МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ЕЁ ПРЕПОДАВАНИЯ

И.А. Елецких

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Учебно-методическое
пособие

Елец – 2018

УДК 517
ББК 22.161
Е 50

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 29.01.2018 г., протокол № 1

Рецензенты:

О.Н. Масина – доктор физико-математических наук, профессор
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;

В.Е. Щербатых – кандидат физико-математических наук, доцент
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

И.А. Елецких

Е 50 Учебно-методическое сопровождение дисциплины «Дифференциальные уравнения»: учебно-методическое пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2018. – 64 с.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, и нематематических направлений бакалавриата, например, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 20.03.01 Техносферная безопасность, 35.03.06 Агроинженерия, 38.03.01 Экономика. Пособие нацелено на решение задач обеспечения преподавателей методическим инструментарием для проведения практических занятий по дисциплине, организации самостоятельной и научной работы студентов и оснащения обучающихся методическими рекомендациями, способствующими развитию математической подготовки, необходимой для формирования общепрофессиональных компетенций.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения и может быть использовано ими для подготовки к практическим занятиям, написанию курсовых и выпускных квалификационных работ. Материал данного пособия может быть использован преподавателями для организации процесса обучения по перечисленным темам.

УДК 517
ББК 22.161

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время требования ФГОС ВО и ФГОС ВО 3+ ориентируют образование на достижение достаточно высокого уровня знаний, опыта, осведомленности для осуществления деятельности и общения в различных областях и сферах. Реализация поставленных требований приводит к необходимости внедрения в образовательный процесс современных подходов к обучению, создание учебно-методического обеспечения, изучение и внедрение технологий, форм и методов преподавания на основе компетентностного подхода, внедрение инновационных технологий в образовательный процесс.

Учебно-методическое обеспечение является инструментом организации и поддержки учебного процесса, так как дает достаточно полное представление как об объеме содержания обучения, так и о способах построения учебного процесса.

Основная цель учебно-методического обеспечения – создание условий для реализации требований ФГОС ВО посредством предоставления обучающимся полного комплекта учебно-методических материалов для аудиторного и самостоятельного освоения учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения».

Методическое обеспечение дисциплины разработано в двух вариантах – в виде материала, размещенного в электронной информационно-образовательной среде ЕГУ им. И.А. Бунина (система дистанционного обучения) и в печатном виде (учебно-методическое пособие «Методическое обеспечение дисциплины «Дифференциальные уравнения»).

Пособие содержит программу дисциплины, краткие тексты лекций по изучаемым темам, рекомендации по подготовке к практическим занятиям, задания для самостоятельного выполнения.

Структура пособия: весь материал разбит на темы, темы на параграфы. В структуру каждого параграфа включены вопросы для подготовки (предназначены для студентов с целью подготовки к занятию), необходимый теоретический материал (ссылка на источники, в которых можно найти ответы на поставленные вопросы, и краткий теоретический материал, необходимый для выполнения практических заданий), образцы решений с подробными пояснениями. В заключении каждого параграфа приводятся задания для самостоятельной работы.

Пособие предназначено для преподавателей. Оно поможет в организации контактной работы, самостоятельной работы обучающихся и контроля знаний студентов по дисциплине «Дифференциальные уравнения».

Отличие пособия от ранее изданных состоит в том, что материал данного пособия может быть использован как студентами очной и заочной форм обучения для самостоятельного освоения дисциплины.

ВВЕДЕНИЕ

Измерение физических и геометрических величин неразрывно связано со всем ходом исторического развития математики, начиная от ее возникновения вплоть до сегодняшних дней. Проблемы измерения тех или иных величин, появившиеся в ходе научного познания, привели к необходимости разработки аппарата дифференциального исчисления.

Дифференциальные уравнения объединяют и обобщают многие идеи математического анализа, являются важным средством познания явлений действительности. Они возникают при математической формулировке различных прикладных задач.

Целью преподавания дисциплины «Дифференциальные уравнения» является создание целостного представления о предмете и методах общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотрение методов интегрирования наиболее важных в теоретическом отношении и часто встречающихся в приложениях типов дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется линейным уравнениям и системам линейных уравнений.

Вместе с тем этот курс несет в себе глубокую профессиональную направленность, его рассмотрение необходимо для дальнейшего изучения прикладных дисциплин по указанным направлениям подготовки.

Содержание дисциплины «Дифференциальные уравнения» представлено следующими темами.

***Тема 1.* «Дифференциальные уравнения первого порядка»**

Понятие об обыкновенном дифференциальном уравнении первого порядка, разрешенном относительно производной, и его решении. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Особые решения. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные уравнения. Уравнение Я. Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Основные понятия и определения теории уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Уравнения n-ой степени. Неполные уравнения. Уравнения Лагранжа и Клеро. Уравнения, разрешимые относительно y или x.

***Тема 2.* «Дифференциальные уравнения высших порядков»**

Основные понятия и определения теории уравнений высших порядков. Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Определитель Вронского. Формула Остроградского. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Линейные однородные и неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и методы их решения.

***Тема 3.* «Системы обыкновенных дифференциальных уравнений»**

Основные понятия теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Запись нормальной системы и ее решения в векторной форме. Задача Коши для нормальной системы. Система дифференциальных уравнений в симметрической форме. Методы интегрирования нормальных систем.

Основные понятия и положения теории систем линейных дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение линейных однородных систем методом Эйлера. Матричный метод решения линейных однородных систем. Линейные неоднородные системы.

Учебные занятия по дисциплине «Дифференциальные уравнения» проводятся в форме контактной работы с преподавателем и в форме самостоятельной работы обучающихся. Контактная работа обучающихся с преподавателем по данной дисциплине включает в себя лекционные и практические занятия, групповые консультации, индивидуальную работу обучающихся с преподавателем.

Контактная работа по дисциплине может быть, как аудиторной, так и внеаудиторной (осуществляться с помощью дистанционных образовательных технологий, разработанных в электронной информационной образовательной среде университета). Объем контактной работы по очной, очно-заочной и заочной формам обучения устанавливается рабочим учебным планом. Пособие ориентировано на организацию подготовки обучающихся к практическому применению знаний для решения и исследования дифференциальных уравнений и их систем.

Следует отметить, что для направления подготовки Прикладная математика и информатика дисциплина «Дифференциальные уравнения» читалась как самостоятельный курс. Для остальных направлений, которые указаны выше, дифференциальные уравнения включены в программы дисциплин «Математический анализ» или «Математика». Поэтому в дальнейшем мы не будем останавливаться на дробление материала на практические занятия, а решение и исследование дифференциальных уравнений и их систем будем соотносить с рассматриваемой тематикой.

Практические занятия направлены на закрепление теоретического материала на практическом уровне. Для подготовки к занятию студенту необходимо разобрать материал, изложенный на лекции, выучить определения и формулировки теорем, разобрать примеры и задачи, которые приводились преподавателем. Весь необходимый материал так же можно найти на сайте СДО и в учебнике Елецких И. А. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие для вузов (Гриф УМО) / И. А. Елецких, Р. А. Мельников, О. А. Саввина; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. - Елец.: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. - 253 с.

ТЕМА 1.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Вопросы для подготовки

1) Основные понятия теории дифференциальных уравнений (ДУ). 2) Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. 3) Поле направлений уравнения первого порядка. 4) Понятие решения ДУ. 5) Задача Коши.

Необходимый теоретический материал

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 1, §1-2);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Для выполнения заданий по указанной теме будем пользоваться определениями решения дифференциального уравнения, общего и частного решений.

Функция $y = y(x)$, обращающая дифференциальное уравнение в тождество, называется ***решением этого уравнения***, а график решения на плоскости *xOy* – ***интегральной кривой***. Процесс нахождения решений называется ***интегрированием*** дифференциального уравнения.

Во многих вопросах теоретического и прикладного характера требуется среди всех решений дифференциального уравнения найти решение, удовлетворяющее начальному условию (условию Коши): $y = y_0$ при $x = x_0$, где x_0 и y_0 – заданные числа (начальные данные).

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую проходящую через заданную точку $M(x_0; y_0)$. Задача нахождения решения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется ***задачей Коши (начальной задачей)***. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши приведены в рекомендуемом учебнике.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x; c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1) функция $\varphi(x; c)$ является решением дифференциального уравнения при каждом фиксированном значении *c*;

2) каково бы ни было начальное условие, можно найти такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x; c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x; c_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x; c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Чтобы найти решение уравнения с начальными данными x_0 и y_0 с помощью формулы общего решения $y = \varphi(x; c)$, поступают следующим образом:

•подставляют в формулу $y = \varphi(x; c)$ вместо x и y числа x_0 и y_0, получают уравнение $y_0 = \varphi(x_0; c)$;

•решают полученное уравнение относительно c и находят $c = c_0$;

•подставляют полученное значение c_0 в формулу общего решения: $y = \varphi(x; c_0)$.

Задача интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении всех решений этого уравнения и изучении их свойств.

<u>Образцы решений</u>

Пример 1. *Проверить является ли функция* $x^2 + y^2 = 2cx$ *решением дифференциального уравнения* $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0$.

Решение.

Перепишем заданное решение в виде $y^2 = 2cx - x^2$. Продифференцируем его:

$$2yy' = 2c - 2x.$$

Подставим значения y^2 и $2yy'$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$y^2 - x^2 - 2xyy' = 2cx - x^2 - x^2 - x(2c - 2x) = 2cx - 2x^2 - 2cx + 2x^2 = 0.$$

Так как результат подстановки в левую часть уравнения совпадает со значением правой части данного уравнения, то заключает, что функция $x^2 + y^2 = 2cx$ является решением дифференциального уравнения $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0$.

Пример 2. *Зная общее решение дифференциального уравнения* $y = cx + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$, *найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию* $y(1) = 0$.

Решение.

Подставим в общее решение вместо x и y их заданные начальные условия: $x = 1$, $y = 0$.

Получим

$$0 = c + \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} \Rightarrow \frac{c\sqrt{1 + c^2} + c}{\sqrt{1 + c^2}} = 0 \Rightarrow c\sqrt{1 + c^2} + c = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Найденное значение c, подставляем в общее решение и получаем искомое частное решение $y = 0$.

Пример 3. *Составить дифференциальное уравнение семейства кривых* $(x - c)^2 + y^2 = 1$, *зависящих от параметра c.*

Решение.

Продифференцируем данное уравнение:

$$2(x-c)+2yy^{|}=0 \Rightarrow yy^{|}=-(x-c).$$

Составляем систему, из которой исключаем параметр c:

$$\begin{cases}(x-c)^2+y^2=1,\\ yy^{|}=-(x-c),\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-c=-yy^{|},\\ (-yy^{|})^2+y^2=1.\end{cases}$$

Искомым уравнением является уравнение, не содержащее c, т.е. уравнение $(-yy^{|})^2+y^2=1$. Преобразовав его окончательно получаем $y^2\left(\left(y^{|}\right)^2+1\right)=1$.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1.1. Проверить является ли данная функция решением дифференциального уравнения:

№п/п	Функция	Уравнение
1)	$y=\sin x-1+ce^{-\sin x}$	$y^{|}+y\cos x=\frac{1}{2}\sin x$
2)	$y^2=2cx+c^2$	$y(y^{|})^2+2xy^{|}-y=0$
3)	$y=e^{\arcsin cx}$	$xy^{|}=y\cdot tg(\ln y)$
4)	$y=\sqrt{x^2+c}$	$yy^{|}=x$
5)	$y=\frac{c}{\cos x}$	$y^{|}-y\cdot tg\,x=0$
6)	$y=x+c\cdot e^{y}$	$(x-y+1)y^{|}=1$
7)	$y=cx+c-c^2$	$(y^{|})^2-y^{|}-xy^{|}+y=0$
8)	$\begin{cases}x=te^{t}\\ y=e^{-t}\end{cases}$	$(1+xy)y^{|}+y^2=0$
9)	$\begin{cases}x=t\cdot\ln t\\ y=t^2(2\ln t+1)\end{cases}$	$y^{|}\ln\frac{y^{|}}{4}=4x$
10)	$\begin{cases}x=a\cdot\sin t\\ y=b\cdot\cos t\end{cases}$	$y^{|}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$
11)	$y=x\left(1+\int\frac{e^x}{x}dx\right)$	$xy^{|}-y=x\cdot e^{x}$
12)	$y=x\int_0^x\sin t^2dt$	$xy^{|}-y=x^2\sin x^2$

1.2. Зная общее решение дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1) $y = cx^2;\ y(2) = 3;$ 2) $y = x\sqrt{\ln x^2 + c};\ y(e) = e;$

3) $x^2 + 2y^2 = c; y(-1) = -5;$ 4) $x^2y + cx^2y^2 = 1;\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1;$

5) $y = arctg(x + y) + c;\ y(1) = 0.$

1.3. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых:

1) $y = cx + x^2;$ 2) $y = cx^2 + x;$ 3) $y = \sin cx;$

4) $y = e^{cx^2};$ 5) $y = \sin x + c \cdot \cos x;$ 6) $x^2 - y^2 = cx;$

7) $y^2 + \frac{1}{x} = 2 + c \cdot e^{-\frac{y^2}{2}};$ 8) $x + y + c(1 - xy) = 0.$

§ 2. Уравнения, не содержащие искомой функции и независимой переменной

Вопросы для подготовки

1) Виды дифференциальных уравнений, не содержащие искомой функции и приемы их решения. 2) Виды ДУ, не содержащие независимой переменной. Приёмы решения таких ДУ. 5) Особое решение ДУ.

