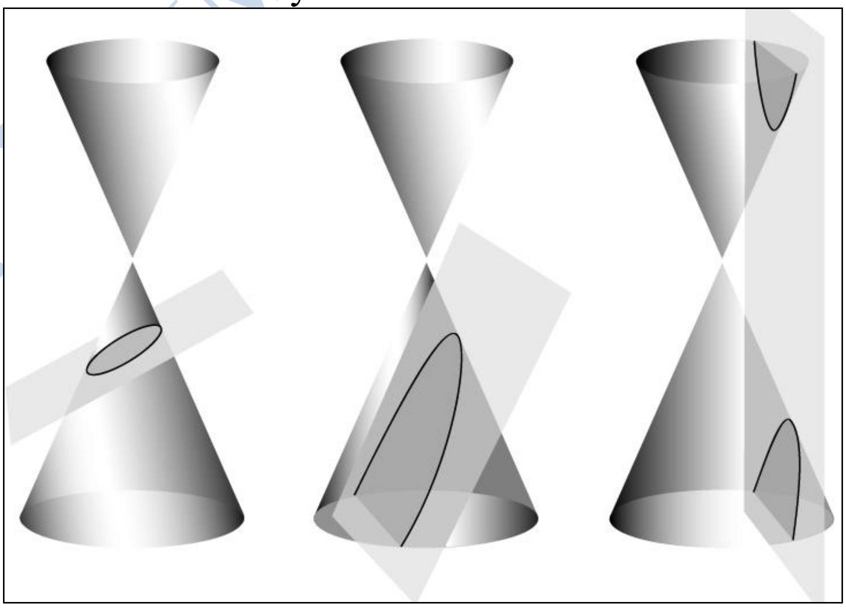


Рис. 1

§ 1.6. *Центр линии второго порядка. Приведение общего уравнения ЛВП к каноническому виду*

Напомним, что линия второго порядка (ЛВП) задается общим уравнением

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

Введем новые обозначения:

$$a_{11}=A,\ 2a_{12}=B,\ a_{22}=C,\ 2a_{10}=D,\ 2a_{20}=E,\ a_{00}=F.$$

Тогда уравнение ЛВП примет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \qquad \textbf{(6.1)}$$

Выражение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ называется *квадратичной частью* общего уравнения ЛВП, выражение $2a_{10}x + 2a_{20}y$ – *линейной частью*, а a_{00} – *свободным членом*.

Определение 1. *Точка O' называется* ***центром линии второго порядка****, если она является ее центром симметрии.*

Линия, имеющая центр, называется ***центральной линией***.

Предположим, что система координат выбрана так, что ее начало находится в центре линии. Тогда одновременно с точкой $M(x, y)$ линии принадлежит и точка $M'(-x,-y)$. Подставим ее координаты в общее уравнение и получим

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_{10}x - 2a_{20}y + a_{00} = 0. \qquad \textbf{(6.2)}$$

Вычтем из равенства (6.1) равенство (6.2):

$$4(a_{10}x + a_{20}y) = 0.$$

Поскольку это должно быть справедливым для любой точки $M(x, y)$ линии, то $a_{10}=a_{20}=0$. Таким образом, если начало «старой» системы координат не находится в центре O', мы можем совершить параллельный перенос координатных осей в центр, и уравнение ЛВП в «новой» системе $O'x'y'$ примет вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{00} = 0, \qquad \textbf{(6.3)}$$

т.е. линейная часть уравнения исчезнет. При этом коэффициенты квадратичной части останутся прежними.

Теорема 1. *Координаты* $(x_0,\ y_0)$ *центра линии, заданной уравнением* (6.1), *находятся из системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(6.4)}$$

Доказательство. Введем новую декартову систему координат $O'x'y'$, которая получается из Oxy параллельным переносом начала в центр $O'(x_0, y_0)$ кривой. Тогда формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases}$$

Подставим эти формулы в (6.1):

$$a_{11}(x'+x_0)^2 + 2a_{12}(x'+x_0)(y'+y_0) + a_{22}(y'+y_0)^2 +$$
$$+ 2a_{10}(x'+x_0) + 2a_{20}(y'+y_0) + a_{00} = 0.$$

После преобразований получаем

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x' +$$
$$+ 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y' + a_{00}' = 0,$$

где $a'_{00} = \varphi(x_0, y_0)$ – значение левой части уравнения (6.1) в точке O'. Поскольку в новой системе коэффициенты при x' и y' должны быть равны нулю, то получаем (6.4). Теорема доказана.

Заметим, что уравнение линии в новой системе можно выписать, не совершая подстановки (6.4) и преобразований: коэффициенты квадратичной части не изменяются, надо только вычислить a'_{00}.

Обозначим

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ – *матрицу квадратичной части уравнения* (6.1) (основную матрицу системы линейных уравнений (6.4)),

$$\delta = |A|,\quad \delta_x = -\begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \delta_y = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{12} & a_{20} \end{vmatrix}.$$

<u>*1 случай.*</u> $\delta \neq 0$. По правилу Крамера система (6.4) имеет единственное решение

$$x_0 = \delta_x/\delta,\quad y_0 = \delta_y/\delta, \qquad \textbf{(6.5)}$$

а линия имеет единственный центр.

<u>*2 случай.*</u> $\delta = 0$, $\delta_x \neq 0$ и $\delta_y \neq 0$ (заметим, что в случае $\delta = 0$, определители δ_x и δ_y будут равны или не равны нулю только одновременно). Тогда ранг расширенной матрицы системы (6.4) будет равен 2, а ранг основной матрицы A равен 1. Значит, согласно теореме

Кронекера-Капелли, система (6.4) не имеет решений, а ЛВП не имеет центра.

<u>3 случай.</u> $\delta = 0$, $\delta_x=\delta_y=0$. Тогда уравнения в (6.4) пропорциональны, а значит, эта система имеет бесконечное количество решений, а линия второго порядка – бесконечное количество центров.

Упростим еще величину a'_{00}:

$$a'_{00}=\varphi(x_0,y_0)=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{10}x_0+2a_{20}y_0+a_{00}=$$
$$=(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{10})x_0+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{20})y_0+a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{00}.$$

Выражения в скобках равны нулю, и мы имеем

$$c'=a_{10}x_0+a_{20}y_0+a_{00}. \qquad \textbf{(6.6)}$$

Подставляя сюда (6.5), получаем

$$a'_{00}=a_{10}\frac{\delta_x}{\delta}+a_{20}\frac{\delta_y}{\delta}+a_{00}=\frac{1}{\delta}(a_{10}\delta_x+a_{20}\delta_y+a_{00})=\frac{\Delta}{\delta}, \qquad \textbf{(6.7)}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}.$$

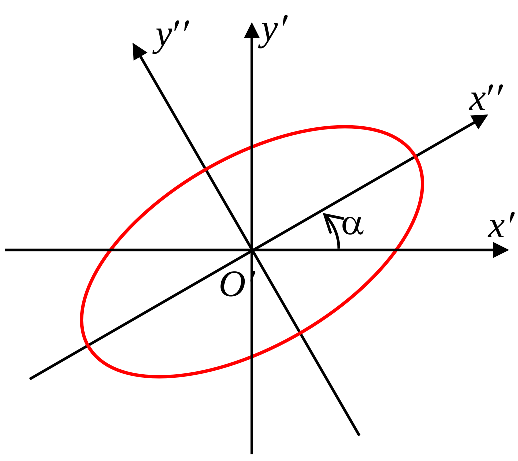
В скобках как раз стоит разложение Δ по последней строке или последнему столбцу. Равенство (6.7) позволяет выписать уравнение (6.3), не находя координат центра кривой.

§1.7. *Классификация линий второго порядка*

<u>*Случай $\delta\neq0$*</u>

Упростить уравнение ЛВП

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+a'_{00}=0.$$



Выберем новую декартову систему координат $O'x''y''$, которая получается из $O'x'y'$ поворотом координатных осей на некоторый угол α. Тогда формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x'=x''\cdot\cos\alpha-y''\cdot\sin\alpha, \\ y'=x''\cdot\sin\alpha+y''\cdot\cos\alpha. \end{cases} \qquad \textbf{(7.1)}$$

Подставим эти формулы в (6.3):

$$a_{11}(x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha)(x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha) + a_{22}(x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha)^2 + a'_{00} = 0,$$

Раскроем скобки и приведем подобные при одинаковых координатах. Тогда коэффициент при $x''y''$ будет равен

$$-a_{12}\sin^2\alpha + (a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cdot\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha.$$

Приравняем это выражение к нулю, и получившееся уравнение разделим на $-\cos^2\alpha$:

$$\boldsymbol{a_{12}\,tg^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\,tg\,\alpha - a_{12} = 0.} \qquad \textbf{(7.2)}$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестного $tg\,\alpha$, его дискриминант

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4\,a_{12}{}^2 \geq 0.$$

Значит, (7.2) всегда имеет решение, т.е. всегда существует такой угол α, что в новой системе координат мы получим уравнение ЛВП без слагаемого, содержащего $x''y''$. В результате наше уравнение будет иметь вид

$$\boldsymbol{\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.} \qquad \textbf{(7.3)}$$

Примем пока без доказательства, что коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} - \lambda & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{22}} - \lambda \end{vmatrix} = 0\ ; \qquad \textbf{(7.4)}$$

в развернутом виде:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0,} \qquad \textbf{(7.4}'\textbf{)}$$

где $s = traceA = a_{11} - a_{22}$ – след матрицы А.

Уравнение (7.4′) называется ***характеристическим уравнением линии второго порядка***.

Согласно теореме Виета получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = s\,,$$
$$\lambda_1\cdot\lambda_2 = \delta.$$

Относительно новой системы координат $O'x''y''$ получаем

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \delta' = det\,A' = \lambda_1\cdot\lambda_2 = \delta, \quad s' = trace\,A' = \lambda_1 + \lambda_2 = s,$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta/\delta \end{vmatrix} = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot(\Delta/\delta) = \Delta\,.$$

Таким образом, $\delta' = \delta$, $s' = s$, $\Delta' = \Delta$, т.е. величины δ , s, Δ не изменяются при переходе к новой декартовой системе координат. Поэтому они называются ***инвариантами кривой второго порядка***.

<u>1 *случай*</u>: $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$. Если опустить штрихи, то уравнение (7.3) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-\Delta/\lambda_1\delta}+\frac{y^2}{-\Delta/\lambda_2\delta}=1. \qquad \textbf{(7.5)}$$

Обозначим $a^2 = |\Delta/\lambda_1\delta|$, $b^2 = |\Delta/\lambda_2\delta|$.

а) $\boldsymbol{\delta > 0}$, $\boldsymbol{s\Delta < 0}$. Тогда $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, т.е. λ_1 и λ_2 одного знака, и $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\Delta < 0$, т.е. знак Δ противоположен знаку λ_1 и λ_2. Поэтому оба знаменателя в (7.5) положительны, и это уравнение задает *эллипс*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

б) $\boldsymbol{\delta > 0}$, $\boldsymbol{s\Delta > 0}$. Тогда оба знаменателя в (7.5) отрицательны, и уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Говорят, что оно задает *мнимый эллипс*. На действительной плоскости это пустое множество.

в) $\boldsymbol{\delta < 0}$, $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$. Тогда λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, и поэтому знаменатели в (7.5) имеют разные знаки. Получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \textbf{или} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

В любом случае получается уравнение *гиперболы*.

<u>2 *случай*</u>: $\boldsymbol{\Delta = 0}$. Уравнение (7.3) принимает вид:

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=0. \qquad \textbf{(7.6)}$$

Обозначим $a^2 = |\lambda_1|$, $b^2 = |\lambda_2|$.

а) $\boldsymbol{\delta < 0}$. Тогда λ_1 и λ_2 разного знака и (7.6) можно переписать в виде $a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \Leftrightarrow (ax-by)\cdot(ax+by)=0$.

Оно определяет *пару пересекающихся в центре O' прямых*, симметричных относительно координатных осей.

б) $\boldsymbol{\delta > 0}$. Тогда λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки и (7.6) можно переписать в виде

$$a^2x^2+b^2y^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (ax-i\,by)\cdot(ax+i\,by)=0.$$

Говорят, что это уравнение задает *пару мнимых пересекающихся прямых*. Но пересекаются они в действительной точке O' – центре ЛВП.

