МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников

ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

ТРЕУГОЛЬНИК

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Учебно-методические
пособие**

Елец – 2018

УДК 378.02:372.8
ББК 74.262.21
Е 59

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 29.01.2018 г., протокол № 1

Рецензенты:

Клещёва Ирина Валерьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры методики обучения математике и информатики (Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург),

Масина Ольга Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и компьютерных технологий (Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец).

Ельчанинова Г.Г., Мельников Р.А.

Е 59 Основные геометрические объекты: треугольник. Методика изучения и решения задач: учебно-методическое пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2018. – 92 с.

Основная цель учебного пособия – оказать помощь студентам в подготовке к занятиям по дисциплине «Элементарная математика», в написании курсовой и выпускной квалификационной работы.

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов физико-математического отделения института математики, естествознания и техники.

Данное издание может полезно преподавателям вузов, а также использоваться учителями средних школ для разработки элективных курсов.

УДК 378.02:372.8
ББК 74.262.21

§ 1. Аксиомы и основные определения абсолютной геометрии. Основные геометрические объекты и их свойства

1.1. Основные понятия и отношения абсолютной геометрии

Изучение форм, размеров предметов и их взаимного расположения составляет отдельную область человеческого знания, называемую ***геометрией***.

Термин «*геометрия*» происходит от слияния двух древнегреческих слов γεω – «Земля» и μετρέω – «измеряю». Буквальный перевод звучит как «землемерие».

Геометрия изучает некоторые множества элементов, называемых ***точками*** и некоторые подмножества этого множества: ***прямые***, ***плоскости***, или, вообще говоря, ***фигуры***.

Фигурой на плоскости называется всякое множество точек этой плоскости, содержащее хотя бы одну точку. Термин «фигура» происходит от латинского слова *figura*, что означает *образ, вид*.

Для того чтобы отображать одну фигуру на другую, вводятся некоторые операции, применимые к элементам множества точек.

Геометрию, изучаемую в средней школе, часто называют ***евклидовой*** **–** по имени древнегреческого математика Евклида (330-275 гг. до н.э.), написавшего один из первых курсов элементарной геометрии. Этот курс был изложен вместе с арифметикой в одиннадцати книгах и назван «Начала».

Постулаты Евклида:

1. Требуется, чтобы от всякой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую.
2. И чтобы каждую прямую можно было неограниченно продолжить.
3. И чтобы от любого центра можно было описать окружность любого радиуса.
4. И чтобы все прямые углы были равны.
5. Если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих прямых, они пересекутся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых.

Совокупность теорем, которые могут быть выведены из системы аксиом, если аксиому параллельных заменить противоположным утверждением, называется ***неевклидовой геометрией Лобачевского***.

Абсолютная геометрия – это геометрия, в основе которой лежат аксиомы евклидовой геометрии, за исключением аксиомы о параллельных, то есть, это общая часть геометрии Евклида и Лобачевского.

Основные понятия геометрии – ***геометрическое тело, поверхность, линия, точка***.

Геометрическое тело рассматривается вне физических свойств предмета. Считается, что оно может свободно перемещаться и изменять своё положение среди других тел, не меняя размера, формы и взаимного расположения своих частей.

Тело отделяется ***поверхностью*** от прилегающих к нему других тел. У геометрической поверхности нет толщины.

При пересечении поверхностей образуется ***линия***. У линии нет ширины.

При пересечении двух линий образуется ***точка***. Точка не имеет никакого размера.

Простейшая из всех линий – ***прямая***. Простейшая поверхность – ***плоскость.***

Прямую линию обычно представляют безгранично продолженной в обе стороны. Обозначение прямой – малая латинская или две большие латинские буквы, которые обозначают две какие-либо точки этой прямой.

Часть прямой, все точки которой лежат по одну сторону от данной точки этой прямой – ***луч*** (***полупрямая***). Обозначение луча аналогично обозначению прямой.

Часть прямой, ограниченная с обеих сторон точками, – ***отрезок***. Обозначение отрезка – две большие латинские буквы, поставленные при его концах.

Два луча, выходящие из одной точки, образуют фигуру, которая называется ***углом***.

Сами лучи при этом называются ***сторонами*** угла, а их общее начало – ***вершиной*** угла. Обозначение угла – одна большая латинская буква ($\angle A$), поставленная при его вершине либо три большие латинские буквы, из которых одна – при вершине, а две другие обозначают две какие-либо точки сторон угла ($\angle BAC$). Иногда углы обозначают одной малой латинской буквой ($\angle h$) или цифрой ($\angle 1$).

Внутренняя область угла целиком содержит все отрезки, концы которых лежат на сторонах угла. Оставшаяся часть плоскости – ***внешняя***.

Углы называются ***прилежащими***, если они имеют общую сторону, а их внутренние области не покрывают одна другую. На Рис. 1 это углы $\angle CAB$ и $\angle DAB$.

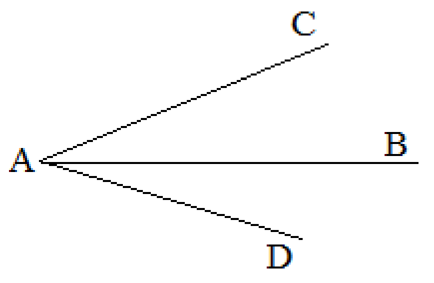


Рис. 1

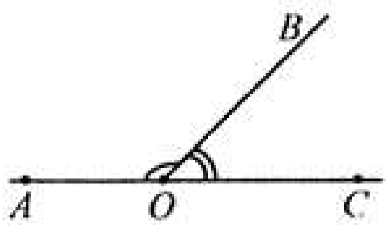


Рис. 2

Если у двух прилежащих углов не совпадающие стороны образуют одну прямую линию, то такие углы называются **смежными**. На Рис. 2 это углы $\angle COB$ и $\angle AOB$.

Угол называется ***развёрнутым***, если лучи, его образующие, составляют одну прямую. На Рис. 2 это угол $\angle AOC$.

Два угла называются ***равными***, если они могут быть совмещены так, что совпадут их вершины и соответствующие стороны.

Если смежные углы равны между собой, то каждый из них называется ***прямым***. Иначе, прямой угол – это угол, равный своему смежному углу. Из этого следует, свойство:

1^0) *Прямой угол равен половине развёрнутого*.

Если два угла имеют общие вершину и одну сторону, а вторая сторона одного из углов лежит между сторонами другого угла, то говорят, что первый из этих двух углов меньше второго (второй угол больше первого).

Прямые линии, образующие между собой прямой угол, называются ***взаимно перпендикулярными***. Обозначение: $AB \perp CD$.

Угол, меньший прямого угла, называется ***острым***, больший прямого – ***тупым***. В геометрии рассматриваются также ***нулевой*** и ***полный*** углы, у которых образующие их лучи совпадают.

Различие этих углов показано на Рис. 3 (слева – нулевой угол, а справа – полный угол).

Рис. 3

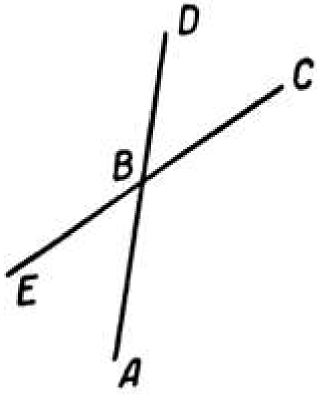


Рис. 4

Углы называются ***вертикальными***, если стороны одного из них служат продолжениями сторон другого. Так, на Рис. 4 $\angle EBA$ и $\angle BCD$ являются вертикальными.

2^0) *Вертикальные углы равны между собой*.

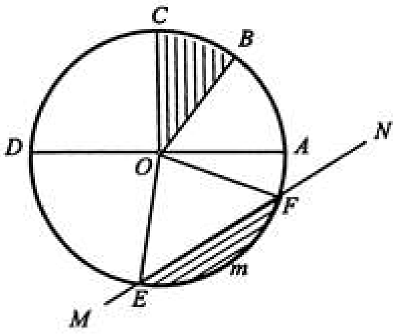


Рис. 5

Одной из важнейших фигур геометрии является ***окружность***.

Если придать циркулю произвольный раствор и, поставив одну его ножку острием в какую-нибудь точку *O* плоскости (Рис. 5), будем вращать циркуль вокруг этой точки, то другая его ножка, снабженная карандашом или пером, прикасающимся к плоскости, опишет на ней непрерывную линию, все точки которой будут одинаково удалены от точки *O*. Эта линия называется окружностью, а точка О – её ***центром***.

Отрезки *OA*, *OB*,..., соединяющие центр с какими-нибудь точками окружности, называются ***радиусами***.

Очевидно свойство: *все радиусы одной окружности равны между собой*.

Прямая (*MN*, Рис. 5), проходящая через какие-нибудь две точки окружности, называется ***секущей***.

Отрезок прямой (*EP*), соединяющий две какие-нибудь точки окружности, называется ***хордой***.

Всякая хорда (*AD*), проходящая через центр, называется *диаметром*.

Очевидно свойство: *диаметр равен сумме двух радиусов, и потому все диаметры одной окружности равны между собой*.

Какая-нибудь часть окружности (например, *EmF*) называется ***дугой***.

О хорде (*EF*), соединяющей концы какой-нибудь дуги, говорят, что она *стягивает эту дугу*.

Не следует путать понятия «окружность» и «круг». Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется ***кругом***.

Часть круга, заключенная между двумя радиусами (часть *COB*, покрытая штрихами на Рис. 5), называется ***сектором***, а часть, отсекаемая от круга какой-нибудь секущей (часть *EmF*), называется ***сегментом***.

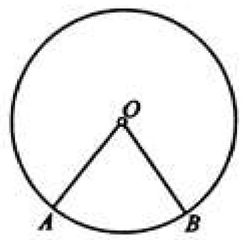


Рис. 6

Угол (*AOB*, Рис. 6), образованный двумя радиусами окружности, называется ***центральным углом***; о таком угле и дуге, заключенной между его сторонами, говорят, что они соответствуют друг другу.

Центральные углы по отношению к соответствующим им дугам обладают следующими двумя свойствами.

В одном круге или в равных кругах:

3^0) *Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны*.

4^0) *Если дуги равны, то и соответствующие им центральные углы равны*.

Представим себе, что какая-нибудь окружность разделена на 360 равных частей и ко всем точкам деления проведены радиусы. Тогда вокруг центра образуются 360 центральных углов, которые, как соответствующие равным дугам, должны быть равны между собой. Каждая из полученных таким образом на окружности дуг называется ***дуговым градусом***, а каждый из образовавшихся при центре углов называется ***угловым градусом***. Значит, можно сказать, что дуговой градус есть $1/360$ часть окружности, а угловой градус есть центральный угол, соответствующий дуговому градусу.

Градусы (дуговые и угловые) подразделяются еще на 60 равных частей, называемых ***минутами***, а минуты подразделяются еще на 60 равных частей, называемых ***секундами***).

🕮 Латинское слово *gradus* означает «шаг». Как заметили вавилонские жрецы, солнечный диск укладывается на пути, проходимым солнцем за день, 180 раз, т.е. солнце как бы делает 180 шагов. Обозначения градусов, напоминающие современные, были введены *Птолемеем* около 100–178 г.г.

<u>Замечание</u>. 1) Употребительна также сотенная система мер углов и дуг; по этой системе за, ***град дуги*** принимают 1/100 четверти окружности, минуту принимают равной 1/100 града, секунду – 1/100 минуты. 2) Используется также и ***радианная мера угла***. В этом случае один ***радиан*** приписывается центральному углу, стороны которого заключают дугу окружности, равную радиусу. Такой центральный угол называется ***угловым радианом***, а соответствующая дуга – ***дуговым радианом***.

Для измерения углов употребляется особый прибор – ***транспортир***. Этот прибор (Рис. 7) представляет собой полукруг, дуга которого разделена на 180°. Чтобы измерить угол *DCE*, накладывают на него прибор так, чтобы центр полукруга совпадал с вершиной угла, а радиус *CB* был расположен по стороне *CE*, Тогда число градусов, содержащееся в дуге, заключенной между сторонами угла *DCE*, покажет величину его. При помощи транспортира можно также начертить угол, содержащий данное число градусов.

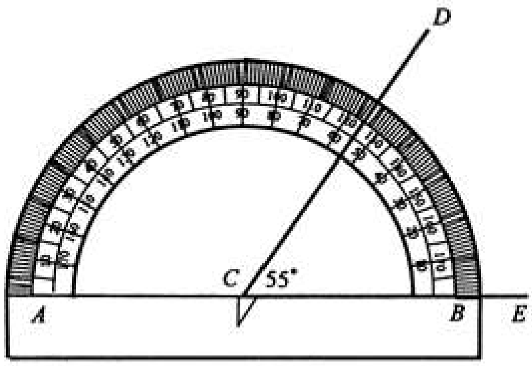


Рис. 7

5^0) *Развёрнутый угол имеет градусную меру, равную* 180°.

Обобщим понятия прямого, острого и тупого углов (с точки зрения их градусной меры).

Угол в 90° (составляющий, следовательно, половину развернутого угла или четверть полного угла) есть *прямой угол*; угол, имеющий градусную меру, меньше 90°, есть *острый угол*, а угол, больший прямого, но меньший развернутого, есть тупой угол (Рис. 8).

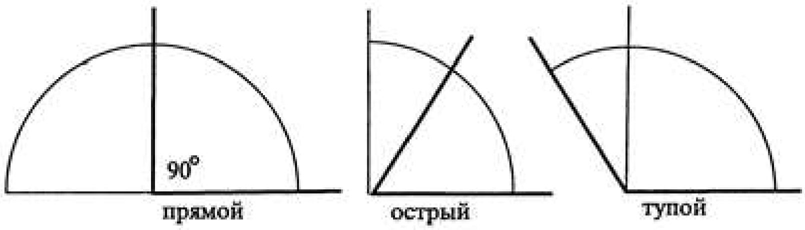


Рис. 8

6^0) *Все прямые углы, как содержащие одинаковое число градусов, равны между собой*.

🕮 Величину прямого угла иногда обозначают буквой *d* (начальная буква французского слова *droit*, которое означает «*прямой*»).

7^0) С*межные углы в сумме составляют развернутый угол*, то есть *сумма двух смежных углов равна* 180° (иначе, она равна сумме двух прямых углов).

8^0) *Если два угла равны, то и смежные с ними углы равны*.

Луч, который выходит из вершины угла и делит его на равные части, называется его ***биссектрисой***.

📖 Термин «*биссектриса*» происходит от латинского слова *bissectrix* – «делящая пополам». В старой математической литературе можно встретить другое название биссектрисы – «*равноделящая*».

Итак, сочетание точек, поверхностей и линий, как-либо расположенных друг относительно друга, образует геометрическую фигуру.

Геометрические фигуры разделяются на плоские и пространственные. У плоской фигуры все точки лежат на одной плоскости. Если не все точки фигуры лежат на одной плоскости, то эта фигура – пространственная. Часть геометрии, изучающая плоские фигуры, называется ***планиметрией***, пространственные – ***стереометрией***.

Первичными отношениями в геометрии являются:

- *отношение принадлежности*;
- *отношение лежать между*;
- *совмещаться движением*.

В геометрии используются первичные понятия из других отделов математики: множество, элемент множества, соотношение и др.

1.2. Система аксиом абсолютной геометрии. Аксиоматический метод её построения

Теоретической базой в геометрии является система операций и аксиом. ***Аксиома*** – это утверждение, которое принимается без доказательства.

📖 Термин «*аксиома*» впервые встречается у *Аристотеля* (384–322 г.г. до н.э.) и пришёл в математику от древнегреческих философов. Происходит он от греческого слова $\alpha\xi\iota o$, которое переводится как «важность», «уважение», «авторитет».

<u>*1 группа аксиом (аксиомы связи или принадлежности)*</u>. В них определяются свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей, выраженных словом «принадлежать».

1-2. Существует единственная прямая, проходящая через две данные точки.

3. Существуют три точки, не принадлежащие общей прямой.

4-5. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. На плоскости существует по крайней мере одна точка.

6. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит ей.

7. Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют и ещё одну общую точку.

8. Существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

<u>*2 группа аксиом (аксиомы порядка)*</u>. Они выражают свойства взаимного расположения точек на прямой, определяют термин «лежать между».

1. Если точка B лежит между точками A и C, то она лежит между точками C и A.

2. Для любых точек A и B существует точка C, такая, что B будет лежать между A и C.

3. Для любых точек *A, B, C* существует только одна точка, лежащая между двумя другими.
4. *Аксиома Паша*. Пусть точки *A, B, C* – три точки, не лежащие на одной прямой и *a* – некоторая прямая в плоскости *ABC*, не содержащая ни одной из точек *A, B, C*. Если прямая а проходит через точку отрезка *AB,* то она проходит также либо через точку *AC*, либо через точку отрезка *BC*.

3 группа аксиом (аксиомы равенства, конгруэнтности).

1. Если *A* и *B* – две точки на прямой *a* и A' – точка на той же или на другой прямой a', то всегда можно найти по данную сторону прямой a' от точки A' одну и только одну точку B', такую, что $AB = A'B'$.
2. Если отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку *AB*, то они конгруэнтны друг другу.
3. Пусть *AB* и *BC* – два отрезка на прямой *a*, не имеющие общих внутренних точек и пусть $A'B'$ и $B'C'$ – два отрезка на той же или на другой прямой a', тоже не имеющие общих точек. Если при этом $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, то $AC \equiv A'C'$.
4. Пусть даны: угол между лучами h и k на плоскости α, прямая a' на этой же или другой плоскости α', задана определённая сторона плоскости α' относительно прямой a'. Пусть h' – это луч прямой a', исходящий из точки O'. Тогда на плоскости α' существует единственный луч k', такой, что $\angle(h;k) \equiv \angle(h';k')$ и при этом все внутренние точки последнего угла лежат по заданную сторону от прямой a'.
5. Пусть *A, B, C* – три точки, не лежащие на одной прямой и A', B', C' – тоже три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, то $BC \equiv B'C'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

4 группа аксиом (аксиомы непрерывности).

1. *Аксиома Архимеда*. Пусть *AB* и *CD* – произвольные отрезки. Тогда на прямой *AB* существует конечное число точек $A_1, A_2, ..., A_n$, расположенных так, что точка A_1 лежит между *A* и A_2, точка A_2 – между A_1 и A_3, …, причём отрезки $AA_1, A_1A_2, ...$ конгруэнтны отрезку *CD* и точка *B* лежит между *A* и A_n.
2. *Аксиома Кантора*. Если существует бесконечная последовательность вложенных отрезков, то существует такая точка α, которая принадлежит всем отрезкам.

5 группа аксиом (параллельности).

В плоскости, определяемой прямой *a* и не лежащей на ней точкой *A* существует не более одной прямой, проходящей через точку *A* и не пересекающей прямую *a*.

Геометрия строится **дедуктивно** или **аксиоматически**. Это означает, что все теоремы (предложения) выводятся чисто логическим путём из нескольких предложений этой же теории, принятых за исходные (аксиомы). Аксиоматический метод – наиболее характерный метод в математике.

§ 2. Параллельные и перпендикулярные прямые на плоскости. Теорема Фалеса

Две прямые на плоскости называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек. Обозначение: a ∥ b.

Кроме случая параллельности прямых могут быть ещё два случая взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1) прямые могут иметь бесконечно много общих точек (т.е. ***совпадать***), другими словами, каждая точка прямой a принадлежит прямой b и, наоборот, каждая точка прямой b принадлежит прямой a. В таком случае пишут: $a \equiv b$;

2) две прямые a и b на плоскости могут иметь одну общую точку, т.е. ***пересекаться***.

В связи с этим можно дать иное определение параллельных прямых: две прямые на плоскости называются ***параллельными***, если они не пересекаются.

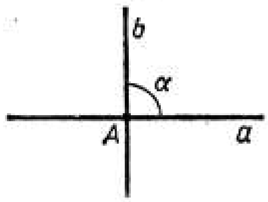


Рис. 9

Пусть a и b – две пересекающиеся прямые (Рис. 9). При пересечении этих прямых образуются четыре угла. Пусть α – один из этих углов. Тогда любой из остальных трех углов будет либо смежным с углом α, либо вертикальным с углом α. Отсюда следует, что если один из углов прямой, то остальные углы тоже прямые. В этом случае мы говорим, что прямые пересекаются под прямым углом.

Две прямые называются ***перпендикулярными***, если они пересекаются под прямым углом. Обозначение: $a \perp b$.

Отметим свойство перпендикулярных прямых.

1^0) *Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую и притом только одну.*

Перпендикуляром к прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, имеющий концом точку их пересечения. Этот конец называется ***основанием перпендикуляра***.

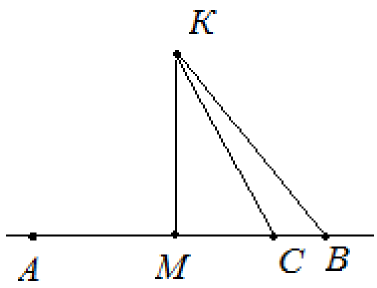


Рис. 10

Пусть *AB* – прямая. *M* – основание перпендикуляра, опущенного на неё из точки *K*; возьмём на *AB* произвольную точку *C*, отличную от *M*, и соединим её с точкой *K*. Полученная прямая образует с *AB* угол, отличный от прямого, и называется ***наклонной***. Точку *C* называют ***основанием наклонной***, а отрезок *CM* – ***проекцией наклонной***.

2^0) *Через точку K можно провести бесконечно много наклонных к AB.*

3^0) *Если из данной точки K к одной и той же прямой AB проведены перпендикуляр и наклонная, то наклонная длиннее перпендикуляра.*

4^0) *Из двух наклонных, проведённых из одной точки K к прямой AB больше та, которая имеет большую проекцию.*

5^0) *Если две различные наклонные, проведённые к прямой AB из одной и той же точки K равны, то их основания лежат по разные стороны от основания пер-*

пендикуляра, опущенного на AB из той же точки, на равных расстояниях от него.
6^0) *Пусть две равные наклонные проведены из точки K к прямой AB. Проводя прямую через K и середину отрезка между основаниями наклонных, получим перпендикуляр к прямой AB*

Отметим свойство параллельных прямых.

7^0) *Две различные прямые на плоскости, порознь параллельные третьей прямой, параллельны между собой.*

Рассмотрим пару параллельных прямых *AB* и *CD*, а также какую-либо прямую *m*, не параллельную им (***секущую***).

При пересечении двух параллельных прямых, лежащих в одной плоскости, третьей прямой (Рис.11) образуется восемь углов:

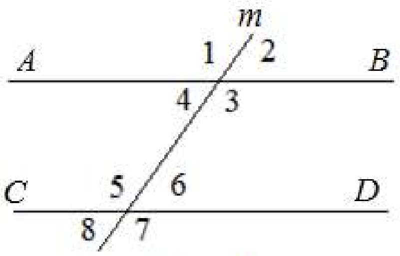


Рис. 11

соответственные углы:
$\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 3$ и $\angle 7$;
внутренние односторонние: $\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$;
внешние односторонние: $\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$;
внутренние накрест лежащие: $\angle 4$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 5$;
внешние накрест лежащие: $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$.

Имеют место свойства:

8^0) *Соответственные углы равны*, т.е. $\angle 1 = \angle 5$; $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 4 = \angle 8$; $\angle 3 = \angle 7$.
9^0) *Внутренние накрест лежащие углы равны*, т.е. $\angle 4 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 5$.
10^0) *Внешние накрест лежащие углы равны*, т.е. $\angle 1 = \angle 7$; $\angle 2 = \angle 8$.
11^0) *Односторонние* (*как внутренние, так и внешние*) углы в сумме составляют 180°, т.е. $\angle 1 + \angle 8 = 180°$; $\angle 2 + \angle 7 = 180°$; $\angle 4 + \angle 5 = 180°$; $\angle 3 + \angle 6 = 180°$.
12^0) *Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна* 180°, *то прямые параллельны.*
13^0) *Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180°.*
14^0) *Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.*
15^0) *Различные прямые порознь перпендикулярные третьей прямой, параллельны между собой.*
16^0) *Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой.*

Рассмотрим также свойства углов с параллельными или перпендикулярными сторонами:

17^0) *Если стороны a и b одного угла соответственно параллельны сторонам c и d другого угла и одинаково*

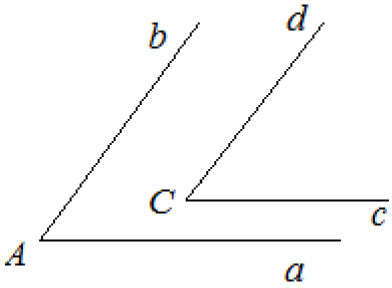


Рис. 12

с ним направлены, то такие углы равны, т.е. если a ∥ b *и* b ∥ d*, то* $\angle A = \angle C$ (см. Рис 12).

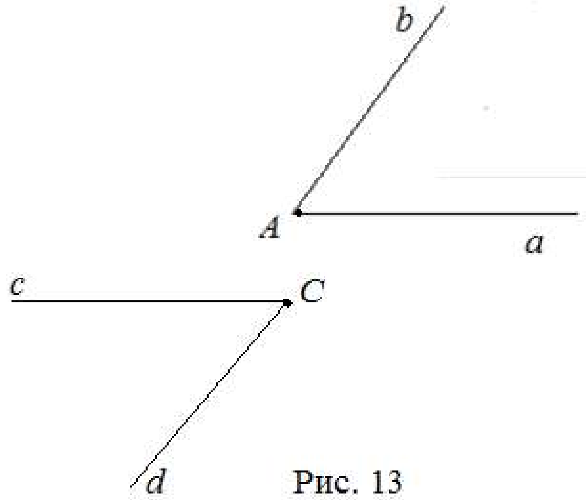


Рис. 13

18^0) *Если стороны a и b одного угла соответственно параллельны сторонам c и d другого угла, но противоположно направлены, то такие углы также равны, т.е.* $\angle A = \angle C$ (см. Рис 13).