Необходимый теоретический материал

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 1, §3);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Уравнение первого порядка, не содержащее искомой функции, имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Если функция f определена и непрерывна в $(a; b)$, то $y = \int f(x)dx + c$ – есть общее решение этого уравнения.

Уравнение, не содержащее независимой переменной, имеет вид $\frac{dy}{dx} = f(y).$

Для нахождения общего решения этого уравнения воспользуемся перевернутым уравнением $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$, которое не содержит искомой функции x, и к нему применимы рассуждения относительно уравнений такого типа. Если функция $f(y)$ непрерывна в $(c; d)$ и не обращается в 0 на этом интервале, то $x = \int \frac{1}{f(y)}dy + c$ является общим решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(y)$. В случае, когда $f(y) = 0$ при $y = \eta$, то последнее может оказаться особым решением, т.е. решением, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши.

Образцы решений

Пример 1. *Найти общее решение уравнения* $y^{|} = 2x \cdot e^{x^2}$.

Решение.

Данное уравнение не содержит искомой функции, поэтому его общий интеграл имеет вид:

$$y = \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \int e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} + c.$$

Пример 2. *Найти общее решение уравнения* $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$.

Решение.

Дано уравнение, не содержащее независимой переменной. Перевернутое уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Это уравнение не содержит искомой функции *x*, поэтому его решение аналогично приему, приведенному в примере 1:

$$x = \int \frac{dy}{1+y^2} = arctg\, y + c.$$

Особых решений нет, т.к. $1 + y^2 \neq 0$.

Пример 3. *Найти общее решение уравнения* $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$.

Решение.

Это уравнение не содержит независимой переменной. Перевернутое уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow x + c = \arcsin y \Rightarrow y = \sin(x+c).$$

$\sqrt{1-y^2} = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Решения $y = \pm 1$ являются особыми, т.к. представляют собой огибающие семейства интегральных кривых.

Задания для самостоятельной работы

2.1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y^{|} = sin^3 x$; 2) $y^{|} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$; 3) $y^{|} = x^2 e^x$; 4) $y^{|} = cos^2 x$;

5) $y^{|} = 2e^x \cos x$; 6) $y^{|} = \frac{x}{x^2-1}$; 7) $y^{|} = \sin y$; 8) $y^{|} = 1 + \frac{1}{y}$; 9) $y^{|} = e^y$;

10) $y^{|} = \cos y$;

11) $y^{|} = y \cdot \ln y$.

2.2. Найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию:

1) $y^{|} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 1$; 2) $y^{|} = 2xe^{-x^2}$, $y(0) = -1$;

3) $y^{|} = -y^2$, $y(1) = 1$; 4) $y^{|} = y - 1$, $y(1) = 1$;

5) $y^{|} = \sqrt{4y^2 - 1}$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

§ 3. Уравнения с разделяющимися переменными

Вопросы для подготовки

1) Какие уравнения называются уравнениями, с разделяющимися переменными? 2) Как интегрируются уравнения с разделяющимися переменными? 3) Перечислить три вида уравнений, сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. 4) При помощи каких замен они сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными?

Необходимый теоретический материал

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 1, §4);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Наиболее простым является уравнение с разделёнными переменными вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$$

В нем одно слагаемое зависит только от x, а другое только от y. Проинтегрировав почленно это уравнение, получаем его общее решение (общий интеграл):

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c\,.$$

Уравнения с разделяющимися переменными имеют вид

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Это уравнение легко сводится к уравнению с разделёнными переменными путём почленного деления его на $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$. В результате получим

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения с разделяющимися переменными запишется в виде

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = c.$$

Если $Q_1(y)P_2(x) = 0$ при $x = x_0$ или при $y = y_0$, или одновременно при $x = x_0$ и $y = y_0$, то $x = x_0$ или $y = y_0$, или оба вместе могут быть особыми решениями уравнения с разделяющимися переменными.

Следует отметить, что уравнения, не содержащие искомой функции и независимой переменной, о которых шла речь в пункте 1.2, являются частным случаем уравнений с разделяющимися переменными.

К уравнениям, в которых можно произвести разделение переменных, относятся и уравнения вида $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$.

<u>Образцы решений</u>

Пример 1. *Найти общее решение дифференциального уравнения:* $y^{\mid} = e^{x-y}$.

Решение.

Перепишем данное уравнение в виде: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$. Разделим в нем переменные по правилу пропорции: $e^y dy = e^x dx$. Далее интегрируя, найдем общее решение данного уравнения:

$$e^y = e^x + c \quad \Rightarrow y = \ln(e^x + c).$$

Особых решений уравнение не имеет.

Пример 2. *Найти общее решение дифференциального уравнения:*

$$(1 + y^2)dx - (1 + x^2)dy = 0.$$

Решение.

Разделим обе части уравнения на выражение $(1 + y^2) \cdot (1 + x^2) \neq 0$, получим:

$$\frac{dx}{1+x^2} - \frac{dy}{1+y^2} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dy}{1+y^2} = 0 \Rightarrow arctg\, x - arctg\, y = -arctg\, c.$$

Из последнего равенства найдем *y*:

$$y = tg(arctg\, x + arctg\, c) = \frac{tg(arctg\, x) + tg(arctg\, c)}{1 - tg(arctg\, x) \cdot tg(arctg\, c)} = \frac{x + c}{1 - x \cdot c}.$$

Таким образом, $y = \frac{x+c}{1-x \cdot c}$ – общее решение.

Особых решений нет, т.к. $(1 + y^2) \cdot (1 + x^2) \neq 0$ во всех точках пространства R^2.

Пример 3. *Найти частное решение дифференциального уравнения*

$$y^{\mid} + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y),$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $y^{\mid} = \cos(x - 2y) - \cos(x + 2y)$ или, используя формулы тригонометрии, в виде уравнения с разделяющимися

переменными: $y' = 2\sin x \cdot \sin 2y$. Решаем это уравнение: $\frac{dy}{dx} = 2\sin x \cdot \sin 2y \Rightarrow \frac{dy}{\sin 2y} = 2\sin x\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sin 2y} = \int 2\sin x\, dx \Rightarrow$
$\frac{1}{2}(\ln|\sin y| - \ln|\cos y|) = -2\cos x + c \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln|tg\, y| = -2\cos x + c \Rightarrow$

$$\ln|tg\, y| = -4\cos x + 2c \text{ – общее решение.}$$

Находим частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{\pi}{4}$:
$y(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 = -4 + 2c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \ln|tg\, y| = 4 - 4\cos x \Rightarrow$

$$\ln|tg\, y| = 4(1 - \cos x) \text{ – искомое частное решение.}$$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

3.1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$;
2) $(1+e^x)yy' = e^x$;
3) $y' = 2^{x+y}$;
4) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$;
5) $tg\, y\, dx - ctg\, x\, dy = 0$;
6) $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$;
7) $y' + \frac{x \cdot \sin x}{y \cdot \cos y} = 0$;
8) $(y^2 + xy^2)dy + (x^2 - x^2 y)dx = 0$;
9) $xy \cdot dx - \sqrt{1+x^2} = 0$;
10) $2ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0$;
11) $2e^x tg\, y\, dx + (1+e^x)\sec^2 y\, dy = 0$.

3.2. Найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию:

1) $(1+y^2)dx - xy\, dy = 0,\ y(1) = 0$;
2) $(1+e^{x+1})yy' = e^{x+1},\ y(-1) = 1$;
3) $xy' = \frac{y}{\ln x},\ y(e) = 1$;
4) $\frac{yy'}{x} + e^y = 0,\ y(1) = 0$;
5) $x(y^6+1)dx + y^2(x^4+1)dy = 0,\ y(0) = 1$;
6) $\frac{y}{y'} = \ln y,\ y(2) = 1$;
7) $e^{1+x^2} tg\, y\, dx - \frac{e^{2x}}{x-1}dy = 0,\ y(1) = \frac{\pi}{2}$;
8) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y),\ y(0) = \frac{\pi}{2}$;
9) $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1+\sin y}} + y' = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

§ 4. Однородные уравнения первого порядка

<u>Вопросы для подготовки</u>

1) Какие уравнения называются однородными? 2) Как интегрируются однородные дифференциальные уравнения? 3) Как решается задача Коши для таких уравнений?

Необходимый теоретический материал

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 1, §5);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ называется ***однородным*** относительно x и y, если $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения, т.е. при любом λ справедливо тождество $f(\lambda x;\ \lambda y) = f(x;y)$.

Однородные уравнения приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подстановки $\frac{y}{x} = u$ или, что тоже самое, $y = u \cdot x$. Тогда $\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$, а однородное уравнение запишется в виде уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}x = f(1;u) - u \text{ или } \frac{du}{f(1;u)-u} = \frac{dx}{x},$$

интегрируя которое, найдем общее решение данного однородного уравнения. Следует заметить, что $x = 0$ является особым решением.

Если дифференциальное уравнение задано в дифференциальной форме

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0,$$

то оно будет однородным, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – однородные функции одинакового порядка (измерения), т.е. $P(\lambda x;\lambda y) = \lambda^n P(x;y)$ и $Q(\lambda x;\lambda y) = \lambda^n Q(x;y)$.

Переписав уравнение в дифференциальной форме в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x;y)}{Q(x;y)}$$

и применив указанную выше подстановку, найдем общее решение однородного уравнения, записанного в дифференциальной форме.

Образцы решений

Пример 1. *Найти общее решение уравнения* $y^{|} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

Решение.

Введем обозначение: $f(x,y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ и проверим является ли эта функция однородной нулевого измерения:

$$f(\lambda x,\lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \frac{\lambda x}{\lambda y} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = f(x,y), \text{ т.е. } f(\lambda x,\lambda y) = f(x,y).$$

Следовательно, дано однородное уравнение. Для его решения используем подстановку $\frac{y}{x} = u$, из которой найдем y и $y^{|}$ и подставим их в данное уравнение: $y = u \cdot x$ и $y^{|} = u^{|}x + u \Rightarrow u^{|}x + u = u + \frac{1}{u} \Rightarrow u^{|}x = \frac{1}{u}$. Получено уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}\cdot x = \frac{1}{u} \Rightarrow u\cdot du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем общее решение уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{c}{2} \Rightarrow u^2 = 2\ln|x| + c \Rightarrow u = \pm\sqrt{2\ln|x| + c}.$$

Подставляя вместо *u* выражение $\frac{y}{x}$, найдем общее решение данного уравнения:

$$y = \pm x\cdot\sqrt{\ln x^2 + c}\,.$$

Необходимо помнить, что в процессе нахождения общего решения однородного уравнения, производилось деление на *x*. Поэтому *x* = 0 – особое решение.

Пример 2. *Найти решение уравнения* $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0$ *при условии* $y(1)=0$.

Решение.

Проверим является ли данное уравнение однородным:

$P(x,y) = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, тогда

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda y + \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \lambda\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = \lambda P(x,y).$$

Следовательно, $P(x,y)$ – однородная функция первого измерения.

$Q(x,y) = -x$, тогда $Q(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x = \lambda(-x) = \lambda Q(x,y)$, т.е. $Q(x,y)$ – однородная функция первого измерения.

Так как функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют одинаковый порядок однородности, то данное уравнение является однородным. Его можно записать в стандартной форме уравнения, разрешенного относительно y':

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

т.е. в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

и далее проводить решение так же, как и в примере 1. Используем подстановку $\frac{y}{x} = u$, из которой находим *y* и y': $y = u\cdot x$ и $y' = u'x + u$, и подставляем их в преобразованное уравнение:

$$u'x + u = u + \sqrt{1 + u^2} \Rightarrow u'x = \sqrt{1 + u^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее равенство, найдем общее решение данного уравнения:

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2.$$

Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(1)=0$. Подставив значения $x=1$ и $y=0$ в формулу общего решения, найдем значение $c=1$, которое подставим в формулу общего решения.

В результате проведенных преобразований искомое частное решение может быть записано в виде $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$.

Задания для самостоятельной работы

4.1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y^{|}=\frac{x+y}{x-2y}$; 2) $y^{|}=\frac{x-y}{x+y}$; 3) $y^{|}=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$;

4) $ydy+(x-2y)dx=0$; 5) $(x+y)dx+x\,dy=0$;

6) $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$; 7) $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$.

4.2. Найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию:

1) $xy^{|}=y\ln\frac{y}{x}$, $y(1)=1$;

2) $y\,dx+(y-x)dy=0$, $y(-1)=1$;

3) $(y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0$, $y(1)=-2$;

4) $x^2-y^2+2xyy^{|}=0$, $y(1)=1$.

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Вопросы для подготовки

1) Какое дифференциальное уравнение называется линейным уравнением первого порядка? 2) Какое уравнение называется однородным, а какое неоднородным? 3) Методы решения линейного уравнения первого порядка. 4) Метод Лагранжа. 5) Решение линейных уравнений методом Бернулли.

Необходимый теоретический материал

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 1, §7);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если его можно записать в виде

$$y^{|}+p(x)y=g(x), \tag{1}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ – заданные функции, в частности – постоянные.

Если $q(x)=0$ при всех $x\in(a,b)$, то уравнение $y'+p(x)y=0$ называется ***линейным однородным*** дифференциальным уравнением первого порядка.

Можно выделить несколько основных способов решения неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.