Случай $\delta = 0$

Пусть теперь $\boldsymbol{\delta = 0}$. Тогда мы не можем использовать процедуру нахождения центра, и сразу совершаем поворот координатных осей на угол, тангенс которого находится из уравнения (7.2). Получим новую декартову систему координат с тем же началом $Ox'y'$. Формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

В этой системе уравнение ЛВП не будет включать слагаемое, содержащее произведение $x'y'$:

$$\boldsymbol{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + a_{00} = 0,} \qquad \textbf{(7.7)}$$

Заметим, что коэффициент a_{00} останется прежним, а непосредственное вычисление показывает, что

$b_1 = a_{10}\cdot\cos\alpha + a_{20}\cdot\sin\alpha,$

$b_2 = a_{10}\cdot\sin\alpha + a_{20}\cdot\cos\alpha.$

Так как $\delta = \lambda_1\cdot\lambda_2 = 0$, то один из корней λ_1 или λ_2 будет равен нулю. Пусть это будет λ_1. Имеем уравнение

$$\boldsymbol{\lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + a_{00} = 0.} \qquad \textbf{(7.8)}$$

Для этого уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = -\lambda_2 b_1^2.$$

<u>***1 случай***</u>**:** $\boldsymbol{\Delta = 0 \Leftrightarrow b_1 = 0.}$ Уравнение имеет вид $\lambda_2 y'^2 + 2b_2y' + a_{00} = 0$. Выделим полный квадрат:

$$\lambda_2\left(y'^2 + \frac{2b_1}{\lambda_2}y' + \frac{b_1^2}{\lambda_2^2}\right) - \frac{b_1^2}{\lambda_2} + c = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_2\left(y' + \frac{b_1}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{b_1^2}{\lambda_2} + c = 0 .$$

Обозначим $c' = (b_1^2 - \lambda_2 c)/\lambda_2$,

$a^2 = |c'|$ и сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' + \dfrac{b_1}{\lambda_2}, \end{cases}$$

которая равносильна переносу начала координат в точку $O'(0, -b_1/\lambda_2)_{Ox'y'}$ (координаты указаны в «промежуточной» системе $Ox'y'$). Получим уравнение $(y'')^2 = a^2$.

а) $a'_{00}>0$ $\Rightarrow$ **$(y'')^2=a^2$**, т.е. $y''=a$ или $y''=-a$. Это *пара параллельных прямых*.

б) $a'_{00}>0$ $\Rightarrow$ **$(y'')^2=-a^2$**, т.е. $y''=i\cdot a$ или $y''=-i\cdot a$. Такое уравнение задает *пару мнимых параллельных прямых*.

в) $a'_{00}=0$ $\Rightarrow$ **$(y'')^2=0$.** Это уравнение задает *пару совпадающих прямых*.

***2 случай*: $\Delta\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $b_1\neq 0$.** Так же, как и в предыдущем случае, выделяем полный квадрат по y:

$$\lambda_2\left(y'+\frac{b_1}{\lambda_2}\right)^2-\frac{b_1^2}{\lambda_2}+2b_1x'+a_{00}=0,$$

а затем преобразуем так: $\lambda_2\left(y'+\frac{b_1}{\lambda_2}\right)^2+2b_1\left(x'-\frac{b_1^2-\lambda_2c}{2b_1\lambda_2}\right)=0$.

Обозначим $c'=\dfrac{b_1^2-\lambda_2c}{2b_1\lambda_2}$ и сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x''=x'-c', \\ y''=y'+\dfrac{b_1}{\lambda_2}, \end{cases}$$

которая равносильна переносу начала координат в точку $O'\left(c',-\frac{b_1}{\lambda_2}\right)_{Ox'y'}$. Получим уравнение

$$\lambda_2(y'')^2+2b_1x''=0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{(y'')^2=2px''},$$

где $p=-2b_1/\lambda_2$. Это уравнение задает *параболу*.

Итак, мы установили, что общее уравнение

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

задает одну из следующих (таблица 1) линий второго порядка (*sign x* означает знак числа x).

Таблица 1

sign δ	*sign s·Δ*	*Линия и ее каноническое уравнение*	*Кол-во центров*
+	–	Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	1
+	+	Мнимый эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	

–	±	Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
–	0	Пара пересекающихся прямых $a^2x^2-b^2y^2=0$	
+	0	Пара мнимых пересекающихся прямых $a^2x^2+b^2y^2=0$	
0	±	Парабола $y^2=2px$,	**0**
0	0	Пара параллельных прямых $x^2=a^2$ Пара мнимых параллельных прямых $x^2=-a^2$ Пара совпадающих прямых $x^2=0$	∞

Примеры решения задач

1. *Составить уравнение линии, каждая точка которой расположена вдвое дальше от точки* $F(3,\ 3)$, *чем от оси* Ox. *Определить тип линии и изобразить ее в декартовой системе координат.*

Решение.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка линии, MM' – перпендикуляр, опущенный на O. Тогда расстояние от M до Ox равно $MM'=|y|$, а $MF=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$. По условию выполняется $\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$ = $2|y|$.

Обе части равенства неотрицательны, поэтому можем возводить их в квадрат: $(x-3)^2+(y-3)^2=4y^2$.

Раскроем только вторую скобку, приведем подобные и вновь соберем полный квадрат:

$(x-3)^2+y^2-6y+9-4y^2=0$,

$(x-3)^2-3y^2-6y+9=0$,

$(x-3)^2-3(y^2+2y+1-4)=0$,

$(x-3)^2-3(y+1)^2=-12$.

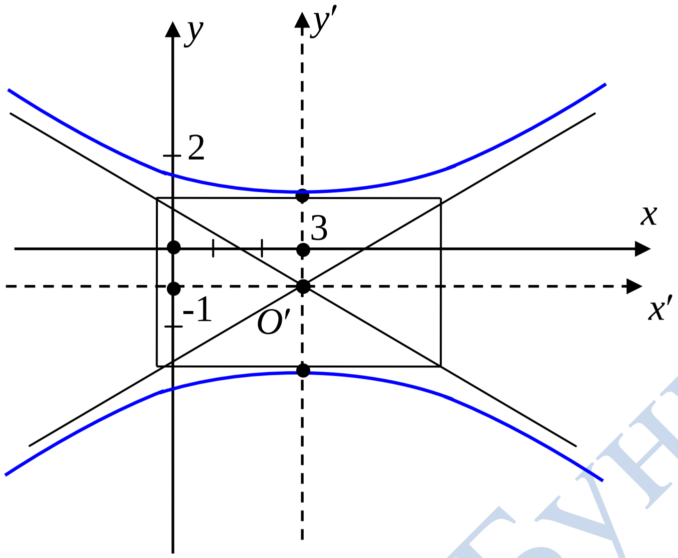
Делаем замену координат

$$\begin{cases} x'=x-3, \\ y'=y+1. \end{cases}$$

Она означает перенос начала координат в точку $O'(3,-1)$.

Получившееся уравнение делим на 12: $\frac{x'^2}{12}-\frac{y'^2}{4}=-1.$

Это уравнение задает гиперболу с полуосями $a=2\sqrt{3}$, $b=2$. Центр гиперболы находится в точке $O'(3,-1)$.



2. *Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду, определить ее тип и изобразить в исходной системе координат*:

а) $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0.$

Решение.

Общее уравнение линии второго порядка на плоскости имеет вид: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0.$

Если $\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$, то линия имеет центр $O'(x_0, y_0)$, координаты которого можно найти из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{10}=0, \\ a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{20}=0. \end{cases}$$

Если мы совершим параллельный перенос начала координат в точку O', то уравнение линии примет вид:

$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+c'=0,$

где $c'=a_{10}x_0+a_{20}y_0+a_{00}$.

Вычисляем:

$\delta=\begin{vmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 25 \end{vmatrix}=576\neq 0$. Значит, линия имеет центр. Найдем его координаты из системы уравнений:

$$\begin{cases} 25x_0-7y_0+32=0, \\ -7x_0+25y_0-32=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x_0-7y_0=-32, \\ -7x_0+25y_0=32. \end{cases}$$

Для решения применим правило Крамера: $x_0 = \dfrac{\delta_x}{\delta}$, $y_0 = \dfrac{\delta_y}{\delta}$, где δ_x получается заменой первого столбца в δ на столбец свободных членов, а δ_y – второго столбца:

$$\delta_x = \begin{vmatrix} -32 & -7 \\ 32 & 25 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 25 \end{vmatrix} = 32\cdot(-18) = -576.$$

$$\delta_y = \begin{vmatrix} 25 & -32 \\ -7 & 32 \end{vmatrix} = 32\cdot\begin{vmatrix} 25 & -1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 32\cdot 18 = 576.$$

$$x_0 = \frac{-576}{576} = -1, \quad y_0 = \frac{576}{576} = 1.$$

Центр линии находится в точке $O'(-1,1)$. Совершим перенос начала координат в точку O' и получим новую декартову систему координат $O'x'y'$. Формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' - 1. \end{cases}$$

Однако делать эту подстановку в исходное уравнение кривой не следует; мы уже знаем, что линейная часть уравнения исчезнет, а коэффициенты квадратичной части не изменятся, причем $c' = 32\cdot(-1) - 32\cdot 1 - 224 = -288$.

Уравнение данной линии второго порядка в новой системе координат: $25x'^2 - 14x'y' + 25y'^2 = 288$.

Далее совершаем поворот координатных осей на угол α, тангенс которого находится по формуле: $a_{12}tg^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\cdot tg\alpha - a_{12} = 0$.

$-7tg^2\alpha + (25 - 25)tg\alpha + 7 = 0,$

$tg^2\alpha = 1 \Rightarrow tg\,\alpha_1 = 1$ или $tg\,\alpha_2 = -1$.

Можем выбрать любое из них. Но, как правило, выбираем такое α, для которого $tg\,\alpha > 0$. Имеем: $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $\sin\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Получим новую систему координат $O'\,x''y''$. Формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha, \\ y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha. \end{cases}$$

В нашем случае:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y''), \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y''). \end{cases}$$

Подставим эту замену:

$$\frac{1}{2}[25(x''-y'')^2-14(x''-y'')\cdot(x''+y'')+25(x''+y'')^2]=288.$$

$$\frac{1}{2}[25x''^2-50x''y''+25y''^2-14x''^2+14y''^2+25x''^2+50x''y''+25y''^2]=288.$$

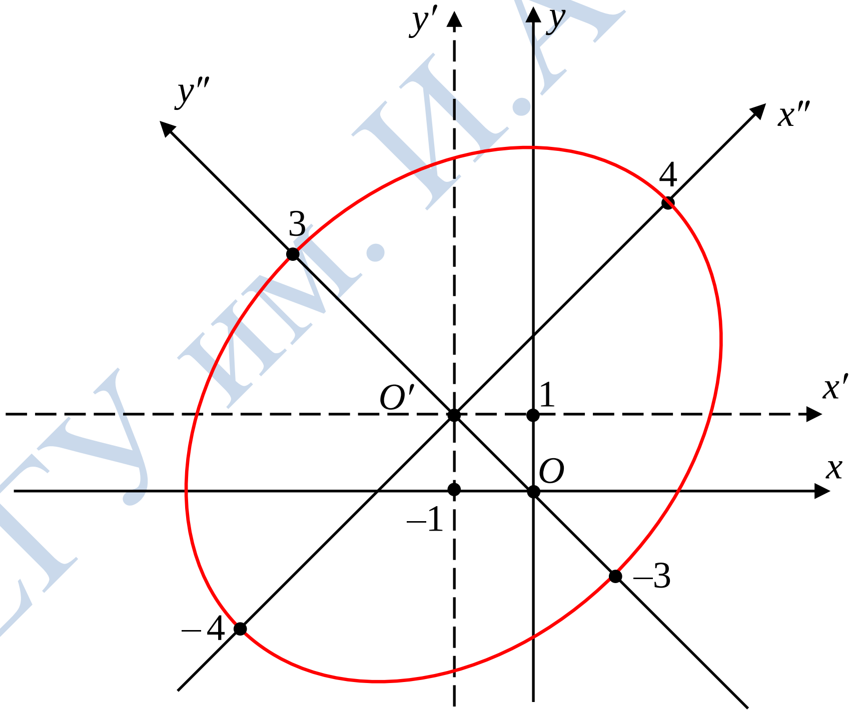
Слагаемые, содержащие произведение $x''y''$, должны сократиться. Если этого не произошло, следует искать ошибку.

$$\frac{1}{2}[36x''^2+64y''^2]=288, \quad 9x''^2+16y''^2=144,$$

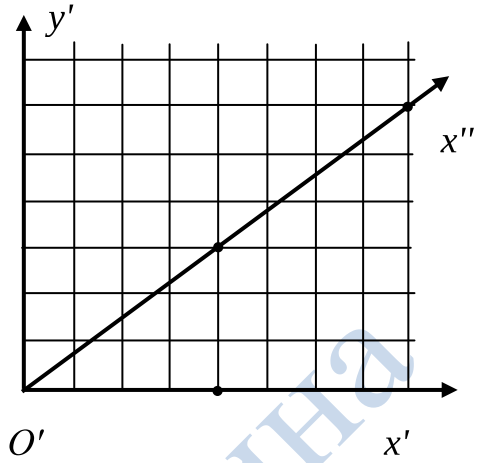
$$\frac{x''^2}{16}+\frac{y''^2}{9}=1.$$

Это уравнение задает эллипс с полуосями a=4, b=3.

Построим его. Сначала строим исходную систему координат Oxy, в которой находим точку O', затем строим промежуточную систему координат $O'x'y'$, которая получается из Oxy переносом начала в точку O'. Затем поворачиваем координатные оси на угол α и получаем окончательную систему координат $O'x''y''$. На осях этой системы координат откладываем полуоси эллипса.