19^0) *Если стороны a и c параллельны и одинаково направлены, а стороны b и d противоположно направлены, то углы* $\angle A$ и $\angle C$ дополняют друг друга до развёрнутого угла, т.е. $\angle A + \angle C = 180^0$.

20^0) *Углы с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо дополняют друг до развёрнутого угла*.

Теорема (Фалеса). *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне*.

Теорема (о пропорциональных отрезках). П*араллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки*.

🕮 *Фалес Милетский* (ок. 625– ок. 547 г. до н.э.) древнегреческий философ, математик и астроном, основатель геометрии.

§ 3. Основные планиметрические фигуры, их признаки, свойства, метрические отношения в них

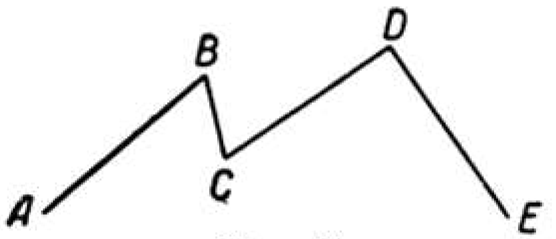


Рис. 14

Если на плоскости задано несколько точек, не лежащих на одной прямой, то их можно последовательно, в произвольном порядке соединить отрезками прямых линий. Совокупность этих орезков называется ***ломаной*** линией.

Отрезки *AB, BC, CD, DE* (см. Рис. 14) – **звенья** ломаной. Точки *A, B, C, D,E* – ***вершины*** ломаной.

Ломаная называется ***выпуклой***, если все её звенья лежат по одну сторону от каждого из них, если их неограниченно продолжить. Ломаная называется ***замкнутой***, если её начало и конец совпадают.

Многоугольником на плоскости или ***одномерным многоугольником*** называется фигура, образованная плоской замкнутой ломаной. Звенья ломаной, то есть, отрезки, называются ***сторонами многоугольника***. ***Смежные*** стороны имеют общую точку, которая не является внутренней точкой для этих отрезков. Эта общая точка называется ***вершиной***. При каждой вершине многоугольника находится один из его углов. Вершины, принадлежащие одной стороне, называются ***смежными***. ***Диагональ*** – это отрезок, соединяющий две несмежные вершины.

Многоугольник на плоскости называется ***простым***, если его стороны не пересекаются во внутренних точках и в вершинах сходятся лишь две стороны.

Теорема Жордана. Всякий плоский многоугольник делит плоскость на две области, в одной из которых содержатся целые прямые (она называется внешней), в другой – не содержатся целые прямые (внутренняя). Соответственно точки внешней и внутренней области называются внешними и внутренними.

Двумерным многоугольником называется соединение одномерного многоугольника с множеством внутренних точек. При этом одномерный многоугольник называется контуром двумерного. Для двумерного многоугольника имеют смысл понятия выпуклости и связности.

Теорема. Сумма внутренних углов простого многоугольника равна

$$\boxed{180^0(n-2)=2d(n-2).} \qquad (3.1)$$

Доказательство: проведём методом математической индукции

1) Проверим для $n=3$: $180^0(3-2)=180^0\cdot 1=180^0$ – истинно.

2) Пусть верно для $n\le k$, то есть, если $k_1\le k$, то $\sum уг.=180^0(k_1-2)$.

3) Рассмотрим многоугольник с числом сторон $n=k+1$. Его можно разбить на два простых многоугольника с числом сторон n_1 и n_2, где $n_1<n$ и $n_2<n$. Пусть $n_1\le k$, $n_2\le k$ и $n_1+n_2=n+2$. Для этих двух многоугольников выполняется допущение и, следовательно, сумма внутренних углов искомого многоугольника: $180^0(n_1-2)+180^0(n_2-2)=180^0(n_1+n_2-4)=180^0(n+2-4)=180^0(n-2)$.

Что требовалось доказать.

Многоугольник (как и вообще любая плоская фигура) может рассматриваться как множество, состоящее из точек плоскости, и называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя точками он содержит соединяющий их отрезок. Иначе, многоугольник называется ***выпуклым***, если он лежит по одну сторону от любой прямой, соединяющей его соседние вершины.

На Рис. 15 слева изображён выпуклый многоугольник (точнее четырёхугольник), а справа – невыпуклый.

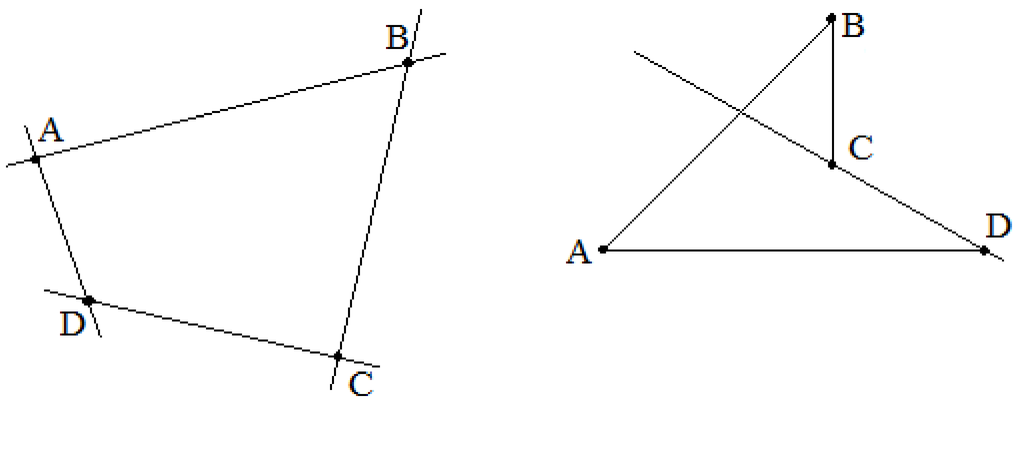


Рис. 15

Простой многоугольник называется ***правильным***, если все его стороны одинаковы и все углы равны между собой. Существование правильных многоугольников обеспечивается возможностью их построения делением окружности на равные части.

Теорема. Всякий правильный многоугольник является выпуклым.

Равноугольным или ***полуправильным*** называется многоугольник, у которого углы равны, а стороны равны через одну.
Способ их построения – метод среза.

Многоугольники классифицируются на виды в первую очередь в зависимости от количества сторон.

Треугольник **–** это многоугольник, у которого три стороны. Треугольник относится к простейшим геометрическим фигурам. Очевидно, всякий треугольник является выпуклой фигурой.

Свойства треугольника, изучающиеся в школе, за редким исключением, известны с античности. Дальнейшее изучение треугольника началось в XVII веке: была доказана теорема *Дезарга* (1636), открыты некоторые свойства точки *Торричелли* (1659). В XVIII веке была обнаружена *прямая Эйлера* и *окружность шести точек* (1765). В 1828 году была доказана *теорема Фейербаха*. В начале XIX века была открыта точка *Жергонна*. Над созданием совокупности фактов, называемых в настоящее время *геометрией треугольника*, работали *Пифагор, Евклид*, *Архимед*, *Менелай, Чева*, *Дезарг*, *Торричелли*, *Паскаль*, *Лейбниц*, *Ньютон*, *Эйлер*, *Лагранж*, *Жергонн*, Понселе и многие другие.

Но его роль определяется разнообразием практических применений. Изучение многих геометрических фигур осуществляется через разложение их на треугольники (*триангуляцию*) и раскрытие зависимостей между элементами этих треугольников. Известно, например, что всякий плоский многоугольник разлагается на треугольники (триангулируем) его диагоналями, причём все элементы многоугольника (стороны, углы, диагонали, площадь и т.д.) вполне определяются соответствующими элементами этих треугольников. В частности, выпуклый *n*-угольник разлагается на *n-2* треугольника диагоналями, проведёнными из любой его вершины.

Разложение на треугольники криволинейных фигур уже невозможно. Однако в тех случаях, когда криволинейная фигура может быть получена через предельный переход от вписанного в неё многоугольника, разлагают на треугольники этот многоугольник и через предельный переход устанавливают связи элементов криволинейной фигуры с деформирующимися (в процессе предельного перехода) элементами этих треугольников. В соответствии с этим при изучении треугольника актуальны понятия вписанной и описанной окружностей.

Так, например, поступают в геометрии при изучении круга и окружности. Эти криволинейные фигуры получаются через предельный переход от вписанного в них правильного многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон; причём площадь круга оказывается равной пределу суммы площадей треугольников, на которые разлагается вписанный многоугольник, а длина окружности равна пределу суммы соответствующих сторон этих треугольников.

В технической практике при сооружении различных конструкций из стержней учитывается ещё одна особенность треугольника: конструкции треугольной формы, сделанные из стержней, обладают свойством «жёсткости» и «устойчивости», тогда как конструкции в форме многоугольника легко деформируются. Именно это обстоятельство заставляет инженеров при сооружении различных арок, мостов, перекрытий для крыш и т.п. «разлагать» конструкции многоугольной формы на треугольные, внесением в них вспомогательных стержней-укосов (Рис. 16).

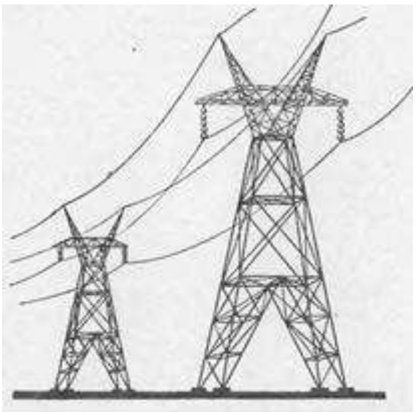


Рис. 16

Таким образом, как в теории, так и на практике треугольник служит существенным элементом геометрических фигур. Поэтому треугольник подробно изучается в геометрии.

Итак, ***треугольники*** – это геометрические фигуры, которые имеют три стороны, три угла и их площадь ограничена тремя точками и тремя отрезками, которые соединяют эти точки.

§ 4. Треугольник и его основные элементы. Классификация треугольников

В самом конце предыдущего пункта дано определение треугольника. Приведём иные определения треугольника:

1) Замкнутая ломаная линия, состоящая из трех звеньев, называется ***треугольником***.

2) ***Треугольник*** **–** это многоугольник, у которого три стороны.

3) ***Треугольником*** называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. При этом точки называются ***вершинами*** треугольника, а отрезки – ***сторонами*** треугольника.

Основными элементами треугольника являются его *стороны* и *углы*.

Треугольники различаются между собой, во-первых, по характеру углов, а во-вторых, по характеру сторон.

По *характеру углов* выделяют следующие виды треугольников:

1) ***остроугольный***, если все его углы острые;

2) ***прямоугольный***, если один из его углов прямой; сторона, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой, а стороны, образующие прямой угол, катетами;

3) ***тупоугольный***, если один из его углов тупой.

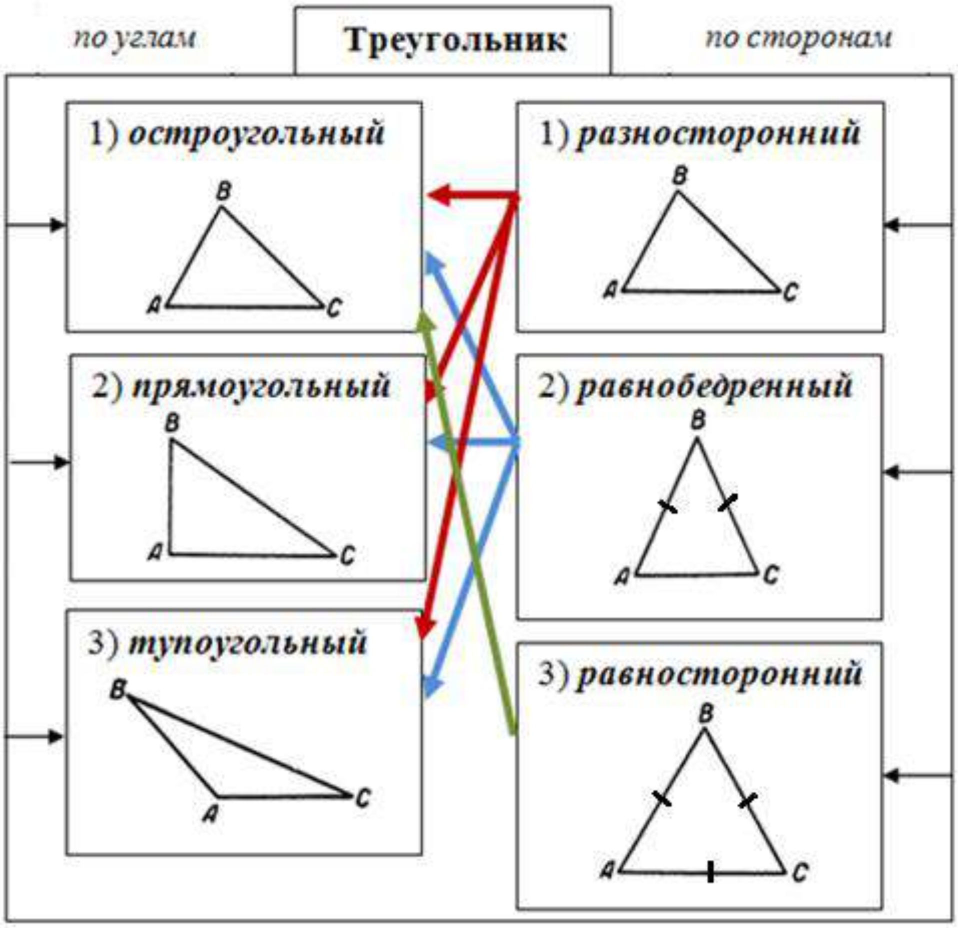
По характеру сторон классифицируют следующие виды треугольников:

1) ***разносторонний***, если все его стороны имеют разную длину;

2) ***равнобедренный***, если две его стороны равны между собой; сторона, не равная двум другим, называется ***основанием***;

3) ***равносторонний*** (правильный), если все три его стороны имеют одинаковую длину.

Представим классификацию треугольников в виде схемы.



К основным линиям треугольника относятся: медиана, биссектриса, высота и серединный перпендикуляр.

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы угла, который соединяет вершину угла с точкой, которая лежит на противолежащей стороне треугольника.

Высота треугольника – это перпендикуляр, который проведён из вершины фигуры к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

Серединным перпендикуляром (***медиатрисой***) треугольника называют прямую, которая проходит через середину отрезка (стороны треугольника) перпендикулярно ему.

§ 5. Углы треугольника. Сумма углов треугольника

Углы, смежные с углами треугольника, называются его ***внешними углами***. Каждый такой угол образован стороной треугольника и продолжением одной из других сторон.

По этой причине углы треугольника будем называть ***внутренними углами*** треугольника.

Теорема 1. *Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.*

Доказательство. Пусть ΔABC – произвольный треугольник. Продолжим

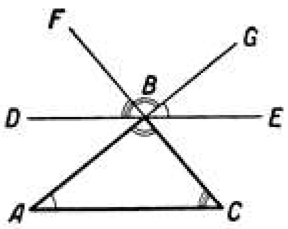


Рис. 17

стороны *AB* и *BC* (Рис.17). Через вершину *B* проведём прямую $DE \parallel AC$, тогда $\angle CAB = \angle GBE$, как соответственные углы при параллельных прямых *AC*, *DE* и секущей *GA*; $\angle \mathrm{ABC} = \angle FBG$, как вертикальные углы; $\angle BCA$ = $\angle DBF$, как соответственные углы при параллельных *AC* и *DE* и секущей *FC*. Но углы *DBF*, *FBG* и *GBE* образуют все вместе развёрнутый угол *DBE*, а потому $\angle DBF + \angle FBG + \angle GBE = 180°$. Заменяя в последнем равенстве углы *DBF*, *FBG* и *GBE* соответственно равными им углами *ACB*, *ABC*, *BAC*, получим:

$$\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180°.$$

🕮 Сумма углов любого треугольника равна 180° – это соотношение между углами треугольника, которое выражается формулой $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = 180°$ (найдена греческим философом и математиком *Фалесом* (624-548 гг. до н.э.), доказана в III в до н.э. *Евклидом*).

Следствие 1. *Если один из углов треугольника прямой или тупой, то оба другие его угла острые.*

Следствие 2. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных.*

Действительно, возьмём внешний угол *AFB* (Рис. 17):
$\angle ABF = \angle ABD + \angle DBF$ (1), но $\angle ABD = \angle BAC$ (как накрест лежащие при секущей *AB*), $\angle DBF = \angle BAC$ (как соответственные при секущей *BC*), а потому, замещая в равенстве (1) углы *ABD* и *DBF* соответственно равными им углами *BAC* и *BCA*, получим $\angle ABF = \angle BAC + \angle BCA$.

Следствие 3. *Внешний угол треугольника больше каждого из его внутренних углов, с ним не смежных* (так как сумма больше каждого из слагаемых).

Следствие 4. *Если два треугольника имеют по два равных угла, то и третьи их углы равны между собой*.

Следствие 5. *Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна* 90°.

Следствие 6. *Сумма острых углов тупоугольного треугольника меньше прямого угла.*

Следствие 7. *У каждого треугольника, по крайней мере, два острых угла.*

Следствие 8. *У равностороннего треугольника все углы равны, каждый из них по* 60°.

§ 6. Равнобедренный треугольник

Теорема 1. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны*.

Доказательство. Дан треугольник ABC; $AB = BC$ (Рис.18). Требуется доказать, что $\angle CAB = \angle ACB$.

Рис. 18

Проведём биссектрису BD угла ABC и перегнём плоскость чертежа по линии BD так, чтобы правая её часть совместилась с левой частью. При этом линия BC совпадёт с линией AB, так как $\angle CBD = \angle ABD$. Точка C совпадёт с точкой A, так как $AB = BC$. Следовательно, отрезок DC сольётся с отрезком DA, а потому $\angle ACB$ совместится с $\angle$CAB.

Поэтому $\angle ACB = \angle CAB$.

Следствие 1. *В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине служит осью симметрии треугольника*.

Действительно, так как при перегибании плоскости чертежа по биссектрисе $\angle CBD$ совмещается с $\angle ABD$.

Следствие 2. *Углы при основании равнобедренного треугольника всегда острые*; *внешний угол при основании равнобедренного треугольника всегда тупой*.

Теорема 2. *Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный*.

Теорема 3. *В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой*.

§ 7. Простейшие соотношения между сторонами и углами треугольника

Теорема 1. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол*.

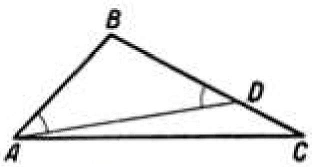


Рис. 19

Доказательство. Дано: в треугольнике ABC сторона BC больше AB (Рис. 19). Требуется доказать, что $\angle A$ больше $\angle C$.

Отложим на стороне BC отрезок $BD = AB$ и соединим точки A и D прямой линией. Треугольник ABD – равнобедренный, так как $AB = BD$; следовательно, $\angle ADB = \angle DAB$. Но угол $\angle ADB$ больше угла $\angle C$ (как внешний угол треугольника ADC), следовательно, и $\angle DAB$ больше $\angle C$, а тогда и подавно угол BAC больше угла C, или $\angle A > \angle C$.

Теорема 2 (обратная к Т1). *В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.*

Доказательство. Дано: $\angle A > \angle C$ (Рис. 19). Требуется доказать, $BC > AB$. AB не может быть больше BC, так как тогда, в силу Теоремы 1, угол C был бы больше угла A, что противоречит условию теоремы. Точно также AB не может быть равно BC, так как тогда ΔABC был бы равнобедренным и в нём угол A и угол C были бы равны. Следовательно, $AB < BC$, или $BC > AB$.

Следствие 1. *Угол, лежащий против меньшей стороны треугольника, всегда острый.*

Следствие 2. *В тупоугольном треугольнике наибольшая сторона лежит против тупого угла.*

Следствие 3. *В прямоугольном треугольнике гипотенуза всегда больше катета.*

Теорема 3. *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон, но больше их разности.*

Доказательство. Дан ΔABC (Рис. 20). Требуется доказать, что $AB + BC > AC$.

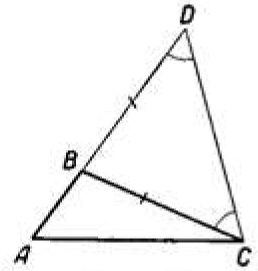


Рис. 20

Продолжим сторону AB и отложим на её продолжении от точки B отрезок BD, равный BC. Соединив точки C и D прямой линией, получим ΔCBD. В нём $BD = BC$ и, следовательно, угол BCD равен углу BDC (см. **1.7.**), а потому угол ACD больше угла ADC. Следовательно, в треугольнике ACD сторона $AD > AC$, но $AD = AB + BD$, а так как $BD = BC$, то $AD = AB + BC$. Значит, $AB + BC > AC$.

Вычитая из обеих частей последнего неравенства BC, получим: $AB > AC - BC$.

Замечание. Можно дать иную формулировку **Теоремы 3**. *У каждого треугольника сумма двух сторон больше третьей его стороны*.

Эта формулировка *выражает условие существования треугольника*. Точнее она задаёт *неравенство треугольника*. Для всякого треугольника можно записать три неравенства треугольника:

$$AB < AC + BC,$$
$$AC < AB + BC,$$
$$BC < AB + AC.$$

§ 8. Равенство треугольников. Признаки равенства треугольников

Исходя из интуитивных представлений, можно утверждать, что два треугольника считаются *равными*, если их можно совместить наложением друг на друга. Дадим более точное определение равных треугольников.

Треугольники называются ***равными***, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

Теорема 1 (I признак равенства треугольников). *Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны* (Рис. 21).

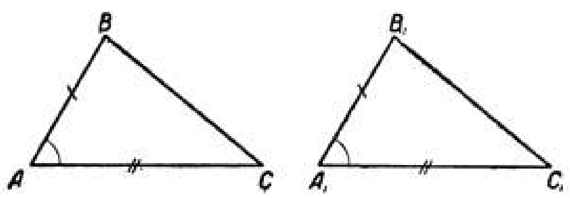


Рис. 21

Теорема 2 (II признак равенства треугольников). *Если сторона и два прилежащие к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны* (Рис. 22).

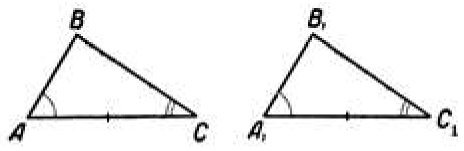


Рис. 22

Теорема 3 (III признак равенства треугольников). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны* (Рис. 23).

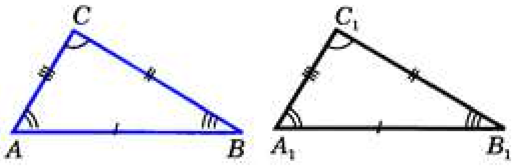


Рис. 23

§ 9. Прямоугольный треугольник

Напомним, что в параграфе ***5.*** было дано следующее определение: треугольник называется ***прямоугольным***, если один из его углов прямой; сторона, лежащая против прямого угла, называется ***гипотенузой***, а стороны, образующие прямой угол, ***катетами***.

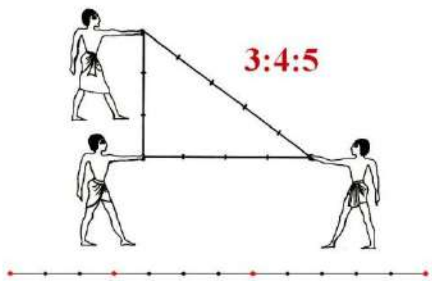
Сформулируем признаки равенства прямоугольных треугольников:

Теорема 1. *Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны*.

Теорема 2. *Если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны*.

Теорема 3. *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны соответственно гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны*.

🕮 В Древнем Египте для построения прямого угла следующий приём: брали гибкий шнур (верёвку), на нём делали засечки в виде узелков на расстоянии 3 ед., 4 ед. и 5 ед. длины. Затем этот шнур выкладывался на грунте, в который можно было вставить колышки. Треугольник, получаемый путём натяжения шнура около колышков (до замкнутой фигуры) получался прямоугольным (см. картинку ниже).



Треугольник со сторонами, кратными числам 3; 4; 5, т.е. имеющими длины **3*k***; **4*k***; **5*k***, называется ***египетским треугольником***.

Прямоугольный треугольник может быть равнобедренным. Отметим его свойства:

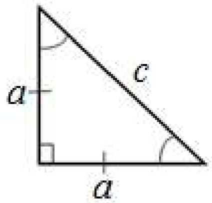


Рис. 24

1^0) *В равнобедренном прямоугольном треугольнике углы при основании равны по* 45°.

2^0) *Гипотенуза* ***c*** *прямоугольного равнобедренного треугольника связана с катетом* ***a*** *этого треугольника по формуле*

$$c = \sqrt{2} \cdot a.$$

(см. Рис. 24)

Стороны прямоугольного треугольника связаны с его острыми углами.

Обозначим стороны прямоугольного треугольника малыми буквами латинского алфавита (катеты *a*, *b*), (гипотенузу *c*). Острые углы треугольника – малыми буквами греческого алфавита α, β (Рис. 25).

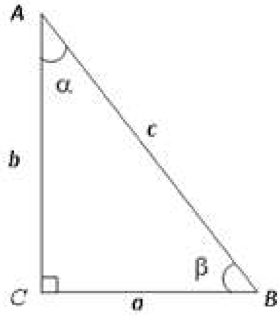


Рис. 25

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе. Пишут: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ или $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Пишут: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ или $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$.