Первый способ носит название метода вариации произвольной постоянной **(метод Лагранжа)**. Он основывается на том, что общее решение линейного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=y_0+\tilde{y},$$

где y_0– общее решение линейного однородного уравнения и $\tilde{y}$ – какое-либо частное решение линейного неоднородного уравнения. В этом случае находят общее решение однородного уравнения, которое имеет вид

$$y_0 = c_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Далее варьируют постоянную, т.е. предполагают, что c_1 зависит от x, и находят $c_1 = c_1(x)$ так, чтобы функция

$$y = c_1(x) e^{-\int P(x)dx} \tag{2}$$

удовлетворяла уравнению (1). Подставляя найденное значение $c_1(x)$ в формулу (2), получают общее решение уравнения (1).

Второй способ решения линейного дифференциального уравнения называется **методом Бернулли**. Согласно этому методу, вводят подстановку

$$y = uv, \tag{3}$$

где u и v – неизвестные функции от x, причем одна из них произвольна, а другая определяется на основании уравнения (1). Находим $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в (1), получаем

$$u'v + u(v' + p(x)v) = g(x) \tag{4}$$

Подберём функцию $v = v(x)$ так, чтобы $v' + p(x)v = 0$, тогда из этого уравнения найдем v, а затем из уравнения (4) найдем u, далее подставляя в (3) найдем общее решение уравнения (1).

Образцы решений

Пример. *Найти решение дифференциального уравнения* $y' + xy = x$ *двумя способами (методом Бернулли и методом Лагранжа).*

Решение.

I. Метод Лагранжа.

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y' + xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln|c| \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow y = c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Общее решение ищем в виде $y = c(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ (варьируем постоянную):

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - xc(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Подставим y и y' в данное уравнение:

$$c'(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - xc(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + xc(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x \Rightarrow c'(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x \Rightarrow c'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$c(x) = \int xe^{\frac{x^2}{2}} dx = \begin{bmatrix} t = e^{\frac{x^2}{2}}; \\ dt = xe^{\frac{x^2}{2}} dx \end{bmatrix} = \int dt = t + c = e^{\frac{x^2}{2}} + c \Rightarrow y = \left(e^{\frac{x^2}{2}} + c\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Таким образом, $y = 1 + c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – общее решение данного уравнения.

II. Метод Бернулли.

Пусть $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим y и y' в данное уравнение:

$$u'v + uv' + x \cdot uv = x \;\Rightarrow\; u'v + u\left(v' + xv\right) = x.$$

Ищем v:

$$v' + xv = 0 \;\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -xv \;\Rightarrow \frac{dv}{v} = -xdx \;\Rightarrow \ln|v| = -\frac{x^2}{2} \;\Rightarrow v = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ищем u:

$$u'e^{-\frac{x^2}{2}} = x \;\Rightarrow u' = xe^{\frac{x^2}{2}} \;\Rightarrow$$

$$u = \int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = e^{\frac{x^2}{2}} + c \;\Rightarrow y = u \cdot v \;\Rightarrow y = \left(e^{\frac{x^2}{2}} + c\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Таким образом, $y = 1 + c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – общее решение данного уравнения.

<u>**Задания для самостоятельной работы**</u>

5.1. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения двумя способами:

1) $y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$; 2) $y' + 2y = e^{3x}$; 3) $xy' - 3y + x^2 = 0$;
4) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$; 5) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

5.2. Найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию:

1) $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1, \;\; y(1) = 0$; 2) $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x, \;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
3) $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \;\; y(0) = 0$; 4) $xy' - y = x^2 \cos x, \;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

§ 6. Уравнение Я. Бернулли

<u>**Вопросы для подготовки**</u>

1) Уравнение Бернулли и замена, сводящая это уравнение к линейному. 2) Нахождение решения уравнения методом Бернулли.

<u>**Необходимый теоретический материал**</u>

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 1, §8);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Уравнение первого порядка вида $y' + p(x)y = g(x)y^n$, где $n \in R, n \neq 0, n \neq 1$, называется ***уравнением Бернулли***.

Оно приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-n}$. На практике для решения уравнений Бернулли можно непосредственно применять подстановку $y = u \cdot v$ или метод вариации произвольной постоянной. В дальнейшем мы будем находить общее решение таких уравнений методом Бернулли, т.к. он позволяет быстрее получить общий интеграл (общее решение).

<u>Образцы решений</u>

Пример. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Решение.

Пусть $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим y и y' в данное уравнение:

$$x(u'v + uv') + uv = u^2v^2 \ln x \ \Rightarrow\ xu'v + u(xv' + v) = u^2v^2 \ln x.$$

Ищем v: $xv' + v = 0 \ \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -v \ \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \ \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \ \Rightarrow v = \frac{1}{x}$.

Ищем u:

$$u' = u^2\frac{1}{x^2}\ln x \ \Rightarrow\ \frac{du}{u^2} = \frac{1}{x^2}\ln x\, dx \ \Rightarrow\ -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x}(\ln x + 1 + cx) \ \Rightarrow u = \frac{x}{\ln x + 1 + cx}.$$

Следовательно, $y = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$ – общее решение.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

6.1. Найти общее решение уравнения Бернулли:

1) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$; 2) $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{y^3}{\sin x}$;
3) $y' - y \operatorname{tg} x = -y^2 \cos x$;
4) $y' + y = x\sqrt{y}$; 5) $y' = x^3y^3 - xy$; 6) $y' - \frac{y}{1+x} + y^2 = 0$;
7) $x^2y^2y' + xy^3 = 1$; 8) $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3\right)dy = 0$.

§ 7. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

<u>Вопросы для подготовки</u>

1) Какие уравнения называются уравнениями в полных дифференциалах? 2) Записать необходимые и достаточные условия Эйлера. 3) Как проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах? 4) Что называется интегрирующим множителем? 5) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от *x*. 6) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от *y*.

Необходимый теоретический материал

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 1, §6);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Уравнение

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \qquad (1)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$, т.е.

$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = dU(x;y)$.

В этом случае ДУ (1) можно записать в виде $dU(x;y) = 0$, а его общий интеграл $dU(x;y) = c$.

В приведённой выше литературе подробно изложен и обоснован метод решения уравнения в полных дифференциалах, поэтому здесь мы сформулируем только алгоритм, по которому осуществляется нахождение общего решения.

1). Проверяем является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах, т.е. проверяем справедливость равенства $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Если это равенство выполняется, то дано уравнение в полных дифференциалах; если не выполняется, то данное уравнение не является уравнением в полных интегралах и его надо решать другим методом.

2). Допустим, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Ищем функцию $U(x;y)$ такую, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$. Для этого фиксируем y в первом уравнении и интегрируем его по x, получаем

$$U(x;y) = \int P(x;y)dx + \varphi(y).$$

Для нахождения функции $\varphi(y)$ воспользуемся вторым уравнением.

3). Решение записываем в виде $dU(x;y) = c$.

Если условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ не выполняется, то дифференциальное уравнение (1) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако, это уравнение иногда можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением его на некоторую функцию $t(x;y)$, называемую **интегрирующим множителем**. Чтобы уравнение

$$t(x;y)P(x;y)dx + t(x;y)Q(x;y)dy = 0$$

было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(t(x;y)P(x;y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(t(x;y)Q(x;y)\big).$$

Нахождение интегрирующего множителя $t(x;y)$ в общем случае является достаточно сложной задачей. Её можно упростить, если допустить существование t как функции только одного аргумента x либо только y.

Если $t(x)$, то интегрирующий множитель вычисляется по формуле

$$t(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}.$$

При этом выражение $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ должно зависеть только от x.

Если интегрирующий множитель зависит только от y, то он находится по формуле $t(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy}$, а выражение $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$ должно зависеть только от y.

Образцы решений

Пример 1. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0.$$

Решение.

Проверим, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах. Обозначим через $P(x;y) = 10xy - 8y + 1$, $Q(x;y) = 5x^2 - 8x + 3$ и найдем частные производные этих функций:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 10x - 8, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 10x - 8 \;\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, дано уравнение в полных дифференциалах.

Ищем функцию $U(x;y)$ такую, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y) = 10xy - 8y + 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y) = 5x^2 - 8x + 3.$$

Из первого равенства

$$U(x;y) = \int P(x;y)dx = 5x^2y - 8xy + x + \varphi(y).$$

Дифференцируем это равенство по y и приравниваем к $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 5x^2 - 8x + \varphi^{|}(y) = Q(x;y) \;\Rightarrow\; 5x^2 - 8x + \varphi^{|}(y) = 5x^2 - 8x + 3$$

$$\Rightarrow\; \varphi^{|}(y) = 3 \;\Rightarrow \varphi(y) = 3y + c_1 \;\Rightarrow$$

$$U(x;y) = 5x^2y - 8xy + x + 3y + c_1,$$

а общее решение запишется в виде:

$$5x^2y - 8xy + x + 3y = c\,.$$

Пример 2. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$(y + \ln x)dx - xdy = 0.$$

Решение.

Проверим, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах. Обозначим через $P(x;y) = y + \ln x$, $Q(x;y) = -x$ и найдем частные производные этих функций:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \ \Rightarrow \ \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x},$$

следовательно, данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Найдем

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = -\frac{2}{x} \Rightarrow t(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

На интегрирующий множитель $t(x)$ умножим обе части данного уравнения, получим уравнение

$$\frac{y + \ln x}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0,$$

которое является уравнением в полных дифференциалах.

Ищем функцию $U(x;y)$ такую, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y + \ln x}{x^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x}.$$

Находим U из второго уравнения так, как это делалось в примере 1:

$$U(x;y) = -\int \frac{dy}{x} = -\frac{y}{x} + \varphi(x) \ \Rightarrow \ \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + \varphi^{|}(x) \ \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x^2} + \varphi^{|}(x) = \frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} \ \Rightarrow \ \varphi^{|}(x) = x^{-2}\ln x.$$

$$\varphi(x) = \int x^{-2}\ln x \ dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = x^{-2}dx, \\ du = \frac{dx}{x}, & v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x + \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$U(x;y) = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c_1 \ \Rightarrow \ -\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} = -c \ \Rightarrow$$

$y = cx - \ln x - 1$ – общее решение данного уравнения.

<u>**Задания для самостоятельной работы**</u>

7.1. Найти общее решение уравнения в полных дифференциалах:

1) $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$;
2) $(y-3x^2)dx-(4y-x)dy=0$;
3) $x(2x^2+y^2)dx+y(x^2+2y^2)dy=0$;
4) $(12x+5y-9)dx+(5x-2y-3)dy=0$;
5) $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$;
6) $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$;
7) $\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$;
8) $(\arcsin x+2xy)dx+(x^2+1+\operatorname{arctg} y)dy=0$.

7.2. Найти частное решение уравнения в полных дифференциалах, удовлетворяющее начальному условию:
1) $2x\cdot\cos^2 y dx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0,\ \ y(1)=0$;
2) $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0,\ y(0)=1$;
3) $(\ln y-5y^2\sin 5x)dx+\left(\frac{x}{y}+2y\cos 5x\right)dy=0,\ y(0)=e$.

7.3. Привести уравнение к уравнению в полных дифференциалах и найти его решение:
1) $(x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0$;
2) $(xy-x^2)y'+y^2-3xy-2x^2=0$;
3) $ydx-(x+y^2)dy=0$;
4) $(3x^2\cos y-\sin y)\cos y\,dx-xdy=0$;
5) $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$;
6) $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin 2y\,dy=0$;
7) $(y+xy^2)dx-xdy=0$;

§ 8. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Вопросы для подготовки

1) Дать определение дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. 2) Как проинтегрировать уравнение, если в него входит только производная от неизвестной функции? 3) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит искомая функция? 4) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит независимая переменная? 6) Метод интегрирования уравнения Лагранжа. 4) Метод интегрирования уравнения Клеро. 5) Общий метод интегрирования дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

Необходимый теоретический материал

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 1, §9);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет следующий общий вид $F(x,y,y^{|})=0$. Решение таких уравнений может быть задано в явном виде $y=y(x)$, в неявном виде $\Phi(x,y)=0$ и в параметрической форме $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$

Так же, как и для уравнения, разрешенного относительно производной, для уравнения $F(x,y,y^{|})=0$ формулируется задача Коши (начальная задача). При этом говорят, что имеет место **единственность решения задачи Коши**, если функция $F(x,y,y^{|})$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности начальной точки $\left(x_0,y_0,y_0^{|}\right)$, $y(x_0)=y_0$ и $y^{|}(x_0)=y_0^{|}$ и производная $\frac{\partial F}{\partial y^{|}}$ была отлична от нуля в этой точке.

Решение уравнения $F(x,y,y^{|})=0$ называется ***частным,*** если в каждой точке его сохраняется единственность решения задачи Коши.

Если в каждой точке решения нарушается единственность решения задачи Коши, то оно называется ***особым***.

Если левая часть уравнения $F(x,y,y^{|})=0$ непрерывна по совокупности переменных *x, y,* $y^{|}$ и имеет частную производную по $y^{|}$, то кривую, подозрительную на особое решение, можно найти исключением $y^{|}$ из системы

$$\begin{cases} F(x,y,y^{|})=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y^{|}}=0. \end{cases}$$

Эта кривая называется ***дискриминантной кривой уравнения*** $F(x,y,y^{|})=0$. Чтобы она была особым решением, нужно, чтобы она была решением уравнения $F(x,y,y^{|})=0$ и в каждой точке ее нарушалась единственность решения задачи Коши. Кривые, подозрительные на особое решение, можно обнаружить также в процессе интегрирования данного дифференциального уравнения.

В дальнейшем рассмотрим следующие уравнения указанного типа.