В нашем случае $\alpha = 45^{\circ}$, и поэтому повернутые оси легко построить. В более общем случае, если мы нашли, что $\mathrm{tg}\ \alpha = a/b$, этот угол очень можем построить на клетчатой бумаге: по оси $O'x'$ откладываем отрезок b, а по оси $O'y'$ – отрезок a. Например, на данном рисунке построен угол, у которого $\mathrm{tg}\,\alpha = 3/4$.



б) *Привести уравнение ЛВП к каноническому виду, определить тип и изобразить её в исходной системе координат*: $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$.

Решение.

$\delta=\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 8 & -23 \end{vmatrix}=-161-64=-225\neq 0.$

Находим координаты центра:

$$\begin{cases} 7x_0+8y_0-7=0, \\ 8x_0-23y_0-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_0+8y_0=7, \\ x_0-23y_0=8. \end{cases}$$

По правилу Крамера:

$$\delta_x=\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 8 & -23 \end{vmatrix}=-161-64=-225\neq 0, \quad \delta_y=\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}=0.$$

$$x_0=\frac{\delta_x}{\delta}=-1,\ y_0=\frac{\delta_y}{\delta}=0.$$

Центр находится в точке $O'(1,\ 0)$. Совершаем перенос начала координат в точку O' и получаем новую декартову систему координат $O'x'y'$. Формулы замены координат:

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' \end{cases}$$

Находим $c'=-7x_0-8y_0+c=-7-218=-225$. В новой системе координат уравнение линии примет вид:

$$7x'^2+16x'y'-23y'^2-225=0. \qquad (*)$$

Совершаем поворот координатных осей на угол α, тангенс которого находим из уравнения:

$8\mathrm{tg}^2\alpha+30\mathrm{tg}\alpha-8=0,$

$4\mathrm{tg}^2\alpha+15\mathrm{tg}\alpha-4=0,$

$D=225+64=289,$

$$tg\alpha_1=\frac{-15+17}{8}=\frac{1}{4},\ \ tg\alpha_2=\frac{-15-17}{8}=-4.$$

Выбираем положительный тангенс: $tg\alpha=\frac{1}{4}$. Находим $sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}$, $cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$. В уравнении (∗) делаем замену:

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{17}}(4x''-y''), \\ y'=\frac{1}{\sqrt{17}}(x''+4y''). \end{cases}$$

$$\frac{1}{17}[7(4x''-y'')^2+16(4x''-y'')(x''+4y'')-23(x''+4y'')^2]=225,$$

$$\frac{1}{17}[112\,x''^2-\underline{56\,x''y''}+7y''^2+64\,x''^2+\underline{240\,x''y''}-64y''^2-$$
$$-23x''^2-\underline{184x''y''}-368y''^2]=225.$$

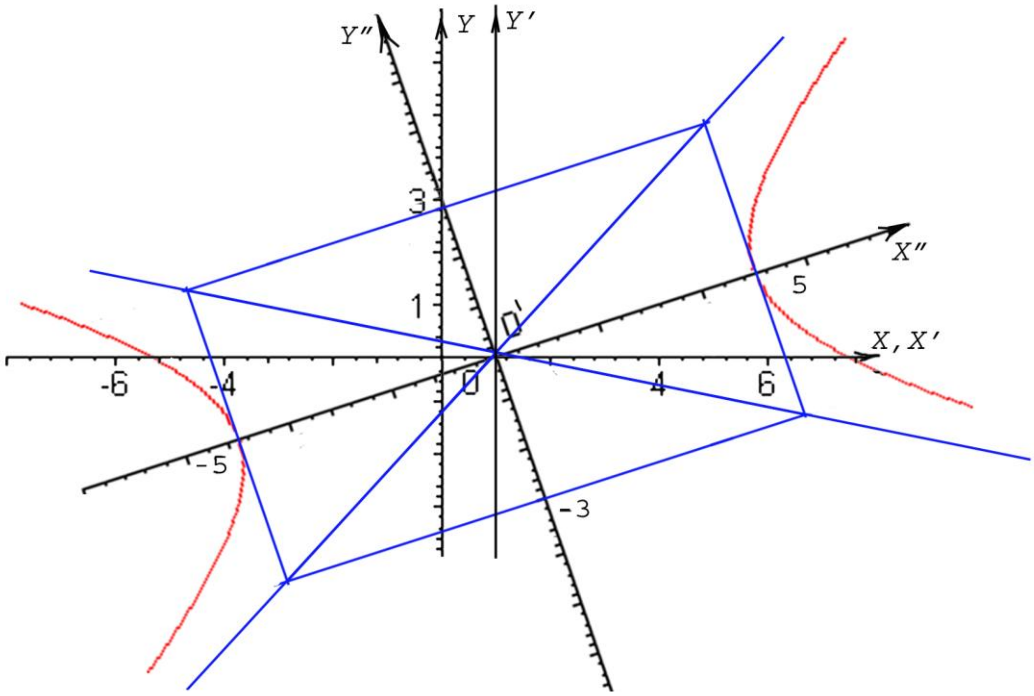
При приведении подобных слагаемые, содержащие произведения $x''y''$, взаимно уничтожаются.

$$\frac{1}{17}[153\,x''^2-425y''^2]=225,$$

$$9x''^2-25y''^2=225,$$

$$\frac{x''^2}{25}-\frac{y''^2}{9}=1.$$

Получили уравнение гиперболы с полуосями $a=5$, $b=3$.



Построение:

1) $O'(1,\ 0)$ – новое начало координат, $O'x' \| Ox$, $O'y' \| Oy$ – вспомогательные оси;

2) совершаем поворот координатных осей, зная что $tg\ \alpha=1/4$; получаем новые координатные оси $O'x''$ и $O'y''$;

3) в новой системе координат $O'x''y''$ строим прямоугольник со сторонами: $a=5$, $b=3$;

4) проводим диагонали прямоугольника, они будут являться асимптотами гиперболы;

5) строим гиперболу: она стремится к асимптотам, касаясь прямоугольника.

в) *Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду. Определить тип и изобразить её в исходной системе координат*:

$9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0.$

Решение.

$$\delta=\begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix}=0$$

В данном случае не можем применить процедуру нахождения центра и сразу поворачиваем координатные оси:

$-12\,tg^2\alpha-7tg\alpha+12=0,$

$D=49+576=625,$

$tg\ \alpha_1=\dfrac{7-25}{-24}=\dfrac{3}{4}$, $tg\ \alpha_2=\dfrac{7+25}{-24}=-\dfrac{4}{3}$.

$sin\alpha=\dfrac{3}{5}$; $cos\alpha=\dfrac{4}{5}$.

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{5}(4x'-3y'), \\ y=\dfrac{1}{5}(3x'+4y'). \end{cases}$$

Подставляем в первоначальное уравнение:

$$\frac{1}{25}[9(4x'-3y')^2-24(4x'-3y')(3x'+4y')+16(3x'+4y')^2]-$$

$$-\frac{20}{5}(4x'-3y')+\frac{110}{5}(3x'+4y')-50=0,$$

$\dfrac{1}{25}$ $[144\ x'^2\ -216\ x'y'\ +81y'^2-288\ x'^2\ -168\ x'y'\ +288\ y'^2+\ 144\ x'^2$ $+384x'y'+296y'^2]-16x'+12y'+66x'+88y'-50=0$.

Слагаемые с $x'y'$ уничтожаются. Кроме того, если $\delta = 0$, то одна из переменных в квадрате пропадает:

$25y'^2 + 50x' + 100y' - 50 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad y'^2 + 2x' + 4y' - 2 = 0$. (*)

Выделяем полный квадрат:

$(y'^2 + 4y' + 4) - 4 + 2x' - 2 = 0,$

$(y' + 2)^2 + 2(x' - 3) = 0.$

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x' - 3, \\ y'' = y' + 2. \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,-2)_{O'x'y'}$.

$y''^2 = -2x''$ –парабола.

Ее параметр $p = 1$, а ось параболы $O'x''$.

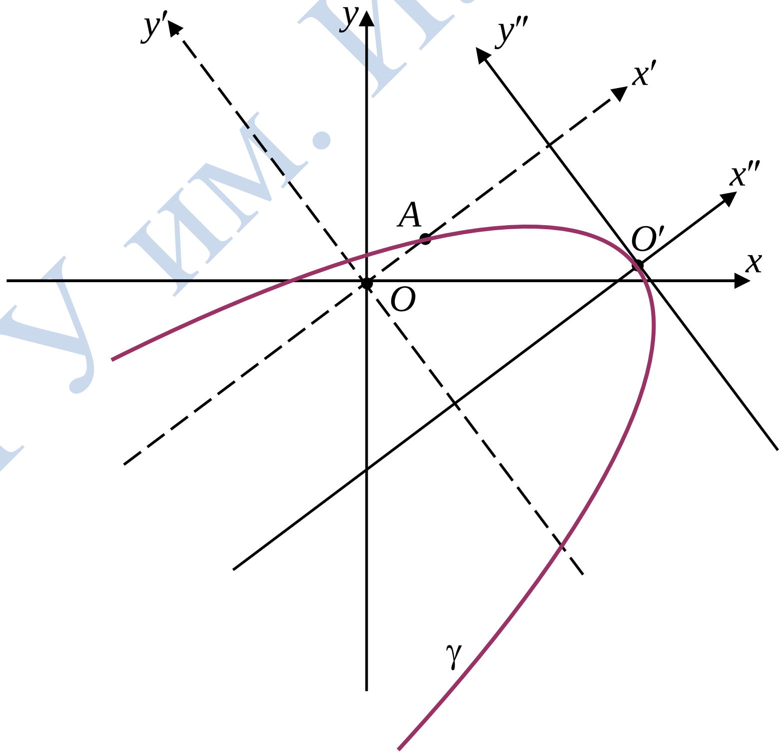
Построение:

1) совершаем поворот координатных осей, зная, что $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$;

2) новое начало координат $O'(3,-2)$ в системе координат $Ox'y'$;

3) координатные оси $O'x''$ и $O'y''$.

4) для построения параболы любым способом находим дополнительную точку; например, подставим в уравнение (*) $y' = 0$, тогда $x' = 1$. Т.е. $A(1,0)_{O'x'y'}$ – дополнительная точка (в системе $Ox'y'$).



Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите центры линий, заданных следующими уравнениями:

а) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 11 = 0$;
б) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 2y - 11 = 0$;
в) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$.

2. Пользуясь преобразованием координат, приведите к каноническому виду следующие уравнения и постройте соответствующие линии:

а) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;
б) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$;
в) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$;
г) $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$;
д) $x^2 + 2xy + y^2 + x + 3y = 0$;
е) $x^2 + 2xy\sqrt{2} + 2y^2 - 8x\sqrt{3} - 8y\sqrt{6} + 45 = 0$.

РАЗДЕЛ II. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§2.1. *Цилиндрические поверхности второго порядка*

Пусть на плоскости π дана линия второго порядка γ и дана прямая *d*, не параллельная плоскости π. Прямая *d* определяет связку *G* параллельных ей прямых.

Определение 1. *Множество Ф всех точек пространства, принадлежащих тем прямым связки G, которые пересекают линию γ, называется* ***цилиндрической поверхностью второго порядка****.*

Линия γ называется *направляющей*, а прямая связки *G*, пересекающая линию γ, – *образующей* цилиндрической поверхности *Ф* (рис. 1).

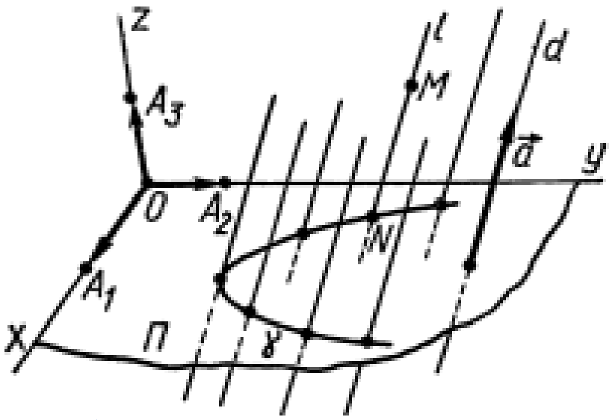


Рис. 1

Найдем уравнение цилиндрической поверхности *Ф* в аффинном репере R=(O, A_1, A_2, A_3), где O, A_1, $A_2 \in \pi$. Пусть вектор $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3), $a_3 \neq 0$ – направляющий вектор прямой *d*, а линия γ в репере R_1=(O, A_1, A_2) определяется уравнением

$$F(x, y)=0 \qquad (1.1)$$

Если точка $M(x,y,z) \in Ф$, а прямая *l* связки *G* проходит через точку M, то по определению поверхности *Ф* прямая *l* пересекает линию γ в точке $N(x',y',0)$. Имеем:

$\overrightarrow{MN}=t\vec{a} \Rightarrow (x'=x+a_1t,\ y'=y+a_2t,\ 0=z+a_3t) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x'=x-\frac{a_1}{a_3}z,\ y'=y-\frac{a_2}{a_3}z)$.