Очевидно, $\sin\alpha = \cos\beta$, а также $\cos\alpha = \sin\beta$.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету. Пишут: $tg\,\alpha = \dfrac{a}{b}$ или $tg\,\beta = \dfrac{b}{a}$.

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету. Пишут: $ctg\,\alpha = \dfrac{b}{a}$ или $ctg\,\beta = \dfrac{a}{b}$.

Очевидно, имеют место равенства $tg\,\alpha = ctg\,\beta$, а также $ctg\,\alpha = tg\,\beta$.

3^0) *Катет, противолежащий острому углу прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус соответствующего угла*, т.е.

$$\boxed{a = c \cdot sin\alpha,} \tag{9.1}$$

$$\boxed{b = c \cdot sin\beta.} \tag{9.2}$$

4^0) *Катет, прилежащий острому углу прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус соответствующего угла*, т.е.

$$\boxed{b = c \cdot cos\alpha,} \tag{9.3}$$

$$\boxed{a = c \cdot cos\beta.} \tag{9.4}$$

5^0) *Катет, противолежащий острому углу прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс соответствующего угла*, т.е.

$$\boxed{a = b \cdot tg\alpha,} \tag{9.5}$$

$$\boxed{b = a \cdot tg\beta.} \tag{9.6}$$

6^0) *Катет, лежащий против угла в* $30°$, *равен половине гипотенузы*.

Теорема 4 (Пифагора). *Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*, т.е.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.} \tag{9.7}$$

Доказательство. Исходя из свойств 3^0) и 4^0), имеем: $a = c \cdot sin\alpha$ и $b = c \cdot cos\alpha$, т.е.

Взведём обе части каждого из равенств в квадрат, а затем сложим почленно полученные результаты. Тогда

$$a^2 + b^2 = c^2 \cdot sin^2\alpha + c^2 \cdot cos^2\alpha,$$

или

$$a^2 + b^2 = c^2 \cdot \left(sin^2\alpha + cos^2\alpha\right).$$

Используя основное тригонометрическое тождество $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, окончательно получаем

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

§ 10. Основные теоремы, выражающие зависимости между сторонами и углами треугольника

Зависимости между сторонами и углами треугольника выражаются в нескольких теоремах. Пусть дан произвольный треугольник *ABC* (Рис. 26).

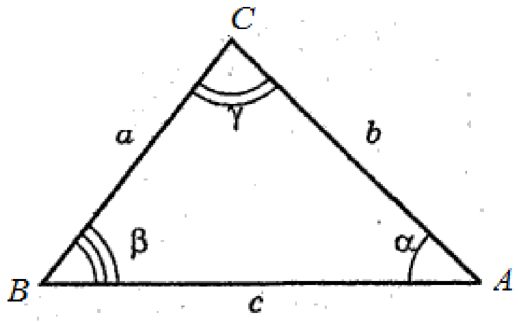


Рис. 26

Теорема (синусов). *Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.*

📖 Эта теорема была найдена индийским математиком *Брахмагуптой* (598-660), доказана позднее азербайджанским учёным *Насирэддином* (1201-1274).

Замечание. Основная формулировка теоремы синусов может быть уточнена: *во всяком треугольнике отношение сторон к синусам противолежащих углов есть величина постоянная, равная диаметру описанной окружности*, т.е. имеет место формула

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,} \tag{10.1}$$

где R – радиус окружности, описанной около данного треугольника.

Теорема (косинусов). *Квадрат длины любой стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон без удвоенного произведения длин этих сторон на косинус угла между ними*.

Таким образом, имеют место формулы:

$\boxed{a^2=c^2+b^2-2cb\cos\alpha;}$ $\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma;}$ $\boxed{b^2=c^2+a^2-2ca\cdot\cos\beta.}$

📖 Теорема косинусов была найдена выдающимся хорезмским учёным-математиком *аль-Беруни* (973-1048).

Теорема косинусов позволяет легко осуществить классификацию треугольников по углам. Известно, что $\cos 90^0=0$, в таком теорему Пифагора можно воспринимать как следствие теоремы косинусов. Кроме того косинус тупого угла является отрицательным числом, а косинус острого угла – величина положительная. Если a,b,c – стороны треугольника, то:

- при $c^2=a^2+b^2$ треугольник ***прямоугольный***;
- при $c^2>a^2+b^2$ треугольник ***тупоугольный***;
- при $c^2<a^2+b^2$ треугольник ***остроугольный***.

Соотношения между углами и сторонами треугольника, выраженные в последних теоремах, называют *основными.* Эти соотношения выражают необходимые и достаточные условия, при выполнении которых положительные числа *a, b, c* выражают длины сторон некоторого треугольника, а положительные, меньшие π, числа *A, B, C* выражают величины соответствующих углов этого треугольника.

Замечание. В геометрии имеется и теорема тангенсов. Но её обычно не относят к основным теоремам. Она используется как вспомогательный факт.

Теорема (тангенсов). *Разность двух сторон треугольника относится к их сумме, как тангенс полуразности противолежащих углов к тангенсу полусуммы этих углов*:

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}.} \tag{10.2}$$

Действительно, в силу теоремы синусов имеем: $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, $\frac{b}{\sin\beta}=2R$.

Откуда получаем: $a = 2R \cdot sin\alpha$, $b = 2R \cdot sin\beta$.

Далее почленно сложим и вычтем обе части двух последних равенств, получим:

$$a - b = 2R \cdot (sin\alpha - sin\beta);\ a + b = 2R \cdot (sin\alpha + sin\beta).$$

Выполнив преобразования разности и суммы синусов, будем иметь:

$$a - b = 4R \cdot sin\frac{\alpha - \beta}{2}cos\frac{\alpha + \beta}{2};\ a + b = 4R \cdot sin\frac{\alpha + \beta}{2}cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Разделив почленно эти равенства, получим доказываемую формулу:

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{4R \cdot sin\frac{\alpha - \beta}{2}cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{4R \cdot sin\frac{\alpha + \beta}{2}cos\frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{tg\frac{\alpha - \beta}{2}}{tg\frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

🕮 Эту формулу часто называют ещё ***формулой Региомонтана***. Такое название она получила в честь установившего её немецкого математика и астронома *Иоганна Мюллера* (1436–1476), известного более под псевдонимом *Региомонтан*.

§ 11. Периметр, полупериметр и площадь треугольника

Для всякой плоской геометрической фигуры важными её характеристиками являются периметр и площадь.

Под ***периметром*** геометрической плоской фигуры подразумевается суммарная длина её границ.

🕮 Слово «периметр» ($\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$) образовано слиянием двух греческих слов $\pi\varepsilon\rho\iota$ (около) и $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\iota\nu$ (измерять).

Так как границами треугольника являются его стороны, то ***периметр треугольника*** равен сумме длин всех его сторон.

Периметр принято обозначать буквой *P*. Таким образом, имеет место формула

$$\boxed{P = a + b + c.} \tag{11.1}$$

В геометрии очень часто приходится иметь дело с величиной, численно равной половине от периметра (***полупериметром***) фигуры.

Полупериметром треугольника называется полусумма длин его сторон, т.е.

$$\boxed{p = \frac{P}{2} = \frac{a + b + c}{2}.} \tag{11.2}$$

1^0) Имеет место «***тождество полупериметра***»

$$\boxed{(p - a) + (p - b) + (p - c) = p.} \tag{11.3}$$

Действительно, раскрывая скобки в левой части формулы и выполняя перегруппировку слагаемых, получим $3p - (a + b + c) = p$ или $3p - 2 \cdot \left(\frac{a + b + c}{2}\right) = p$.

Видим, что в скобке образовалось выражение, равное полупериметру треугольника, тогда $3p\text{-}2p = p$. Это и доказывает справедливость тождества (11.3).

Измерение площадей плоских фигур (в том числе и треугольников, многоугольников) происходит аналогично тому, как происходит измерение длин отрезков. За единицу измерения площадей принимается квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков. Площадь этого квадрата считается равной единице. Измерить площадь плоской фигуры – означает узнать, сколько раз единица измерения и её части укладываются в данной фигуре. Это число и принимается за его площадь при данной единице измерения. Площадь фигуры обозначают символом S.

В планиметрии, как, впрочем, и в стереометрии часто встречаются так называемые ***равновеликие фигуры***. Под таковыми понимаются плоские (или пространственные) фигуры, имеющие равную площадь (объём).

Под ***равносоставленными фигурами*** будем понимать такие фигуры, которые можно разрезать на одинаковое число соответственно равных частей. Это понятие обычно употребляют применительно только к многоугольникам (или многогранникам). Имеют место свойства, связывающие понятия «равновеликость» и «равносоставленность» фигур:

2^0) *Равносоставленные фигуры являются также и равновеликими*.

3^0) **Теорема (Бойяи–Гервина)** *Любые две простые равновеликие фигуры на плоскости (в том числе, равновеликие многоугольники) являются равносоставленными.*

Замечание. Имеет место и иная формулировка теоремы Бойяи–Гервина. *Если площади двух многоугольников равны, то любой из них можно разрезать на части, из которых можно сложить второй многоугольник.*

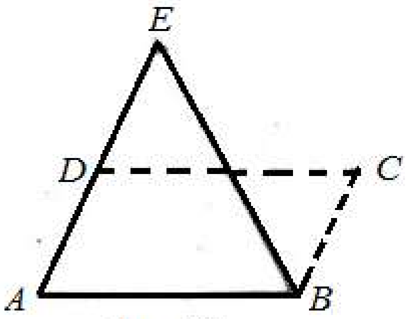


Рис. 27

🕮 К доказательству этого факта имеют отношение два исследователя: венгерский философ и математик *Янош Бойяи* (1802–1860), который показал справедливость этого утверждения в 1832 г., а также немецкий офицер и любитель математики П. Гервин, который пришёл к аналогичной мысли в 1833 г. Из второй формулировки теоремы Бойяи–Гервина, в частности следует, что путём разрезания любого многоугольника на части и их перекладыванием можно превратить этот многоугольник в равновеликий ему квадрат.

На этом основан «метод разбиения», который часто применяется для вычисления площадей плоских фигур (особенно многоугольников). Согласно этому методу: параллелограмм «разрезанием и перекладыванием» можно перевести в прямоугольник, треугольник превратить в параллелограмм и т.п.

В частности, *треугольник ABE равносоставлен с параллелограммом ABCD, имеющим то же основание и вдвое меньшую высоту* (Рис. 27).

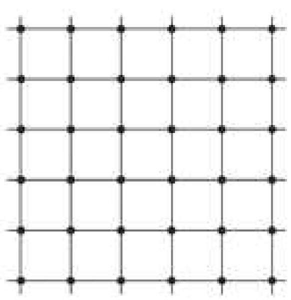


Рис. 28

Из истории математики известна так называемая *задача Минковского* (названа в честь известного немецкого математика *Германа Минковского* (1864–1909)), которая может служить хорошей иллюстрацией понятия площади произвольной фигуры.

Пусть плоскость разбита на квадраты со стороной, равной единице измерения отрезков. Вершины этих квадратов образуют так называемую *целочисленную решетку* и называются *узлами решетки* (Рис. 28). Формулировка задачи Минковского: дана произвольная фигура, площадь которой (при выбранной единице измерения) меньше 1. Доказать, что эту фигуру можно расположить так, что ни один из узлов целочисленной решетки не попадет на фигуру.

Для решения подобного рода задач удобно пользоваться теоремой, доказанной австрийским математиком, профессором университетов в Вене и Праге *Георгом Александром Пиком* (1859–1942).

Теорема (**Пика**). *Для любого простого (т.е. без самопересечений) многоугольника P на целочисленной решётке площадь вычисляется по формуле*: $S = B + \frac{Г}{2} - 1$*, где B – число узлов решётки, расположенных строго внутри фигуры, Г – число узлов решётки, расположенных на её границе (включая вершины)*.

Рассмотрим теперь произвольный треугольник. Выберем одну из его сторон и будем её считать основанием, не смотря на то, что обычно это понятие связано с равнобедренным треугольником. Под словом «высота» условимся понимать ту из высот треугольника, которая проведена именно к этому основанию. Поскольку треугольник является фигурой, которая равносоставлена с параллелограммом, у которого основание совпадает с основанием треугольника, а высота равна половине высоты треугольника (Рис. 27), то:

4^0) *Площадь всякого треугольника равна половине произведения его основания на высоту*.

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot h.} \tag{11.4}$$

5^0) *Площадь любого треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.*

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin\gamma;} \qquad \boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot c \sin\beta;} \qquad \boxed{S = \frac{1}{2} b \cdot c \sin\alpha.}$$

3^0) *Справедлива формула Герона*:

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.} \tag{11.5}$$

Доказательство. Из теоремы косинусов $\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$ (11.6). Из формулы $S = \frac{1}{2} b \cdot c \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2S}{bc}$ (11.7).

Возведём в квадрат обе части равенств (11.6) и (11.7) и сложим:

$$\cos^2\alpha=\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2cb}\right)^2;\ \sin^2\alpha=\frac{4S^2}{b^2c^2}.$$

$1=\left(\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2cb}\right)^2+\dfrac{4S^2}{b^2c^2}$ или $4(bc)^2=16S^2+\left(c^2+b^2-a^2\right)^2$. Откуда

$16S^2=4(bc)^2-\left(c^2+b^2-a^2\right)^2$. $16S^2=\left(2bc-b^2+a^2-c^2\right)\cdot\left(2bc+b^2-a^2+c^2\right)$.

$$16S^2=\left(a^2-(b-c)^2\right)\cdot\left((b+c)^2-a^2\right).$$

$$16S^2=(a-b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(b+c-a)\cdot(b+c+a).$$

Так как $2p=a+b+c$, то $16S^2=16\cdot p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Сокращая обе части последнего равенства на 16, и извлекая квадратный корень из оставшихся выражений, окончательно получим

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

📖 Формула (11.5) названа в честь греческого математика *Герона Александрийского*, жившего во второй половине I века н.э.

Получим ещё одну формулу, позволяющую находить площадь треугольника. Воспользуемся теоремой синусов, согласно которой, можем записать два соотношения: $b=\dfrac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}$, $c=\dfrac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Далее подставим найденные b и c в формулу площади $S=\dfrac{1}{2}b\cdot c\sin\alpha$. $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha=\dfrac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.

$$\boxed{S=\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}} \qquad (*)$$

Пусть в треугольнике известны сторона c и два, прилежащих к ней угла α и β, причём $ctg\alpha+ctg\beta>0$ (Рис. 29). Найдём площадь треугольника по имеющимся данным. Для этого сначала построим высоту h к стороне c, которая разделит её на два отрезка x и y.

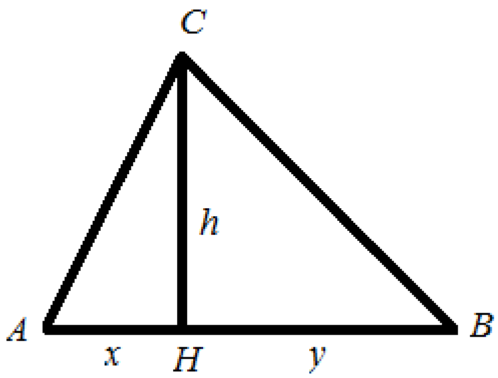


Рис. 29

Очевидно, что $x=h\cdot ctg\alpha$, $y=h\cdot ctg\beta$. Ясно, что $c=x+y$, тогда $c=h\cdot(ctg\alpha+ctg\beta)$. Откуда $h=\dfrac{c}{ctg\alpha+ctg\beta}$. Воспользуемся формулой $S=\dfrac{1}{2}c\cdot h$. Тогда $S=\dfrac{1}{2}c\cdot h=\dfrac{1}{2}\dfrac{c^2}{ctg\alpha+ctg\beta}$.

Окончательно:

$$\boxed{S=\frac{c^2}{2(ctg\alpha+ctg\beta)}} \qquad (**)$$

Получим теперь формулы, выражающие связи полупериметра треугольника с отдельными его сторонами, а также тригонометрическими функциями половинных углов треугольника.

6^0)
$$\boxed{sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{bc}}} \qquad (11.8)$$

Действительно, воспользуемся формулой $cos\alpha=\frac{c^2+b^2-a^2}{2cb}$ (11.6) и известной формулой половинного угла $1-cos\alpha=2sin^2\frac{\alpha}{2}$ (11.9). Подставим косинус из (11.6) в левую часть формулы (11.9), получим:

$$1-\frac{c^2+b^2-a^2}{2cb}=2sin^2\frac{\alpha}{2} \text{ или } \frac{2cb-c^2-b^2+a^2}{2cb}=2sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Выделим полный квадрат разности в числителе последней дроби:

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{2cb}=2sin^2\frac{\alpha}{2} \text{ или } \frac{(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{4cb}=sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Далее: $\dfrac{\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}{cb}=sin^2\frac{\alpha}{2}$, $\dfrac{\frac{a+b+c-2b}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}}{cb}=sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Замечаем, что в числителе дроби стоит полупериметр треугольника, тогда $\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{cb}=sin^2\frac{\alpha}{2}$. Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, окончательно получим формулу (11.8).

7^0)
$$\boxed{cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{bc}}} \qquad (11.10)$$

Действительно, воспользуемся формулой $cos\alpha=\frac{c^2+b^2-a^2}{2cb}$ (11.6) и известной формулой половинного угла $1+cos\alpha=2cos^2\frac{\alpha}{2}$ (11.11). Подставим косинус из (11.6) в левую часть формулы (11.11), получим:

$$1+\frac{c^2+b^2-a^2}{2cb}=2cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ или } \frac{2cb+c^2+b^2-a^2}{2cb}=2cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Выделим полный квадрат разности в числителе последней дроби:

$$\frac{(b+c)^2-a^2}{4cb}=cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ или } \frac{(b+c-a)\cdot(b+c+a)}{4cb}=cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Далее: $\dfrac{\dfrac{b+c-a}{2}\cdot\dfrac{a+b+c}{2}}{cb}=cos^2\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{\dfrac{b+c+a-2a}{2}\cdot\dfrac{a+b+c}{2}}{cb}=cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Замечаем, что в числителе дроби стоит полупериметр треугольника, тогда $\dfrac{p\cdot(p-a)}{cb}=cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, окончательно получим формулу (11.9).

8^0)
$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}} \qquad (11.12)$$

Действительно, т.к. $tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{sin\dfrac{\alpha}{2}}{cos\dfrac{\alpha}{2}}$, заменим числитель дроби с помощью выражения из формулы (11.8), а знаменатель – по формуле (11.10). Тогда

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{\dfrac{(p-b)\cdot(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\dfrac{p\cdot(p-a)}{bc}}}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}.$$

9^0)
$$\boxed{\frac{sin\dfrac{\alpha}{2}}{cos\dfrac{\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{a}{p}} \qquad (11.13)$$

Действительно, исходя из формул (11.8) и (11.10), можем записать соотношения: $sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)\cdot(p-c)}{bc}}$; $cos\dfrac{\beta}{2}=\sqrt{\dfrac{p\cdot(p-b)}{ac}}$; $cos\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{\dfrac{p\cdot(p-c)}{ab}}$.

Тогда $\dfrac{sin\dfrac{\alpha}{2}}{cos\dfrac{\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\gamma}{2}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{(p-b)\cdot(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\dfrac{p\cdot(p-b)}{ac}}\cdot\sqrt{\dfrac{p\cdot(p-c)}{ab}}}=\sqrt{\dfrac{a^2}{p^2}}=\dfrac{a}{p}$.

<u>*Замечание*</u>. Запишем формулы, аналогичные формуле (11.13), заменив соответствующие буквы:

$$\boxed{\frac{sin\dfrac{\beta}{2}}{cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot cos\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{b}{p} \quad (11.14);} \qquad \boxed{\frac{sin\dfrac{\gamma}{2}}{cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot cos\dfrac{\beta}{2}}=\frac{c}{p} \quad (11.15).}$$

Приведём сводку формул (без доказательств):

$$\boxed{\frac{sin(\alpha-\beta)}{sin(\alpha+\beta)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}} \qquad (11.16)$$

$$\boxed{\frac{tg\alpha}{tg\beta}=\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}} \qquad (11.17)$$

$$\boxed{\frac{a\cdot sin\alpha+b\cdot sin\beta+c\cdot sin\gamma}{4cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}} \qquad (11.18)$$

$$\boxed{a\cdot sin(\beta-\gamma)+b\cdot sin(\gamma-\alpha)+c\cdot sin(\alpha-\beta)=0} \qquad (11.19)$$

$$\boxed{\frac{a^2\cdot sin(\beta-\gamma)}{sin\alpha}+\frac{b^2\cdot sin(\gamma-\alpha)}{sin\beta}+\frac{c^2\cdot sin(\alpha-\beta)}{sin\gamma}=0} \qquad (11.20)$$

$$\boxed{\frac{1}{a}\cdot cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{b}\cdot cos^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{c}cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{p^2}{abc}} \qquad (11.21)$$

$$\boxed{a^2+b^2+c^2=4S\cdot(ctg\alpha+ctg\beta+ctg\gamma)} \qquad (11.22)$$

$$\boxed{S=\frac{1}{4}\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)\cdot tg\alpha} \qquad (11.23)$$

$$\boxed{\frac{a+b}{c}=\frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{sin\frac{\gamma}{2}}} \qquad (11.24)$$

$$\boxed{\frac{a-b}{c}=\frac{sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}}} \qquad (11.25)$$

<u>*Замечание*</u>. Формулы (11.24) и (11.25) называются *формулами Мольвейде*, названы они в честь немецкого математика *Карла Брандана Мольвейде* (1774–1825).

Ещё одним важным соотношением является так называемая ***теорема о проекциях***, суть которой выражается формулами (11.26):

$$\boxed{c=a\cdot cos\beta+b\cdot cos\alpha;\quad a=b\cdot cos\gamma+c\cdot cos\beta;\quad b=c\cdot cos\alpha+a\cdot cos\gamma} \qquad (11.26)$$

Эта теорема может быть сформулирована и так: *разность квадратов двух сторон треугольника равна разности квадратов их проекций на третью сторону*.

Приведём также несколько формул (без доказательств) для *прямоугольного треугольника*:

$$\boxed{sin2\alpha \cdot tg\beta = \frac{2b^2}{c^2}} \qquad (11.27)$$

$$\boxed{sin2\alpha = \frac{2ab}{c^2}} \qquad (11.28)$$

$$\boxed{cos2\alpha = \frac{b^2 - a^2}{c^2}} \qquad (11.29)$$

$$\boxed{\frac{1}{cos\alpha} + \frac{1}{tg\alpha} = \frac{a}{c-b} = \frac{c+b}{a}} \qquad (11.30)$$

Итогом всего разнообразия предложенных в параграфе формул может быть так называемый «*ряд равных отношений*»:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{P}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\frac{1}{2}\sin A\sin B\sin C}} = \frac{h_a}{\sin B\sin C} = \frac{b_a}{\frac{\sin B\sin C}{\cos\frac{B-C}{2}}} =$$

$$= \frac{m_a}{\frac{1}{2}\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}} = \frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

§ 12. Подобные треугольники. Признаки подобия треугольников

Треугольники называются ***подобными***, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1, называется ***преобразованием подобия***, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз.

Преобразование подобия с коэффициентом k есть *композиция гомотетии* с коэффициентом k и *движения*.

Из свойств преобразования подобия следует, что треугольники являются подобными, *если их соответствующие стороны пропорциональны, а углы, заключенные между пропорциональными сторонами, равны*.

Признаки подобия треугольников

1^0) (**Признак подобия по двум углам**). *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.*

2^0) (**Признак подобия по двум сторонам и углу между ними**). *Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны*.

3^0) (**Признак подобия по трем сторонам**). *Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны*.

Площади подобных треугольников

4^0) *Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия*.

5^0) *Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы*.

Признаки подобия прямоугольных треугольников

6^0) (**Признак подобия по одному острому углу**). *Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.*

Действительно, у прямоугольных треугольников всегда есть равные (прямые) углы. Значит, треугольники подобны по признаку подобия по двум углам.

7^0) (**Признак подобия по пропорциональности двух катетов**). *Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.*

Справедливость этого признака следует из того факта, что углы между катетами прямоугольных треугольников равны 90° и, следовательно, треугольники подобны по признаку подобия по двум сторонам и углу между ними.

8^0) (**Признак подобия по пропорциональности гипотенузы и катета**). *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны*.

Доказательство. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB=k\cdot A_1B_1$, $BC=k\cdot B_1C_1$, где k – коэффициент пропорциональности, $\angle BCA=\angle B_1C_1A_1=90^0$. Тогда на основании теоремы Пифагора имеем:

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=k\cdot\sqrt{A_1B_1{}^2-B_1C_1{}^2}=k\cdot A_1C_1.$$

Тогда справедливость утверждения следует, например, из признака подобия произвольных треугольников по трём сторонам.

9^0) *Если провести прямую, пересекающую две стороны треугольника и параллельную третьей его стороне, то она отсечёт треугольник, подобный исходному*.

10^0) *Если соединить основания двух высот треугольника, то получится треугольник, подобный данному.*

Теорема. *Два треугольника, стороны которых соответственно параллельны или перпендикулярны, являются подобными (в этом случае углы обоих треугольников или равны, или составляют в сумме 180^0).*

§ 13. Медианы треугольника

Медиана треугольника (от лат. *mediana*, что означает «средняя») – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Стихотворение о медиане.
Живёт в том Углу очень странная дама.
Зовут эту даму мадам Медиана.
Не медиум ли? То неведомо мне,
Вот мчится она из Угла к Стороне,
Дойдёт (не поверите, Братцы, глазам!)
Разделит её, словно маг, пополам.