I. Уравнения первого порядка *n-й* степени

$$A_0(x;y)\cdot\left(y^{|}\right)^n+A_1(x;y)\cdot\left(y^{|}\right)^{n-1}+\cdots+A_{n-1}(x;y)\cdot y^{|}+A_n(x;y)=0, \quad (1)$$

в котором левая часть есть многочлен *n-й* степени относительно $y^{|}$.

Предположим, что решая его относительно $y^{|}$ мы получаем *m* $(m\le n)$ вещественных решений

$$y^{|}=f_k(x;y),\ k=1,2,\dots,m \quad (2)$$

Если для каждого из полученных уравнений (2) удается найти общий интеграл

$$\psi_k(x;y)=c,\ \ k=1,2,\dots,m,$$

то совокупность последних называют **общим интегралом** уравнения (1). Его обычно записывают в виде одного соотношения

$$(\psi_1(x;\ y)-c)\cdot(\psi_2(x;\ y)-c)\cdot\ldots\cdot(\psi_m(x;\ y)-c)=0,$$

в котором левая часть есть многочлен степени m относительно произвольной постоянной c.

Если уравнения (2) имеют особые решения, то каждое из этих решений будет особым решением уравнения (1).

Частным случаем уравнения (1) являются уравнения, квадратные относительно $y^{|}$:

$$\left(y^{|}\right)^2+2P(x;y)y^{|}+Q(x;y)=0.$$

Для получения общего решения сначала находят $y^{|}$:

$$y^{|}=-P(x;y)\pm\sqrt{P^2(x;y)-Q(x;y)},$$

который впоследствии интегрируют.

Особым решением может быть только дискриминантная кривая $P^2(x;y)-Q(x;y)=0$, получающаяся исключением $y^{|}$ из системы

$$\begin{cases}\left(y^{|}\right)^2+2P(x;y)y^{|}+Q(x;y)=0,\\ \qquad 2y^{|}+2P(x;y)=0.\end{cases}$$

II. Неполные уравнения

1. ***Уравнение, содержащее только y***$^{|}$**:** $F\left(y^{|}\right)=0.$

Оно имеет общий интеграл

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0.$$

2. ***Уравнение, не содержащее искомой функции***

Это уравнение вида

$$F\left(x;\ y^{|}\right)=0 \qquad (3)$$

Возможны два случая.

1). Уравнение (3) разрешимо относительно $y^{|}$. Пусть оно определяет m значений $y^{|}$: $\quad y^{|}=f_k(x),\ k=1,2,\ldots,m.$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$y=\int f_k(x)dx+c, \qquad k=1,2,\ldots,m.$$

2). Уравнение (3) неразрешимо (в элементарных функциях) относительно y', но допускает параметрическое представление

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y^{|}=\psi(t).\end{cases} \qquad (4)$$

В этом случае удается найти общее решение в параметрической форме. Для этого используют основное соотношение $dy=y^{|}dx$. Заменим справа $y^{|}$ и dx их значениями из (4):

$$dy=\psi(t)\varphi^{|}(t)dt.$$

Проинтегрировав, найдем

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c.$$

Присоединяя сюда $x = \varphi(t)$, получаем общее решение уравнения (3) в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c. \end{cases}$$

Если существует такое конечное число a, при котором $\lim\limits_{y' \to \pm\infty} F(a;\, y') = 0,$

то $x=a$ есть решение уравнения (3). Это решение может оказаться особым.

3. ***Уравнение, не содержащее независимой переменной***

Это уравнение вида

$$F(y;\, y') = 0 \qquad (5)$$

Здесь также имеют место два случая.

1). Уравнение (5) разрешимо относительно y': $y' = f_k(y),\ k = 1,2,\dots,m.$ Тогда

$$\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + c, \qquad k = 1,2,\dots,m.$$

2). Уравнение (5) допускает параметрическое представление

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases}$$

Тогда

$$dy = y'dx \Rightarrow \varphi'(t)dt = \psi(t)dx \Rightarrow dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}.$$

Поэтому

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c,$$

а общее решение запишется в виде

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

Уравнение (5) может иметь особые решения вида $y = b$, где b определяется из уравнения $F(b, 0) = 0.$

III. Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнением Лагранжа называется уравнение вида

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'), \qquad \varphi(y') \neq y',$$

в котором y является линейной функцией от x с коэффициентами, зависящими от y'. Построение его общего решения в параметрической форме сводится к интегрированию некоторого линейного уравнения.

Положим $y' = p$, где p – параметр, тогда

$$y = \varphi(p)x + \psi(p). \qquad (6)$$

Заменим в равенстве $dy = y'dx$ величину dy её значениями из (6), а вместо y' подставим p, получим

$$\varphi(p)dx + \left(\varphi'(p)x + \psi'(p)\right)dp = pdx \text{ или}$$

$$(\varphi(p) - p)dx + \left(\varphi'(p)x + \psi'(p)\right)dp = 0.$$

Это уравнение можно привести к линейному уравнению с искомой функцией x, если разделить обе его части на $(\varphi(p) - p)dp \neq 0$.

Особыми решениями уравнения Лагранжа могут оказаться только те прямые линии, для которых $\varphi(p) - p = 0$.

Уравнение вида

$$y = xy' + \psi(y'), \qquad \psi(y') \neq ay' + b$$

называется ***уравнением Клеро***. Оно отличается от уравнения Лагранжа только тем, что коэффициент при x равен y'. Применяя тот же метод, что и для уравнения Лагранжа, полагаем $y' = p$. Тогда уравнение Клеро примет вид

$$y = xp + \psi(p).$$

Далее имеем

$$dy = y'dx \Rightarrow pdx + \left(x + \psi'(p)\right)dp = pdx \Rightarrow \left(x + \psi'(p)\right)dp = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$dp = 0 \text{ и } x + \psi'(p) = 0.$$

Из $dp = 0$ следует, что $p = c$. Подставляя это значение в выражение для y, получим

$$y = xc + \psi(c).$$

Это семейство прямых линий есть общее решение уравнения Клеро. Оно получается из уравнения заменой y' на c.

Уравнение $x + \psi'(p) = 0$ вместе с уравнением $y = xp + \psi(p)$ образуют решение уравнения Клеро в параметрической форме, которое обычно является особым.

<u>Образцы решений</u>

Пример 1. *Проинтегрировать уравнение* $(y')^3 - x(y')^2 - 4yy' + 4xy = 0$. *Выделить интегральные кривые, проходящие через точку* M (0; 1).

Решение.

Разрешим данное уравнение относительно y'. Для этого сгруппируем первое и второе слагаемые, третье и четвертое и вынесем общие множители за скобки:

$$(y')^2(y'-x)-4y(y'-x)=0 \Rightarrow (y'-x)\cdot((y')^2-4y)=0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равняется нулю. Поэтому в процессе решения приходим к необходимости решения двух уравнений:

1) $y'-x=0 \Rightarrow y'=x \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}+c$;
2) $(y')^2-4y=0 \Rightarrow y'=\pm 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{\pm 2\sqrt{y}}=dx \Rightarrow$ $\pm\sqrt{y}=x+c \Rightarrow y=(x+c)^2$.

Из 1) и 2) следует, что общее решение данного уравнения имеет вид:

$$\left(y-\frac{x^2}{2}-c\right)\cdot(y-(x+c)^2)=0.$$

Решим поставленную начальную задачу. Подставим начальные данные в первое семейство интегральных кривых, получим: $c=1 \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}+1$.

Подставим начальные данные в первое семейство интегральных кривых, получим:

$$c=\pm 1 \Rightarrow y=(x\pm 1)^2.$$

Таким образом, через точку M (0; 1) проходят три интегральные кривые $y=\frac{x^2}{2}+1$ и $y=(x\pm 1)^2$.

Пример 2. *Найти решение неполного уравнения* $x=ay'+b(y')^2$.

Решение.

Обозначим $y'=t$, тогда $x=at+bt^2$. Выразим через t переменную y, используя равенство $dy=y'dx$:

$$dy=t(a+2bt)dt \Rightarrow y=\int(at+2bt^2)dt=\frac{at^2}{2}+\frac{2bt^3}{3}+c\,.$$

Следовательно, общее решение имеет вид $\begin{cases} x=at+bt^2, \\ y=\frac{at^2}{2}+\frac{2bt^3}{3}+c. \end{cases}$

Пример 3. *Найти решение уравнения Лагранжа* $2yy'=x((y')^2+4)$.

Решение.

Преобразуем данное уравнение к виду

$$y=\left(\frac{(y')^2+4}{2y'}\right)x.$$

Положим $y'=t$, тогда $y=\frac{x(t^2+4)}{2t}$. Найдем дифференциал этого выражения:

$$dy=\frac{t^2+4}{2t}dx+x\cdot\frac{2t\cdot 2t-(t^2+4)\cdot 2}{4t^2}dt=\frac{t^2+4}{2t}dx+x\cdot\frac{2t^2-8}{4t^2}dt=$$

$$=\frac{t^2+4}{2t}dx+x\cdot\frac{t^2-4}{2t^2}dt.$$

Но $dy=y^{|}dx$ или $dy=tdx$, следовательно,

$$\frac{t^2+4}{2t}dx+x\cdot\frac{t^2-4}{2t^2}dt=tdx\;\Rightarrow\;\left(\frac{t^2+4}{2t}-t\right)dx+\frac{x(t^2-4)}{2t^2}dt=0$$

$$\Rightarrow\frac{4-t^2}{2t}dx+\frac{x(t^2-4)}{2t^2}dt=0.$$

Разделив обе части последнего равенства на выражение $x\cdot\frac{4-t^2}{2t}\neq 0$, получим следующее уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{x}-\frac{dt}{t}=0\;\Rightarrow\;\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}\;\Rightarrow \ln|x|=\ln|t|+\ln|c|\;\Rightarrow x=c\cdot t,$$

$$\text{тогда } y=\frac{c\cdot(t^2+4)}{2}.$$

Общее решение данного уравнения запишется в виде

$$\begin{cases} x=c\cdot t,\\ y=\dfrac{c\cdot(t^2+4)}{2}\end{cases}.$$

Пример 4. *Найти решение уравнения Клеро* $y=xy^{|}-y^{|^2}$.

Решение.

Чтобы найти общее решение уравнения Клеро надо в заданном уравнении заменить $y^{|}$ на c, т.е. функция $y=cx-c^2$ – общее решение данного уравнения.

Для отыскания особого решения найдем огибающую семейства интегральных кривых. Для этого используем систему

$$\begin{cases} y=cx-c^2,\\ 0=x-2c\end{cases}\Rightarrow\;\begin{cases} x=2c,\\ y=c^2.\end{cases}$$

Исключая параметр c получим $y=\frac{x^2}{4}$ – особое решение.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

8.1. Проинтегрировать уравнение и, где указано, выделить интегральные кривые, проходящие через заданную точку $M(x_0;\,y_0)$:

1) $yy^{|^2}-(xy+1)y^{|}+x=0;\;\; M(1;\,1);$ 2) $y^{|^2}-4y=0;\;\; M(1;1);$

3) $yy^{|}+y^{|^2}=x^2+xy;$ 4) $x^2y^{|^2}+3xyy^{|}+2y^2=0;$

5) $y^{|^3}-4yy^{|}-y^{|^2}+4y=0;$ 6) $y^{|^3}-3y^{|}+x=0.$

8.2. Решить неполные уравнения:

1) $x = y'^3 + 1;$ 2) $xy'^3 = 1 + y';$ 3) $y = \frac{y'^2}{2} + \ln y';$

4) $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = a;$ 5) $x = y' \ln y';$ 6) $y = y'^2 + 2y'^3.$

8.3. Найти решения уравнений Лагранжа и Клеро:

1) $y = -xy' + y'^2;$ 2) $y = x(1 + y') + y'^2;$

3) $y = \frac{1}{2}xy' + \left(\frac{y'}{x}\right)^2;$ 4) $2y(y' + 2) = xy'^2;$

5) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2};$ 6) $y = xy' - y'^2;$

7) $y = x\left(\frac{1}{x} + y'\right) + y';$ 8) $y = xy' + y' - y'^2.$

ТЕМА 2.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Вопросы для подготовки
1) Виды уравнений, которые допускают понижение порядка. 2) Методы решения этих уравнений.

Необходимый теоретический материал
- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 2, §1);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Одним из методов интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков является метод понижения порядка. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже. Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

I. Если дано уравнение $y^{(n)} = f(x)$, то проинтегрировав его последовательно *n* раз, найдем общее решение уравнения.

II. Если задано уравнение вида $F\left(x;\ y^{(k)};\ y^{(k+1)};\dots;\ y^{(n)}\right) = 0$, которое не содержит явно искомой функции, то его порядок можно понизить на *k* единиц, положив $y^{(k)} = p(x)$, тогда $y^{(k+1)} = p^{|}, \dots, y^{(n)} = p^{(n-k)}$ и данное уравнение примет вид $F\left(x; p;\ p^{|};\dots;\ p^{(n-k)}\right) = 0$.

III. При решении уравнения $F(y;\ y^{|};\ y^{||};\dots;\ y^{(n)}) = 0$, которое не содержит явно независимой переменной *x*, порядок можно понизить на единицу, положив $y^{|} = p(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $y^{||} = p \cdot \frac{dp}{dy}$.

Образцы решений

Пример 1. *Проинтегрировать уравнение* $y^{(4)} = \sin 2x$.

Решение.