Так как $N \in \gamma$, то $F(x', y')=0$, следовательно, координаты *x, y, z* точки M удовлетворяют уравнению

$$F(x-\frac{a_1}{a_3}z,\ y-\frac{a_2}{a_3}z)=0 \qquad (1.2)$$

Итак, уравнение (1.2) есть уравнение цилиндрической поверхности *Ф* относительно репера R.

Заметим, что *если образующие цилиндрической поверхности параллельны оси Oz, то вектор* $\vec{a} = a_3\overrightarrow{e_3}$ – *направляющий вектор образующих и уравнение цилиндрической поверхности Ф в этом случае совпадает с уравнением (1.1) ее направляющей* γ.

Аналогично, если образующие параллельны *Oy*, то уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением направляющей линии в плоскости *Oxz*. И обратно, если в уравнении поверхности отсутствует, например, координата *x*, то можем сделать вывод, что эта поверхность цилиндрическая, а ее образующие параллельны *Ox*.

Пример 1. Пусть поверхность задана уравнением $y^2 = 2z$. Тогда это цилиндрическая поверхность, ее образующие параллельны *Ox*, а направляющей служит парабола

$$\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$$ (рис. 2).

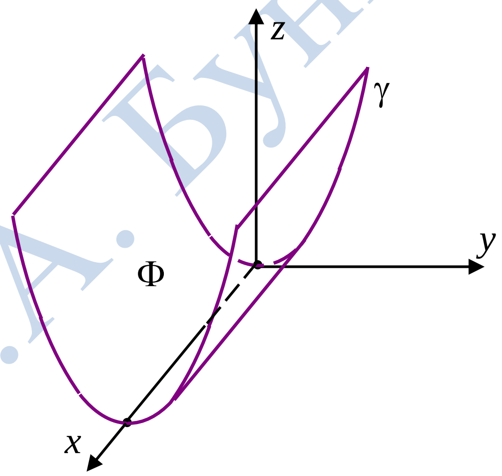


Рис. 2

Поскольку уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением направляющей, то уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(1.3)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(1.4)}$$

$$y^2 = 2px \qquad \textbf{(1.5)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \textbf{(1.6)}$$

$$x^2 - a^2 = 0 \qquad \textbf{(1.7)}$$

определяют соответственно *эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры, пару пересекающихся, пару параллельных плоскостей* (рис. 3, 4, 5, 6, 7). Эти уравнения называются *каноническими уравнениями* соответствующих поверхностей.

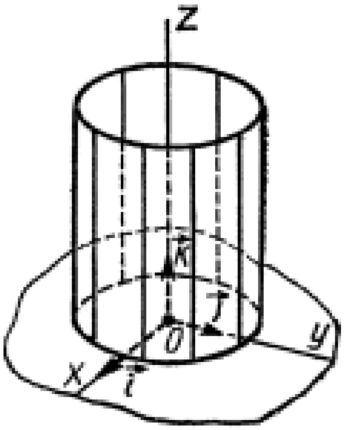


Рис. 3

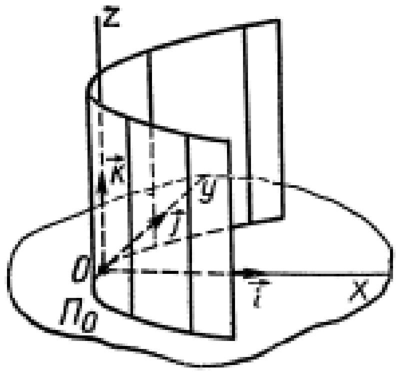


Рис. 5

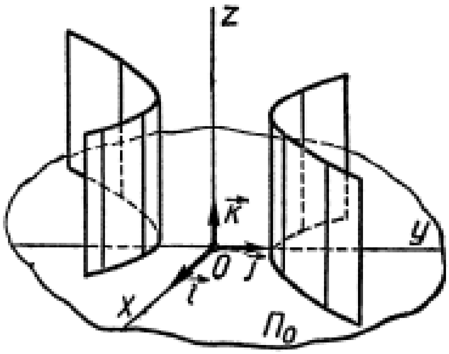


Рис. 4

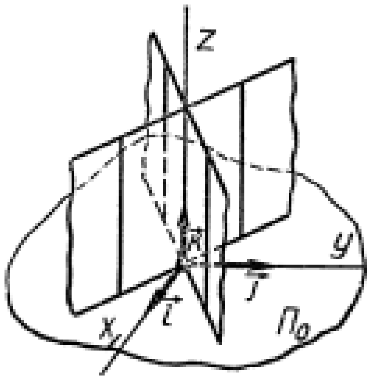


Рис. 6

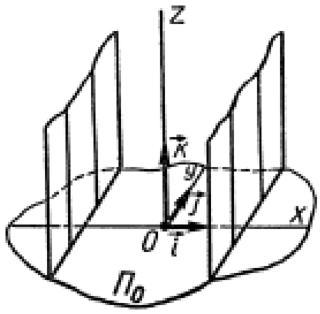


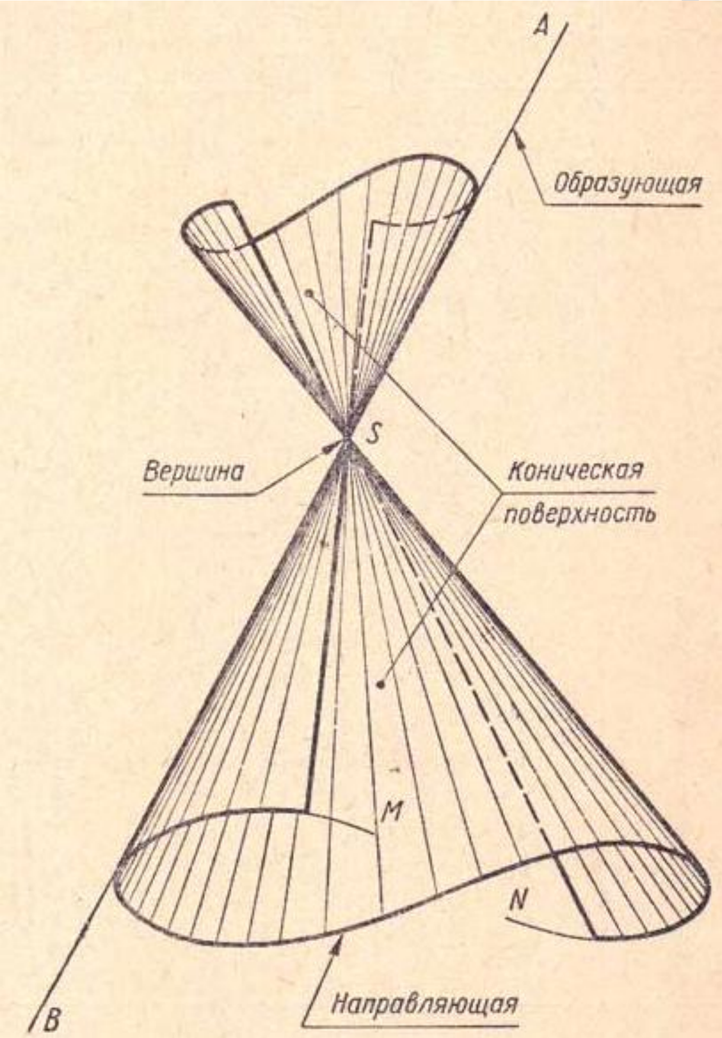
Рис. 7

§2.2. *Конические поверхности второго порядка*

Пусть в плоскости π дана линия второго порядка γ и дана точка S, не лежащая в плоскости π.

Определение 1. *Множество Φ всех точек пространства, принадлежащих тем прямым связки G(S), которые пересекают линию γ, называется* ***конической поверхностью второго порядка***.

Линия γ называется *направляющей*, прямые связки *G*, пересекающие линию γ, – *образующими* конической поверхности *Φ*, а точка S – *вершиной* этой поверхности (рис. 1).



Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с вершиной конической поверхности Ф (рис. 2). Пусть $F(x,y,z)=0$ – уравнение поверхности Ф в этой системе координат. Поскольку мы рассматриваем поверхности второго порядка, то F – многочлен второй степени от трех переменных. Тогда функция двух переменных $\varphi(x,y) = F(x,y,c)$ будет также многочленом второй степени для любого $c \in$ R, а система

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0, \\ z = c \end{cases}$$

будет задавать сечение поверхности Ф плоскостью $z = c$.

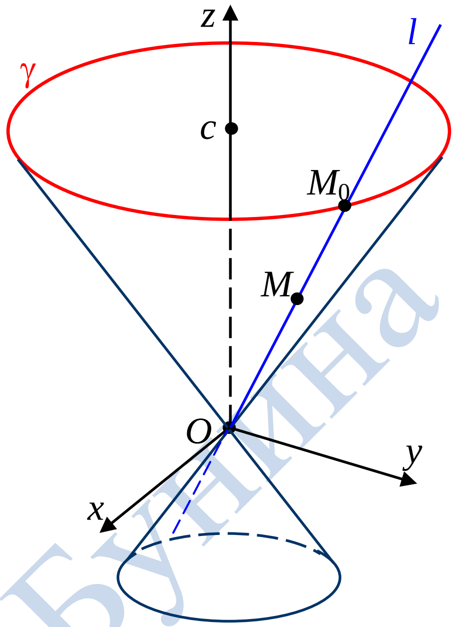


Рис. 2

Получающуюся в сечении линию второго порядка γ выберем в качестве направляющей. Если γ – центральная линия, то можем считать, что ось Oz проходит через ее центр.

Предположим сначала, что направляющая γ – эллипс

$$\gamma: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \\ z = c \end{cases}$$

Пусть $M(x_1,y_1,z_1)$ – произвольная точка поверхности Ф. Тогда вся прямая OM должна лежать на поверхности. Ее параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = x_1 t, \\ y = y_1 t, \\ z = z_1 t. \end{cases}$$

Пусть она пересекает направляющую γ в точке $M_0(x_0, y_0, c)$. Тогда ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой OM:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 t, \\ y_0 = y_1 t, \\ c = z_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 c/z_1, \\ y_0 = y_1 c/z_1, \\ t = c/z_1. \end{cases}$$

Подставим найденные выражения в уравнение эллипса:

$$\frac{(x_1 c/z_1)^2}{a^2} + \frac{(y_1 c/z_1)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Домножим это уравнение на z_1/c, и получим

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=0. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Обратно, пусть координаты точки $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ удовлетворяют уравнению (2.1). Тогда этому уравнению удовлетворяют и координаты любой точки на прямой OM:

$$\frac{(x_1t)^2}{a^2}+\frac{(y_1t)^2}{b^2}-\frac{(z_1t)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}\right)=t^2\cdot 0=0,$$

а подставив в (2.1) $z=c$, получим уравнение эллипса. Значит, (2.1) и есть уравнение конической поверхности. Опуская индексы, окончательно получаем **каноническое уравнение конуса.**

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Аналогично, если направляющая – гипербола (рис. 3)

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0,\\ z=c\,,\end{cases}$$

получим уравнение конической поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.}\ \textbf{(2.3)}$$

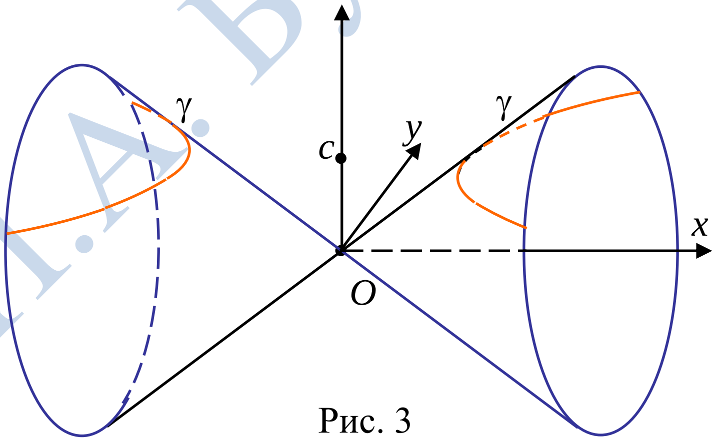


Рис. 3

Пусть теперь направляющая γ – это парабола

$$\begin{cases}x^2=2py,\\ z=c\,.\end{cases}$$

Тогда тем же способом получим уравнение

$$\boldsymbol{x^2=\frac{2p}{c}yz.} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Повернем систему координат на 45° вокруг оси Ox (рис. 4). Тогда формулы замены координат имеют вид

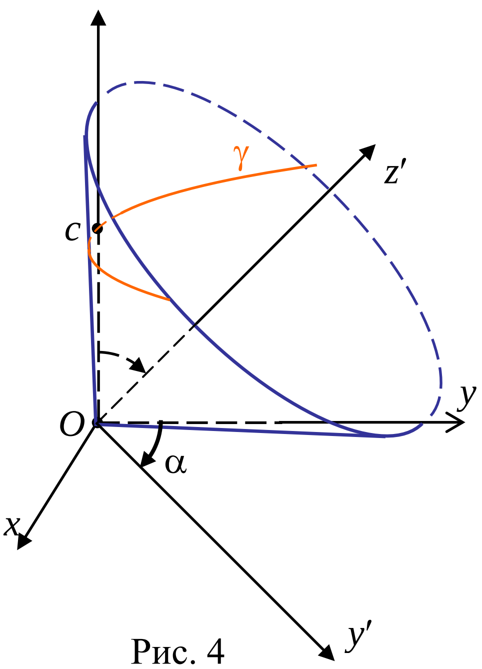


Рис. 4

$$\begin{cases} x = x', \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(y' + z'), \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(-y' + z'). \end{cases}$$

Подставим эти формулы в (2.4), и, обозначив $a^2 = p/c$, получим

$$x^2 = a^2(-y'^2 + z'^2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + y'^2 - z'^2 = 0.$$

Таким образом, уравнение (2.4) тоже определяет конус, ось которого является биссектрисой угла yOz. При этом оси Oy и Oz принадлежат конусу. Поэтому плоскость, в которой лежит направляющая γ, параллельна образующей.