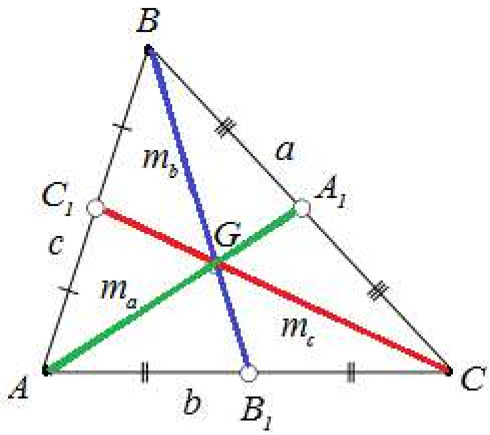


Рис. 30

Свойства медиан треугольника

1^0) *В любом треугольнике можно построить три медианы*.

Медианы принято обозначать символами: $m_a; m_b; m_c$, где индекс показывает, к какой из сторон треугольника проведена соответствующая медиана.

Точка пересечения медианы со стороной треугольника называется ***основанием медианы*** (на Рис.30 это точки A_1; B_1; C_1).

2^0) *Три медианы треугольника пересекаются в одной точке G, которую называют* ***центроидом*** *треугольника* (в физике чаще используется другой термин «*центр тяжести*»).

3^0) *Медианы треугольника, пересекаясь в центроиде G, делятся этой точкой в отношении* 2:1, *считая от вершины*.

4^0) *Каждая медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника* (т.е. у этих треугольников равные площади).

Доказательство.

Введём сначала обозначение $\angle CA_1A = \varphi$, тогда $\angle BA_1A = 180^0 - \varphi$ (так как эти углы являются смежными).

Тогда $S_{\Delta AA_1C} = \dfrac{1}{2} AA_1 \cdot A_1C \sin\varphi$, а $S_{\Delta AA_1B} = \dfrac{1}{2} AA_1 \cdot A_1B \sin\left(180^0 - \varphi\right)$.

Но так как $\sin\left(180^0 - \varphi\right) = \sin\varphi$ и $A_1C = A_1B$ (т.к. по определению медиана делится точкой A_1 пополам), то $S_{\Delta AA_1C} = S_{\Delta AA_1B}$. Ч.т.д.

5^0) *Три медианы, пересекаясь в точке G, делят данный треугольник на шесть равновеликих друг другу треугольников*.

6^0) *Если G – центроид треугольника ABC, то*:

$$\boxed{S_{\Delta AGB} = S_{\Delta AGC} = S_{\Delta BGC}.}$$

7^0) *Длины трёх медиан любого треугольника всегда удовлетворяют неравенству треугольника*, т.е. выполняются неравенства:

$$m_a < m_b + m_c;\ m_b < m_a + m_c;\ m_c < m_a + m_b.$$

8^0) *Медиана, проведённая к большей стороне разностороннего треугольника, имеет наименьшую длину по сравнению с двумя другими медианами*.

9^0) *Медиана треугольника, для которого известны длины его сторон* (*соответственно* a, b, c), *может быть найдена по формуле Аполлония*:

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2 \cdot \left(AA_1^2 + BA_1^2 \right).} \qquad (13.1)$$

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (Рис. 30). Введём обозначение: $\angle CA_1A = \varphi$, тогда $\angle BA_1A = 180^0 - \varphi$ (так как эти углы являются смежными).

Из треугольника CA_1A по теореме косинусов:

$$AC^2 = AA_1^2 + CA_1^2 - 2AA_1 \cdot CA_1 \cos\varphi. \qquad (13.2)$$

Из треугольника BA_1A по теореме косинусов:

$$AB^2 = AA_1^2 + BA_1^2 - 2AA_1 \cdot BA_1 \cos\left(180^0 - \varphi\right). \qquad (13.3)$$

Так как $\cos\left(180^0 - \varphi\right) = -\cos\varphi$, то равенство (13.3) можно переписать в виде

$$AB^2 = AA_1^2 + BA_1^2 + 2AA_1 \cdot BA_1 \cos\varphi. \qquad (13.4)$$

Складывая почленно обе части равенств (13.2) и (13.4) и учитывая, что $CA_1 = BA_1$, замечаем, что последние слагаемые взаимно уничтожаются, т.е. получаем

$$AC^2 + AB^2 = 2AA_1^2 + CA_1^2 + BA_1^2. \qquad (13.5)$$

Ещё раз вспоминаем, что $CA_1 = BA_1$, тогда формула (13.5) примет вид:

$$AC^2 + AB^2 = 2\left(AA_1^2 + BA_1^2 \right). \qquad (13.6)$$

📖 Формула (13.6) названа в честь древнегреческого математика *Аполлония Пергского* (262 до н.э. – 190 до н.э.), одного из трёх великих геометров Эллады (к числу которых причисляются также *Евклид* и *Архимед*).

Доказать *формулу Аполлония* можно легче, если воспользоваться *теоремой Стюарта*, о которой речь пойдёт позже.

Запишем теперь формулу (13.6), используя другие обозначения:

$$b^2 + c^2 = 2\left(m_a^2 + \frac{a^2}{4} \right). \qquad (13.6^*)$$

Очевидно, что формулу (13.6^*) можно переписать в виде

$$2b^2 + 2c^2 = 4m_a^2 + a^2. \qquad (13.7)$$

Из формулы (13.7) нетрудно получить, $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$.

Обозначим внутренние углы треугольника ABC, лежащие напротив сторон a, b, c соответственно через α, β, γ.

Далее по теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$. Подставим выражение, стоящее в правой части этого равенства в формулу $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$. Получим

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - \left(b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha}$$

Таким образом, приходим к следующему свойству.

10^0) *Длины медиан любого треугольника вычисляются по формулам*:

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$,	$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$,	$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ (13.8)

Следствия: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + a^2 + 2ac \cdot \cos\beta}$;

$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab \cdot \cos\gamma}$.

11^0) *Если* $m_a; m_b; m_c$ *– медианы треугольника ABC, то длины сторон этого треугольника вычисляются по формулам*:

$a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b{}^2 + m_c{}^2\right) - m_a{}^2}$	$b = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a{}^2 + m_c{}^2\right) - m_b{}^2}$	$c = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a{}^2 + m_b{}^2\right) - m_c{}^2}$ (13.9)

12^0) *Сумма квадратов медиан произвольного треугольника составляет* 3/4 *от суммы квадратов его сторон, т.е.*

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right). \qquad (13.10)$$

13^0) *Из отрезков, являющихся медианами какого-либо треугольника, можно построить треугольник, площадь которого будет составлять* 3/4 *от площади исходного треугольника, т.е.*

$$S_{m_a, m_b, m_c} = \frac{3}{4} S_{a,b,c}. \qquad (13.11)$$

14^0) *Площадь треугольника ABC может быть найдена по трём известным его медианам* $m_a; m_b; m_c$ *с помощью формулы*

$$S_{\Delta ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{\mu(\mu - m_a)(\mu - m_b)(\mu - m_c)}, \text{ где } \mu = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}. \qquad (13.12)$$

15^0) *Для того, чтобы произвольная* $(\cdot)$ *P принадлежала прямой, содержащей медиану* AA_1 ΔABC, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1) $S_{\Delta APB} = S_{\Delta APC}$, *т.е. чтобы треугольники APB и APC были равновелики*;

2) треугольники APB и APC были бы противоположно ориентированы (т.е. если обход вершин Δ

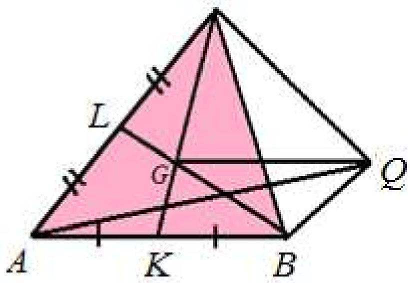


Рис. 31

APB выполняется по часовой стрелке, то обход вершин Δ APC обязательно выполняется против хода часовой стрелки).

16^0) *Для произвольной точки Q* (Рис. 31), *лежащей в плоскости треугольника ABC выполняется равенство*:

$$\boxed{3QG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2 = AQ^2 + BQ^2 + CQ^2\,.} \qquad (13.13)$$

<u>Замечание.</u> 1) Формулу (13.13) называют *формулой Лейбница*.

2) Из формулы Лейбница вытекает, что *из всех точек плоскости центроид треугольника ABC является точкой, для которой сумма квадратов расстояний до его вершин имеет наименьшее значение*.

17^0) *Медина делит угол при вершине треугольника так, что произведение длины стороны и синуса угла между этой стороной и медианой есть величина постоянная, т.е. выполняются равенства*:

17.1. $AC \cdot \sin\angle ACC_1 = BC \cdot \sin\angle BCC_1$;

17.2. $\dfrac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1} = \dfrac{BC}{AC}$.

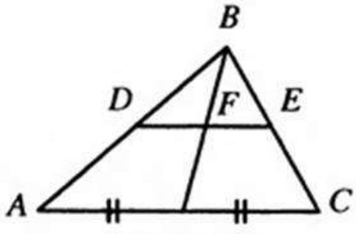


Рис. 32

18^0) *Если в треугольнике ABC проведены отрезок, параллельный одной из его сторон, а также медиана, исходящая из вершины, противолежащей этой стороне, то точкой пересечения отрезок разделится пополам*.

Например, если DE ∥ FC, то $DF = FE$ (Рис. 32).

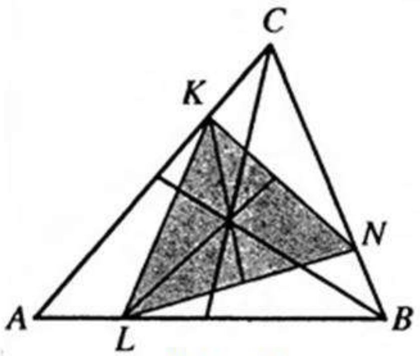


Рис. 33

19^0) *Если* $\dfrac{AL}{LB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CK}{KA}$, *то точки пересечения медиан треугольников ABC и LNK совпадают* (Рис. 33).

Рассмотрим теперь свойства медиан в прямоугольном треугольнике.

1^0) *Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный*.

2^0) *Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы*.

3^0) *Медианы всякого прямоугольного треугольника связаны соотношением*

$$\boxed{m_a^2 + m_b^2 = 5 \cdot m_c^2} \qquad (13.14)$$

<u>Доказательство</u>. Т.к. $m_c = \dfrac{c}{2}$, то $c = 2 \cdot m_c$. Воспользуемся свойством (13.10), согласно которому $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$. Но треугольник является прямоугольным, следовательно, для него выполняется теорема Пифагора. Тогда

$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\cdot 2c^2$. Подставим теперь $c=2\cdot m_c$ в последнее равенство, получим $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{2}\cdot\left(2m_c\right)^2$ или $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{2}\cdot 4{m_c}^2$. Т.е. $m_a^2+m_b^2+m_c^2=6\cdot {m_c}^2$. Перенося слагаемое m_c^2 из левой части в правую, получаем $m_a^2+m_b^2=5\cdot m_c^2$. Ч.т.д.

4^0) *Отношение квадрата гипотенузы любого прямоугольного треугольника к сумме квадратов его медиан есть величина постоянная, равная числу* 1,5. Иначе говоря, имеет место тождество.

$$\boxed{m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{2}\cdot c^2.} \qquad (13.15)$$

Действительно, исходя из теоремы Пифагора: $a^2+b^2=c^2$ заменим в формуле (10): $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)$ сумму a^2+b^2 в правом части на c^2, получим $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\cdot 2c^2$. Тогда доказываемое тождество становится очевидным.

Рассмотрим также свойства медиан равнобедренного и равностороннего треугольников.

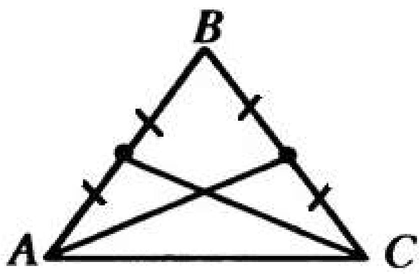


Рис. 34

1^0) *Во всяком равнобедренном треугольнике две медианы, проведенные к равным сторонам, равны между собой, а третья медиана одновременно является ещё и биссектрисой и высотой* (Рис.34).

Верно также и обратное утверждение.

2^0) *Если в треугольнике две медианы равны, то этот треугольник является равнобедренным* (***теорема Штейнера–Лемуса***); *третья медиана при этом является биссектрисой и высотой угла при соответствующей вершине.*

3^0) *Три медианы равностороннего треугольника со стороной а имеют равную длину, т.е.*

$$\boxed{m_a=m_b=m_c=\frac{a\sqrt{3}}{2}.} \qquad (13.16)$$

§ 14. Средняя линия треугольника и её свойства. Дополнительный и антидополнительный треугольники

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух сторон этого треугольника.

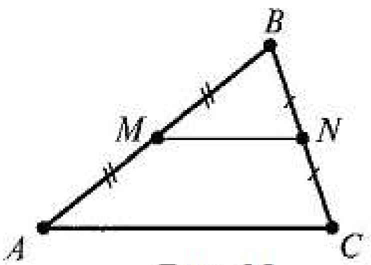


Рис. 35

1^0) *Средняя линия треугольника всегда параллельна той стороне треугольника, с которой она не имеет общих точек*, т.е. $MN \parallel AC$ (Рис. 35).

2^0) *Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, содержит половину от длины третьей стороы*, т.е. $MN = \frac{1}{2} AC$.

3^0) *Средняя линия отсекает треугольник, подобный данному треугольнику, с коэффициентом подобия* k = 0,5.

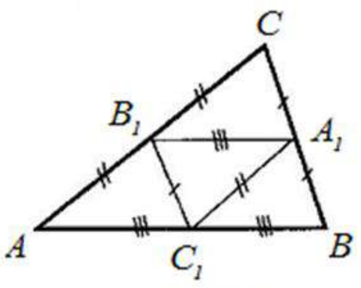


Рис. 36

Если попарно соединить точки, являющиеся основаниями медиан треугольника *ABC*, то получим новый треугольник $A_1B_1C_1$.

4^0) *Всякий отрезок, соединяющий основания двух любых медиан треугольника ABC, является его **средней линией*** (т.е. отрезки A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 – среднии линии ΔABC) (Рис. 36).

Треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания медиан данного ΔABC (т.е. треугольник, у которого вершины – середины сторон треугольника *ABC*), называется ***дополнительным*** (или ***серединным***) для исходного треугольника.

4^0) *Три средние линии треугольника разделяют его на четыре равных треугольника, подобных данному, с коэффициентом подобия* k = 0,5.

5^0) *Площадь любого из этх четырёх треугольников (в том числе и серединного* $\Delta A_1B_1C_1$*) составляет* $\frac{1}{4}$ *от площади исходного треугольника.*

Треугольник $A_2B_2C_2$, стороны которого проходят через вершины треугольника *ABC*, и параллельны противолежащим его сторонам, называется ***антидополнительным*** для данного ΔABC.

6^0) *Треугольник ABC является антидополнительным треугольником по отношению к своему серединному треугольнику.*

7^0) *Площади частей треугольника, на которые его делит средняя линия, относятся как* 1:3 (т.е. $S_{\Delta MBN} : S_{AMNC}$=1:3 см. Рис. 35).

§ 15. Биссектрисы треугольника

Биссектрисой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла, соединяющий эту вершину с точкой, лежащей на противолежащей стороне.

Определение биссектрисы угла дано в п. ***1.1***. Можно также определить биссектрису как геометрическое место точек внутри угла, равноудалённых от сторон этого угла.

В старой учебной литературе можно встретить другое название биссектрисы – «***равноделящая***».

Детям для лучшего запоминания понятия «биссектриса» можно предложить шуточное её определение:

Биссектриса *– это такая крыса, которая бегает по углам, и делит их пополам.*

Свойства биссектрис треугольника

1^0) *У любого треугольника существуют три биссектрисы, соответствующие трём его вершинам.*

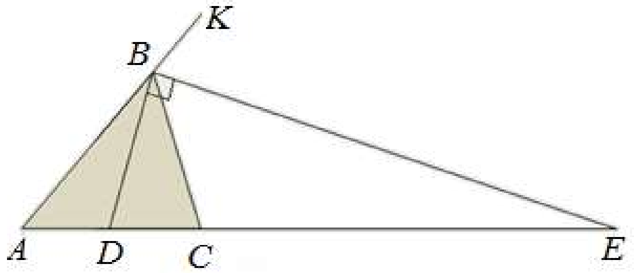


Рис. 37

Биссектрисы принято обозначать символами: $l_a; l_b; l_c$, где индекс показывает, к какой из сторон треугольника проведена соответствующая биссектриса.

Для каждого треугольника, кроме ***внутренних биссектрис*** (биссектрис внутренних углов треугольника), можно построить и ***внешние биссектрисы*** (т.е. биссектрисы углов, смежных с внутренними углами треугольника).

2^0) *Внешняя биссектриса треугольника перпендикулярна внутренней биссектрисе при той же вершине* (Рис. 37).

Доказательство.

Пусть *BD* – внутренняя биссектриса, а *BE* – внешняя биссектриса при вершине *B* треугольника *ABC*. Пусть

$$\angle ABD = \angle CBD = x; \ \angle EBK = \angle EBC = y.$$

Тогда по свойству смежных углов: $2x + 2y = 180^0$. Тогда $x + y = 90^0$. Это означает, что $x + y = \angle CBD + \angle EBC = 90^0$.

Сумма углов $\angle CBD$ и $\angle EBC$ даёт угол $\angle DBE$ между внутренней и внешней биссектрисами углов при вершине *B*, поэтому $\angle DBE = 90^0$.

3^0) *Три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке L, которая называется* ***инцентром*** *и является* ***центром вписанной окружности***.

4^0) *Инцентр треугольника равноудалён от его сторон.*

5^0) *Биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника пересекаются в одной точке –* ***центре вневписанной окружности*** *этого треугольника.*

6^0) *Внутренняя биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник *ABC* и внутреннюю биссектрису *BK* угла *B*. Через вершину *C* проведём прямую, параллельную *BK* (Рис. 38). Продолжим сторону *AB* до пересечения с этой прямой в точке *M*.

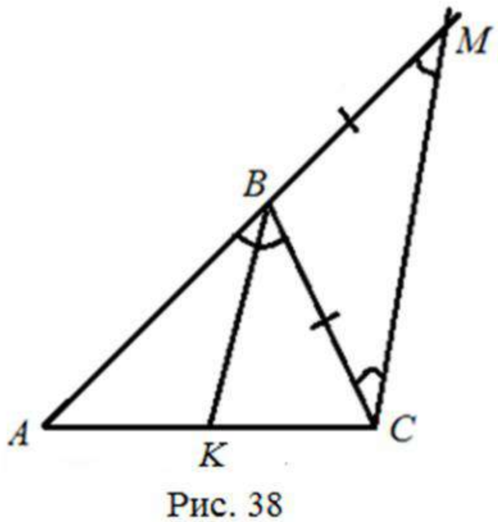


Рис. 38

Так как BK – биссектриса, то $\angle ABK = \angle CBK$.

$\angle KBC = \angle BCM$ – накрест лежащие при параллельных прямых *BK* и *CM* и секущей *BC*.

$\angle ABK = \angle BMC$, как соответственные при параллельных прямых BK и CM секущей AM. Значит, $\angle BCM = \angle MCB$, следовательно, треугольник CBM – равнобедренный. Тогда $BC = BM$.

По теореме о пропорциональных отрезках (см. **§2.**), имеем $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AB}{BM}$.

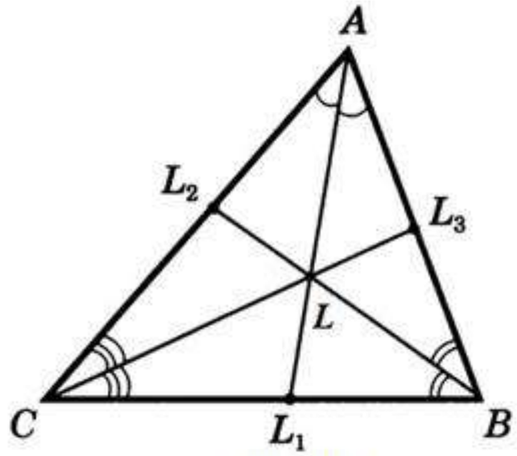


Рис. 39

Так как $BM = BC$, получаем $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AB}{BC}$. Применяя свойство пропорции, получаем: $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{KC}{BC}$.

<u>Замечание</u>. Внешняя биссектриса треугольника обладает аналогичным свойством.

7^0) *Каждая из трёх внутренних биссектрис треугольника делится инцентром в отношении суммы прилежащих сторон к противолежащей, считая от вершины*, т.е. имеют место отношения (Рис. 39): $\dfrac{AL}{LL_1} = \dfrac{AC+AB}{BC}$; $\dfrac{BL}{LL_2} = \dfrac{BC+BA}{AC}$; $\dfrac{CL}{LL_3} = \dfrac{CA+CB}{AB}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть точка L – инцентр треугольника ABC. Положим $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Тогда $\begin{cases} BL_1 + L_1C = a, \\ \dfrac{BL_1}{L_1C} = \dfrac{c}{b}. \end{cases}$

Решая эту систему, получим $BL_1 = \dfrac{ac}{b+c}, L_1C = \dfrac{ab}{b+c}$. Так как BL – биссектриса внутреннего угла треугольника ABL_1, то $\dfrac{AL}{LL_1} = \dfrac{AB}{L_1B} = \dfrac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{AC+AB}{BC}$.

Тем самым мы доказали справедливость первой из формул. Аналогично можно доказать две другие формулы.

8^0) *Длины внутренних биссектрис треугольника могут быть вычислены с помощью длин сторон треугольника a, b, c (и полупериметра p) по формулам*:

$$\boxed{l_a = \frac{\sqrt{cb(a+b+c)(c+b-a)}}{c+b} = \frac{2\sqrt{cbp(p-a)}}{c+b}} \qquad (15.1)$$

$$\boxed{l_b = \frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a+c-b)}}{a+c} = \frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}} \qquad (15.2)$$

$$\boxed{l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}=\frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}} \quad (15.3)$$

9^0) *Длины внутренних биссектрис треугольника могут быть вычислены с помощью длин сторон треугольника a, b, c и значений тригонометрических функций его углов по формулам*:

$$\boxed{l_a=\frac{bc\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}} \qquad \boxed{l_b=\frac{ac\cdot\sin\beta}{b\cdot\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}} \qquad \boxed{l_c=\frac{ab\cdot\sin\gamma}{c\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$$

10^0) *Длины внутренних биссектрис треугольника могут быть вычислены с помощью длин сторон треугольника a, b, c и значений тригонометрических функций его углов по формулам*:

$$\boxed{l_a=\frac{a\cdot\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}} \qquad \boxed{l_b=\frac{b\cdot\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta\cdot\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}} \qquad \boxed{l_c=\frac{c\cdot\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$$

11^0) *Длины внутренних биссектрис треугольника могут быть вычислены с помощью длин сторон треугольника a, b, c и значений тригонометрических функций его углов по формулам*:

$$\boxed{l_a=\frac{2bc\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{|b-c|}} \qquad \boxed{l_b=\frac{2ac\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{|a-c|}} \qquad \boxed{l_c=\frac{2ab\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{|a-b|}}$$

12^0) *Длина любой внутренней биссектрисы треугольника равна произведению среднего гармонического длин сторон, заключающих её, на косинус половины угла, который она делит пополам, т.е. имеют место формулы*:

$$\boxed{l_a=\frac{2bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}} \qquad \boxed{l_b=\frac{2ac\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}} \qquad \boxed{l_c=\frac{2ab\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}}$$

<u>*Замечание*</u>. *Средним гармоническим* нескольких чисел $a_1>0$, $a_2>0,\ldots$, $a_n>0$ называется величина $H_n=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$. Очевидно, что для сторон треугольника *a*, *b* эта формула принимает вид $H_2=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$. Поэтому формулу для вычисления длины биссектрисы можно записать короче: $l_c=H_{a,b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

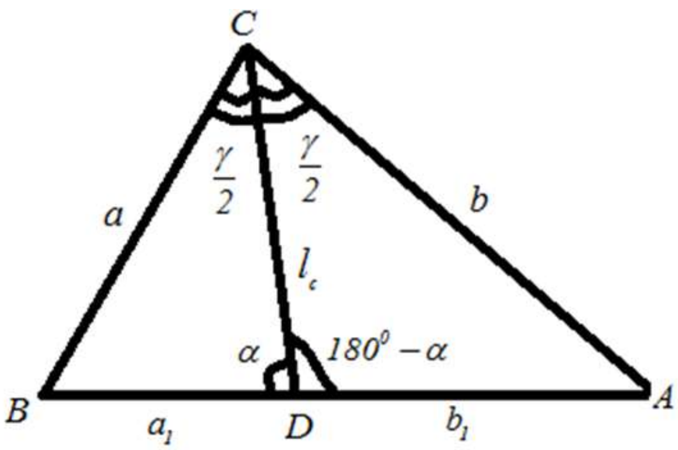


Рис. 40

Рассмотрим треугольник ABC, в котором проведена биссектриса CD угла C (Рис. 40). Пусть точка D делит сторону AB на отрезки BD и DA, которые имеют длины a_1 и b_1 соответственно.

13^0) *Квадрат длины внутренней биссектрисы треугольника равен разности произведений длин сторон, заключающих её, и длин отрезков, на которые она делит противолежащую сторону треугольника.*

Т.е. имеют место формулы:

$l_c^2 = ab - a_1 b_1$ **формула Лагранжа**	или	$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1}$ (15.4)

Доказательство. По теореме косинусов из треугольника BCD:

$$a^2 = l_c^2 + a_1^2 - 2a_1 l_c \cdot \cos\alpha .$$

По теореме косинусов из треугольника ACD:

$$b^2 = l_c^2 + b_1^2 - 2b_1 l_c \cdot \cos\left(180^0 - \alpha\right).$$

Так как $\cos\left(180^0 - \alpha\right) = -\cos\alpha$, то последнее равенство можно переписать в виде $b^2 = l_c^2 + b_1^2 + 2b_1 l_c \cdot \cos\alpha$.