Последовательно интегрируя 4 раза данное уравнение, получим:

$$y^{(3)} = \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1;$$

$$y^{||} = \int (-\frac{1}{2}\cos 2x + c_1)\, dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2;$$

$$y^{|} = \int \left(-\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2\right) dx = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3\right)dx = \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Пример 2. *Проинтегрировать уравнение* $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

Решение.

Полагаем $y' = p$, где $p = p(x)$; $y'' = p'$. Тогда уравнение перепишется в виде

$$p' - \frac{p}{x} = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1| \Rightarrow p = c_1 x.$$

Подставляя вместо p его выражение через y, получаем уравнение $y' = c_1 x$, из которого находим y непосредственным интегрированием:

$$y = \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 \text{ – общее решение.}$$

Пример 3. *Найти частное решение уравнения* $y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0$, *удовлетворяющее начальным условиям* $y(0) = 2, y'(0) = 2$.

Решение.

Положив $y' = p$, где $p = p(y)$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$, получаем

$$p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 + p(y-1) = 0.$$

Так как $p \neq 0$ (иначе $y' = 0$, что противоречит условию $y'(0) = 2$), то сокращая на p, приходим к уравнению

$$\frac{dp}{dy} - p + y - 1 = 0,$$

которое является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Будем решать его методом Бернулли: полагаем $p = u \cdot v$, тогда $p' = u'v + uv'$, тогда уравнение запишется в виде

$$u'v + u(v' - v) = 1 - y.$$

Ищем v: $v' - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dy} = v \Rightarrow \frac{dv}{v} = dy \Rightarrow v = e^y$.

Ищем u:

$$u'e^y = 1 - y \Rightarrow u' = (1-y)e^{-y} \Rightarrow u = \int (1-y)e^{-y}dy =$$

$$\begin{bmatrix} u = 1 - y, & dv = e^{-y}dy, \\ du = -dy, & v = -e^{-y} \end{bmatrix} - (1-y)e^{-y} - \int e^{-y}dy = (y-1)e^{-y} + e^{-y} + c_1$$

$$\Rightarrow p = \left((y-1)e^{-y} + e^{-y} + c_1\right)e^{y} = y + c_1e^{y} \;\Rightarrow\; y^{|} = y + c_1e^{y}.$$

Подставляя в последнюю формулу начальные данные, найдем, что $c_1 = 0$.
Тогда

$$y^{|} = y \;\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = dx \;\Rightarrow y = c_2e^{x}.$$

Находим c_2 из начальных условий: $y = c_2e^{0} \;\Rightarrow\; c_2 = 2$.

Таким образом, $y = 2e^{x}$ – искомое частное решение.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1.1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y^{(3)} = e^{2x}$; 2) $y^{||} = x\cos x$; 3) $y^{(3)} = 60x^2$;
4) $y^{(3)} = x + \cos x$; 5) $y^{(4)} = 16\sin 2x$; 6) $x(y^{||} + 1) + y^{|} = 0$;
7) $xy^{||} = y^{|}\ln\frac{y^{|}}{x}$; 8) $xy^{||} - y^{|} = e^{x}x^2$; 9) $xy^{(3)} - y^{||} = 0$;
10) $y^{||} = \frac{y^{|}}{\sqrt{y}}$; 11) $yy^{||} + y^{|^2} = 1\ (y > 0)$.

1.2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

1) $y^{(4)} = cos^2x$; $y(0) = \frac{1}{32}$; $y^{|}(0) = 0$; $y^{||}(0) = \frac{1}{8}$; $y^{(3)}(0) = 0$;
2) $y^{(3)} = x\cdot\sin x$; $y(0) = 0$; $y^{|}(0) = 0$; $y^{||}(0) = 2$;
3) $2y(y^{|})^3 + y^{||} = 0$; $y(0) = 0$; $y^{|}(0) = -3$;
4) $y\cdot y^{||} - (y^{|})^2 + (y^{|})^3 = 0$; $y(0) = -1$; $y^{|}(0) = 0$.

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

<u>Вопросы для подготовки</u>

1) Основные понятия теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Определитель Вронского. 2) Общий вид решения ДУ, если корни характеристического уравнения действительные и различные. 3) Общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и кратные. 4) Общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения комплексные. 5) Общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения кратные комплексные. 6) Общий вид решения неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

<u>Необходимый теоретический материал</u>
- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 2, §2-3);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец.: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\,. \tag{1}$$

Дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

с той же левой частью, что и в уравнении (1), называется ***однородным линейным ДУ второго порядка***, соответствующим данному неоднородному уравнению (1).

Структура общего решения уравнений (1) и (2) существенно зависит от условия линейной независимости частных решений уравнения (2) $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$. По определению функции y_1 и y_2 называются линейно независимыми на интервале $(a; b)$, если существуют такие постоянные α_1 и α_2, что тождество $\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

На практике, чтобы установить линейную независимость функций, достаточно составить частное $\frac{y_1}{y_2}$. Если $\frac{y_1}{y_2} \neq const$, то функции y_1 и y_2 линейно независимы.

Определитель вида

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

называется ***определителем Вронского*** (вронскианом) для функций y_1 и y_2.

Существует связь между линейной независимость функций y_1 и y_2 и значением определителя Вронского на интервале $(a; b)$: если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ два линейно независимых решения уравнения (2), то определитель Вронского $W(x) \neq 0$ на $(a; b)$.

Структура общего решения уравнения (2) определяется теоремой: если y_1 и y_2 – два каких-либо частных линейно независимых на $(a; b)$ решений уравнения (2), то выражение

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные, является общим решением уравнения (2).

Частные решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ в общем случае можно найти методом вариации постоянных, а в частном случае, когда коэффициенты $p(x) = p = const$ и $q(x) = q = const$, исходя из корней характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0:$$

1) если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня k_1 и k_2, то общее решение имеет вид $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$;
2) если характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня $k_1 = k_2$, то общее решение имеет вид $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$;
3) если характеристическое уравнение имеет два сопряженных комплексных корня $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$, где $\beta \neq 0$, то общее решение имеет вид $y = e^{\alpha x}(c_1 \cdot \cos\beta x + c_2 \cdot \sin\beta x)$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (1) представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения (1) и общего решения однородного уравнения (2), соответствующего данному неоднородному уравнению, т.е. в виде $y = \tilde{y} + \bar{y}$, где $\tilde{y}$ – общее решение однородного уравнения (2), $\bar{y}$ – частное решение уравнения (1).

В случае постоянных коэффициентов уравнения (1) частное решение можно найти в зависимости от вида правой части (1). Приведем методы нахождения частного решения для наиболее часто встречающихся вариантов функций, стоящих в правой части (1).

I. Пусть в правой части уравнения (1) стоит многочлен степени *n*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

В этом случае частное решение уравнения (1) можно искать в виде многочлена, подобрав соответствующим образом его степень и коэффициенты.

Пусть $q \neq 0$. В этом случае частное решение ищут в виде

$$\bar{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n, \tag{3}$$

где $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ – искомые коэффициенты. Далее производные первого и второго порядка от функции $\bar{y}$ и значение самой функции $\bar{y}$ подставляем в уравнение (1). Для того чтобы (3) было решением (1) нужно, чтобы коэффициенты в левой части (1) совпали с коэффициентами многочлена (3). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим систему уравнений, из которой найдем коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Если $q = 0,\ p \neq 0$, то в левой части (1) отсутствует член с *y*, поэтому частное решение надо искать в виде многочлена степени на 1 выше, чем у многочлена (3), т.е. в виде

$$\bar{y} = x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n).$$

В этом случае также возможно понижение порядка уравнения с помощью подстановки $y^{|} = p(x)$.

Если $q = 0,\ p = 0$, то в левой части уравнения (1) отсутствуют члены с *y* и $y^{|}$, поэтому решение можно искать в виде

$$\bar{y} = x^2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n),$$

или использовать метод непосредственного интегрирования, что быстрее приведет к получению искомого решения.

II. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n. В этом случае вид частного решения уравнения (1) зависит от кратности корней характеристического уравнения для однородного уравнения, соответствующего ДУ (1).

Если α не является корнем характеристического уравнения, то

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n).$$

Если α – корень первой кратности характеристического уравнения, то

$$\bar{y} = e^{\alpha x} x (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n).$$

Если α – корень второй кратности характеристического уравнения, то

$$\bar{y} = e^{\alpha x} x^2 (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n).$$

III. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $Q_m(x)$ – многочлен степени m. Если числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то $\bar{y} = e^{\alpha x}(L_p(x)\cos\beta x + S_p(x)\sin\beta x)$. Если же числа числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид $\bar{y} = e^{\alpha x} x (L_p(x)\cos\beta x + S_p(x)\sin\beta x)$. Здесь $L_p(x)$ и $S_p(x)$ – многочлены степени $p = \max\{n; m\}$.

<u>Образцы решений</u>

Пример 1. *Исходя из определения, исследовать систему функций* $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = e^{\frac{1}{x}}$ *на линейную зависимость.*

Решение.

I способ. Составим равенство $\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 = \alpha_1 \cdot \frac{1}{x} + \alpha_2 \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$. Оно выполняется лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, следовательно, данная система функций линейно независимая.

II способ. Составим отношение

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \neq const,$$

поэтому заданная система функций линейно независимая.

Пример 2. *Найти определитель Вронского решений уравнения*

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1;\ k_2 = 4.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то частные решения данного уравнения имеют вид

$$y_1 = e^x;\ y_2 = e^{4x}.$$

Найдем определитель Вронского системы функций $\{y_1 = e^x;\ y_2 = e^{4x}\}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{4x} \\ e^x & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{5x} - e^{5x} = 3e^{5x}.$$

Пример 3. *Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:*

$$y'' - 6y' + 9y = 0;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow (k-3)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 3.$$

Корни характеристического уравнения действительные равные, поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} = e^{3x}(c_1 + c_2x).$$

Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$

Для этого сначала найдем производную y' из формулы общего решения:

$$y' = e^{3x}(3c_1 + c_2 + 3c_2x).$$

Из условия $y(0) = 1$ и формулы общего решения находим $c_1 = 1$.

Из условия $y'(0) = 0$ и формулы производной y' находим значение c_2: $c_2 = -3$.

Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = e^{3x}(1 - 3x)$.

Пример 4. *Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения*

$$y'' - 6y' + 8y = e^{2x}.$$

Решение.

В соответствии с теорией общее решение неоднородного уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения данного уравнения. Поэтому сначала найдем общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 8y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$k^2 - 6k + 8 = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 4.$$

Корни действительные и различные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = c_1e^{2x} + c_2e^{4x}.$$

Частное решение данного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами находится в зависимости от вида правой части и кратности корней характеристического уравнения. В нашем случае в правой части уравнения стоит произведение многочлена нулевой степени на показательную функцию $e^{\alpha x}$ при $\alpha = 2$. $\alpha = 2$ – корень первой кратности и поэтому частное решение надо искать в виде

$$\bar{y} = e^{2x} \cdot x \cdot b_0.$$

Находим $\bar{y}^{|}$ и $\bar{y}^{||}$:

$$\bar{y}^{|} = 2e^{2x} \cdot x \cdot b_0 + e^{2x} \cdot b_0; \quad \bar{y}^{||} = 4e^{2x} \cdot x \cdot b_0 + 4e^{2x} \cdot b_0.$$

Подставляем $\bar{y}^{|}$ и $\bar{y}^{||}$ в данное уравнение и находим значение b_0:

$$4e^{2x} \cdot x \cdot b_0 + 4e^{2x} \cdot b_0 - 12e^{2x} \cdot x \cdot b_0 - 6e^{2x} \cdot b_0 + 8e^{2x} \cdot x \cdot b_0 = e^{2x} \Rightarrow$$

$$-2b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = -0{,}5 \Rightarrow \bar{y} = -0{,}5xe^{2x}.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = \tilde{y} + \bar{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} - 0{,}5xe^{2x}.$$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

2.1. Исходя из определения, исследовать систему функций на линейную зависимость:

1) $\left\{y_1 = x;\ y_2 = \frac{1}{x}\right\}$; 2) $\{y_1 = x + 2;\ y_2 = 2x - 1\}$;
3) $\{y_1 = e^x;\ y_2 = e^{x+1}\}$; 4) $\{y_1 = e^{-x};\ y_2 = xe^{-x}\}$;
5) $\{y_1 = x;\ y_2 = \ln x\}$; 6) $\{y_1 = e^{2x};\ y_2 = xe^{2x}\}$;
7) $\{y_1 = \cos^2 x - 1;\ y_2 = \sin^2 x\}$; 8) $\{y_1 = e^{2x}\sin 3x;\ y_2 = e^{2x}\cos 3x\}$.

2.2. Найти определитель Вронского решений уравнения:

1) $y^{||} - 6y^{|} + 9y = 0$; 2) $4y^{||} - 8y^{|} + 3y = 0$;
3) $y^{||} - 7y^{|} - 8y = 0$;
4) $y^{||} + y = 0$; 5) $y^{||} + 6y^{|} - 7y = 0$;
6) $4y^{||} + 4y^{|} + y = 0$.

2.3. Найти общее решение уравнения:

1) $y^{||} - y^{|} - y = 0$; 2) $y^{||} + 6y^{|} + 13y = 0$; 3) $y^{||} + 3y^{|} = 0$;
4) $3y^{||} + 2y^{|} - 8y = 0$; 5) $4y^{||} - 4y^{|} + y = 0$;
6) $y^{||} - 3y^{|} + 2y = 0$;
7) $y^{||} - 4y^{|} + 13y = 0$; 8) $y^{||} + 16y = 0$; 9) $y^{||} - 16y^{|} = 0$.