Мы еще раз убедились в том, что эллипс, гипербола и парабола – конические сечения.

§2.3. *Поверхности вращения*

Пусть некоторая кривая γ расположена в плоскости Oyz. Будем вращать ее вокруг оси Oz. Получим поверхность Ф, которая называется *поверхностью вращения* (рис. 1). Каждая точка кривой γ описывает окружность – *параллель*, центр которой лежит на оси Oz.

Пусть $\varphi(y, z) = 0$ – **(3.1)**

уравнение кривой γ в плоскости Oyz. Тогда в пространстве она задается системой

$$\begin{cases} \varphi(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

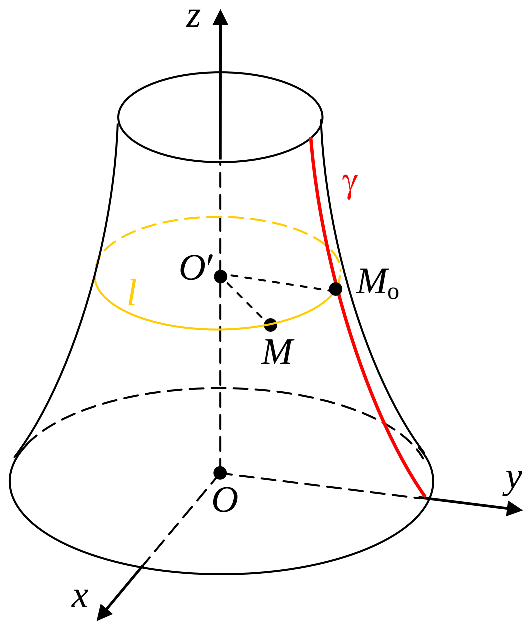


Рис. 1

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности Ф. Тогда она лежит на одной из таких параллелей l и может быть получена поворотом точки $M_0(0, y_0, z_0) = \gamma \cap l$. Очевидно, что $\mathbf{z_0=z}$ **(*)**, и центр O' параллели l имеет координаты $O'(0, 0, z)$. Кроме того, $O'M=O'M_0$.

В координатах это условие имеет вид

$$\boldsymbol{y_0=\sqrt{x^2+y^2}}\ . \qquad \textbf{(**)}$$

Координаты точки M_0 должны удовлетворять уравнению (3.1): $\varphi(y_0, z_0)=0$. Подставляя сюда (*) и (**) получаем

$$\boldsymbol{\varphi(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Обратно, пусть координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (3.2). Тогда, если выполнено (*) и (**), то этому уравнению будут удовлетворять координаты точки $M_0(0, y_0, z_0)$, а значит $M_0\in\gamma$. Кроме того, в силу (*) и (**) точка M_0 лежит на одной параллели с M, а значит M может быть получена поворотом точки M_0 вокруг оси $Oz \Rightarrow M\in\Phi$.

Итак, мы доказали, что (3.2) есть уравнение поверхности вращения Φ.

Таким образом, *для того чтобы из уравнения линии γ получить уравнение поверхности вращения Φ, в уравнении γ нужно оставить без изменения координату z, а y заменить выражением* $\sqrt{x^2+y^2}$.

Пример 1. Пусть γ – окружность в плоскости Oyz радиуса b с центром в точке $A(0, a, 0)\in Oy$, $a > b$. Будем вращать ее вокруг Oz (рис. 2). Получим поверхность, которая называется *тором*. Уравнение окружности в плоскости Oyz имеет вид: $(y – a)^2 + z^2 = b^2$. Вращаем вокруг Oz, поэтому z оставляем без изменений, а y заменяем на $\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\boldsymbol{(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=b^2.}$$

Получили уравнение тора (рис. 6).

Заметим, что тор не относится к поверхностям второго порядка.

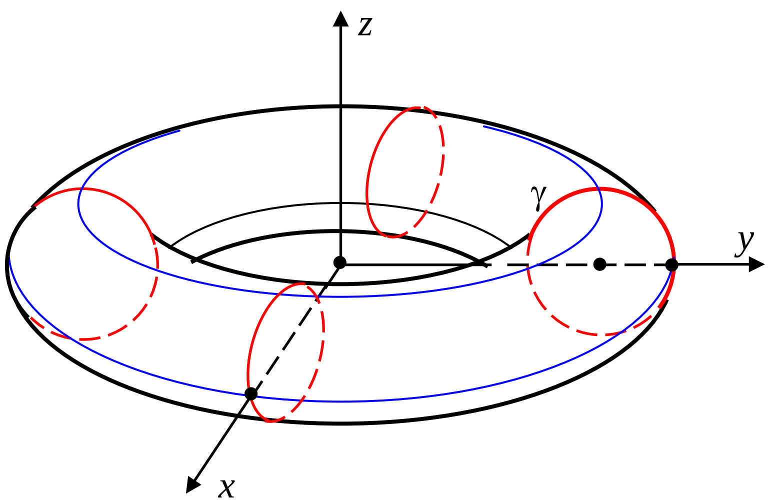


Рис.2

Пример 2. Поверхность Ф задается уравнением $x^2+z^2=2y$.

Мы можем переписать его так: $(\sqrt{x^2+z^2})^2=2y$.

Координаты x и z входят в уравнение только в выражении $\sqrt{x^2+z^2}$ Значит, наша поверхность – это поверхность вращения вокруг Oy (рис. 3).

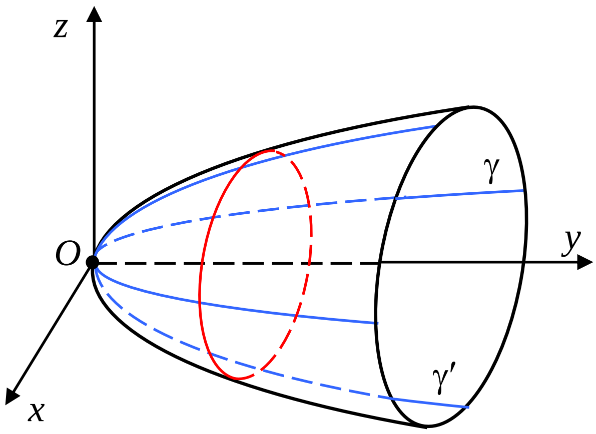


Рис. 3

Чтобы получить уравнение линии, которая вращается, мы заменяем $\sqrt{x^2+z^2}$ на x и получаем уравнение γ в плоскости Oxy: $x^2=2y$. В пространстве эта линия задается системой

$$\begin{cases} x^2=2y, \\ z=0. \end{cases}$$

Точно так же мы можем заменить $\sqrt{x^2+z^2}$ на z и получить уравнение линии γ' в плоскости Oyz: $z^2 = 2y$. Вращая вокруг Oy первую или вторую кривую, мы получим одну и ту же поверхность.

Пример 3. В ортонормированном репере $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ найти уравнение поверхности Ф, образованной вращением вокруг Oz линии γ, заданной уравнением:

А) $Ax+Cz=0, y=0$ $(A\neq0,\ C\neq0)$,

В) $x=\sin z,\ y=0$.

Имеем:

А) Уравнения данной прямой, проходящей через начало координат, можно записать так: $x=-\frac{C}{A}z$, $y=0$. Уравнение поверхности Ф: $x^2+y^2=\frac{C^2}{A^2}z^2$. Или: $\frac{x^2}{C^2}+\frac{y^2}{C^2}-\frac{z^2}{A^2}=0$ (рис. 4).

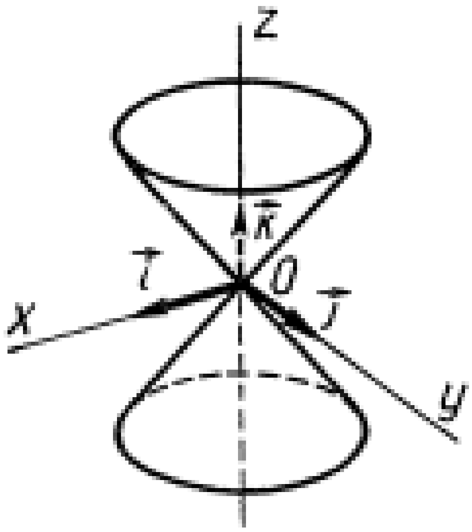


Рис. 4

В) Уравнение поверхности Ф:

$$x^2 + y^2 = sin^2 z \text{ (рис. 5)}$$

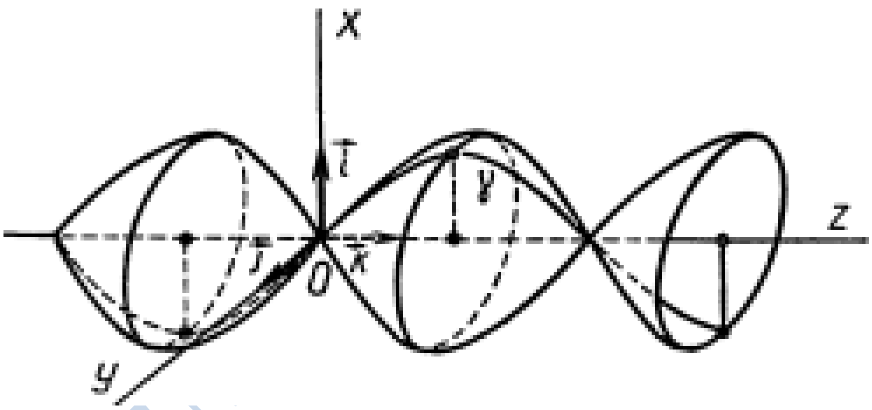


Рис. 5

§2.4. *Эллипсоид*

Определение 1. Эллипсоидом *называется поверхность Ф, имеющая каноническое уравнение вида*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad \textbf{(4.1)}$$

Исследуем ее форму *методом параллельных сечений*. В сечениях плоскостями $z = h$ получаем линию

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \qquad (*)$$

Если $|h| \neq c$, то обозначим $a'^2 = a^2 \left| 1 - \frac{h^2}{c^2} \right|$, $b'^2 = b^2 \left| 1 - \frac{h^2}{c^2} \right|$.

При $|h| < c$ получаем эллипсы $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$, полуоси которых a' и b' достигают максимального значения a и b при $h = 0$.

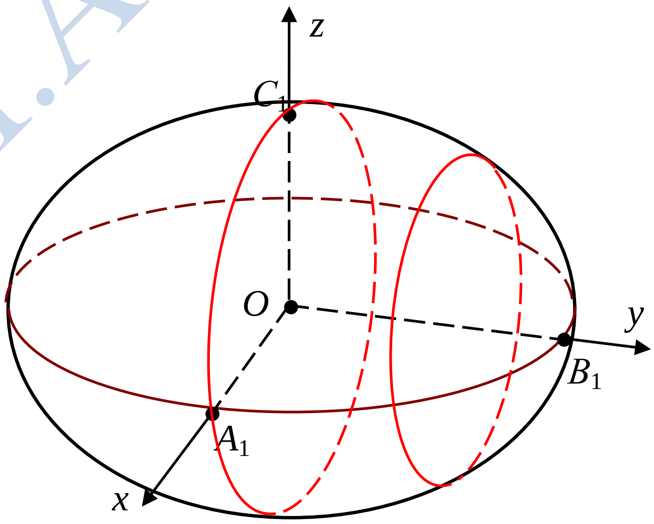
При $|h| > c$ получаем мнимые эллипсы $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = -1$. А при $h = \pm c$ из (*) получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, которое задает только одну из точек $(0, 0, c)$ или $(0, 0, -c)$.

Аналогично, в сечениях плоскостями $x = h$, или $y = h$ в случае $|h| < a$, или $|h| < b$, получаем только эллипсы, полуоси которых достигают максимальных значений при $h = 0$. При $h = \pm a$, или $h = \pm b$ будем получать одну точку.

Геометрические свойства эллипсоида

1. Из уравнения (4.1) получаем, что $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$. Значит, весь эллипсоид содержится в параллелепипеде, который определяется этими неравенствами.

2. Координатные оси пересекают эллипсоид в точках $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$, которые называются *вершинами эллипсоида*.