Очевидно, что имеют место два равенства, получаемые из ранее записанных: $2l_c \cdot \cos\alpha = \dfrac{l_c^2 + a_1^2 - a^2}{a_1}$ и $2l_c \cdot \cos\alpha = \dfrac{b^2 - l_c^2 - b_1^2}{b_1}$.

Так как левые части этих равенств имеют одинаковый вид, то можно приравнять их правые части. Получим:

$$\frac{l_c^2 + a_1^2 - a^2}{a_1} = \frac{b^2 - l_c^2 - b_1^2}{b_1}.$$

По свойству пропорции перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{l_c^2 + a_1^2 - a^2}{b^2 - l_c^2 - b_1^2} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Но согласно свойству 6^0) можем записать: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a}{b} = k$. Откуда $a_1 = k \cdot a, b_1 = k \cdot b$.

Значит, $\dfrac{l_c^2 + k^2a^2 - a^2}{b^2 - l_c^2 - k^2b^2} = \dfrac{a}{b}$ или $\dfrac{l_c^2 + a^2 \cdot \left(k^2 - 1\right)}{-b^2\left(k^2 - 1\right) - l_c^2} = \dfrac{a}{b}$. Далее имеем:

$$b\left[l_c^2 + a^2 \cdot \left(k^2 - 1\right)\right] = a\left[-b^2\left(k^2 - 1\right) - l_c^2\right].$$

Тогда $bl_c^2 + ba^2 \cdot \left(k^2 - 1\right) = -ab^2\left(k^2 - 1\right) - al_c^2$.

Осуществим группировку слагаемых

$$bl_c^2 + al_c^2 = -ab^2\left(k^2 - 1\right) - ba^2 \cdot \left(k^2 - 1\right).$$

Тогда

$$l_c^2 \cdot (b+a) = -ab\left(k^2 - 1\right) \cdot (b+a).$$

Сокращая обе части последнего равенства на сумму $b+a$, получим

$$l_c^2 = -ab\left(k^2 - 1\right).$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$l_c^2 = ab - k^2 ab.$$

Но ранее мы получали, что $a_1 = k \cdot a, b_1 = k \cdot b$, поэтому $a_1 b_1 = k^2 \cdot a \cdot b$.

Поэтому $l_c^2 = ab - a_1 b_1$.

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, получим иную форму его записи, а именно $l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1}$.

14^0) *Три внутренние биссектрисы углов треугольника, имеющие длины l_a, l_b, l_c соответственно, удовлетворяют соотношению*

$$\boxed{\frac{(b+c)^2}{bc} l_a^2 + \frac{(a+c)^2}{ac} l_b^2 + \frac{(a+b)^2}{ab} l_c^2 = (a+b+c)^2.} \tag{15.5}$$

15^0) *Имеет место формула*

$$\boxed{\frac{a+c}{b+c} = \frac{l_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{l_b \cdot \sin\frac{\beta}{2}}.} \tag{15.6}$$

Точку пересечения биссектрисы со стороной треугольника называют ***основанием биссектрисы***. На Рис. 39 это точки L_1, L_2, L_3.

16^0) *Если биссектрисы внешних углов треугольника не параллельны противолежащим сторонам, то их основания лежат на одной прямой, которую называют **осью внешних биссектрис**.*

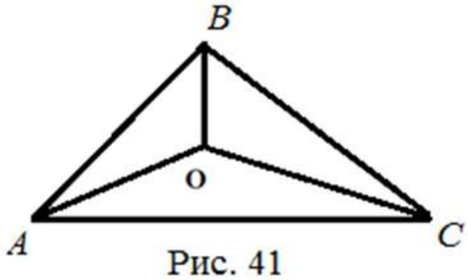


Рис. 41

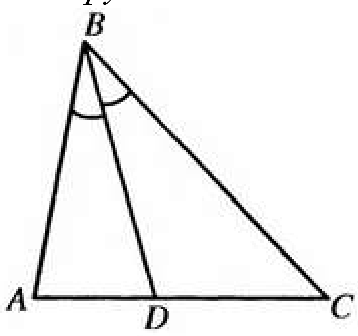


Рис. 42

17^0) *Если точка O – инцентр треугольника ABC и $\angle ABC = \beta$, то $\angle AOC = 90^0 + \frac{\beta}{2}$.*

Доказательство. Известно, что сумма внутренних углов любого треугольника удовлетворяет равенству $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Очевидно, что $\angle AOC = 180^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$ (Рис. 41).

Тогда $\angle AOC = 180^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - \beta\right) = 90^0 + \frac{\beta}{2}$.

18^0) *Площади треугольников, на которые разбивает внутренняя биссектриса данный треугольник ABC, относятся как стороны, заключающие эту биссектрису* (т.е. $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta CBD}} = \frac{AB}{BC}$ см. Рис. 42).

Действительно, так как $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \sin\frac{B}{2}$ и $S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} BC \cdot BD \sin\frac{B}{2}$, то составляя отношение площадей этих треугольников, получим: $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta CBD}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BD \sin\frac{B}{2}}{\frac{1}{2} BC \cdot BD \sin\frac{B}{2}} = \frac{AB}{BC}$, что и доказывает справедливость этого свойства.

19^0) *Площадь треугольника, вершины которого находятся в серединах данного треугольника, вычисляется по формуле:* $Q = \frac{2S_{ABC}}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{l_a l_b l_c}{4p}$, *где p – полупериметр треугольника ABC.*

20^0) *Если биссектриса внешнего угла треугольника при вершине A* (Рис. 43) *пересекает прямую BC в точке* D_a, *то* $\frac{BD_a}{CD_a} = \frac{c}{b}$.

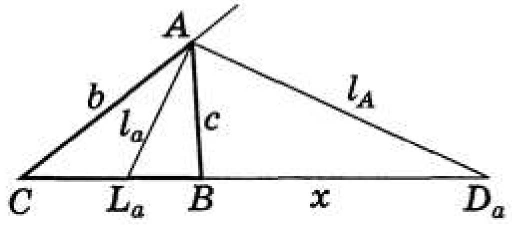


Рис. 43

Рассмотрим также свойства биссектрис равнобедренного и равностороннего треугольников.

1^0) *В любом равнобедренном треугольнике внутренняя биссектриса угла, противолежащего основанию треугольника, является медианой и высотой.*

2^0) *Во всяком равнобедренном треугольнике две биссектрисы, проведенные к равным сторонам, равны между собой.*

Верно также и обратное утверждение.

3^0) *Если в треугольнике две биссектрисы равны, то этот треугольник является равнобедренным* (***теорема Штейнера–Лемуса***).

4^0) *Если треугольник равнобедренный, то внешняя биссектриса при его вершине (в которой сходятся равные стороны) параллельна основанию.*

Действительно, пусть $\angle A = \angle B = x$, тогда внешний угол при вершине *C*, т.е. $\angle BCD = 2x$, т.к. внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Очевидно, что биссектриса *CE* (Рис. 44) делит этот внешний угол пополам. Тогда $\angle CAB = \angle DCE$. Поэтому эти углы можно рассматривать как соответственные углы при параллельных прямых *AB* и *CE* и секущей *AD*. Итак, CE ∥ AB.

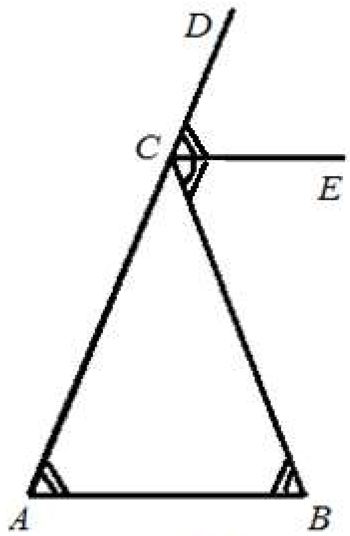


Рис. 44

Отсюда непосредственно вытекает ещё одно свойство.

5^0) *Если треугольник равнобедренный, то внешняя биссектриса при его вершине (в которой сходятся равные стороны) перпендикулярна высоте, проведенной из этой же вершины к основанию.*

6^0) *У равностороннего треугольника все три внутренние биссектрисы равны.*

7^0) *У равностороннего треугольника все три биссектрисы внешних углов параллельны противоположным сторонам.*

§ 16. Высоты треугольника

Высота треугольника – это перпендикуляр, опущенный из любой его вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону.

В зависимости от вида треугольника:

1) высота лежит внутри треугольника (остроугольный треугольник);
2) высота совпадает с одной его стороной (прямоугольный треугольник);
3) высота располагается вне треугольника (тупоугольный треугольник).

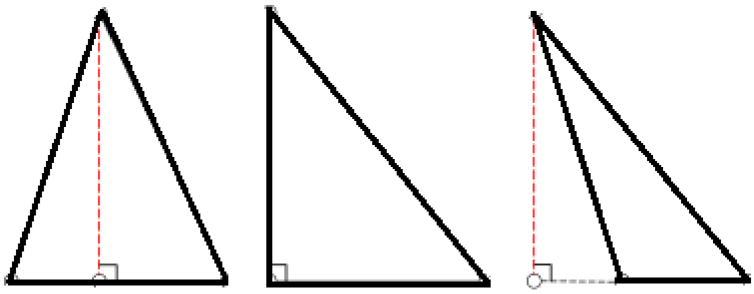


Рис. 45

1^0) *Высоты треугольника пересекаются в одной точке* (***Теорема Архимеда***). Иначе: прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной *точке*.

Эту точку называют ***ортоцентром треугольника***.

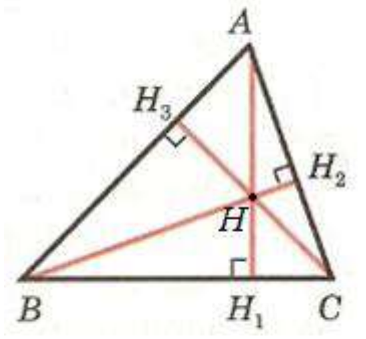
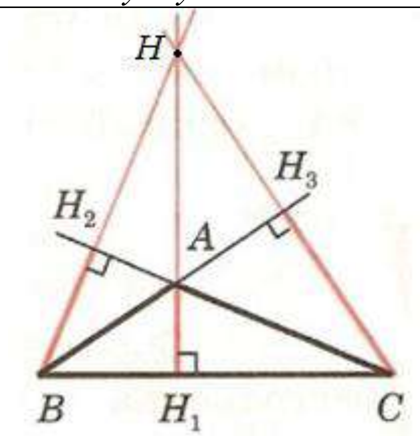
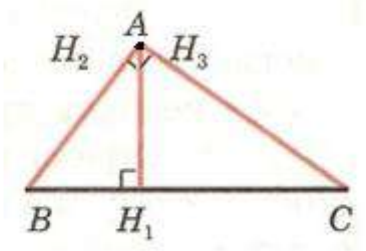
Обозначим через h_a, h_b, h_c длины высот, проведенных к сторонам *a*, *b*, *c* треугольника *ABC* соответственно.

Рассмотрим теперь, как располагается ортоцентр треугольника в зависимости от его формы.

Оформим записи в виде таблицы.

Из представленных в таблице рисунков видно, что:

2^0) *Высота треугольника, имеющая наименьшую длину по сравнению с другими высотами (минимальная высота) всегда располагается внутри этого треугольника.*

<table>
<tr><td colspan="3">Вид треугольника</td></tr>
<tr><td>Остроугольный</td><td>Тупоугольный</td><td>Прямоугольный</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ортоцентр H лежит внутри треугольника</td><td>Ортоцентр H лежит вне треугольника</td><td>Ортоцентр H совпадает с вершиной прямого угла треугольника</td></tr>
</table>

3^0) *Из двух высот треугольника больше та высота, которая проведена к его меньшей стороне.*

4^0) *Отрезок, соединяющий основания высот остроугольного треугольника, отсекает от него подобный ему треугольник с коэффициентом подобия, равным косинусу общего угла этих треугольников.* (На Рис. 46: $\Delta H_2AH_3 \sim \Delta CAB$).

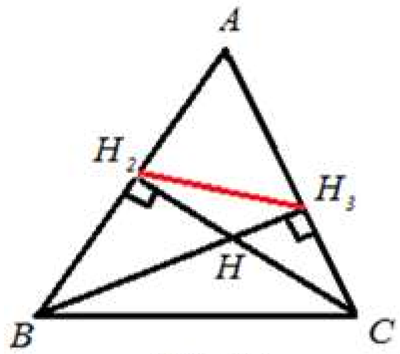


Рис. 46

Действительно, рассмотрим треугольники BH_3A и CH_2A. У них $\angle A$ – общий, $\angle H_3 = \angle H_2 = 90^0$. Это означает, что эти треугольники подобны (по двум углам). Поэтому $\dfrac{AH_2}{AH_3} = \dfrac{AC}{AB}$. А это равенство и наличие общего $\angle A$ означает, что $\Delta H_2AH_3 \sim \Delta CAB$.

5^0) *Ортоцентр H треугольника ABC делит:*

а) *высоту CH_2 в отношении*: $\dfrac{CH}{HH_2} = \dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$;

б) *сторону AB в отношении:* $\dfrac{AH_2}{H_2B} = \dfrac{b \cdot \cos\alpha}{a \cdot \cos\beta}$.

6^0) *Три высоты треугольника, пересекаясь в ортоцентре H, делятся этой точкой на отрезки, произведение которых постоянно, и для которых имеют место равенства* (см. Рис. 48):

$$\boxed{AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1;} \qquad (16.1)$$

$AA_1 \cdot HA_1 = BA_1 \cdot A_1C;$	$BB_1 \cdot HB_1 = AB_1 \cdot B_1C;$	$CC_1 \cdot HC_1 = AC_1 \cdot C_1B.$

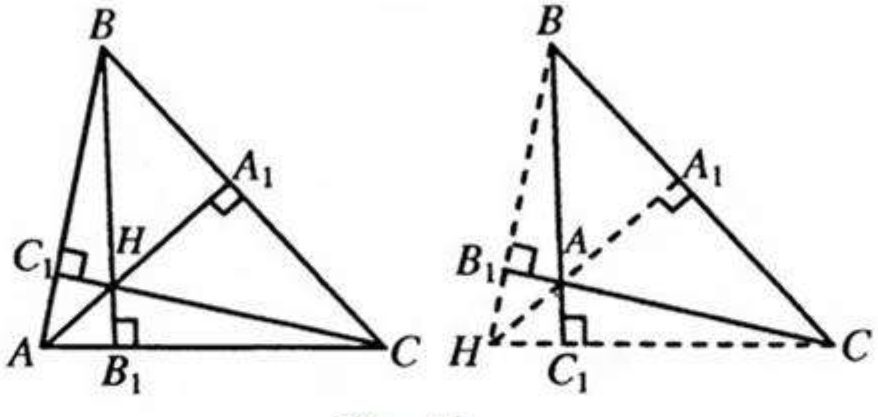


Рис. 47

7^0) *При пересечении трех высот треугольника в ортоцентре H образуются углы, удовлетворяющие равенствам* (см. Рис. 47):

$\angle ABC + \angle AHC = 180^0$;	$\angle BCA + \angle BHA = 180^0$;	$\angle CAB + \angle CHB = 180^0$.

8^0) *Длину высоты треугольника, проведенной к одной из его сторон, можно найти по формуле*

$$\boxed{h_a = b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta.} \qquad (16.2)$$

9^0) *Длина любой высоты треугольника может быть выражена через площадь треугольника и длину той его стороны, к которой проведена эта высота,* т.е. имеют место формулы

$$\boxed{h_a = \frac{2S}{a}} \qquad \boxed{h_b = \frac{2S}{b}} \qquad \boxed{h_c = \frac{2S}{c}.}$$

Из последних формул можно заметить, что отношение длины стороны треугольника к величине, обратной длине соответствующей высоты, есть *const*, равная удвоенной площади этого треугольника. В связи с этим имеет место следующая формула:

$$\boxed{a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.} \qquad (16.3)$$

Можно записать и другую формулу, непосредственно вытекающую из предыдущей:

$$\boxed{h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = (b \cdot c) : (a \cdot c) : (a \cdot b).} \qquad (16.4)$$

10^0) *Зная длины трех высот* h_a, h_b, h_c *треугольника ABC, можно найти его площадь*

$$\boxed{S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}}.} \qquad (16.5)$$

11^0) *Зная длины трех высот* h_a, h_b, h_c *треугольника ABC, можно найти длину любой из его сторон*, например,

$$\boxed{a = \frac{2}{h_a \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}}.} \qquad (16.6)$$

Рассмотрим теперь свойства высот в равнобедренном и равностороннем треугольниках.

1^0) *Длину высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, можно найти по формуле* $h_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4a^2 - c^2}$ (Рис. 48).

2^0) *Высоты, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.*

3^0) *Высоты равностороннего треугольника равны между собой и имеют длину* $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

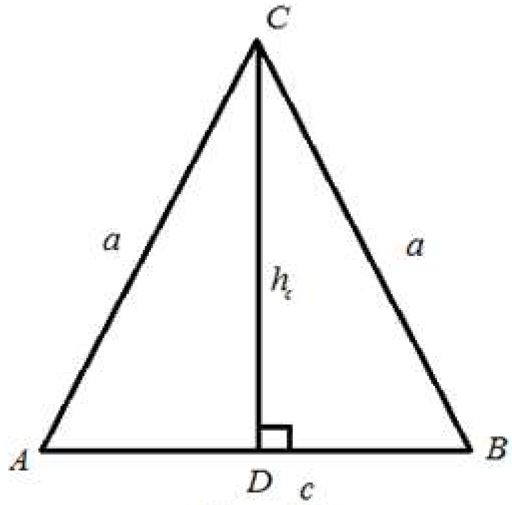


Рис. 48

Стихотворение о высоте.

Высота – это кошка,

Она потрудится немножко.
Зацепит лапами вершину.
Растянется вся под прямым углом.
До стороны дотянется хвостом.

§ 17. Высота прямоугольного треугольника

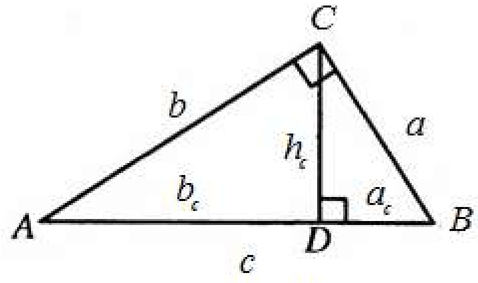


Рис. 49

Рассмотрим теперь свойства, связанные с высотой прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу. По сути, она является единственной высотой прямоугольного треугольника, ибо две другие высоты совпадают с катетами треугольника и по этой причине не представляют большого интереса.

Введём обозначения: h_c – высота, опущенная из вершины прямого угла, a_c и b_c – проекции катетов a и b на гипотенузу c. Очевидно, что $c = a_c + b_c$.

1^0) *В прямоугольном треугольнике высота* h_c *разрезает его на два треугольника, подобные исходному и между собой.*

Т.е. $\Delta CAD \backsim \Delta BCD; \Delta ABC \backsim \Delta ACD; \Delta ABC \backsim \Delta CBD$ (Рис. 49).

2^0) *Квадрат высоты, опущенной на гипотенузу, равен произведению проекций катетов.* Т.е. имеют место формулы:

$$\boxed{h_c^2 = a_c \cdot b_c} \quad \text{или} \quad \boxed{h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}\ .\ (17.1)}$$

<u>Доказательство</u>.

Согласно свойству 1^0) $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$: $\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{DB}$; $\frac{b}{h_c} = \frac{a}{a_c} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{h_c}{a_c}$ (*). Аналогично, $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$: $\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{DC}$; $\frac{b}{b_c} = \frac{a}{h_c} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b_c}{h_c}$ (#). Получается, что левые части равенств (*) и (#) абсолютно одинаковые, поэтому можно приравнять их правые части. Тогда $\frac{h_c}{a_c} = \frac{b_c}{h_c}$, откуда по свойству пропорции $h_c^2 = a_c \cdot b_c$. Извлекая корень квадратный из обеих частей последнего равенства, получим вторую форму записи этого свойства, т.е. $h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}$.

3^0) *Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.* Т.е. имееют место соотношения:

$$\boxed{a^2 = c \cdot a_c} \quad \text{или} \quad \boxed{b^2 = c \cdot b_c.}$$

<u>Замечание</u>. Знание свойства 3^0) существенно облегчает доказательство знаменитой ***теоремы Пифагора***: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Действительно, сложим почленно два последних равенства, получим

$$a^2+b^2=c\cdot a_c+c\cdot b_c=c\cdot\left(\underbrace{a_c+b_c}_{c}\right)=c^2.$$

4^0) *Длина высоты, опущенной из вершины прямого угла, равна отношению суммы катетов к гипотенузе.* Т.е. имеет место формула

$$\boxed{h_c=\frac{a\cdot b}{c}.} \qquad (17.2)$$

5^0) *Высота, опущенная из вершины прямого угла, связана с катетами треугольника соотношением*

$$\boxed{\frac{1}{h_c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.} \qquad (17.3)$$

Действительно, мы знаем, что $h_c^2=a_c\cdot b_c$. Кроме того $a^2=c\cdot a_c$ и $b^2=c\cdot b_c$. Тогда $a_c=\frac{a^2}{c}$ и $b_c=\frac{b^2}{c}$. Подставим найденные выражения для a_c и b_c в формулу $h_c^2=a_c\cdot b_c$. Получаем, что $h_c^2=\frac{a^2b^2}{c^2}$. Или $\frac{1}{h_c^2}=\frac{c^2}{a^2b^2}$. Далее воспользуемся теоремой Пифагора. Тогда $\frac{1}{h_c^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$. Выполняя почленное деление в правой части последнего равенства, окончательно получаем $\frac{1}{h_c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

<u>Замечание</u>. Если в прямоугольном треугольнике построить одновременно высоту, биссектрису и медиану, выходящие из вершины прямого угла, то окажется, что биссектриса l_c разделит угол между h_c и m_c пополам.

§ 18. Взаимное расположение треугольника и окружности

Рассмотрим наиболее важные случаи взаимного расположения треугольника и окружности.

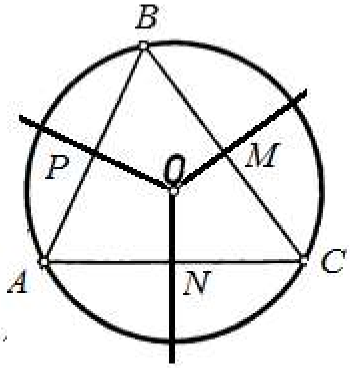


Рис. 50

I. <u>*Окружность, описанная около треугольника*</u>

Известно, что точки перпендикуляра, проведённого к отрезку в его середине, равноудалены от концов этого отрезка.

Рассмотрим оси симметрии сторон треугольника *ABC*. Построим серединные перпендикуляры к сторонам этого треугольника. Пусть они проходят через точки *M, N* и *P*, являющиеся серединами сторон треугольника *BC*, *AC* и *AB* соответственно. Пусть серединные перпендикуляры, проходящие через точки *M* и *N*, пресекаются в точке *O* (Рис. 50). Очевидно, точка *O* одинаково удалена от вершин B и C треугольника ABC, так как лежит на оси симметрии стороны BC. По той же причине можно утверждать, что она равноудалена и концов отрезка AC. Получается, что точка O равноотстоит от всех трёх вершин треугольника. Это означает, что, если провести окружность радиусом, равным расстоянию этой точки от вершин треугольника, с центром в точке O, то она обязательно пройдёт через все три вершины треугольника ABC. Такая окружность называется ***описанной около треугольника***. А треугольник в таком случае называется ***вписанным в окружность***.

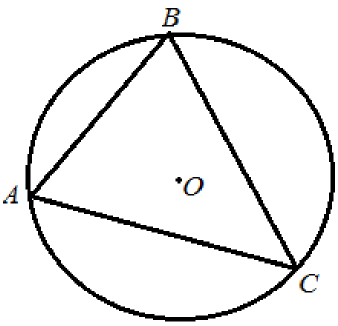
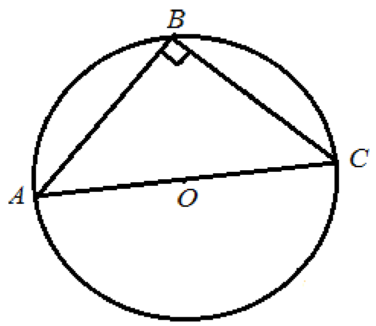
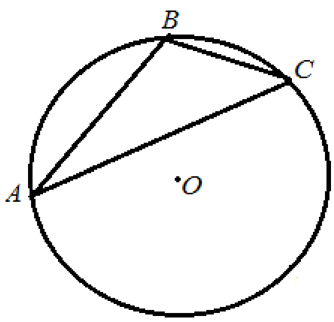
Обратно, если существует окружность, проходящую через вершины некоторого треугольника ABC, то её центр будет находиться на равных расстояниях от вершин треугольника, а потому принадлежать каждому из серединных перпендикуляров.

Отметим два важных свойства:

1^0) *Центр окружности, описанной около треугольника, находится в точке пересечения серединных перпендикуляров, построенных к сторонам треугольника*.

2^0) *Вокруг данного треугольника можно описать окружность, и притом только одну*.

Возможны только три случая взаимного расположения вписанного треугольника и центра описанной окружности:

		
а) Центр описанной окружности лежит внутри треугольника	б) Центр описанной окружности лежит на стороне треугольника (являющейся её диаметром)	в) Центр описанной окружности лежит вне треугольника

Из этих трёх случаев наиболее интересным является случай б). Известно, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90^0. Значит, в этом случае вписанный треугольник является прямоугольным.