2.4. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1) $9y^{||} - 6y^{|} + y = 0;\ y(0) = 3;\ y^{|}(0) = 0$;
2) $y^{||} + 4y^{|} = 0;\ y(0) = 7;\ y^{|}(0) = 8$;
3) $y^{||} - 5y^{|} + 4y = 0;\ y(0) = 1;\ y^{|}(0) = 1$;
4) $y^{||} + 4y = 0;\ y(0) = 0;\ y^{|}(0) = 2$.

2.5. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

1) $y^{||} - 4y^{|} + 3y = x^3$; 2) $y^{||} + 5y^{|} - 6y = 6x^3 - x^2$;
3) $y^{||} - 2y^{|} = x^2 - x$; 4) $y^{||} - 6y^{|} + 9y = 54x+18$;
5) $y^{||} + 9y = e^x x^2$; 6) $y^{||} - 4y^{|} + 5y = 2x^2 e^x$;

7) $y^{II} - 8y^{I} + 16y = e^{4x}$; 8) $y^{II} - 4y^{I} = x \cdot \sin 2x$;
9) $y^{II} - 2y^{I} + 10y = 37 \cos 3x$; 10) $y^{II} - 3y^{I} - 10y = \sin x + 3 \cos x$;
11) $y^{II} + y^{I} - 2y = \cos x - 3 \sin x$.

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Вопросы для подготовки

1) Основные понятия теории линейных ДУ. 2) Общий вид решения однородного и неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами.

Необходимый теоретический материал

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 2, §2-3);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – постоянные, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка***.

Для уравнения (1) справедлива теорема, аналогичная соответствующей теореме для случая уравнения второго порядка: если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются линейно независимыми решениями уравнения (1), то его общее решение имеет вид $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные.

Если коэффициенты уравнения (1) постоянны, то общее решение находится так же, как и в случае уравнения второго порядка.

1). Составляем характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n = 0$.

2). Находим корни характеристического уравнения: $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

3). По характеру корней выписываем частные линейно независимые решения, руководствуясь тем, что

a) каждому действительному однократному корню *k* соответствует частное решение e^{kx};

b) каждой паре комплексных сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ соответствуют два частных решения $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$;

c) каждому действительному корню *k* кратности *r* соответствует *r* линейно независимых частных решений $e^{kx}, xe^{kx}, \ldots, x^{r-1}e^{kx}$;

d) каждой паре комплексных сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ кратности μ соответствуют 2μ частных решений

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} x \cos \beta x, \ldots, e^{\alpha x} x^{\mu-1} \cos \beta x,$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x,\ e^{\alpha x} x \sin \beta x, \ldots, e^{\alpha x} x^{\mu-1} \sin \beta x;$$

Этих частных решений будет столько, какова степень характеристического уравнения. Можно доказать, что эти решения линейно независимы.

4). Найдя n линейно независимых частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$, строим общее решение данного линейного уравнения $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$, где $c_1, c_2, \dots, c_n$ – произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x). \qquad (2)$$

Пусть известно общее решение $\tilde{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ соответствующего однородного уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$.

Как и в случае уравнения второго порядка, для уравнения (2) справедливо утверждение: если $\tilde{y}$ – общее решение однородного уравнения (1), а $\bar{y}$ – частное решение неоднородного уравнения (2), то $y = \tilde{y} + \bar{y}$ есть общее решение неоднородного уравнения (2).

В случае неоднородного уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами частные решения иногда находят в зависимости от вида функции $f(x)$.

I. Пусть в правой части дифференциального уравнения (2) стоит функция $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, где $P(x)$ – многочлен от x. Возможны два случая:

a) если α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно искать в виде $\bar{y} = Q(x) e^{\alpha x}$, где $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами;

b) если α является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно искать в виде $\bar{y} = x^{\mu} Q(x) e^{\alpha x}$, где $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$.

II. Пусть правая часть уравнения (2) имеет вид $f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x$, где M и N – постоянные числа. Тогда вид частного решения определяется следующим образом:

a) если число βi не является корнем характеристического уравнения, то частное решение имеет вид $\bar{y} = A \cos \beta x + B \sin \beta x$, где A и B – постоянные неопределенные коэффициенты;

b) если число βi является корнем кратности μ характеристического уравнения, то $\bar{y} = x^{\mu}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$.

III. Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены от x. Тогда:

a) если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $\bar{y} = e^{\alpha x}(U(x) \cos \beta x + V(x) \sin \beta x)$, где $U(x)$ и $V(x)$ – многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

b) если число $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности μ, то частное решение ищем в виде

$\bar{y} = x^{\mu} e^{\alpha x}(U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x)$, где $U(x)$ и $V(x)$ имеют тот же смысл, что и в *а*).

<u>Образцы решений</u>

Пример 1. *Найти общее решение уравнения* $y^{(4)} - y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$. Найдем его корни (корней должно быть столько какова степень алгебраического уравнения, т.е. четыре):

$$k^4 - 1 = (k^2 - 1)\cdot(k^2 + 1) = (k - 1)\cdot(k + 1)\cdot(k^2 + 1),$$

$$(k - 1)\cdot(k + 1)\cdot(k^2 + 1) = 0 \iff k_1 = 1;\ k_2 = -1;\ k_3 = i;\ k_4 = -i.$$

Записываем частные решения: $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{-x}$; $y_3 = \cos x$; $y_4 = \sin x$.

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x\,.$$

Пример 2. *Найти общее решение уравнения* $y^{(4)} - y = x^3 + 1$.

Решение.

Общее решение соответствующего однородного уравнения $y^{(4)} - y = 0$ имеет вид

$$\tilde{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x\,.$$

Правая часть данного уравнения имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, где $P(x)$ – многочлен от x. $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде многочлена третьей степени

$$\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Для определения коэффициентов находим производные и подставляем их и само частное решение в заданное уравнение:

$$\bar{y}^{|} = 3Ax^2 + 2Bx + C;\quad \bar{y}^{||} = 6Ax + 2B;\ \bar{y}^{(3)} = 6A;\quad \bar{y}^{(4)} = 0\ \Rightarrow$$

$$-Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = x^3 + 1\ \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = -1. \end{cases} \Rightarrow\ \bar{y} = -x^3 - 1.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \tilde{y} + \bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x - x^3 - 1.$$

Пример 3. *Найти общее решение уравнения* $y^{(4)} - y = 5e^x\sin x$.

Решение.

Правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x + e^{\alpha x}Q(x)\sin\beta x,$$

в котором $P(x) = 0; Q(x) = 5;\ \alpha = 1;\ \beta = 1.$

Число $\alpha + i\beta = 1 + i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = Ae^x \cos x + Be^x \sin x = e^x(A\cos x + B\sin x)\,.$$

Для определения коэффициентов A и B найдем производные функции $\bar{y}$ и подставим их в данное уравнение:

$$\bar{y}^{|} = e^x(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x);\ \bar{y}^{||} = e^x(-2A\sin x + 2B\cos x);$$

$$\bar{y}^{(3)} = 2e^x(B\cos x - A\sin x - B\sin x - A\cos x);\ \bar{y}^{(4)} = -4e^x(A\cos x + B\sin x).$$

Следовательно,

$$-4e^x(A\cos x + B\sin x) - e^x(A\cos x + B\sin x) = 5e^x\sin x \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -5A\cos x - 5B\sin x = 5\sin x\ \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = -1, \end{cases} \Rightarrow\ \bar{y} = -e^x\sin x.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \tilde{y} + \bar{y} = c_1e^x + c_2e^{-x} - e^x\sin x.$$

Задания для самостоятельной работы

3.1. Найти общее решение однородного уравнения:

1) $y^{(3)} + 8y = 0$;
2) $y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y^{||} = 0$;
3) $y^{(3)} - 4y^{||} + 4y^{|} - y = 0$;
4) $y^{(3)} - 3y^{||} + 4y = 0$;
5) $y^{(4)} + 20y^{||} + 75y = 0$;
6) $y^{(3)} + 6y^{||} + 25y^{|} = 0$;
7) $y^{(3)} - 2y^{||} + 9y^{|} - 18y = 0$;
8) $y^{(3)} - 13y^{||} + 12y^{|} = 0$;
9) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5y^{||} - 4y^{|} + y = 0$;
10) $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} - 8y^{(3)} + 4y^{||} = 0$;
11) $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 14y^{||} - 14y^{|} + 5y = 0$;
12) $y^{(8)} - y^{(6)} - 9y^{(4)} - 11y^{||} - 4y = 0$.

3.2. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

1) $y^{(4)} - 3y^{||} = 9x^2$;
2) $y^{(3)} + y = x^2 - x + 1$;
3) $y^{(3)} - y^{||} - 4y^{|} + 4y = x^2 + 3$;
4) $y^{(4)} + 2y^{||} + y = \cos x$;
5) $y^{(4)} - 2y^{||} + y = 8\cos x$;
6) $y^{(4)} + 4y^{(3)} = 4\cos 4x$;
7) $y^{(3)} - 3y^{|} - 2y = 2\cos x + \sin x$;
8) $y^{(3)} - 3y^{||} + 3y^{|} - y = 2e^x$;
9) $y^{(4)} - 8y^{(3)} + 23y^{||} - 28y^{|} + 12y = xe^{2x}$.

ТЕМА 3.
СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений

Вопросы для подготовки
1) Определение системы дифференциальных уравнений в нормальной форме.
2) Решение и частное решение системы дифференциальных уравнений.
3) Формы записи нормальных систем.
5) Методы решения нормальных систем.

Необходимый теоретический материал
- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 3, §1);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \qquad (1)$$

называется системой, записанной в ***нормальной форме***, или системой, разрешенной относительно производных от неизвестных функций $x_i = x_i(t)$.

Решением системы уравнений (1) на промежутке $I \subset R$ называется совокупность непрерывно дифференцируемых на I функций $x_i = \varphi_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ таких, что

$$(\forall t \in I)\colon \frac{dx_i}{dt} = f_i\big(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\big).$$

Задача Коши, известная для дифференциальных уравнений, может быть обобщена на случай системы (1): найти решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям (условиям Коши) $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$, где $t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ – заданные числа (начальные данные).

Методы интегрирования системы **(1):**

I. Метод последовательного интегрирования. Пусть дана система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_n), \end{cases}$$

то её интегрирование сводится к интегрированию каждого из уравнений в отдельности.

В случае, когда система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

то её интегрирование выполняется последовательно: нужно проинтегрировать первое уравнение системы, подставить найденное общее решение во второе уравнение, проинтегрировать его и т.д.

II. Метод исключений. Этот метод заключается в приведении нормальной системы уравнений к одному уравнению *n*-го порядка или к нескольким уравнениям порядка меньшего, чем *n*. Общая схема приведения состоит в следующем: дифференцируя, например, первое уравнение системы (1) последовательно *n*-1 раз и подставляя каждый раз вместо производных $\frac{dx_i}{dt}$ их значения из остальных уравнений этой же системы, получим

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^nx_n}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \qquad (2)$$

Определив $x_2, x_3, \dots, x_n$ из первых *n*-1 уравнений системы (2) и подставив эти выражения в последнее уравнение системы, получим дифференциальное уравнение *n*-го порядка, решив которое найдем решения исходной системы.

III. Метод интегрируемых комбинаций. Сущность метода состоит в том, что с помощью арифметических операций из уравнений данной системы образуют интегрируемые комбинации, т.е. легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции.

Система вида

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)} \qquad (3)$$

называется системой дифференциальных уравнений в симметрической (симметричной) форме.

Если в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ хотя бы один из знаменателей отличен от нуля, то в окрестности этой точки систему (3) можно заменить нормальной системой из n-1 уравнения. Пусть для определенности $f_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$, тогда система (3) равносильна следующей системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n}=\dfrac{f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}{f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_n}=\dfrac{f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}{f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n}=\dfrac{f_{n-1}(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}{f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}. \end{cases} \qquad (4)$$

Каждый интеграл (первый интеграл) системы (4) называется интегралом (первым интегралом) системы (3). Система (3) имеет не более чем n-1 независимых интегралов (первых интегралов). Совокупность n-1 независимых первых интегралов системы (3) называется общим интегралом этой системы.

Верно и обратное утверждение: всякую нормальную систему можно записать в виде системы в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{dt}{1}.$$

Учитывая это, приходим к выводу, что методы решения нормальных систем применимы и к решению систем в симметрической форме.

При решении системы (3) полезно использовать свойство равных дробей: если имеются равные дроби

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\gamma$$

и произвольные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то

$$\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots+\alpha_n a_n}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\cdots+\alpha_n b_n}=\gamma \qquad (5)$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ подбираются обычно таким образом, чтобы числитель в (5) был полным дифференциалом знаменателя или же знаменатель был равен нулю.

<u>Образцы решений</u>

Пример 1. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = xe^{\cos t}. \end{cases}$

Решение.

Первое уравнение решается независимо от второго:

$$\frac{dx}{dt} = x\sin t \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} = \sin t\, dt \;\Rightarrow \ln|x| = -\cos t + \ln|c_1| \Rightarrow \frac{x}{c_1} = e^{-\cos t}$$

$$\Rightarrow x = c_1 e^{-\cos t}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} = xe^{\cos t} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = c_1 e^{-\cos t} e^{\cos t} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = c_1 \Rightarrow y = c_1 t + c_2.$$

Ответ: $\begin{cases} x = c_1 e^{-\cos t}, \\ y = c_1 t + c_2 \;. \end{cases}$

Пример 2. *Решить систему дифференциальных уравнений методом исключений*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Решение.