3. Координатные оси являются осями симметрии эллипсоида, координатные плоскости – плоскостями симметрии, начало координат O – центром симметрии.

Действительно, пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка эллипсоида. Тогда ее координаты (x, y, z) удовлетворяют уравнению (4.1). Но тогда этому уравнению удовлетворяют также тройки чисел $(x,-y,-z)$, $(-x,y,-z)$, $(-x,-y,z)$, $(x,y,-z)$, $(x,-y,z)$, $(-x,y,z)$, $(-x,-y,-z)$, которые определяют точки, симметричные M соответственно относительно осей Ox, Oy, Oz, плоскостей Oxy, Oxz, Oyz и точки O. Поэтому все эти точки тоже принадлежат эллипсоиду.

4. При $a=b$ эллипсоид будет поверхностью вращения вокруг Oz. Действительно, в этом случае его уравнение можно переписать так:

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Аналогично, при $a=c$ эллипсоид будет поверхностью вращения вокруг Oy, а при $b=c$ – вокруг Ox.

При $a=b=c$ эллипсоид будет **сферой**:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad \textbf{(4.2)}$$

Произвольный эллипсоид может быть получен из сферы (4.2) в результате равномерного сжатия (растяжения) по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Действительно, если в (4.2) сделать замену координат $x=x'$, $y=\frac{a}{b}y'$, $z=\frac{a}{c}z'$, то получим уравнение (4.1), только со штрихами.

§2.5. *Гиперболоиды*

Определение 1. **Однополостным и двуполостным гиперболоидами** называются поверхности, имеющие канонические уравнения соответственно вида

$$\Phi_1:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \textbf{(5.1)}$$

$$\Phi_2:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad \textbf{(5.2)}$$

Исследуем их форму методом параллельных сечений.

В сечениях плоскостями $z=h$ получаем соответственно линии

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \qquad\Big|\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{h^2}{c^2} \qquad \textbf{(*)}$$

Обозначим соответственно

$$a'^2=a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right),\ b'^2=b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right); \qquad\Big|\qquad a'^2=a^2\left|-1+\frac{h^2}{c^2}\right|,\ b'^2=b^2\left|-1+\frac{h^2}{c^2}\right|$$

$$h\neq\pm c$$

При любом h получаем эллипсы $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2} = 1$, полуоси которых a' и b' неограниченно возрастают при возрастании $|h|$ и достигают минимумов a и b при $h=0$.

При $|h|>c$ получаем эллипсы $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$, полуоси которых a' и b' неограниченно возрастают при возрастании $|h|$. При $|h|<c$ получаем мнимые эллипсы $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=-1(\varnothing)$, а при $h=\pm c$ уравнение (*) превращается в $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, которое задает одну из точек $C_1(0, 0, c)$ или $C_2(0,0,-c)$.

В сечениях плоскостями $y=h$ получаем соответственно линии

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{h^2}{c^2} \quad \textbf{(**)}$$

Обозначим соответственно

$$a'^2=a^2\left|1-\frac{h^2}{b^2}\right|, \; c'^2=c^2\left|1-\frac{h^2}{b^2}\right|$$

$$a'^2=a^2(1+\frac{h^2}{b^2}), \; c'^2=c^2(1+\frac{h^2}{b^2}).$$

При $h\neq\pm b$ получаем гиперболы $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=\pm1$, а при $h=\pm b$ уравнение (**) превращается в уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, которое задает пару пересекающихся прямых.

При любом h получаем гиперболы $-\frac{x^2}{a'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$.

Геометрические свойства гиперболоидов

1. Из уравнения (5.2) получаем, что $|z|\geq c$, т.е. в пространственном слое $z<c$ нет точек Φ_2. Координатные оси Ox и Oy пересекают Φ_1 в точках $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$, $B_1(0,-b, 0)$, $B_2(0, b, 0)$, которые называются вершинами однополостного гиперболоида. Ось Oz его не пересекает. Зато ось Oz пересекает Φ_2 в точках $C_1(0, 0, c)$, $C_2(0, 0,-c)$, которые называются вершинами двуполостного гиперболоида. Оси Ox и Oy не пересекают Φ_2.

2. Точно так же, как и для эллипсоида доказывается, что координатные оси являются осями симметрии гиперболоидов, координатные плоскости – плоскостями симметрии, а точка O – центром симметрии.

3. При $a = b$ гиперболоиды будут поверхностями вращения, а при $a = c$ гиперболы в сечениях плоскостями $y = h$ будут равнобокими. При $b = c$ равнобокими будут гиперболы в сечениях плоскостями $x = h$.

4. Пусть Φ_0 – конус, заданный уравнением

$$\boldsymbol{\Phi_0}\text{:}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Пусть $M_0(x, y, z_0)\in \Phi_0$, $M_1(x, y, z_1)\in \Phi_1$, $M_2(x, y, z_2)\in \Phi_2$ – три точки с одинаковыми координатами x и y, лежащие на конусе и на гиперболоидах.

Тогда

$$z_0^{\ 2}=c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$z_1^{\ 2}=c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

$$z_2^{\ 2}=c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1\right)\Rightarrow |z_1^{\ 2}|<|z_0^{\ 2}|<|z_2^{\ 2}|,$$

значит, Φ_1 лежит снаружи конуса Φ_0, а Φ_2 – внутри конуса.

Кроме того, из тех же равенств следует $z_0^{\ 2}-z_1^{\ 2}=z_2^{\ 2}-z_0^{\ 2}=c^2 \Rightarrow$

$$M_0M_1=|z_0-z_1|=\frac{1}{|z_0+z_1|}\to 0 \text{ и } M_2M_0=|z_2-z_0|=\frac{1}{|z_1+z_0|}\to 0,$$

когда точки M_0, M_1, M_2 уходят в бесконечность (заметим, что z_0, z_1 и z_2 все стремятся к бесконечности при $x\to\infty$ или $y\to\infty$). Значит, оба гиперболоида асимптотически приближаются к конусу (рис. 1, рис. 2).

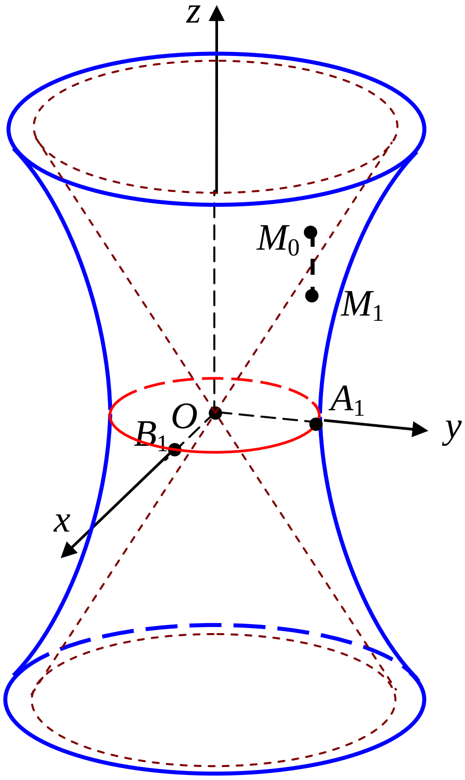


Рис. 1

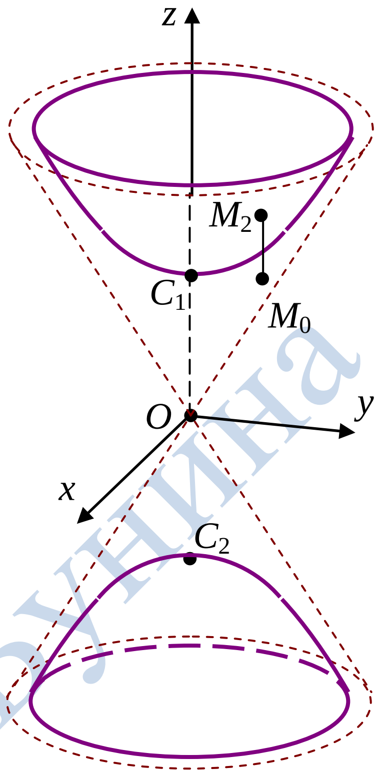


Рис. 2

§2.6. *Параболоиды*

Определение 1. Эллиптическим и гиперболическим параболоидами *называются поверхности, имеющие канонические уравнения соответственно вида*

$$\Phi_3:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (6.1) \qquad\qquad \Phi_4:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (6.2)$$

Исследуем их форму методом параллельных сечений.

В сечениях плоскостями $z=h$ получаем соответственно линии

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2h \quad (*)$$

Обозначим $a'^2=2\,|\,h\,|\,a^2,\ b'^2=2\,|\,h\,|\,b^2$.

При $h>0$ получаем эллипсы $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$, полуоси которых возрастают при возрастании h, а при $h<0$ получаем мнимые эллипсы $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=-1$.

При $h\neq 0$ получаем гиперболы $\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=\pm 1$, (см. на рис. 6.1 γ_4), а при $h=0$ из (∗) получаем уравнение, которое задает пару пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=0$.

В сечениях плоскостями $y=h$ получаем для обеих поверхностей параболы

$$x^2=2a^2\left(z-\frac{h^2}{2b^2}\right) \qquad\qquad x^2=2a^2\left(z+\frac{h^2}{2b^2}\right)$$

Причем параметр этих парабол одинаков для обеих поверхностей и не зависит от h: $p=a^2$. Таким образом, все параболы в сечениях получаются одна из другой параллельным переносом. Вершины этих парабол имеют координаты

$$\left(0,h,\frac{h^2}{2b^2}\right). \qquad\qquad \left(0,h,-\frac{h^2}{2b^2}\right).$$

Значит вершины при перемещении парабол описывают кривую в плоскости Oyz

$$\gamma_2:\ z=\frac{y^2}{2b^2}\ \Leftrightarrow\ y^2=2b^2z \qquad\qquad \gamma_2:\ z=-\frac{y^2}{2b^2}\ \Leftrightarrow\ y^2=-2b^2z,$$

то есть параболу. Поэтому можем сказать, что оба параболоида получаются движением параболы γ_1, когда ее вершина скользит по параболе γ_2 (рис. 1, 2).

Аналогично, в сечениях параболоидов плоскостями $x = h$ получаем равные друг другу параболы, причем γ_2 тоже будет среди них; а вершины этих парабол описывают параболу γ_1: $x^2 = \pm 2b^2 z$ в плоскости Oxz («+» для Φ_3, «–» для Φ_4).

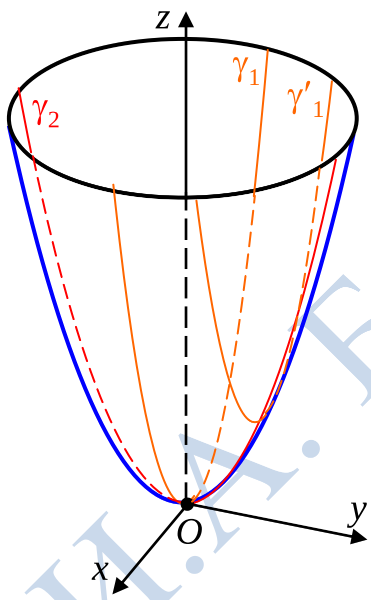


Рис. 1

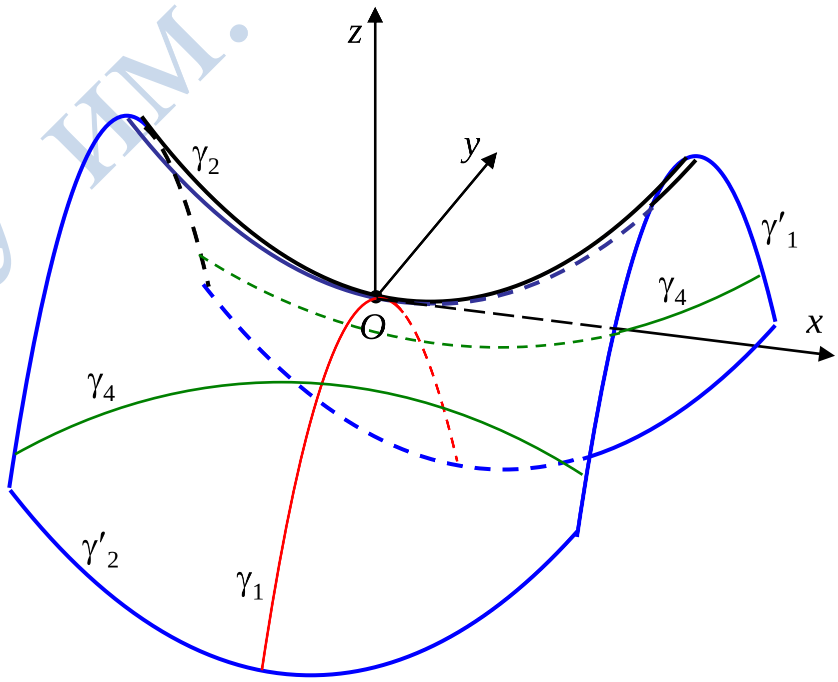


Рис. 2

Геометрические свойства параболоидов

1. Из уравнения (6.1) получаем, что $z \geq 0$, т.е. $Ф_3$ целиком находится в полупространстве, которое определяется этим неравенством.