3^0) *Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине его гипотенузы.*

Радиус описанной около треугольника окружности обычно обозначают буквой R.

В таком случае имеет место формула.

$$\boxed{R=\frac{c}{2}} \qquad (18.1)$$

Известно свойство:

4^0) *В любом треугольнике сторона равна диаметру описанной окружности, умноженному на синус противолежащего угла*.

Это свойство непосредственно получается из теоремы синусов.

В общем случае радиус описанной около треугольника окружности вычисляется по формуле

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}} \qquad (18.2)$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой синусов, из которой можно получить соотношение $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. Помножим числитель и знаменатель дроби на bc, получим $R = \dfrac{abc}{2bc\sin\alpha} = \dfrac{abc}{4\cdot\frac{1}{2}bc\sin\alpha} = \dfrac{abc}{4S}$. Откуда получаем формулу (18.2).

Известно, что $S = \dfrac{1}{2}a\cdot b\sin\gamma$. Из теоремы синусов следует, что $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$. Подставляя эти значения длин сторон a и b в формулу площади треугольника, получим

$$S = \frac{1}{2}a\cdot b\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta\cdot\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

Выражая из последнего равенства R, получим следствие.

Следствие 1. Имеет место формула

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}}.} \qquad (18.3)$$

Воспользуемся ещё раз теоремой синусов, согласно которой можем записать цепочку следствий из неё $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$.

Подставим найденные выражения сторон треугольника ABC в формулу полупериметра. Будем иметь

$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{2R\sin\alpha + 2R\sin\beta + 2R\sin\gamma}{2}.$$

Или $p = R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$. Откуда получаем

Следствие 2. Имеет место формула

$$\boxed{R = \frac{p}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \quad \text{или} \quad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{p}{R}.} \qquad (18.4)$$

Замечание. Имеет место ещё одно интересное соотношение

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{p}{4R}.$$

Из которого получаем

$$\boxed{R = \frac{p}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}.} \qquad (18.5)$$

II. *Окружность, вписанная в треугольник*

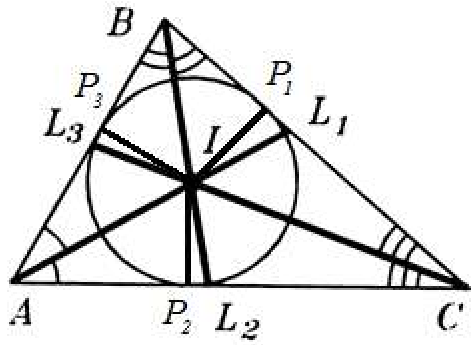


Рис. 51

Ранее мы установили, что три внутренние биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которую называют ***инцентром***, и которая одновременно является центром вписанной в треугольник окружности.

Обозначим через L_1, L_2, L_3 точки пересечения внутренних биссектрис треугольника ABC с его сторонами. Рассмотрим сначала точку I – точку пересечения двух биссектрис AL_1 и AL_2. Она равноудалена от сторон AB и AC, так как она лежит на биссектрисе $\angle A$, и одинаково удалена от сторон AB и BC, как принадлежащая биссектрисе угла $\angle B$. Значит, она одинаково удалена и от сторон AC и BC, то есть принадлежит и третьей биссектрисе CL_3. Таким образом, в точке I пересекаются три биссектрисы треугольника ABC. При этом точка I одинаково удалена от сторон треугольника. Это означает, что три перпендикуляра: IP_1, IP_2, IP_3, опущенные из этой точки на стороны треугольника, равны между собой (Рис. 51). Построим окружность с центром в точке I радиуса r, равным длине этих перпендикуляров. Тогда эта окружность будет называться ***вписанной*** в треугольник.

Итак, ***вписанная в треугольник окружность*** – это окружность, которая касается всех его сторон.

5^0) *В данный треугольник можно вписать единственную окружность.*

6^0) *Пусть F, K, T – точки касания вписанной окружности соответственно со сторонами AB=c, BC=a, CA=b треугольника ABC. Тогда* $AF = AT = p - a$; $BF = BK = p - b$; $CK = CT = p - c$, где p – полупериметр (Рис. 52).

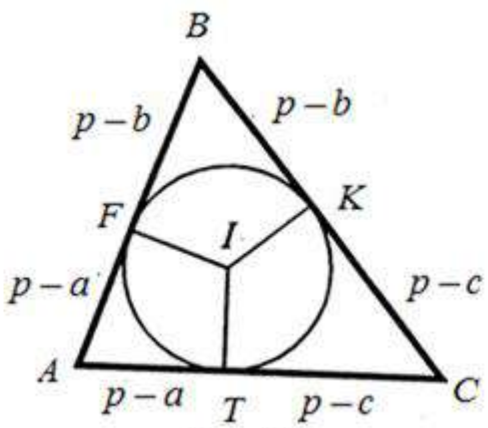


Рис. 52

7^0) *Радиус вписанной в треугольник окружности равен результату от деления его площади на полупериметр*, т.е.

$$\boxed{r = \frac{S}{p}.} \qquad (18.6)$$

Доказательство. Рассмотрим треугольники AIB, BIC, AIC (Рис. 52). Очевидно, что $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AIB} + S_{\Delta BIC} + S_{\Delta AIC}$. Все эти треугольники имеют равную высоту, длина которой равна r. Поэтому можем записать: $S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2} a \cdot r$, $S_{\Delta BIC} = \frac{1}{2} b \cdot r$, $S_{\Delta AIC} = \frac{1}{2} c \cdot r$.

Тогда $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot r+\frac{1}{2}b\cdot r+\frac{1}{2}c\cdot r=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=p\cdot r$. Откуда следует, что $r=\frac{S}{p}$.

<u>*Следствие 1*</u>. Имеет место формула

$$\boxed{r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\,.} \tag{18.7}$$

Действительно, т.к. $r=\frac{S}{p}$, то подставим в числитель этой дроби выражение площади треугольника из формулы Герона. Будем иметь $r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$. Внося p под знак радикала в виде p^2, и сокращая на p, получим формулу (18.7).

Если на Рис. 52 сделать дополнительное построение, а именно соединить вершину A с инцентром I, то, очевидно, отрезок AI, будет лежать на внутренней биссектрисе $\angle A$. Тогда треугольники AIF и AIT будут равны, например, по III признаку равенства треугольников. Отрезок AI разделит $\angle A$ пополам, т.е. $\angle FAI=\angle TAI=\frac{\alpha}{2}$. Тогда, используя определение котангенса угла прямоугольного треугольника AIF получим $p-a=r\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$. Откуда получаем

<u>*Следствие 2*</u>.

$$\boxed{r=(p-a)\cdot tg\frac{\alpha}{2}\,.} \tag{18.8}$$

Аналогично можно записать, что $r=(p-b)\cdot tg\frac{\beta}{2}$, $r=(p-c)\cdot tg\frac{\gamma}{2}$.

Знание формулы $p-a=r\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$ и её аналогов: $p-b=r\cdot ctg\frac{\beta}{2}$, $p-c=r\cdot ctg\frac{\gamma}{2}$ позволяет получить ещё одно важное свойство.

8^0) *Отношение разности полупериметра и стороны треугольника ABC к котангенсу половины угла, противолежащего выбранной стороне, есть величина постоянная, равная радиусу r вписанной в треугольник окружности* (***теорема котангенсов***). Т.е. имеет место формула

$$\boxed{\frac{p-a}{ctg\frac{\alpha}{2}}=\frac{p-b}{ctg\frac{\beta}{2}}=\frac{p-c}{ctg\frac{\gamma}{2}}=r\,.} \tag{18.9}$$

Действительно, из $p-a=r\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$ следует $\frac{p-a}{ctg\frac{\alpha}{2}}=r$. Аналогично, из формул $p-b=r\cdot ctg\frac{\beta}{2}$, $p-c=r\cdot ctg\frac{\gamma}{2}$ следует $\frac{p-b}{ctg\frac{\beta}{2}}=r$, $\frac{p-c}{ctg\frac{\gamma}{2}}=r$. Замечаем, что все три отношения дают один и тот же результат, а это доказывает справедливость формулы (18.9).

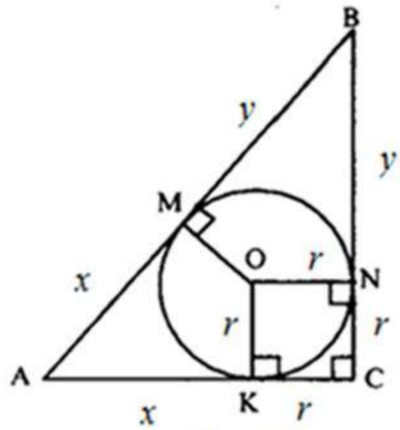


Рис. 53

Получим теперь формулу радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.

Заметим, что катеты треугольника ACB можно записать в виде (см. Рис. 53):

$$a=r+y,\ b=r+x.$$

Очевидно, что $a+b=(r+y)+(r+x)$ или $a+b=2r+y+x$. Но из Рис. 53 видно, что $y+x=c$.

Тогда $a+b=2r+c$. Откуда $2r=a+b-c$. Далее получаем $r=\frac{a+b-c}{2}$.

Таким образом, радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, может быть найден по формуле

$$\boxed{r=\frac{a+b-c}{2}.} \qquad (18.10)$$

9^0) *В прямоугольном треугольнике полусумма катетов равна сумме радиусов его вписанной и описанной окружностей*, т.е.

$$\boxed{R+r=\frac{a+b}{2}.} \qquad (18.11)$$

Действительно, ранее было установлено, что радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, находится по формуле $R=\frac{c}{2}$. Радиус вписанной в этот же треугольник окружности отыскивается по формуле (18.10). Тогда почленное сложение левых и правых частей двух формул $R=\frac{c}{2}$ и $r=\frac{a+b-c}{2}$ даёт формулу (18.11).

§ 19. Соотношения между радиусами вписанной и описанной окружностей

Рассмотрим вопрос, связанный с нахождением расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей, построенных около одного и того же треугольника ABC.

1^0) *Расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника равно* $d=\sqrt{R(R\text{-}2r)}$ (***формула Эйлера***).

<u>Доказательство</u>.

Обозначим буквами *O* и *K* центры описанной и вписанной окружностей треугольника *ABC* соответственно. Положим, что отрезок *OK* имеет длину *d*. Пусть *Q* – точка пересечения описанной окружности с биссектрисой угла $\angle BAC$, а *PQ* и *MN* – диаметры этой окружности, содержащие точки *Q* и *K* соответственно (Рис. 54).

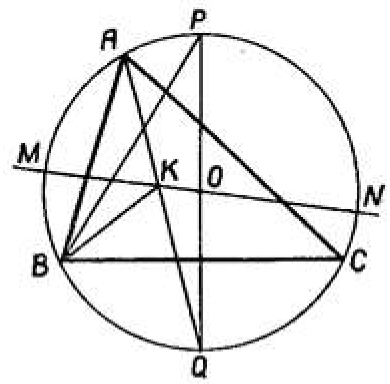


Рис. 54

Сразу заметим, что прямая *AQ* содержит биссектрису угла $\angle A$. Значит, точка *Q* делит дугу *BC* на две равные дуги. Тогда имеет место равенство углов $\angle BPQ=\angle BAQ=\angle QBC=\angle QAC=\dfrac{\alpha}{2}$ (т.к. все эти углы опираются на дуги, имеющие равную градусную меру).

Так как внешний угол треугольника *ABK* в вершине *K* удовлетворяет соотношению $\angle BKQ=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\angle QBK$, то треугольник *BKQ* является равнобедренным, т.е. *BQ* = *KQ*. Исходя из свойства пересекающихся хорд, пересекающихся внутри круга, можем записать соотношение между частями этих хорд: $MK\cdot KN=AK\cdot KQ$.

Тогда $(R-d)(R+d)=AK\cdot KQ=AK\cdot BQ=\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot PQ\sin\frac{\alpha}{2}=2Rr$, т.е. $R^2-d^2=2Rr$. Окончательно, $d=\sqrt{R(R\text{-}2r)}$.

Поскольку величина d^2 неотрицательна и обращается в нуль только для правильного треугольника, то из формулы Эйлера вытекают следствия.

<u>*Следствие 1*</u>. *В любом треугольнике ABC выполняется неравенство* $R\geq r$. *Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда треугольник ABC является равносторонним.*

<u>*Следствие 2*</u>. *При R>2r существует бесконечно много попарно неподобных треугольников, имеющих одни и те же величины R и r (при R=2r треугольник ABC является равносторонним и его стороны равны* $R\sqrt{3}$ *).*

<u>*Следствие 3*</u>.*Для того, чтобы положительные числа R', r' могли быть соответственно радиусами описанной и вписанной окружностей некоторого треугольника, необходимо и достаточно выполнение неравенства* $R'\geq 2r'$.

<u>*Замечание*</u>. Отметим также, что некоторые треугольники, например прямоугольные, однозначно определяются величинами *R* и *r*. В случае прямоугольного треугольника выполняется неравенство $d\geq r$, из которого вытекает соотношение $R\geq r\left(1+\sqrt{2}\right)$.

2^0) *Расстояние от вершины C треугольника до центра вписанной окружности равно* $q_{CK} = \dfrac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \sqrt{(p\text{-}c)^2 + r^2} = \sqrt{ab - 4Rr}$ *, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей, а γ – угол вершины C.*

Запишем теперь без доказательства ряд формул, выражающих связи радиусов вписанной и описанной окружностей со сторонами треугольника и (или) его полупериметром.

$$\boxed{ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr,} \tag{19.1}$$

$$\boxed{abc = 4pRr,} \tag{19.2}$$

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right),} \tag{19.3}$$

$$\boxed{a^3 + b^3 + c^3 = 2p\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right),} \tag{19.4}$$

$$\boxed{(a+b)(b+c)(a+c) = 2p\left(p^2 + r^2 + 2Rr\right),} \tag{19.5}$$

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4R}\left(\frac{p}{r} + \frac{r}{p}\right) + \frac{1}{r},} \tag{19.6}$$

$$\boxed{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2Rr},} \tag{19.7}$$

$$\boxed{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4pRr}\right)^2 - \frac{1}{Rr},} \tag{19.8}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{p^2 - 2Rr + r^2}{2Rr},} \tag{19.9}$$

$$\boxed{(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-a)(p-c) = r(4R + r),} \tag{19.10}$$

$$\boxed{(p-a)(p-b)(p-c) = pr^2,} \tag{19.11}$$

$$\boxed{(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 = p^2 - 2r(4R + r),} \tag{19.12}$$

$$\boxed{(p-a)^3 + (p-b)^3 + (p-c)^3 = p\left(p^2 - 12Rr\right),} \tag{19.13}$$

$$\boxed{\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{4R+r}{pr},} \qquad (19.14)$$

$$\boxed{\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-c)(p-b)}+\frac{1}{(p-a)(p-c)}=\frac{1}{r^2},} \qquad (19.15)$$

$$\boxed{\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2r^2},} \qquad (19.16)$$

$$\boxed{\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}=\frac{4R-2r}{r},} \qquad (19.17)$$

$$\boxed{\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b}+\frac{c^2}{p-c}=\frac{4p(R-r)}{r},} \qquad (19.18)$$

$$\boxed{\frac{c}{(p-a)(p-b)}+\frac{a}{(p-c)(p-b)}+\frac{b}{(p-a)(p-c)}=\frac{2(4R+r)}{pr},} \qquad (19.19)$$

$$\boxed{\frac{c^2}{(p-a)(p-b)}+\frac{a^2}{(p-c)(p-b)}+\frac{b^2}{(p-a)(p-c)}=\frac{4(R+r)}{r}.} \qquad (19.20)$$

§ 20. Дополнительные соотношения между R, r, высотами, медианами и биссектрисами треугольника

1^0) *Высота треугольника выражается через две стороны треугольника (отличные от стороны, к которой проведена высота) и радиус описанной окружности по формуле*

$$\boxed{h_a=\frac{bc}{2R}.} \qquad (20.1)$$

Действительно, из формулы $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$ выразим $h_a=\frac{2S}{a}$. Но площадь треугольника можно заменить, используя формулу $S=\frac{1}{2}b\cdot c\sin\alpha$, а сторону a можно переписать в виде $a=2R\cdot\sin\alpha$. Тогда $h_a=\frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot bc\sin\alpha}{2R\cdot\sin\alpha}=\frac{bc}{2R}$, что свидетельствует о справедливости формулы (20.1).

Замечание 1. Имеют место две аналогичные формулы: $h_b = \dfrac{ac}{2R}$; $h_c = \dfrac{ab}{2R}$.

2^0) *Высоту треугольника можно выразить через сторону, к которой она проведена, а также полупериметр и радиус вписанной окружности*, т.е.

$$\boxed{h_a = \frac{2pr}{a}.} \tag{20.2}$$

Действительно, исходя из формулы $h_a = \dfrac{2S}{a}$ и заменяя S на pr, получим формулу (20.2).

Замечание 2. Имеют место две аналогичные формулы: $h_b = \dfrac{2pr}{b}$; $h_c = \dfrac{2pr}{c}$.

3^0) *Три высоты любого треугольника и радиус вписанной в него окружности удовлетворяют тождеству*

$$\boxed{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.} \tag{20.3}$$

Действительно, из формулы $S = \dfrac{1}{2} a \cdot h_a$ можно получить соотношение $\dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S}$. Запишем аналогичные равенства $\dfrac{1}{h_b} = \dfrac{b}{2S}$ и $\dfrac{1}{h_c} = \dfrac{c}{2S}$. Очевидно, сумму $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$ можно переписать в виде:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

Тем самым доказана справедливость формулы (20.3).

4^0) *В любом треугольнике отношение суммы всех попарных произведений, составленных из длин сторон треугольника, к сумме длин трёх его высот равно диаметру описанной окружности*, т.е.

$$\boxed{\frac{ab+bc+ac}{h_a+h_b+h_c} = 2R.} \tag{20.4}$$

Доказательство. Воспользуемся формулами: $h_a = \dfrac{2S}{a}$, $h_b = \dfrac{2S}{b}$, $h_c = \dfrac{2S}{c}$. Подставим эти выражения для высот треугольника в знаменатель левой части формулы (21.4):

$$\frac{ab+bc+ac}{h_a+h_b+h_c} = \frac{ab+bc+ac}{\dfrac{2S}{a}+\dfrac{2S}{b}+\dfrac{2S}{c}} = \frac{ab+bc+ac}{2S\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)} = \frac{ab+bc+ac}{2S\cdot\dfrac{ab+bc+ac}{abc}} = \frac{abc}{2S} =$$

$$= 2\cdot\frac{abc}{4S} = 2R.$$

Приведем без доказательств ряд формул, связывающих высоты треугольника полупериметром, радиусами R и r, а также площадью S:

$$\boxed{h_a + h_b + h_c = \frac{1}{2R} \cdot \left(p^2 + r^2 + 4Rr \right);} \qquad (20.5)$$

$$\boxed{h_a h_b + h_b h_c + h_a h_c = \frac{2p^2 r}{R};} \qquad (20.6)$$

$$\boxed{h_a h_b h_c = \frac{2p^2 r^2}{R};} \qquad (20.7)$$

$$\boxed{h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{1}{4R^2} \cdot \left[\left(p^2 + r^2 + 4Rr \right)^2 - 16p^2 Rr \right];} \qquad (20.8)$$

$$\boxed{\left(h_a + h_b \right)\left(h_b + h_c \right)\left(h_a + h_c \right) = \frac{p^2 r}{R^2} \cdot \left(p^2 + r^2 + 2Rr \right);} \qquad (20.9)$$

$$\boxed{\frac{1}{h_a h_b} + \frac{1}{h_b h_c} + \frac{1}{h_a h_c} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4p^2 r^2};} \qquad (20.10)$$

$$\boxed{\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2 r^2};} \qquad (20.11)$$

$$\boxed{\frac{h_a + h_b}{h_c} + \frac{h_b + h_c}{h_a} + \frac{h_a + h_c}{h_b} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr};} \qquad (20.12)$$

$$\boxed{\frac{h_a + h_b}{a + b} + \frac{h_b + h_c}{b + c} + \frac{h_a + h_c}{a + c} = \frac{pr}{2R^2};} \qquad (20.13)$$

$$\boxed{r\left(h_a h_b + h_b h_c + h_a h_c \right) = h_a h_b h_c;} \qquad (20.14)$$

$$\boxed{\frac{h_a + h_b}{h_c} + \frac{h_b + h_c}{h_a} + \frac{h_a + h_c}{h_b} = \frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{a + c}{b};} \qquad (20.15)$$

$$\boxed{S = \sqrt{\tfrac{1}{2} R \cdot h_a h_b h_c}\,.} \qquad (20.16)$$

Отметим также некоторые свойства, справедливые для треугольников специального вида.

5^0) *Если числа* h_a, h_b, h_c *выражают длины высот некоторого треугольника ABC и выполняется равенство* $\frac{h_c^2}{h_a^2}+\frac{h_c^2}{h_b^2}=1$, *то треугольник является прямоугольным.*

6^0) *Если в треугольнике ABC известно, что* $\angle B\text{-}\angle A=90^0$, *то имеет место тождество* $R^2+h_c^2=m_c^2$, *где R – радиус описанной окружности,* h_c^2 *и* m_c^2 *– соответственно высота и медиана, проведенные из вершины C.*

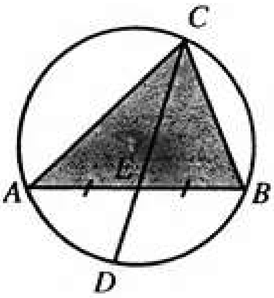


Рис. 55

7^0) *Если в треугольнике ABC из каждой вершины проведены высоты и биссектрисы, их длины соответственно равны* $h_a, l_a; h_b, l_b; h_c, l_c$; *r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей этого треугольника, то если выполняется условие* $\frac{h_a}{l_a}+\frac{h_b}{l_b}+\frac{h_c}{l_c}=3\sqrt{\frac{2r}{R}}$, *то треугольник ABC равносторонний.*

8^0) *Пусть h и l – высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, r и R – радиусы его вписанной и описанной окружностей, то имеет место неравенство* $\frac{h}{l}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}$.

9^0) *В произвольном (разностороннем) треугольнике биссектриса, проведённая из любой вершины, лежит между медианой и высотой, проведёнными из той же вершины.*

10^0) *Внутренняя биссектриса и высота треугольника, проведенные из одной и той же вершины треугольника удовлетворяют соотношению*

$$\boxed{l_c=\frac{h_c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.} \tag{20.17}$$

11^0) *Если треугольник ABC вписан в окружность* (Рис. 55), *то удвоенное произведение медианы и хорды, содержащей эту медиану, равно сумме квадратов сторон треугольника, заключающих эту медиану*, т.е. имеет место соотношение

$$\boxed{CA^2+CB^2=2CE\cdot CD.} \tag{20.18}$$

§ 21. Ортоцентр и ортотреугольник

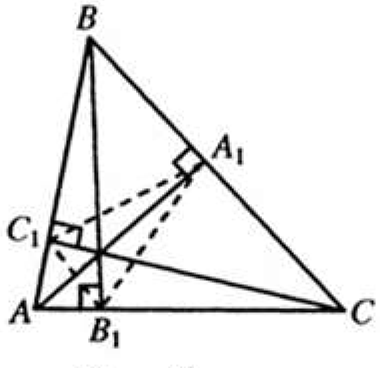


Рис. 56

Если соединить между собой основания трёх высот данного треугольника *ABC*, то мы получим новый треугольник, который называют ***ортотреугольником*** (или ***ортоцентрическим треугольником***). На Рис. 56 $\Delta A_1B_1C_1$ является ортотреугольником.

1^0) *Стороны ортотреугольника антипараллельны соответствующим сторонам данного треугольника.*

2^0) *Если точки A_1, B_1 и C_1 на сторонах соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC таковы, что* $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1$, $\angle CB_1A_1 = \angle AB_1C_1$, $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$, *то* $A_1B_1C_1$ *– ортотреугольник треугольника ABC.*

3^0) *Высоты любого остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортотреугольника.*

<u>*Следствие*</u>. *Ортоцентр остроугольного треугольника является центром вписанной окружности его ортотреугольника.*

4^0) *Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортотреугольник* (***теорема Фаньяно***).

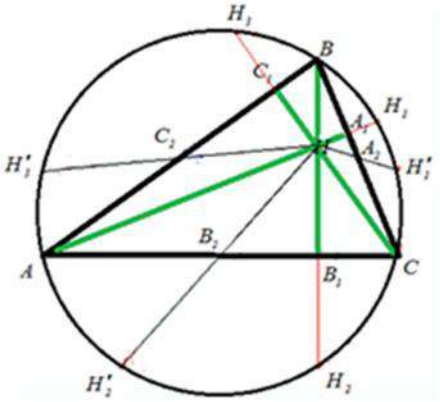


Рис. 57

5^0) *Треугольник, образованный отрезками, соединяющими точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника с описанной вокруг него окружностью* (т.е. $\Delta H_1H_2H_3$), *гомотетичен ортоцентрическому треугольнику* (т.е. $\Delta A_1B_1C_1$) (см. Рис. 57).

<u>*Замечание*</u>. При этом точки H_1', H_2', H_3' являются точками, диаметрально противоположными соответствующим вершинам треугольника ABC.

6^0) <u>*Площадь ортотреугольника рассчитывается по формуле*</u>

$$\boxed{S_{ort\Delta} = \frac{S}{(2abc)^2}\cdot\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right),} \qquad (21.1)$$

где S – площадь треугольника ABC; a, b, c – его соответствующие стороны.

7^0) *Радиус окружности, описанной вокруг треугольника, в два раза больше радиуса окружности, описанной вокруг его ортоцентрического треугольника.*

Рассмотрим теперь ортоцентр треугольника и связанные с ним свойства.