Дифференцируем по t первое уравнение системы и подставляем вместо $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ их значения из заданной системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} = 2(2x + 2y) + 2(x + 3y) \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} = 6x + 10y.$$

К полученному уравнению приписываем второе уравнение данной системы, получая таким образом систему

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 6x + 10y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на –5 и складывая почленно с первым уравнением, исключаем y. В результате приходим линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Так как корни действительные и различные, то общее решение имеет вид

$$x = c_1e^t + c_2e^{4t}.$$

Значение y можно найти двумя способами: либо подставив найденное значение x во второе уравнение данной системы, либо выразить его из первого уравнения через x и его производную. Оба способа дают одинаковые результаты, но второй способ короче, поэтому воспользуемся им для нахождения y:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt} - 2x\right) = \frac{1}{2}(c_1e^t + 4c_2e^{4t} - 2c_1e^t - 2c_2e^{4t}) = \frac{1}{2}(-c_1e^t + 2c_2e^{4t}).$$

Ответ: $\begin{cases} x = c_1e^t + c_2e^{4t}, \\ y = \frac{1}{2}(-c_1e^t + 2c_2e^{4t}). \end{cases}$

Пример 3. *Решить систему уравнений методом интегрируемых комбинаций*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Решение.

Сущность метода состоит в том, что с помощью арифметических операций из уравнений данной системы образуют интегрируемые комбинации (легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции). Так как неизвестных функций две (x и y), то интегрируемых комбинаций должно быть тоже две.

1) Сложим почленно данные уравнения (получим первую интегрируемую комбинацию):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y \;\Rightarrow\; \frac{d(x+y)}{dt} = x + y \;\Rightarrow\; \frac{d(x+y)}{x+y} = dt \;\Rightarrow$$

$$\ln|x+y| = t + \ln|c_1| \Rightarrow \Rightarrow \ln\left|\frac{x+y}{c_1}\right| = t \;\Rightarrow\; \frac{x+y}{c_1} = e^t$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x + y = c_1e^t}.$$

2) Почленно вычитаем из первого уравнения второе (получим вторую интегрируемую комбинацию):

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = y - x \;\Rightarrow\; \frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y) \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x-y| = -t + \ln|c_2| \Rightarrow \ln\left|\frac{x-y}{c_2}\right| = -t \;\Rightarrow\; \frac{x-y}{c_2} = e^{-t} \;\Rightarrow \boldsymbol{x - y = c_2e^{-t}}.$$

Ответ может быть записан в виде системы полученных в пунктах 1) и 2) уравнений, связывающих x и y:

$$\begin{cases} x + y = c_1 e^t, \\ x - y = c_2 e^{-t} \end{cases}$$

или, если возможно разрешение системы относительно x и y, в виде

$$\begin{cases} x = 0{,}5(c_1 e^t + c_2 e^{-t}), \\ y = 0{,}5(c_1 e^t - c_2 e^{-t}). \end{cases}$$

Пример 4. *Решить систему уравнений, записанную в симметрической форме:*

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

Решение.

Так как система содержит три неизвестные функции, то в общее решение системы будет входить два первых независимых интеграла, совокупность которых определяет искомое общее решение.

Сначала найдем общее решение уравнения:

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \boldsymbol{y = c_1 z}.$$

Для нахождения другого интеграла данной системы воспользуемся свойством равных дробей: в нашем случае положим $\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = y,\ \alpha_3 = z,$ тогда

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2 - y^2 - z^2) + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{dy}{2xy} \Rightarrow \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy} \Rightarrow$$

$$2 \cdot \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x^2 + y^2 + z^2| =$$

$$= \ln|y| + \ln|c_2| \Rightarrow \boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = c_2 y}.$$

Найденные независимые первые интегралы определяют общее решение системы:

$$\begin{cases} y = c_1 z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = c_2 y. \end{cases}$$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1.1. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{t}{x} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\cos t \\ \frac{dy}{dt} = x\,e^{\sin t} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y \end{cases}$; 5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$; 6) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}$;

7) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y + t \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{3t} - y \\ \frac{dy}{dt} = 2e^{3t} - x \end{cases}$; 9) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t \\ \frac{dy}{dt} = x + e^{t} \end{cases}$;

10) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 + \sin t \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{2y} \end{cases}$; 11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + t \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 3y + 2t \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + y = \sin t \\ \frac{dy}{dt} - 4x - 2y = \cos t \end{cases}$;

13) $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t \\ \frac{dy}{dt} + y = \cos t \end{cases}$; 14) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - y + 2e^{t} = 0 \\ \frac{dy}{dt} - 4x - y + 36t \end{cases}$; 15) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = z \end{cases}$;

16) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$; 17) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + y + t \\ \frac{dz}{dt} = x + z + t \end{cases}$.

1.2. Решить систему уравнений методом интегрируемых комбинаций:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2x+3y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{2x+3y} \end{cases}$; 5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{x+y} \end{cases}$; 6) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$.

1.3. Решить систему уравнений, записанную в симметрической форме:

1) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 2) $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$;

3) $\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$; 4) $\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} = \frac{dx}{(z - y)^2}$;

5) $\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}$.

§ 2. Решение систем линейных дифференциальных уравнений методом Эйлера

<u>Вопросы для подготовки</u>

1) Какая система с постоянными коэффициентами называется линейной? 2) Какое уравнение называется характеристическим? 3) От чего зависит структура фундаментальной системы решений?

<u>Необходимый теоретический материал</u>

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 3, §1-2);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Система дифференциальных уравнений называется **линейной**, если она линейна относительно неизвестных функций и их производных.

Система n линейных уравнений первого порядка, записанная в нормальной форме, имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases}$$

где a_{ij} – функции от t или постоянные.

Прежде чем переходить к разбору решений систем дифференциальных уравнений методом Эйлера отметим некоторые положения теории, которые применимы для линейных однородных систем. Для нахождения общего решения системы поступают следующим образом:

1) составляют характеристическое уравнение и находят его корни;

2) в зависимости от вида корней характеристического уравнения находят частные решения заданной системы; при этом возможны случаи:

- если корни действительные различные, то частное решение ищется в виде $x = \alpha_1 e^{kx}$, $y = \alpha_2 e^{kx}$ и т.д. в зависимости от количества уравнений в системе;

- если корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные, то частное решение имеет вид такой же как в предыдущем пункте, но в роли корня выступает число $k = a + ib$; линейно независимые частные решения получаются отделением действительных и мнимых частей;

- среди корней характеристического уравнения имеются кратные, например, корень k имеет кратность m, тогда ему соответствует решение вида

$x = P_1(t)e^{kt}, y = P_2(t)e^{kt}$ и т.д. в зависимости от количества уравнений системы (здесь $P_1, P_2 \ldots$ - многочлены степени не выше m);

3) находят линейную комбинацию построенных линейно независимых частных решений, соответствующую всем корням, с произвольными постоянными коэффициентами, которая и является общим решением данной системы.

Теперь рассмотрим конкретные примеры для каждого из возможных вариантов с подробным их описанием.

<u>Образцы решений</u>

Пример 1. *Решить методом Эйлера однородную систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y. \end{cases}$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 4k - 5 = 0 \Rightarrow k_1 = 5, k_2 = -1.$$

Так как корни действительные различные, то частное решение системы ищем в виде

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \qquad y = \alpha_2 e^{kt}.$$

Построим частное решение, соответствующее корню $k_1 = 5$. Числа α_1 и α_2 нужно искать из системы

$$\begin{cases} -4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 4\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

коэффициенты которой получены из характеристического определителя при подстановке вместо k значения характеристического числа $k_1 = 5$. Из системы получаем зависимость между числами α_1 и α_2: $\alpha_2 = 2\alpha_1$. Одно из этих чисел можно выбрать произвольно. Положим $\alpha_1 = 1$ тогда $\alpha_2 = 2$.

Таким образом, характеристическому числу $k_1 = 5$ соответствует частное решение

$$x_1 = e^{5t}, \qquad y_1 = 2e^{5t}.$$

Аналогично строим частное решение, соответствующее корню $k_2 = -1$:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 4\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1.$$

Поэтому $k_2 = -1$ соответствует частное решение

$$x_2 = e^{-t}, \qquad y_2 = -e^{-t}.$$

Общим решением данной системы является линейная комбинация полученных частных решений:

$$\begin{cases} x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}, \\ y = 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Пример 2. *Найти общее решение системы* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 5 = 0 \Rightarrow k_1 = 2 + i,\ k_2 = 2 - i.$$

Построим комплексное решение вида

$$x = \alpha_1 e^{(2+i)t}, \qquad y = \alpha_2 e^{(2+i)t},$$

соответствующее характеристическому числу $k_1 = 2 + i$. Числа α_1 и α_2 находим из системы

$$\begin{cases} -i\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 4\alpha_1 - i\alpha_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = -i\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -i.$$

Тогда

$$x = e^{(2+i)t} = e^{2t}(\cos t + i\sin t),\ \ y = -ie^{(2+i)t} = e^{2t}(\sin x - i\cos x).$$

Отсюда, отделяя действительную и мнимую части, получим два линейно независимых частных решения:

$$x_1 = e^{2t}\cos t,\ \ y_1 = e^{2t}\sin t,$$
$$x_2 = e^{2t}\sin t,\ \ y_2 = -e^{2t}\cos t.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = e^{2t}(c_1\cos t + c_2\sin t), \\ y = e^{2t}(c_1\sin t - c_2\cos t). \end{cases}$$

Пример 3. *Решить систему уравнений методом Эйлера* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y + 5z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - y - 6z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -8x + 3y + 9z. \end{cases}$

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} -4-k & 2 & 5 \\ 6 & -1-k & -6 \\ -8 & 3 & 9-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(k-1)\cdot(k^2 - 3k + 2) = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1, k_3 = 2\,.$$

Найдем сначала частное решение, соответствующее простому корню $k_3 = 2$:

$$x_3 = \alpha_1 e^{2t}, \qquad y_3 = \alpha_2 e^{2t}, \qquad z_3 = \alpha_3 e^{2t}.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно найти следующим образом: подставим $k_3 = 2$ в характеристический определитель, получим

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 7 \end{vmatrix};$$

числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ находим как алгебраические дополнения элементов первой строки этого определителя

$$\alpha_1 = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -21 + 18 = -3;$$

$$\alpha_2 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = -42 + 48 = 6;$$

$$\alpha_3 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6.$$

Причем эти числа можно сократить на -3: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 2$. Так что искомое решение будет

$$x_3 = e^{2t}, \qquad y_3 = -2e^{2t}, \qquad z_3 = 2e^{2t}.$$

Теперь построим два линейно независимых частных решения, соответствующие кратному характеристическому числу $k_1 = k_2 = 1$. Ему соответствует решение вида

$$x = (A_1 t + A_2)e^t, \qquad y = (B_1 t + B_2)e^t, \qquad z = (C_1 t + C_2)e^t.$$

Коэффициенты $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ определяются подстановкой указанного решения в данную систему:

$$\frac{dx}{dt} = (A_1 + A_2 + A_1 t)e^t, \qquad \frac{dy}{dt} = (B_1 + B_2 + B_1 t)e^t,$$

$$\frac{dz}{dt} = (C_1 + C_2 + C_1 t)e^t.$$

Тогда

$$\begin{cases} (A_1 + A_2 + A_1 t)e^t = -4(A_1 t + A_2)e^t + 2(B_1 t + B_2)e^t + 5(C_1 t + C_2)e^t, \\ (B_1 + B_2 + B_1 t)e^t = 6(A_1 t + A_2)e^t - (B_1 t + B_2)e^t - 6(C_1 t + C_2)e^t, \\ (C_1 + C_2 + C_1 t)e^t = -8(A_1 t + A_2)e^t + 3(B_1 t + B_2)e^t + 9(C_1 t + C_2)e^t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_1 t = (-4A_1 + 2B_1 + 5C_1)t - 4A_2 + 2B_2 + 5C_2, \\ B_1 + B_2 + B_1 t = (6A_1 - B_1 - 6C_1)t + 6A_2 - B_2 - 6C_2, \\ C_1 + C_2 + C_1 t = (-8A_1 + 3B_1 + 9C_1)t - 8A_2 + 3B_2 - 9C_2 \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при *t* и свободные члены, получаем систему

$$\begin{cases} -5A_1 + 2B_1 + 5C_1 = 0, \\ 6A_1 - 2B_1 - 6C_1 = 0, \\ -8A_1 + 3B_1 + 8C_1 = 0, \\ -5A_2 + 2B_2 + 5\,C_2 = A_1, \\ 6A_2 - 2B_2 - 6C_2 = B_1, \\ -8A_2 + 3B_2 + 8C_2 = C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = C_1, \\ B_1 = 0, \\ A_2 = C_1 + C_2, \\ B_2 = 3C_1. \end{cases}$$

Причем C_1 и C_2 произвольны. Тогда

$$x = (C_1 t + C_1 + C_2)e^t, \qquad y = 3C_1 e^t, \qquad z = (C_1 t + C_2)e^t.$$

В качестве линейно независимых решений, соответствующих характеристическому числу $k_1 = k_2 = 1$, можно взять

$$x_1 = (t+1)e^t, \qquad y_1 = 3e^t, \qquad z_1 = te^t, \qquad (C_1 = 1, C_2 = 0)$$

$$x_2 = e^t, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = e^t, \quad (C_1 = 0, C_2 = 1).$$

Общим решением системы будет:

$$\begin{cases} x = (c_1 t + c_1 + c_2)e^t + c_3 e^{2t}, \\ y = 3c_1 e^t - 2c_3 e^{2t}, \\ z = (c_1 t + c_2)e^t + 2c_3 e^{2t}. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

2.1. Методом Эйлера найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 4y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$; 5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases}$; 6) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$;

7) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y - 2z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$; 9) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = -2x - z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y + 2z \end{cases}$;

10) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z \\ \frac{dz}{dt} = -4x + y + 5z \end{cases}$; 11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - z \\ \frac{dy}{dt} = -6x + 2y + 6z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y - 4z \end{cases}$;

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y + z \\ \frac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z \end{cases}$;

2.2. Методом Эйлера найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 10x - 4y \end{cases}; x(0) = 1, y(0) = 5;$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}; x(0) = 0, y(0) = -1;$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}; x(0) = 1, y(0) = 0;$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + z \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -x + z \end{cases}; x(0) = 1,\ y(0) = \frac{1}{2}, z(0) = \frac{1}{2}.$

§ 3. Матричный метод решения линейных однородных систем

Вопросы для подготовки

1) Как решить линейную систему, записанную в векторной форме? 2) Решение линейных систем в случае простых собственных значений. 3) Решение линейных систем в случае кратных собственных значений.