2. Координатные оси пересекают оба параболоида только в точке $O(0,0,0)$, которая называется *вершиной*.

3. Ось Oz является осью симметрии параболоидов, а координатные плоскости Oxz и Oyz – плоскостями симметрии. Других симметрий у параболоидов нет.

4. При $a = b$ $Ф_3$ будет поверхностью вращения, а гиперболы в сечениях $Ф_4$ плоскостями $z = h$ будут равнобокими.

§2.7. *Классификация поверхностей второго порядка*

Определение 1. Поверхностью второго порядка (ПВП) *называется геометрическое место точек $M(x,y,z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению вида:*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xy+2a_{23}yz+} \\ &\qquad\qquad\boldsymbol{+2a_1x+2a_2y+2a_3z+c=0,} \end{aligned} \tag{7.1}$$

где среди коэффициентов a_{ij}, $i,j=1,2,3$ есть хотя бы один ненулевой.

Выражение $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xy+2a_{23}yz$ называется *квадратичной частью уравнения ПВП*, выражение $2a_1x + 2a_2y + 2a_3z$ – *линейной частью*, число c – *свободным членом*.

Квадратичная часть уравнения (7.1) представляет собой квадратичную форму. Её коэффициенты образуют матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

В курсе линейной алгебры доказывается, что матрицу любой квадратичной формы с помощью поворота координатных осей декартовой системы координат можно привести к диагональному виду

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Тогда в новой декартовой системе координат $Ox'y'z'$ с тем же началом квадратичная часть уравнения (7.1) примет вид:

$$\boldsymbol{\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2}. \tag{7.2}$$

При этом числа λ_1, λ_2, λ_3 не зависят от выбора новой системы $Ox'y'z'$. То есть, если ещё в одной декартовой системе координат квадратичная часть уравнения имеет вид (7.2), то набор чисел λ_1, λ_2, λ_3 будет тем же, может измениться только их порядок. Если количество отрицательных коэффициентов λ_i больше, чем количество положительных, то в уравнении поверхности можно поменять знаки. Затем выбрать именно такой порядок обозначения координатных осей, чтобы сначала следовали положительные λ_i, затем отрицательные, а в конце нулевые. Таким образом, если только одно из λ_i равно нулю, то это будет именно λ_3. А если только одно λ_i отлично от нуля, то можем считать, что это λ_1.

Таким образом, набор знаков λ_1, λ_2, λ_3 будет одним из следующих:

$(+, +, +)$,
$(+, +, -)$,
$(+, +, 0)$,
$(+, -, 0)$,
$(+, 0, 0)$.

Этот набор называется ***сигнатурой квадратичной формы.***

Имеем уравнение:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2b_1x'+2b_2y'+2b_3z'+c=0 \qquad (7.3)$$

Далее, если все $\lambda_i \neq 0$, выделим полные квадраты:

$$\lambda_1\left(x'^2+\frac{2b_1}{\lambda_1}x'+\frac{2b_1^2}{\lambda_1^2}\right)-\frac{2b_1^2}{\lambda_1}+\lambda_2\left(y'^2+\frac{2b_2}{\lambda_2}y'+\frac{2b_2^2}{\lambda_2^2}\right)-\frac{2b_2^2}{\lambda_2}+$$

$$+\lambda_3\left(z'^2+\frac{2b_3}{\lambda_3}z'+\frac{2b_3^2}{\lambda_3^2}\right)-\frac{2b_3^2}{\lambda_3}+c=0;$$

$$\lambda_1\left(x'+\frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2+\left(z'+\frac{b_3}{\lambda_3}\right)^2+c'=0.$$

Затем делаем замену координат

$$\mathbf{x''=x'+\frac{b_1}{\lambda_1},\quad y''=y'+\frac{b_2}{\lambda_2},\quad z''=z'+\frac{b_3}{\lambda_3},}$$

которая означает перенос начала координат в точку $\boldsymbol{O'\left(-\frac{b_1}{\lambda_1},-\frac{b_2}{\lambda_2},-\frac{b_3}{\lambda_3}\right)}$.

Получим уравнение вида

$$\mathbf{\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+\lambda_3(z'')^2=-c'.} \qquad \mathbf{(7.4)}$$

Поделим уравнение на $|c'|$, если $c'\neq 0$. Тогда в правой части уравнения останется 1, –1 или 0. Мы получим одно из уравнений 1–6 из таблицы 2.

Если $\lambda_3=0$, то мы не можем выделить полный квадрат по z', но тогда преобразуем выражение $2b_3z'+c'$ так: $2b_3(z'+c'/2b_3)$, и третья координата также будет участвовать в переносе начала координат в виде $z''=z'+c'/2b_3$. В этом случае в уравнении остается слагаемое $2b_3z''$, но не остается свободного члена и слагаемого, содержащего $(z'')^2$:

$$\boldsymbol{\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2=-2b_3z''.} \qquad \textbf{(7.5)}$$

Мы разделим уравнение на $|b_3|$ и получим одно из уравнений вида 7, 8 в таблице 2.

Если $\lambda_3=0$ и $b_3=0$, то мы получим уравнение вида

$$\boldsymbol{\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2=-c',} \qquad \textbf{(7.6)}$$

которое даст нам одну из поверхностей 9–13 из таблицы 2.

Аналогично рассматриваются случаи $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$.

Итак, мы показали, что уравнение (7.1) можно привести к одному из следующих.

Таблица 2

№	***Поверхность***	**Каноническое уравнение**	**Инварианты**
1	*Эллипсоид*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$	$\delta>0$ $\Delta<0$
2	*Мнимый эллипсоид*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$	$\delta>0$ $\Delta>0$
3	*Мнимый конус (точка)*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$	$\delta>0$ $\Delta=0$
4	*Двуполостной гиперболоид*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$	$\delta<0$ $\Delta<0$
5	*Однополостный гиперболоид*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$	$\delta<0$ $\Delta>0$
6	*Конус*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$	$\delta<0$ $\Delta=0$
7	*Эллиптический параболоид*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z,$	$\delta=0$ $\Delta<0$
8	*Гиперболический параболоид*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,$	$\delta=0$ $\Delta>0$
9	*Эллиптический цилиндр*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$	$\delta=\Delta=0$ $I_2>0$ $I_1\cdot I_4<0$
10	*Мнимый эллиптический цилиндр*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$	$\delta=\Delta=0$ $I_2>0$ $I_1\cdot I_4>0$

11	*Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$	$\delta=\Delta=0$ $I_2>0$ $I_4=0$
12	*Гиперболический цилиндр*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$	$\delta=\Delta=0$ $I_2<0$ $I_4\neq 0$
13	*Пара пересекающихся плоскостей*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$	$\delta=\Delta=0$ $I_2<0$ $I_4=0$
14	*Параболический цилиндр*	$x^2=2py$	$\delta=\Delta=0$ $I_2=0$ $I_4\neq 0$
15	*Пара параллельных плоскостей*	$x^2=a^2$	$\delta=\Delta=0$ $I_2=I_4=0$ $I_3>0$
16	*Пара совпадающих плоскостей*	$x^2=0$	$\delta=\Delta=0$ $I_2=I_4=0$ $I_3=0$
17	*Пара мнимых параллельных плоскостей*	$x^2=-a^2$	$\delta=\Delta=0$ $I_2=I_4=0$ $I_3<0$

Здесь мы использовали инварианты:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & c \end{vmatrix}$$

$I_1 = \operatorname{trace}\delta = a_{11}+a_{22}+a_{33}$

$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ – сумма диагональных миноров второго порядка в δ,

$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & c \end{vmatrix}$ – сумма диагональных миноров второго порядка из Δ, не входящих в δ,

$I_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & c \end{vmatrix}$ – сумма диагональных миноров третьего порядка в Δ, кроме δ.

Можно доказать, что величины δ, Δ, I_1, I_2 не изменяются при любых преобразованиях декартовой системы координат, I_3, I_4 не изменяются при повороте координатных осей, но меняются при переносе начала координат. Поэтому эти величины называют *инвариантами поверхности второго порядка*. Вычислив эти инварианты, можно определить тип поверхности, не упрощая ее уравнения. Однако так мы не сможем определить положение поверхности в пространстве и величины полуосей.

Примеры решения задач

1. *Составить уравнение цилиндрической поверхности, направляющей которой служит окружность, определяемая системой уравнений:*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

а образующие параллельны вектору $\vec{v} = (1; 1; 1)$.

Решение.

Точка $M(x; y; z)$ принадлежит данной цилиндрической поверхности тогда и только тогда, когда прямая, проведённая через эту точку по направлению вектора $\vec{v}$, пересекает направляющую линию в некоторой точке $N(X; Y; Z)$. Такую прямую можно представить уравнениями:

$$\begin{cases} x = X + t \\ y = Y + t \\ z = Z + t. \end{cases}$$

Перепишем эти уравнения в следующем виде:

$X = x - t, \qquad Y = y - t, \qquad Z = z - t.$

Эти величины должны удовлетворять уравнениям направляющей линии и потому: $x - t + y - t + z - t = 0$, откуда: $t = \frac{x+y+z}{3}$.

Следовательно:

$$X = x - t = \frac{2x - y - z}{3},$$

$$Y = y - t = \frac{2y - x - z}{3},$$

$$Z = z - t = \frac{2z - x - y}{3}.$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение системы, определяющей направляющую, получим искомое уравнение цилиндрической поверхности:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - \frac{3}{2} = 0.$$

2. *Составить уравнение конической поверхности, вершина которой находится в точке* $O(0;0;0)$*, а направляющая определяется системой уравнений:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Решение.

Пусть $M_0(X;Y;Z)$ – некоторая точка направляющей. Параметрические уравнения образующей (OM_0) имеют вид: $x = tX,\ y = tY,\ z = tZ,$

откуда при $t \neq 0$:

$$X = \frac{1}{t}x, \qquad Y = \frac{1}{t}y, \qquad Z = \frac{1}{t}z,$$

или $X = t'x, Y = t'y, Z = t'z$, где $t' = \frac{1}{t}$.

Так как эти координаты должны удовлетворять уравнениям направляющей линии, то $5t'x + 4t'y - t'z - 1 = 0,$

откуда $t' = \frac{1}{5x+4y-z}$.

Следовательно,

$$X = \frac{x}{5x+4y-z}, \qquad Y = \frac{y}{5x+4y-z}, \qquad Z = \frac{z}{5x+4y-z}.$$

Подставляя эти выражения в первое из уравнений направляющей линии, получим:

$$\frac{x^2}{(5x+4y-z)^2} + \frac{y^2}{(5x+4y-z)^2} + \frac{z^2}{(5x+4y-z)^2} - 1 = 0.$$

После соответствующих упрощений приходим к искомому уравнению конической поверхности:

$$24x^2 + 15y^2 + 40xy - 10xz - 8yz = 0.$$

3. *Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду, определить тип поверхности и изобразить её в исходной системе координат*: $4x^2 + z^2 - 24x + 8y + 2z + 5 = 0$.

Решение.

Выделим в уравнении полные квадраты:

$$4(x^2 - 6x + 9) - 36 + (z^2 + 2z + 1) - 1 + 8y + 5 = 0,$$
$$4(x-3)^2 + (z+1)^2 + 8y - 32 = 0,$$
$$4(x-3)^2 + (z+1)^2 = -8(y-4).$$

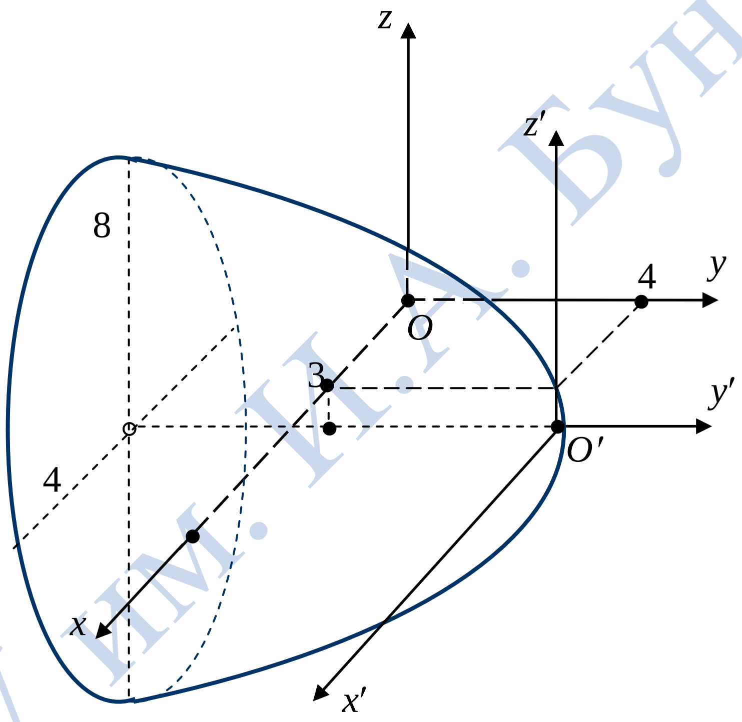
Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y - 4, \\ z' = z + 1, \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,\ 4,-1)$. После замены получаем уравнение

$$4x'^2 + z'^2 = -8y', \Leftrightarrow \quad (x')^2 + \frac{(z')^2}{4} = -8y'.$$

Это уравнение задает эллиптический параболоид с осью $O'y'$. В сечении плоскостью $y' = -8$ получится эллипс $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(z')^2}{64} = 1$ с полуосями 4 и 8. Это следует учесть при изображении.