8^0) *Точки, симметричные ортоцентру треугольника H относительно его сторон* (*точки* H_1, H_2, H_3) *и середин сторон* (*точки* H_1', H_2', H_3'), *лежат на описанной около треугольника окружности* (Рис. 57).

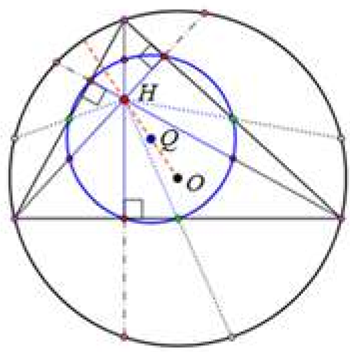


Рис. 58

9^0) *Ортоцентр делит высоты треугольника на части, произведение которых для данного треугольника постоянно.*

10^0) *Ортоцентр треугольника является центром окружности, описанной вокруг треугольника, образованного прямыми, проходящими через вершины заданного треугольника параллельно его сторонам.*

Окружностью девяти точек называется окружность, проходящая через основания трёх высот произвольного треугольника, середины трёх его сторон и середины трёх отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром (см. Рис. 58).

🕮 *Леонард Эйлер* в 1765 г. доказал, что основания высот и середины сторон треугольника лежат на одной окружности (после чего эту окружность стали называть *окружностью шести точек*). Название «*окружность девяти точек*» закрепилось после того как была опубликована (в 1822 г.) работа немецкого математика *Карла Вильгельма фон Фейербаха* (1800-1834), брата известного философа *Л. Фейербаха*, осветившая новые свойства этой окружности.

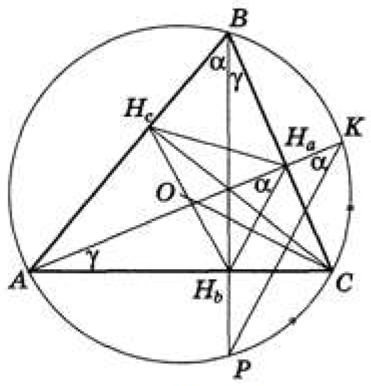


Рис. 59

Замечание. Точка касания вписанной окружности и окружности девяти точек называется **точкой Фейербаха**.

11^0) *Если треугольник равнобедренный, то его окружность Эйлера касается основания треугольника; если треугольник разносторонний, то его стороны отсекают от окружности Эйлера три дуги, одна из которых равна сумме двух других* (***теорема Мавло***).

🕮 Названа в честь отечественного математика *Дмитрия Пантелеймоновича Мавло* (р. 1951).

12^0) *Радиус окружности девяти точек равен половине радиуса описанной окружности*.

13^0) *Если H – ортоцентр данного треугольника, то четыре угла ABC, HAB, HBC, HCA, равны.*

14^0) *Радиусы описанной около треугольника окружности, проведённые из его вершин* (Рис.59), *перпендикулярны соответствующим сторонам ортоцентричного треугольника* (***теорема Нагеля***).

15^0) *Периметры данного и ортоцентричного треугольника относятся как радиусы описанной и вписанной в данный треугольник окружности.*

16^0) *Центр окружности девяти точек* (*Q*) *делит пополам отрезок между центром описанной окружности* (*O*) *и ортоцентром* (*H*), т.е. *OQ*=*QH* (см. Рис. 58).

17^0) *Ортоцентр* (*H*), *центроид* (*G*) *и центр описанной окружности* (*O*) *произвольного треугольника лежат на одной прямой* (***прямой Эйлера***), *причём выполняется соотношение* $\dfrac{OG}{GH}=\dfrac{1}{2}$.

18^0) *Центр описанной около треугольника окружности является ортоцентром его серединного* (*дополнительного*) *треугольника.*

19^0) *Если в произвольном треугольнике ABC*: (*H*) *– ортоцентр*, (*O*) *– центр описанной окружности, то имеет место векторное равенство*

$$\boxed{\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\,.} \qquad (21.2)$$

Формулу (21.2) называют ***формулой Гамильтона***.

Длина отрезка OH может быть вычислена по формуле

$$\boxed{OH=\sqrt{9R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)}\,,} \qquad (21.3)$$

где R – радиус описанной окружности; a, b, c – длины сторон треугольника.

20) *Окружность Эйлера данного треугольника и треугольника, две вершины которого совпадают с вершинами данного* (Рис. 60), *а третья является его ортоцентром, совпадают* (***теорема Гамильтона***).

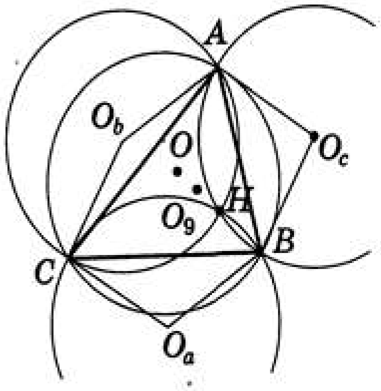


Рис. 60

21^0) *Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной стороны*.

22^0) *Любой отрезок, проведенный из ортоцентра до пересечения с описанной окружностью, делится окружностью девяти точек пополам*.

23^0) *Произведение частей высот AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника, на которые они делятся ортоцентром* (H), *есть величина постоянная, причем справедливо равенство*

$$\boxed{HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1 = 4R \cdot \left|\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma\right|,} \tag{21.4}$$

Если соединить ортоцентр (H) с вершинами остроугольного треугольника ABC, то эти три отрезка разобьют его на три треугольника, каждый из которых называется ***треугольником Гамильтона***.

24^0) *Треугольники Гамильтона имеют равные радиусы описанных окружностей, причём их длина равна длине радиуса окружности, описанной около исходного остроугольного треугольника* (Рис. 61) (или: *окружность Эйлера данного треугольника и треугольника, две вершины которого совпадают с вершинами данного, а третья является его ортоцентром, совпадают*).

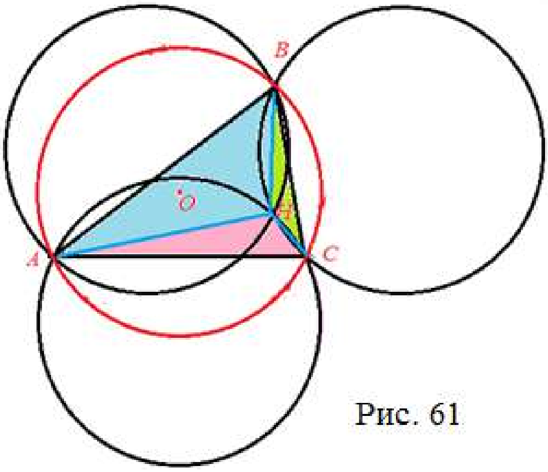


Рис. 61

<u>Замечание</u>. Каждая из трёх окружностей, описанных около треугольников Гамильтона остроугольного треугольника ABC, называется *окружностью Джонсона*. Другими словами, ***окружностью Джонсона*** называется окружность, проходящая через две вершины остроугольного треугольника ABC и через его ортоцентр.

🕮 Названы эти окружности в честь американского геометра *Роджера Артура Джонсона* (1890-1954).

25^0) *Треугольники Гамильтона имеют ту же окружность девяти точек, что и исходный остроугольный треугольник ABC.*

Треугольником Эйлера-Фейербаха называется треугольник, вершинами которого служат середины трёх отрезков, соединяющих ортоцентр и его вершины.

26^0) *Центр окружности девяти точек является центром симметрии, переводящим серединный (дополнительный) треугольник в треугольник Эйлера-Фейербаха.*

Если вокруг данного остроугольного треугольника ΔABC описать окружность и через его вершины провести прямые, касательные к окружности, то при пересечении этих прямых образуется так называемый ***тангенциальный треугольник*** $\Delta A'B'C'$ (по отношению к данному треугольнику ΔABC).

27^0) *Стороны тангенциального треугольника $\Delta A'B'C'$ антипараллельны соответствующим противоположным сторонам ΔABC и параллельны соответствующим сторонам его ортотреугольника.*

§ 22. Вневписанные окружности треугольника

Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, которая касается (снаружи) одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон (Рис. 62).

Рассмотрим свойства вневписанных окружностей произвольного треугольника:

1^0) *Существуют три окружности, касающиеся всех трех прямых, на которых лежат стороны треугольника.*

2^0) *Центр вневписанной окружности лежит в точке пересечения двух биссектрис внешних углов и биссектрисы внутреннего угла.*

3^0) *Длина отрезка касательной, проведенной к вневписанной окружности из противоположной вершины треугольника, равна полупериметру треугольника.*

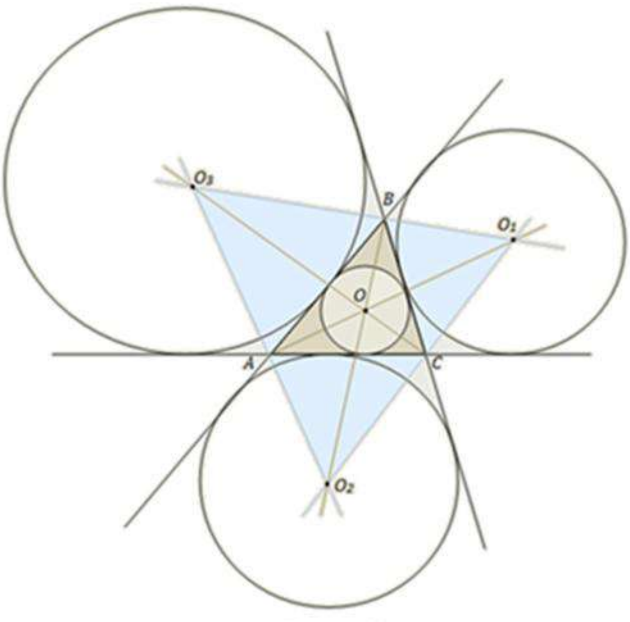


Рис. 62

4^0) *Центры вневписанных для данного треугольника окружностей лежат вне описанной около треугольника окружности.*

5^0) *Большей стороны треугольника касается вневписанная окружность большего радиуса.*

Пусть ρ_a, ρ_b, ρ_c – радиусы вневписанных окружностей.

6^0) *Радиусы вневписанных для данного треугольника окружностей совпадают тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний,* т.е.

$$\rho_a = \rho_b = \rho_c \Leftrightarrow a = b = c.$$

7^0) *Справедливы формулы:*

$$\rho_a = \frac{S_\Delta}{p-a}; \qquad \rho_b = \frac{S_\Delta}{p-b}; \qquad \rho_c = \frac{S_\Delta}{p-c}, \qquad (22.1)$$

где S_Δ - площадь треугольника, p - полупериметр треугольника.

Действительно, пусть K – центр вписанной в треугольник ABC окружности; K' – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC; N и N' – точки касания этих окружностей с прямой AC (Рис. 63). Поскольку точки A, K, K' лежат на одной прямой (биссектрисе угла BAC), то прямоугольные треугольники AKN и $AK'N'$ подобны. Отсюда и из соотношений $AN=p–a$, $AN'=p$ получаем, что $\dfrac{\rho_a}{r}=\dfrac{p}{p-a}$. Следовательно, $\rho_a=\dfrac{pr}{p-a}$

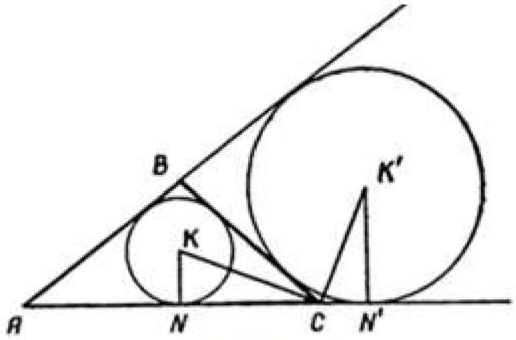


Рис. 63

или $\rho_a=\dfrac{S_\Delta}{p-a}$. Тем самым мы доказали справедливость одной из приведенных формул.

8^0) *Радиус вписанной в треугольник окружности и его радиусы вневписанных окружностей удовлетворяют тождеству*

$$\boxed{\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}=\frac{1}{r}.} \qquad (22.2)$$

Действительно, согласно формулам (22.1) можем записать: $\dfrac{1}{\rho_a}=\dfrac{p-a}{S_\Delta}$, $\dfrac{1}{\rho_b}=\dfrac{p-b}{S_\Delta}$, $\dfrac{1}{\rho_c}=\dfrac{p-c}{S_\Delta}$. Складывая почленно эти три равенства, получим $\dfrac{1}{\rho_a}+\dfrac{1}{\rho_b}+\dfrac{1}{\rho_c}=\dfrac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{S_\Delta}$. Далее воспользуемся тождеством полупериметра, согласно которому $(p-a)+(p-b)+(p-c)=p$. Тогда $\dfrac{1}{\rho_a}+\dfrac{1}{\rho_b}+\dfrac{1}{\rho_c}=\dfrac{p}{S_\Delta}$ или $\dfrac{1}{\rho_a}+\dfrac{1}{\rho_b}+\dfrac{1}{\rho_c}=\dfrac{1}{r}$.

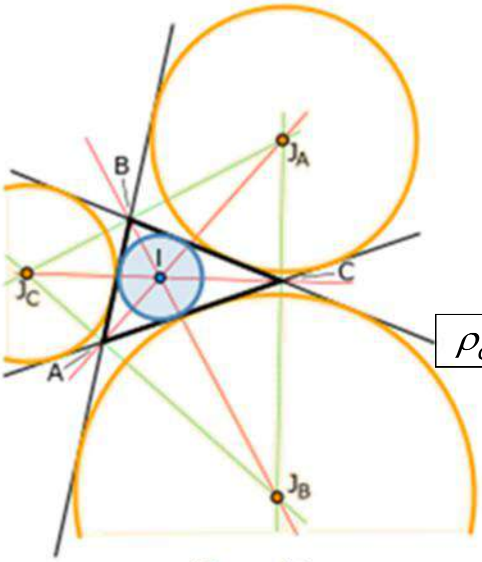


Рис. 64

9^0) *Радиус вписанной в треугольник окружности, радиус описанной около треугольника окружности и радиусы вневписанных окружностей удовлетворяют соотношению*

$$\boxed{\rho_a+\rho_b+\rho_c=r+4R.} \qquad (22.3)$$

<u>*Следствие*</u>. Так как $\rho_a+\rho_b+\rho_c-r=4R$, но известно, что $4R=\dfrac{abc}{S}$, поэтому

$$\rho_a+\rho_b+\rho_c-r=\frac{abc}{S}.$$

Обозначим центры вневписанных окружностей соответственно буквами J_A, J_B, J_C (Рис. 64).

10^0) *Треугольник* ΔABC *является ортоцентрическим треугольником* $\Delta J_A J_B J_C$.

11^0) *Расстояние между центрами описанной и вневписанной окружностей находится по формуле Эйлера:* $OJ_i = \sqrt{R^2 + 2R\rho_i}$ *, где O – центр описанной окружности.*

12^0) Имеют место соотношения:

$$\rho_a \cdot \rho_b = p \cdot (p-c);\ r \cdot \rho_a = (p-b) \cdot (p-c).$$

Рассмотрим три окружности на плоскости, центры которых не лежат на одной прямой. Если построить радикальные оси для каждой пары этих окружностей, то все три радикальные оси пересекаются в одной точке, которая и называется ***радикальным центром*** трёх данных окружностей.

13^0) *Радикальный центр вневписанных окружностей –* ***точка Шпикера*** *S, т.е. центр окружности, вписанной в серединный треугольник* (*образованный серединами сторон*) (Рис. 65).

14^0) *Середины трех отрезков, соединяющих центр вписанной в треугольник окружности с центрами вневписанных окружностей, лежат на описанной окружности* (***теорема Мансиона***).

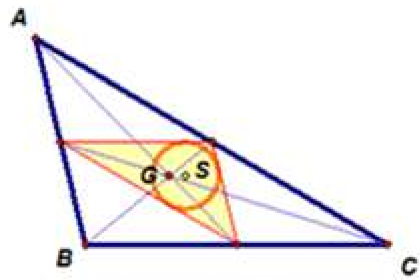


Рис. 65

Иначе, *расстояния между центром вписанной в треугольник окружности и центрами вневписанных окружностей делятся пополам окружностью, описанной около него.*

📖 Эту теорему сформулировал и доказал бельгийский математик *Пол Мансион* (1844-1919).

15^0) *Если* $\rho_a \le \rho_b \le \rho_c$, *то* $\frac{1}{3}\rho_a \le r \le \frac{1}{3}\rho_c$, *причем, оба равенства достигаются одновременно лишь в случае равностороннего треугольника.*

16^0) *Расстояния между центром I вписанной в треугольник* ΔABC *окружности и центрами вневписанных окружностей* J_A, J_B, J_C *находятся по формулам:*

$$IJ_A = \sqrt{R \cdot (\rho_a - r)}; \qquad IJ_B = \sqrt{R \cdot (\rho_b - r)}; \qquad IJ_C = \sqrt{R \cdot (\rho_c - r)}. \qquad (22.4)$$

17^0) *Радиус вневписанной окружности треугольника связан с тангенсом половины противолежащего внутреннего угла по формулам*:

$$\rho_a = p \cdot tg\frac{\alpha}{2}; \qquad \rho_b = p \cdot tg\frac{\beta}{2}; \qquad \rho_c = p \cdot tg\frac{\gamma}{2}. \qquad (22.5)$$

Кроме того имеют место соотношения:

$$\boxed{\rho_a\rho_b + \rho_a\rho_c + \rho_b\rho_c = p^2,} \qquad (22.6)$$

$$\boxed{\rho_a\rho_b\rho_c = rp^2,} \qquad (22.7)$$

$$\boxed{\rho_a{}^2 + \rho_b{}^2 + \rho_c{}^2 = (4R+r)^2 - 2p^2,} \qquad (22.8)$$

$$\boxed{\rho_a{}^3+\rho_b{}^3+\rho_c{}^3=(4R+r)^3-12p^2R,} \qquad (22.9)$$

$$\boxed{(\rho_a+\rho_b)(\rho_a+\rho_c)(\rho_b+\rho_c)=4p^2R,} \qquad (22.10)$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho_a\rho_b}+\frac{1}{\rho_a\rho_c}+\frac{1}{\rho_b\rho_c}=\frac{4R+r}{p^2r},} \qquad (22.11)$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho_a{}^2}+\frac{1}{\rho_b{}^2}+\frac{1}{\rho_c{}^2}=\frac{p^2-2r(4R+r)}{p^2r^2},} \qquad (22.12)$$

$$\boxed{\frac{\rho_a+\rho_b}{\rho_c}+\frac{\rho_b+\rho_c}{\rho_a}+\frac{\rho_a+\rho_c}{\rho_b}=\frac{4R-2r}{r},} \qquad (22.13)$$

$$\boxed{r(\rho_a\rho_b+\rho_a\rho_c+\rho_b\rho_c)=\rho_a\rho_b\rho_c,} \qquad (22.14)$$

$$\boxed{4R(\rho_a\rho_b+\rho_a\rho_c+\rho_b\rho_c)=(\rho_a+\rho_b)(\rho_a+\rho_c)(\rho_b+\rho_c).} \qquad (22.15)$$

18^0) *Связь высот исходного треугольника ΔABC, радиуса вписанной окружности и радиусов вневписанных окружностей выражается формулами*:

$$\boxed{\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c},} \qquad (22.16)$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a},} \qquad (22.17)$$

$$\boxed{\frac{2}{h_a}=\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}=\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_a}.} \qquad (22.18)$$

19^0) *Площадь исходного треугольника ΔABC с радиусами вневписанных окружностей выражается формулами*:

$$\boxed{S_\Delta=\sqrt{r\cdot\rho_a\cdot\rho_b\cdot\rho_c},} \qquad (22.19)$$

$$\boxed{S_\Delta=\frac{\rho_a\cdot\rho_b\cdot\rho_c}{p}.} \qquad (22.20)$$

20^0) *Окружность девяти точек всякого треугольника касается его вписанной и трёх вневписанных окружностей* (***теорема Фейербаха***).

21^0) *Стороны треугольника ABC, его полупериметр и радиусы вневписанных окружностей удовлетворяют соотношению*

$$\boxed{\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}=\frac{\rho_a+\rho_b}{\rho_c}+\frac{\rho_b+\rho_c}{\rho_a}+\frac{\rho_a+\rho_c}{\rho_b},} \qquad (22.21)$$

22^0) *Если треугольник вписан в эллипс, фокус которого лежит на стороне этого треугольника, то вневписанная окружность касается этой стороны в фокусе.*

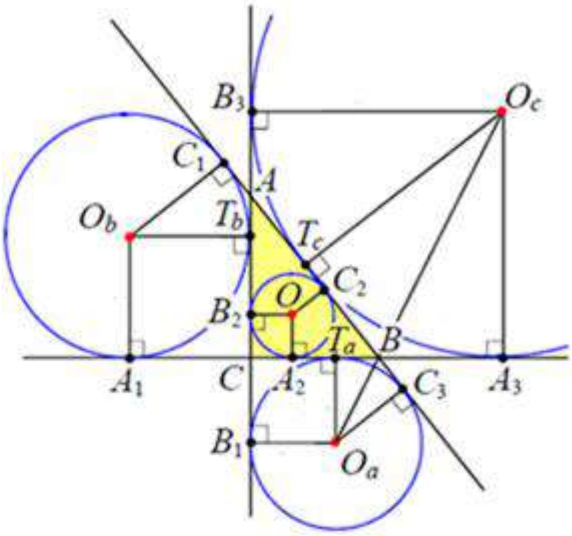


Рис. 66

Далее рассмотрим свойства вневписанных окружностей прямоугольного и равнобедренного треугольников.

Возьмём произвольный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (Рис. 66). Для него существуют три вневписанные окружности с центрами в точках O_a, O_b, O_c и радиусами r_a, r_b, r_c соответственно.

23^0) *Расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности с продолжением его боковой стороны равно полупериметру треугольника.*

24^0) *Расстояния между точками касаний вневписанных окружностей продолжений сторон за вершины треугольника равны* (см. Рис. 66: $C_1C_3=a+b, B_1B_3=a+c, A_1A_3=b+c$).

25^0) *Пусть вписанная окружность треугольника ABC* (Рис. 66) *касается сторон BC, AC и AB в точках A_2, B_2, C_2 соответственно, а вневписанная окружность с центром O_a – стороны BC в точке T_a, тогда:*

$$CA_2=BT_a=\frac{a+b-c}{2}=p-c;\ CT_a=BA_2=\frac{a+c-b}{2}=p-b.$$

<u>Следствие</u>. *Точки касания вписанной и вневписанной окружности со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны.*

26^0) *Радиус вневписанной окружности треугольника больше радиуса окружности, вписанной в тот же треугольник.*

Отношения радиусов вписанной и вневписанной окружностей можно представить следующим образом:

$$\frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p},\qquad \frac{r}{r_b}=\frac{p-b}{p},\qquad \frac{r}{r_c}=\frac{p-c}{p}. \qquad (22.22)$$

27^0) *Радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы прямоугольного треугольника, равен полупериметру этого треугольника*, то есть $r_c=p$.

Следствие. Так как для прямоугольного треугольника имеют место тождества $p = 2R + r = c + r$, то можем записать, что $r_c = 2R + r = c + r$.

28^0) *Гипотенуза прямоугольного треугольника равна сумме радиусов вневписанных окружностей, касающихся катетов*, т.е. $c = r_a + r_b$.

29^0) *Катет прямоугольного треугольника равен сумме радиусов окружностей вписанной и вневписанной, касающейся этого катета*, т.е. имеют место равенства: $a = r_a + r$ и $b = r_b + r$.

30^0) *Катеты прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C могут быть найдены через радиусы вневписанных окружностей r_a, r_b, r_c по формулам*:

$$\boxed{a = r_c - r_b,} \qquad \boxed{b = r_c - r_a;} \tag{22.23}$$

$$\boxed{a = \frac{2r_a r_c}{r_a + r_c},} \qquad \boxed{b = \frac{2r_b r_c}{r_b + r_c}.} \tag{22.24}$$

31^0) *Площадь прямоугольного треугольника ABC с прямым углом в вершине C может быть найдена через радиус r вписанной и радиусы r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей по одной из нижеследующих формул*:

$$\boxed{S = r r_c,} \tag{22.25}$$

$$\boxed{S = r_a r_b,} \tag{22.26}$$

$$\boxed{S = r_a r_c \frac{r_c - r_a}{r_c + r_a},} \tag{22.27}$$

$$\boxed{S = r_b r_c \frac{r_c - r_b}{r_c + r_b}.} \tag{22.28}$$

32^0) *Все три радиуса r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей прямоугольного треугольника ABC с углом C*=90^0 *связаны формулой:* $r_a = r_c \cdot \dfrac{r_c - r_b}{r_c + r_b}$ *или* $r_b = r_c \cdot \dfrac{r_c - r_a}{r_c + r_a}$.

33^0) *Расстояния между центрами вневписанных окружностей треугольника ABC с углом C*=90^0 *выражаются через радиусы этих окружностей формулами:*

$$O_aO_c^2 = 2\left(r_a^2 + r_c^2\right), \qquad O_bO_c^2 = 2\left(r_b^2 + r_c^2\right), \qquad O_aO_b^2 = 2\left(r_a^2 + r_b^2\right). \tag{22.29}$$

34^0) *Гипотенуза видна из центра касающейся её вневписанной окружности под углом* 45^0.

Отметим ещё одно интересное свойство, затрагивающее вневписанную окружность равнобедренного треугольника.