Необходимый теоретический материал

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 3, §5);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец.: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Пусть дана однородная линейная система с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

или

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X,$$

где A – матрица системы (1).

Напомним несколько положений матричного исчисления.

Ненулевой вектор x называется собственным вектором квадратной матрицы A, принадлежащим её собственному значению λ, если $Ax = \lambda x$.

Множество всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих её собственному значению λ, совпадает с множеством всех ненулевых решений системы однородных уравнений $(A-\lambda E)x=0$, записанной в векторно-матричной форме.

В алгебре доказано, что если собственные значения $\lambda_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ матрицы A различные числа, то соответствующие им собственные векторы $\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n}$ линейно независимы и образуют базис в пространстве R^n; при этом существует невырожденная матрица T, переводящая матрицу A к диагональному виду, т.е.

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Здесь $T=(\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n})$, т.е. столбцами матрицы T являются координаты собственных векторов матрицы A.

Чтобы найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений матричным методом, нужно:

- записать систему дифференциальных уравнений в матричной форме $\frac{dX}{dt}=A\cdot X$, где A – матрица системы;

- найти характеристические числа матрицы A;

- из уравнения $(A-\lambda E)x=0$ найти собственные векторы $\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ldots,\ \vec{e_n}$, соответствующие каждому характеристическому числу матрицы A;

- если собственные значения $\lambda_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ матрицы A различные числа, то общее решение системы (1) имеет вид

$$\vec{X}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1+c_2e^{\lambda_2 t}\vec{e}_2+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}\vec{e}_n\ ,$$

где $c_1,c_2,\ldots,c_n$ – произвольные постоянные;

- если среди собственных значений матрицы A есть комплексные, то чтобы перейти к вещественным решениям надо каждому комплексному корню λ_i поставить в соответствие два вещественных решения $Re\,(e^{\lambda_i t}\vec{e}_i)$ и $Im\,(e^{\lambda_i t}\vec{e}_i)$, где $\vec{e}_i$ – соответствующий λ_i комплексный собственный вектор;

- если собственное значение λ матрицы A имеет кратность m, то ему соответствует решение системы вида

$$x(t)=\begin{bmatrix}A_1t^{m-1}+\cdots A_{m-2}t+A_{m-1}\\ B_1t^{m-1}+\cdots B_{m-2}t+B_{m-1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ V_1t^{m-1}+\cdots V_{m-2}t+V_{m-1}\end{bmatrix}e^{\lambda t}; \qquad (3)$$

- взять линейные комбинации элементов полученных решений по строкам с произвольными постоянными $c_1,c_2,\ldots,c_n$, где n – число уравнений в системе.

Образцы решений

Пример 1. *Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений матричным методом (случай простых собственных значений матрицы системы)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + 5x_2 - x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

Решение.

Матрица системы имеет вид $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 2$.

Собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1 = 3$, является ненулевым решением системы

$$(A - 3E)\vec{e}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_3, \\ \alpha_1 = \alpha_2, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Поскольку решение должно быть ненулевым, то можно считать $\alpha_1 = 1$, тогда $\alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 1$ и $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_2 = 6$, является ненулевым решением системы

$$(A - 6E)\vec{e}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3, \\ \alpha_2 = -2\alpha_3, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Можно считать $\alpha_1 = 1$, тогда $\alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = 1$ и $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_3 = 2$, является ненулевым решением системы

$$(A-2E)\vec{e}_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 = 1, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 = 1, \\ \alpha_3 = -1 \end{matrix} \text{ и } \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{6t} + c_3 e^{2t}, \\ x_2 = c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{6t}, \\ x_3 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{6t} - c_3 e^{2t}. \end{cases}$$

Пример 2. *Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений матричным методом (случай комплексных собственных значений)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

Решение.

Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Её собственные значения $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$. Найдем собственный вектор, соответствующий числу $\lambda_1 = -6 + i$:

$$\begin{bmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-1-i)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -2\alpha_1 + (1-i)\alpha_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = (1+i)\alpha_1.$$

Пусть $\alpha_1 = 1 - i$, тогда $\alpha_2 = 2$, а $\vec{e} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Далее находим

$$e^{(-6+i)t}\vec{e} = e^{-6t}(\cos t + i\sin t) \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$e^{-6t}\left(\begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix}\right).$$

Выделяем действительную и мнимую части:

$$Re\left(e^{(-6+i)t}\vec{e}\right) = e^{-6t}\begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix};$$

$$Im\left(e^{(-6+i)t}\vec{e}\right) = e^{-6t}\begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix}.$$

Поэтому общее решение данной системы запишется в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix} e^{-6t} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix} e^{-6t}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = [(c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t]e^{-6t}, \\ x_2 = (2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t)e^{-6t}. \end{cases}$$

Пример 3. *Найти общее решение системы матричным методом (случай кратных собственных значений матрицы системы)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_2 + x_3. \end{cases}$$

Решение.

Матрица системы имеет вид $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Простому собственному значению $\lambda_1 = 0$ соответствует собственный вектор $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и решение вида $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 \\ -c_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$.

Решение, соответствующее двукратному корню $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, в соответствии с формулой (3) , будем искать в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 t + A_2 \\ B_1 t + B_2 \\ D_1 t + D_2 \end{bmatrix} e^t \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ x_3{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 t + A_2 + A_1 \\ B_1 t + B_2 + B_1 \\ D_1 t + D_2 + D_1 \end{bmatrix} e^t.$$

Получаем уравнение

$$\begin{bmatrix} A_1 t + A_2 + A_1 \\ B_1 t + B_2 + B_1 \\ D_1 t + D_2 + D_1 \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 t + A_2 \\ B_1 t + B_2 \\ D_1 t + D_2 \end{bmatrix} e^t \text{ или}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 t + A_2 + A_1 \\ B_1 t + B_2 + B_1 \\ D_1 t + D_2 + D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_1 + D_1)t + B_2 + D_2 \\ (A_1 + B_1 - D_1)t + A_2 + B_2 - D_2 \\ (B_1 + D_1)t + B_2 + D_2 \end{bmatrix}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях последнего равенства, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 = B_1 + D_1, \\ A_1 + A_2 = B_2 + D_2, \\ B_1 = A_1 + B_1 - D_1, \\ B_1 + B_2 = A_2 + B_2 - D_2, \\ D_1 = B_1 + D_1, \\ D_1 + D_2 = B_2 + D_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 0, \\ D_1 = A_1, \\ B_2 = A_1, \\ D_2 = A_2. \end{cases}$$

Считая $A_1 = c_2,\ A_2 = c_3$ произвольными постоянными, окончательно находим

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 t + c_3 \\ c_2 \\ c_2 t + c_3 \end{bmatrix} e^t.$$

Общее решение системы получается путем сложения решений, соответствующих простому и кратному корням характеристического уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 + (c_2 t + c_3)e^t, \\ x_2 = -c_1 + c_2 e^t, \\ x_3 = c_1 + (c_2 t + c_3)e^t. \end{cases}$$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

3.1. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений матричным методом:

1) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 4x_2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 4x_2 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 10x_1 - 3x_2 - 9x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -18x_1 + 7x_2 + 18x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = 18x_1 - 6x_2 - 17x_3 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 12x_2 - 4x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_1 - 12x_2 + 6x_3 \end{cases}$;

$$7)\ \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -12x_1 + 5x_2 + 12x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = 10x_1 - 3x_2 - 9x_3 \end{cases}; \qquad 8)\ \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 \end{cases}.$$

§ 4. Решение линейных систем методом Даламбера

Вопросы для подготовки

1) Как решить линейную однородную систему методом Даламбера. 2) Решение линейных неоднородных систем методом Даламбера.

Необходимый теоретический материал

- конспект лекций, размещенный в СДО (тема 4, §3);
- учебник: Елецких И.А., Мельников Р.А., Саввина О.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов (Гриф УМО). – Елец.: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.

Метод Даламбера – это общий метод интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим его в общем виде.

Пусть дана система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t) \end{cases} \qquad (1)$$

Умножим второе уравнение системы на некоторое число k и сложим почленно с первым уравнением. Получим

$$\frac{d(x+ky)}{dt} = (a_{11} + ka_{21})x + (a_{12} + ka_{22})y + f_1(t) + kf_2(t) \qquad (2)$$

Преобразуем правую часть и выберем число k так, чтобы она стала линейной функцией от $x + ky$. С этой целью перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{d(x+ky)}{dt} = (a_{11} + ka_{21}) \cdot \left(x + \frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}}y\right) + f_1(t) + kf_2(t)$$

Положив

$$\frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}} = k, \qquad (3)$$

получим

$$\frac{d(x+ky)}{dt} = (a_{11} + ka_{21}) \cdot (x + ky) + f_1(t) + kf_2(t).$$

Интегрируя это линейное относительно $x + ky$ уравнение, находим

$$x+ky=e^{(a_{11}+ka_{21})t}\cdot\left(c+\int\left(f_1(t)+kf_2(t)\right)e^{-(a_{11}+ka_{21})t}dt\right) \qquad (4)$$

Если уравнение (3) имеет различные вещественные корни k_1 и k_2, то из формулы (4) получим два первых интеграла системы (1), и интегрирование этой системы будет окончено.

Образцы решений

Пример 1. *Найти общее решение системы* $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x-9y,\\ \frac{dy}{dt}=x+8y.\end{cases}$

Решение.

Умножим второе уравнение системы на k и сложим с первым уравнением системы:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-9y,\\ k\dfrac{dy}{dt}=kx+8ky.\end{cases}$$

Получим

$$\frac{d(x+ky)}{dt}=(2+k)x+(-9+8k)y \Rightarrow$$

$$\frac{d(x+ky)}{dt}=(2+k)\left(x+\frac{-9+8k}{2+k}y\right) \qquad (5)$$

Полагаем

$$\frac{-9+8k}{2+k}=k.$$

Находим k: $-9+8k=k(2+k) \Rightarrow k_1=k_2=3$. Подставляя k в равенство (5), получим

$$\frac{d(x+3y)}{dt}=(2+3)\cdot(x+3y) \Rightarrow \frac{d(x+3y)}{x+3y}=5dt \Rightarrow$$

$$\ln|x+3y|=5t+\ln c_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{x+3y}{c_1}\right|=5t \Rightarrow \frac{x+3y}{c_1}=e^{5t} \Rightarrow$$

$$x+3y=c_1e^{5t}.$$

Подставим $x=c_1e^{5t}-3y$ во второе уравнение системы, получим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dt}-5y=c_1e^{5t},$$

решая которое, найдем $y=(c_1t+c_2)e^{5t}$.

Зная y, найдем x из уравнения $x=c_1e^{5t}-3y$: $x=(c_1-3c_1t-3c_2)e^{5t}$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases}x=(c_1-3c_1t-3c_2)e^{5t},\\ y=(c_1t+c_2)e^{5t}.\end{cases}$$

Пример 2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t\,, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t\,. \end{cases}$

Решение.

Умножим второе уравнение системы на k и сложим с первым уравнением системы:

$$\frac{d(x+ky)}{dt} = (2-k)\left(x + \frac{4-2k}{2-k}y\right) + \cos t + \sin t.$$

Из уравнения $\frac{4-2k}{2-k} = k$ найдем $k = 2$. Тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{d(x+ky)}{dt} = \cos t + \sin t.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим общее решение данного уравнения в виде:

$$\begin{cases} x = -2\cos t - 3\sin t + 2c_1 t + c_2, \\ y = 2\sin t - c_1 t + \frac{c_1 - c_2}{2}\,. \end{cases}$$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

4.1. Проинтегрировать однородные системы ДУ методом Даламбера:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 9y \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

4.2. Проинтегрировать неоднородные системы методом Даламбера:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y + t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{3t} - y \\ \frac{dy}{dt} = 2e^{3t} - x \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y - 5e^t. \end{cases}$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебно-методическое издание

Ирина Адольфовна Елецких

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Учебно-методическое пособие

Технический редактор – Н. П. Безногих
Техническое исполнение - В. М. Гришин

Лицензия на издательскую деятельность
ИД № 06146. Дата выдачи 26.10.01.
Формат 60 х 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 4,0 Уч.-изд.л. 3,7
Тираж 300 экз. (1-й завод 1-30 экз.). Заказ 178

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И.А.Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1