4. *Определить, какое множество точек задается в декартовой системе координат неравенством* $(x-3) - 4(y+4)^2 \geq 0$.

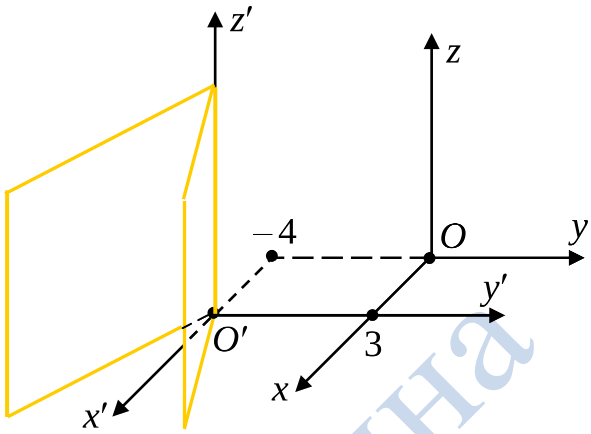
Решение.

Определим сначала, какое множество определяется уравнением $(x-3) - 4(y+4)^2 = 0$. Делаем замену координат

$$\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 4, \\ z' = z. \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,-4,0)$. В новой системе координат $O'x'y'z'$ получаем, что поверхность задается уравнением $(x')^2 - 4(y')^2 = 0$.

Поскольку в уравнении отсутствует координата z', делаем вывод, что поверхность является цилиндрической и ее образующие параллельны оси $O'z'$. На плоскости $O'x'y'$ получившееся уравнение задает пару пересекающихся прямых $(x'-2y')(x'+2y') = 0$. Эта линия второго порядка будет направляющей данной поверхности. Значит, наша поверхность – это пара пересекающихся плоскостей.



Чтобы не загромождать изображение мы нарисовали только часть этой поверхности. Поскольку изначально у нас было неравенство, то искомое множество – внутренность одной из двух пар вертикальных углов, образуемых этими плоскостями. Возьмем любую точку на оси $O'x'$: $A(a,\ 0,\ 0)_{O'x'y'z'}$ и убедимся, что ее координаты удовлетворяют неравенству $(x')^2-4(y')^2 \geq 0$. Значит, ось $O'x'$ лежит в нашем множестве. Таким образом, исходное неравенство задает внутренность изображенного двугранного угла и угла, вертикального с ним. А так как неравенство нестрогое, то и сами плоскости тоже принадлежат множеству.

5. *Составить уравнение поверхности, полученной вращением линии*

$$\begin{cases} z=2y-2, \\ x=0. \end{cases}$$

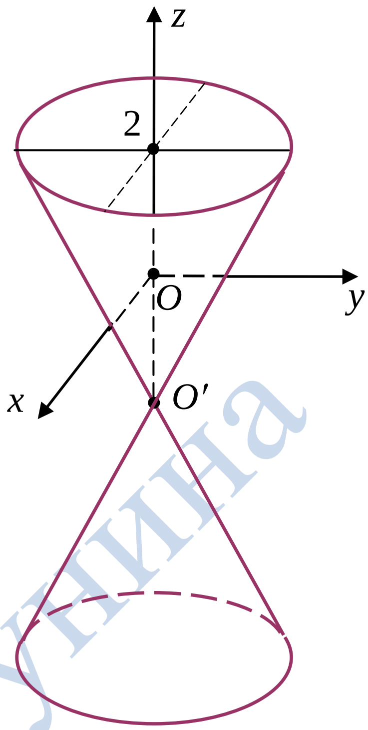
вокруг оси а) Oz , б) Oy . *Определить тип поверхности, изобразить ее.*

Решение.

Данная система уравнений задает прямую l, лежащую в плоскости Oyz. Первое из уравнений – это уравнение l в данной плоскости. Чтобы составить уравнение поверхности Ф, получающейся вращением l вокруг Oz, мы должны в уравнении l оставить z без изменения, а y заменить на $\sqrt{x^2+y^2}$. Получаем уравнение

$$z=2\sqrt{x^2+y^2}-2, \Rightarrow$$

$$x^2+y^2-\frac{(z+2)^2}{4}=0.$$



Данное уравнение определяет конус с осью Oz и вершиной в точке $O'(0,0,-2)$.

Строим изображение конуса.

1) Подставив в уравнение конуса $z = 2$, получим $x^2+y^2=4$. Значит, в сечении плоскостью $z=2$ получается окружность радиуса 2. Проводим через точку $z=2$ на оси Oz вспомогательные линии, параллельно осям Ox и Oy; откладываем на них от данной точки отрезки длины 2 и через получившиеся точки проводим эллипс, изображающий окружность. При этом масштаб по оси Ox выбираем в два раза меньше, чем по осям Oy и Oz.

2) Строим эллипс, равный данному, с центром в точке $z=-6$ на оси Oz.

3) Проводим касательные к эллипсам через точку O'. Подчеркнем, что точки касания не совпадают с вершинами эллипса.

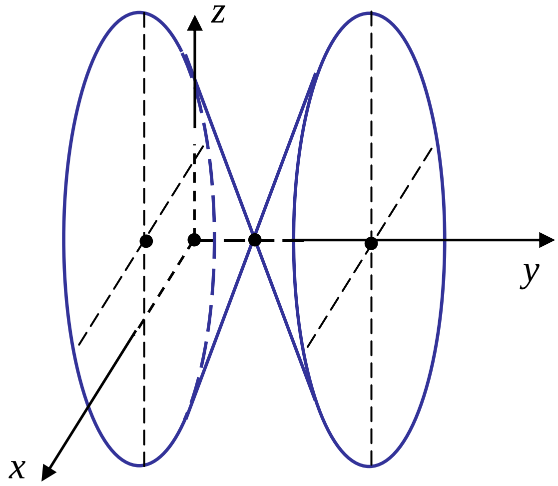
4) Часть нижнего эллипса, заключенную между точками касания изображаем пунктиром.

Аналогично, чтобы получить уравнение поверхности вращения вокруг Oy, в уравнении l оставляем y без изменения, а z заменяем:

$z \mapsto \sqrt{x^2+z^2}$. Получаем уравнение

$$x^2-4(y-1)^2+z^2=0,$$

$$\frac{x^2}{4}-(y-1)^2+\frac{z^2}{4}=0.$$



Оно задает конус, вершина которого находится в точке $O'(0,1,0)$, а ось конуса Oy. Эту поверхность тоже следует изобразить. При этом учитываем, что в сечении плоскостью $y = 3$ получается окружность радиуса 4.

6. *Показать, что поверхность, заданная уравнением* $-x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}$ *=1*, является *поверхностью вращения. Вращением какой линии и вокруг какой оси она получена*?

Решение.

Данная поверхность – однополостной гиперболоид. В уравнении поверхности можно выделить выражение $\sqrt{y^2+z^2}$:

$-x^2+\frac{(\sqrt{y^2+z^2})^2}{4}=1$, и больше нигде в уравнении x и z не встречаются. Поэтому делаем вывод, что это уравнение задает поверхность вращения вокруг Oy. Чтобы определить, какая кривая γ вращается, $\sqrt{y^2+z^2}$ заменяем на y и получаем уравнение $-x^2+\frac{y^2}{4}=1$ кривой, которая лежит в плоскости $z=0$. Чтобы задать эту кривую в пространстве, мы должны написать систему уравнений

$$\begin{cases} -x^2+\frac{y^2}{4}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Можем заменить $\sqrt{y^2+z^2}$ на z , и тогда получим уравнение кривой γ', лежащей в плоскости $y=0$:

$$\begin{cases} -x^2+\frac{z^2}{4}=1, \\ y=0. \end{cases}$$

7. *Составить уравнение поверхности, каждая точка которой равноудалена от плоскости* $x=-a$ *и от точки* $F(a,0,0)$.

Решение.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка поверхности. Тогда $|MF|=\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}$, а расстояние от M до плоскости равно $|x+a|$. По условию $\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}=|x+a|$. Возводим это равенство в квадрат:

$x^2-2ax+a^2+y^2+z^2=x^2+2ax+a^2$

$y^2+z^2=4ax \iff \frac{y^2}{2a}+\frac{z^2}{2a}=2ax.$

Это уравнение задает эллиптический параболоид, осью которого является Ox.

8. *Найти точки пересечения эллипсоида* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{81}=1$ *и прямой* $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+6}{12}$.

Решение.

Перепишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=1+t, \\ y=4-6t, \\ z=-6+12t. \end{cases}$$

Подставим эти равенства в уравнение эллипсоида:

$$\frac{(1+t)^2}{9}+\frac{4(2-3t)^2}{36}+\frac{9(-2+4t)^2}{81}=1,$$

$$1+2t+t^2+4-12t+9t^2+4-16t+16t^2=9,$$

$$26t^2-26t=0 \Leftrightarrow 26t(t-1)=0.$$

Имеем два решения: $t_1=0$, $t_2=1$. Подставляя их в уравнение прямой, находим две точки $M_1(1, 4,-6)$, $M_2(2,-2, 6)$.

9. *Определить, какая линия получается в сечении поверхности* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ *плоскостью* **а)** $y=2z$; **б)** $y=2z+2$.

Решение.

а) Данная поверхность – однополостной гиперболоид. Подставим $y=2z$ в уравнение поверхности:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(2z)^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=9.$$

Это уравнение проекции данной линии на плоскость Oxz. Оно задает пару параллельных прямых. Следовательно, наша линия – тоже пара параллельных прямых.

б) Подставим $y=2z+4$ в уравнение поверхности:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(2z+2)^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9}+\frac{z^2+4z+4-z^2}{4}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=9z.$$

Это уравнение проекции данной линии на плоскость Oxz. Оно задает параболу. Следовательно, линия – тоже парабола.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $x = y = z$, а направляющей служит окружность:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

2. Составить уравнение цилиндрической поверхности, зная, что направляющей служит линия:

$$\begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 2z \end{cases},$$

а образующие перпендикулярны плоскости направляющей.

3. Изобразить цилиндрические поверхности заданные уравнениями:

а) $x^2 + 4y = 0$;

б) $3x^2 + 2y^2 - 6 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

4. Составить уравнение конической поверхности, зная её вершину $S(0; 0; 8)$ и направляющую линию:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

Найти образующие этой поверхности, лежащие в плоскости Oxz.

5. Составить уравнение поверхности, образованной вращением окружности, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

вокруг а) оси Ox; б) оси Oy.

6. Определить вид поверхности второго порядка, заданной уравнением

$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2 = 0$.

Построить её изображение.

7. Определить вид поверхностей второго порядка, заданных уравнениями:

а) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 24 = 0$;

б) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 0$;

в) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$;

г) $2x^2 + y^2 - 8z = 0$;

д) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 0$;

е) $2x^2 - 4y - z^2 = 0$;

ж) $x^2 = 6z$;

з) $9y^2 - 16x^2 - 144 = 0$.

Построить изображения этих поверхностей.

Список литературы

1. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия: учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 672 с.

2. Базылев В.Т. и др. Геометрия: учеб. пособие для студентов I курса физ.-мат. фак-тов пед. ин.-тов. – М.: Просвещение, 1974.

3. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре/ Под ред. Д.В. Беклемишева. – М.: Физматлит, 2001. – 496 с.

4. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов.: в 2 ч. Ч.1, 2. – СПб.: Специальная литература, 1997.

5. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие для втузов. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2004. – 200 с.

6. Подаева Н.Г., Красникова Л.В. Линии и поверхности в евклидовом пространстве: учебно-методическое пособие. – Елец: ЕГУ им. И.А.Бунина, 2004. – 69с.

7. Сборник задач по геометрии: учеб. пособие / Под ред. В.Т. Базылева. – Спб.: Изд-во «Лань»,2008. – 256 с.

8. Степанов Н.А., Жогова Т.Б., Казнина О.В. Геометрия II: учеб. пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов. – Н. Новгород: Изд-во НГПУ, 2007. – 313 с.

Учебное пособие

Лариса Викторовна Жук,
Оксана Николаевна Прокуратова

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Практикум по решению задач

Технический редактор – О. А. Ядыкина
Книга издается в авторской редакции

Лицензия на издательскую деятельность
ИД № 06146. Дата выдачи 26.10.01.
Формат 60 x 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 5,1 Уч.-изд.л. 4,7
Электронная версия

Размещено на сайте: http://elsu.ru/kaf/algeo/edu
Заказ 28

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1