35^0) *Вневписанные окружности равнобедренного треугольника, касающиеся его боковых сторон, равны между собой и их радиус имеет длину, равную длине высоты этого треугольника, проведённой к основанию.*

§ 23. Теоремы Чевы и Менелая

В общем случае высота, биссектриса, медиана и серединный перпендикуляр, проведённые к одной и той же стороне треугольника, не совпадают (исключением является равнобедренный или равносторонний треугольник). Положения, отражающие факты пересечения медиан, биссектрис и прямых, на которых лежат высоты треугольника, в одной точке являются следствиями более общих. К ним относятся теоремы Чевы и Менелая.

🕮 Итальянский математик *Джованни Чев*а (1647-1734) и древнегреческий математик и астроном *Менелай Александрийский* (I-II вв. н.э.) известны науке, благодаря упомянутым теоремам, а сами теоремы позволяют легко и изящно решать треугольники (находить их неизвестные элементы по известным).

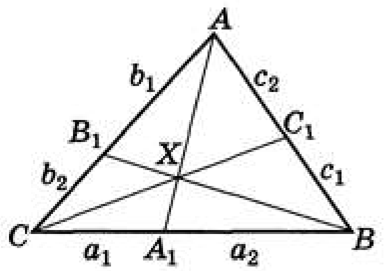


Рис. 67

Прежде чем сформулировать эти теоремы, необходимо ввести некоторые понятия.

Отрезок, который соединяет вершину треугольника с какой-либо точкой противолежащей стороны, называется ***чевианой.*** То есть *чевианами* являются медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

Теорема (Чевы). *Пусть в треугольнике ABC на сторонах AB, BC, AC взяты соответственно точки* C_1, A_1 , B_1 (Рис. 67). *Для того, чтобы прямые* AA_1, BB_1, CC_1 *(чевианы) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$

Теорема (Чевы в форме синусов). *Пусть точки* A_1, B_1, C_1 *лежат на сторонах (или их продолжениях) треугольника ABC, причём только одна из них принадлежит стороне треугольника, либо все три. Тогда следующие условия равносильны:*

а) прямые AA_1, BB_1, CC_1 *пересекаются в одной точке;*

б) $\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1}=1.$

🕮 Теорема Чевы была доказана в XI веке арабским учёным *Юсуфом аль-Мутаманом ибн Худом*, однако его доказательство было забыто. Она была доказана вновь итальянским математиком *Джованни Чевой* в 1678 году.

Равенство, выражающее теорему Чевы, не обязательно запоминать. Можно обходить контур треугольника, начав с любого отрезка в любом направлении. Можно заменить представленное выше равенство равенством произведений отрезков $AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1 = B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A$ (согласно Рис. 67: $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$).

Примечательны следующие свойства чевиан:

1^0) *Если стороны треугольника делятся в отношении* $a:b, c:a, b:c$ *в порядке обхода треугольника, то отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками деления противолежащих сторон, пересекаются в одной точке.*

2^0) *Чевианы треугольника, продолженные до точек, которые делят стороны треугольника на части, пропорциональные квадратам длин прилежащих к ним сторон, проходят через одну точку.*

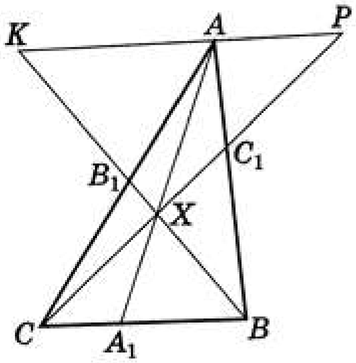


Рис. 68

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо не только для квадратов, но и для высших степеней длин сторон.

3^0) *Чевианы треугольника, продолженные до точек, которые делят стороны треугольника на части, пропорциональные одним и тем же функциям прилежащих углов, проходят через одну точку.*

4^0) *Если на сторонах произвольного треугольника ABC взяты точки* A_2, B_2, C_2 *так, что они делят каждую из сторон на части, пропорциональные прилегающим чевианам* AA_1, BB_1, CC_1, *которые пересекаются в одной точке. При таких условиях чевианы* AA_2, BB_2, CC_2 *также пересекаются в одной точке.*

С чевианами связан также ряд теорем.

Теорема (Ван-Обеля). *Если чевианы* AA_1, BB_1, CC_1 *треугольника ABC пересекаются в его внутренней точке X, то* $\frac{AX}{XA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}$ (см. Рис. 68).

📖 *Хенрикус Хубертус Ван-Обель* (1830-1906) – фламандский математик.

Теорема (Эйлера). *Если X – произвольная внутренняя точка какого-либо треугольника ABC* (Рис. 68) , *то* $\frac{AX}{XA_1} \cdot \frac{BX}{XB_1} \cdot \frac{CX}{XC_1} - \left(\frac{AX}{XA_1} + \frac{BX}{XB_1} + \frac{CX}{XC_1} \right) = 2.$

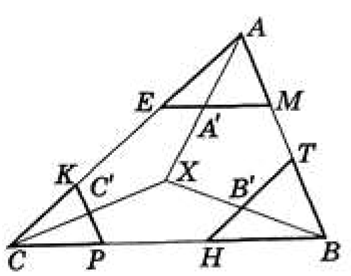


Рис. 69

Теорема (Жергонна). *Если чевианы треугольника* AA_1, BB_1, CC_1 *треугольника ABC пересекаются в точке X, то* $\frac{XA_1}{AA_1} + \frac{XB_1}{BB_1} + \frac{XC_1}{CC_1} = 1$, *а* $\frac{XA}{AA_1} + \frac{XB}{BB_1} + \frac{XC}{CC_1} = 2$.

Замечание. Теорема Жергонна справедлива и в том случае, если точка *X* находится на стороне треугольника, только в этом случае одно из слагаемых первого равенства равно нулю.

📖 Названа в честь французского математика *Жозефа Диаса Жергонна* (1771-1859).

Если *X* – какая-либо внутренняя точка произвольного треугольника *ABC*, а прямые, которые проходят через середины A', B', C' отрезков *XA, XB, XC* параллельны противолежащим сторонам данного треугольника (Рис. 69) и, кроме того, они отсекают от данного треугольника три таких треугольника, что сумма трёх соответствующих линейных элементов этих треугольников равна соответствующему линейному элементу данного треугольника *ABC*, то каждый из отсекаемых таким образом треугольников подобен исходному и друг другу; сумма коэффициентов подобия их равна 1.

Если d – некоторый линейный элемент треугольника *ABC,* а d_a, d_b, d_c – соответствующие линейные элементы отсекаемых треугольников, то $kd+md+nd=d(k+m+n)=d$.

В качестве линейного элемента могут быть взяты и радиусы вписанной, описанной окружностей и окружности Эйлера.

Выше мы упоминали о чевианах, которые пересекаются в одной точке. Если же они не проходят через одну точку, то образуют некоторый треугольник *KPT*. Каждая чевиана при этом делится двумя другими на отрезки, длины которых удовлетворяют следующему соотношению: $\frac{x}{n^2}=\frac{y}{m^2-n^2}=\frac{z}{n(m+n)}$. Соотношение межу площадями треугольников *KPT* (S_1) и *ABC* (*S*): $S_1=\frac{S(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}$.

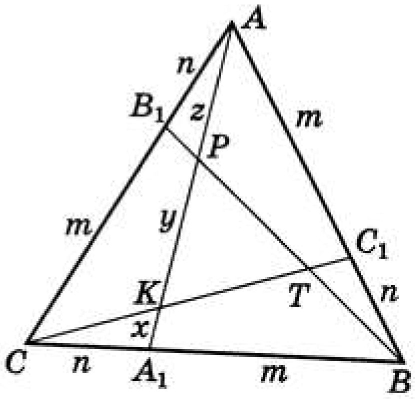


Рис. 70

Так как сам треугольник *ABC* произвольный (в общем случае – разносторонний), то и треугольник *KPT* произвольный (Рис. 70), и отношения отсекаемых отрезков и площадей «неправильные».

Для удобнейшего понимания сути теоремы Менелая, необходимо ввести ещё одно понятие – понятие *трансверсали* треугольника (от лат. ***transversus***, что означает «поперечная»).

Трансверсалью треугольника называется прямая, пересекающая стороны треугольника или их продолжения. Условие существования трансверсали (если три точки лежат на одной прямой) достаточно схоже с условием теоремы Чевы (три чевианы проходят через одну точку), но, исследуя трансверсали, берут направленные отрезки.

Так, если *ABC* – произвольный треугольник, а трансверсаль пересекает прямые *AB, BC* и *AC* соответственно в точках C_1, A_1, B_1, то $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=-1$ (знак минус получается из-за противоположной направленности отрезков). Обратное утверждение и выражает теорема Менелая.

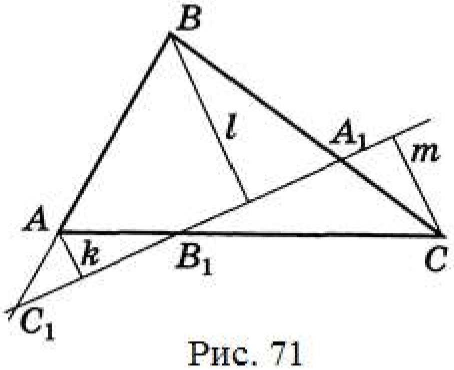


Рис. 71

Теорема (Менелая). *Если прямая пересекает стороны треугольника или их продолжения соответственно в точка х C_1, A_1, B_1 (Рис. 71) и выполняется равенство* $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=-1$, *то эти точки лежат на одной прямой.*

Теорема (**Менелая в форме синусов**). *Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 расположены или все три на продолжениях сторон, или ровно одна на продолжении, а две – на сторонах. Тогда эти точки лежат на одной прямой в том и только том случае, если выполняется равенство:*

$$\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1}=1.$$

Замечание 1. Теорему Менелая применяют в тех случаях, когда требуется доказать, что три точки лежат на одной прямой.

Замечание 2. Серединный перпендикуляр можно отнести к трансверсалям.

Некоторые свойства трансверсалей:

1^0) *Если трансверсаль, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон* (Рис. 72).

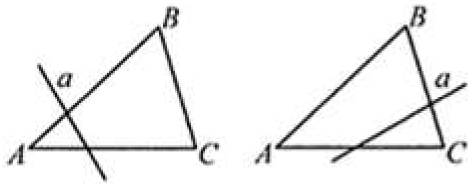


Рис. 72

2^0) *Два не совпадающие ни с одной из сторон треугольника отрезка, проведенные из двух различных вершин треугольника до противолежащих этим вершинам сторон, пересекаются* (Рис. 73).

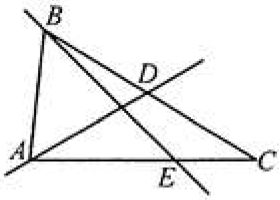


Рис. 73

3^0) *Прямая, проходящая через вершину треугольника и пересекающая противолежащую вершине сторону, делит треугольник на два треугольника, площади которых соответственно пропорциональны отрезкам, отсекаемым прямой на стороне данного треугольника*.

Две точки называются ***изогонально сопряжёнными*** точками треугольника *ABC*, если лучи *AX* и *AY* симметричны относительно биссектрисы угла *A, BX* и *BY* – относительно биссектрисы угла *B, CX* и *CY* – относительно биссектрисы угла *C*.

Центр описанной около треугольника *ABC* окружности *O* и ортоцентр H являются изогонально сопряжёнными. Факт изогональной сопряжённости точек символически записывают так: $O \rightleftarrows H$. Существуют также иные пары изогонально сопряжённых точек треугольника.

Для каждой внутренней точки треугольника существует изогонально сопряжённая с ней точка. Но для точки пересечения биссектрис изогонально сопряжённой является она сама. Для точки, лежащей на стороне треугольника, изогонально сопряжённой является противоположная вершина треугольника. Относительно середин сторон треугольника изогонально сопряжёнными являются *точки Жергонна* и *Нагеля* (Рис. 74)

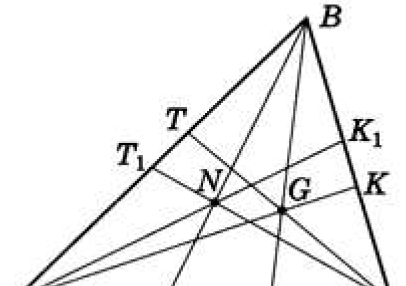


Рис. 74

Можно расширить понятие изогонально сопряжённых точек треугольника, если рассмотреть, допустим, центр описанной окружности и ортоцентр тупоугольного треугольника. В этом случае обе изогонально сопряжённые точки внешние.

Теорема (Стюарта). *Если некоторая точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC и известны длины его сторон и отрезки $BA_1 = p$ и $CA_1 = q$, то*

$$\boxed{AA_1^2 = \frac{qc^2 + pb^2}{a} - pq} \qquad (23.1)$$

Действительно, введем обозначения $AA_1 = l$, $AB = c$, $AC = b$; $\angle AA_1B = \varphi$ и дважды применим теорему косинусов. Для треугольника AA_1B: $l^2 + p^2 - 2lp\cos\varphi = c^2$. Для треугольника $AA_1C: l^2 + q^2 - 2lq\cos\left(180^0 - \varphi\right) = b^2$ или $l^2 + q^2 + 2lq \cdot \cos\varphi = b^2$. Умножив теперь первое равенство на q, а второе – на p и затем оба равенства сложив, избавимся от неизвестного нам косинуса и получим формулу Стюарта.

🕮 Эта теорема названа в честь шотландского математика и астронома, профессора Эдинбургского университета *Мэтью Стюарта* (1717-1785).

§ 24. Антибиссектрисы, симедианы и антипараллели треугольника

Чевианы, лежащие на прямых, изогонально сопряжённых биссектрисам относительно оснований медиан, называются ***антибиссектрисами***. Они проходят через одну точку – центр антибиссектрис.

Антибиссектрисой угла называется геометрическое место точек, расположенных внутри него, расстояния от которых до двух сторон этого угла обратно пропорциональны квадратам этих сторон.

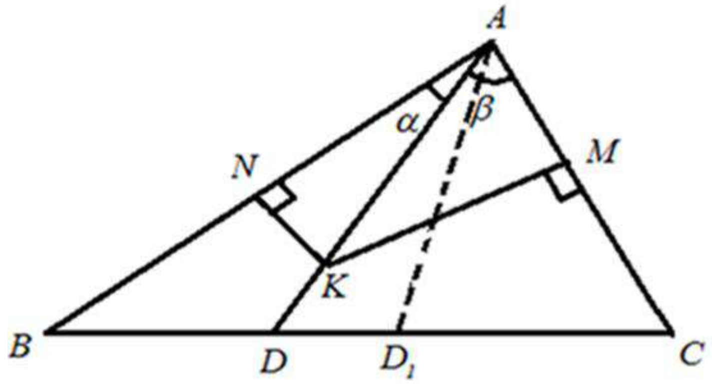


Рис. 75

Под антибиссектрисой внутреннего угла треугольника будем понимать отрезок антибиссектрисы этого угла до её пересечения с противоположной стороной.

Замечание. Антибиссектрисы можно построить не только к внутренним, но и к внешним углам треугольника. Поэтому следует различать внутренние и внешние антибиссектрисы треугольника.

1^0) *Внутренняя антибиссектриса треугольника делит противолежащую сторону обратно пропорционально длинам прилежащим сторонам.*

(На Рис. 75 AD – внутренняя антибиссектриса угла A треугольника ABC. Тогда $\frac{BD}{DC}=\frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}}=\frac{b}{c}$).

Первое упоминание об антибиссектрисе треугольника историки математики обнаружили в рукописи (от 1883 г.) французского математика и инженера *Филберта Мориса де Оканя* (1862–1938).

2^0) *Внутренняя антибиссектриса треугольника проходит через основание биссектрисы дополнительного (серединного) треугольника.*

3^0) *Внутренние антибиссектрисы треугольника пересекаются в одной точке –* ***центре антибиссектрис***.

Пусть точка M – точка пересечения внутренних антибиссектрис треугольника ABC. Пусть d_a, d_b, d_c – расстояния от точки M до сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно. Тогда, исходя из определения антибиссектрисы угла, можем записать тождество: $\frac{d_a}{a^{-2}}=\frac{d_b}{b^{-2}}=\frac{d_c}{c^{-2}}$.

4^0) *Любой треугольник имеет четыре центра антибиссектрис: один внутренний и три внешних.*

5^0) *Отрезки сторон треугольника, заключенные между прямыми, проведенными через центр антибиссектрис параллельно сторонам, равны между собой* (т.е. $FK=EH=DL$, см. Рис. 76).

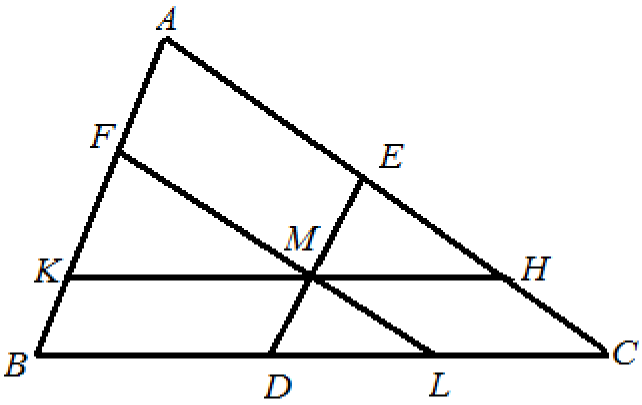


Рис. 76

6^0) *Величина, обратная длине отрезка, отсекаемого параллелями на сторонах треугольника, проходящими через центр антибиссектрис, равна сумме обратных величин длин сторон треугольника.* Т.е. $\frac{1}{DL}=a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$ или $\frac{1}{DL}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{abc}{ab+ac+bc}$.

Обозначим через k_a, k_b, k_c длины антибиссектрис, проведенных к сторонам a, b, c соответственно.

7^0) *Квадрат длины антибиссектрисы треугольника со сторонами a, b, c можно найти по формуле*

$$\boxed{k_a^2=b^2+c^2-bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=(b+c)^2-bc\left(3+\frac{a^2}{(b+c)^2}\right).} \qquad (24.1)$$

Чевианы, лежащие на прямых, симметричных медианам относительно биссектрис, называются ***симедианами*** *(симметричными медианами)*. Они проходят через одну точку – ***точку Лемуана*** (французский математик).

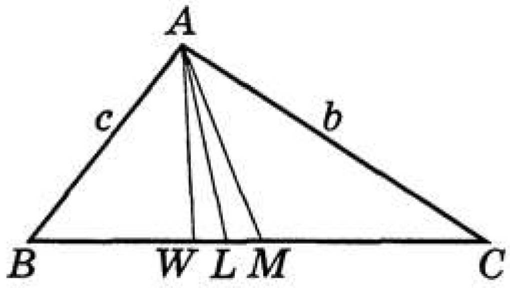


Рис. 77

Первым точку Лемуана обнаружил в 1809 г. швейцарский геометр *Симон Антуан Жан Люилье* (1750-1840). Изучением этой точки занимался и немецкий математик *Эрнст Вильгельм Гребе*. Точка названа в честь французского геометра *Эмиля Лемуана* (1840-1912), опубликовавшего в 1873 г. доказательство существования этой точки (см. Рис. 77 (*)).

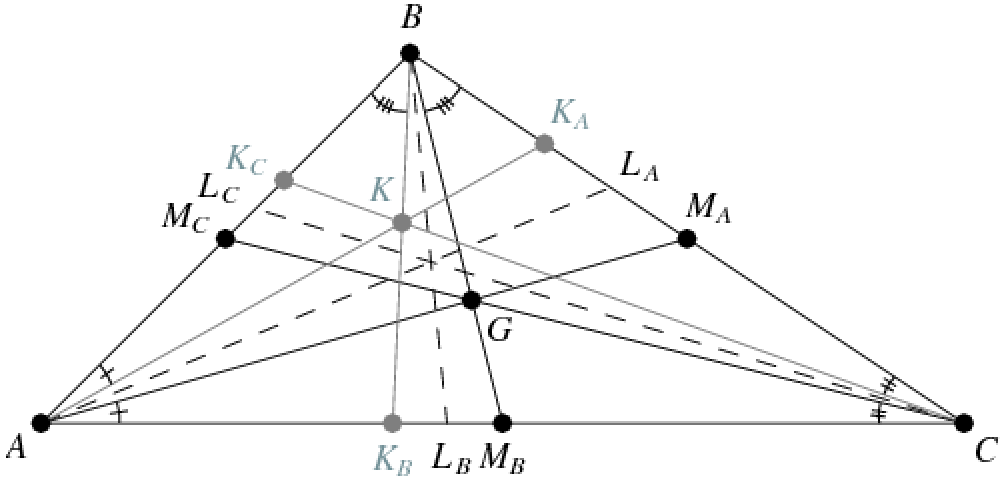


Рис. 77 (*)

На Рис. 77 луч *AW* – симедиана (он симметричен медиане *AM* относительно биссектрисы *AL*). Разносторонний треугольник имеет три разные симедианы.

Симедианой прямоугольного треугольника, проведённой из вершины прямого угла, является его высота (Рис. 78), так как биссектриса такого треугольника делит пополам угол между медианой и высотой, проведённой к гипотенузе.

Выделим наиболее важные свойства симедиан.

1^0) *Симедиана треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон треугольника*.

Иначе: *симедиана треугольника – геометрическое место точек, расстояние которых до двух сторон треугольника пропорционально их длинам* (подробнее вопрос о прочих геометрических местах точек будет рассмотрен позже).

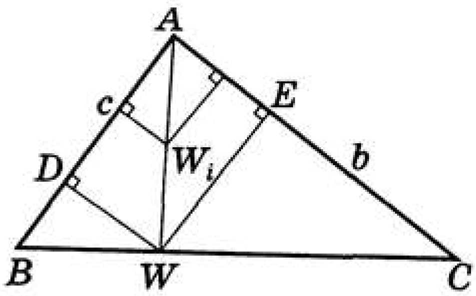


Рис. 78

Теорема (Шлёмильха). *Прямые, каждая из которых содержит середину стороны треугольника и середину его соответственной высоты, пересекаются в точке Лемуана*.

Длину симедианы, проведенной, наример, к стороне c можно найти по формуле

$$\boxed{s_c = \frac{ab}{a+b} \cdot \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}\ .} \qquad (24.2)$$

2^0) *Точка Лемуана изогонально сопряжена центроиду треугольника и имеет много интересных свойств*.

Их формулировка облегчается, если ввести понятие антипараллельных прямых.

Так, прямая C_1B_1 ***антипараллельная*** для прямой BC (эта прямая симметрична прямой KP, параллельной BC, относительно биссектрисы AL. Иначе - антипараллельная прямая такова, что $\angle B = \angle AB_1C_1$.

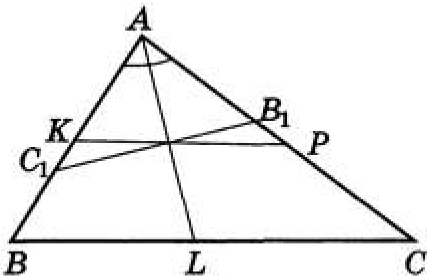


Рис. 79

Прямую C_1B_1 (Рис. 79) ещё называют ***антипараллелью***. Так, каждая сторона ортоцентричного треугольника антипараллельна противоположной стороне данного.

3^0) *Антипараллель отсекает от основного треугольника треугольник, подобный данному и четырёхугольник, около которого можно описать окружность*.

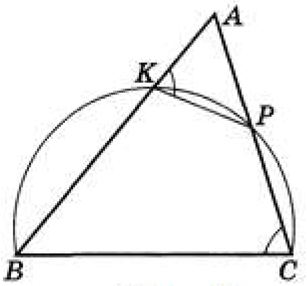


Рис. 80

4^0) *Окружность, проходящая через концы стороны BC треугольника* (Рис. 80) *пересекает две другие его стороны в таких точках К и Р, что прямая КР – антипараллель для BC*.

5^0) *Прямые, которые проходят через точку Лемуана и параллельны сторонам треугольника, называют* ***параллелями Лемуана.***

6^0) *У каждого треугольника параллели Лемуана пересекают его стороны в точках* $A_1, C_2, C_1, B_2, B_1, A_2$, *которые лежат на одной окружности –* ***первой окружности Лемуана.***

7^0) *Шестиугольник же с вершинами в названных точках -* ***шестиугольник Лемуана.***

Окружность и шестиугольник Лемуана обладают следующими свойствами:

8^0) Ц*ентром окружности Лемуана является середина отрезка, который соединяет точку Лемуана с центром окружности, описанной около треугольника*.

9^0) *Три стороны шестиугольника Лемуана, которые не лежат на сторонах данного треугольника, равны антипараллелям.*

10^0) *Антипараллели, которые проходят через точку Лемуана, равны друг другу и делятся этой точкой пополам*.

12^0) *Центр окружности, которая пересекает стороны данного треугольника в точках, которые являются концами трёх равных антипараллелей* (*эта окружность называется* ***второй окружностью Лемуана***).

§ 25. Точки и угол Брокара

Среди замечательных точек треугольника ***точки Брокара*** выделяются в силу наличия наиболее интересных свойств. Они получаются при пересечении чевиан, которые образуют с прилежащими сторонами треугольника равные углы φ. В общем случае при пересечении таких чевиан образуется треугольник, если же угол φ увеличить, то получающийся треугольник вырождается в точку P (***первую точку Брокара***): $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA = = \varphi$ – это угол называется ***углом Брокара*** (Рис. 81 а).

🕮 Названы в честь французского математика *Пьера Ренэ Жана Баптиста Анри Брокара* (1845-1922).

Для второй точки Q: $\angle QAB = \angle QCA = \angle QBC$. ***Вторая точка*** получается при пересечении лучей, симметричных чевианам, пересечение которых в предельном случае давало первую точку Брокара (Рис. 81 б). Две точки Брокара являются изогонально сопряжёнными.

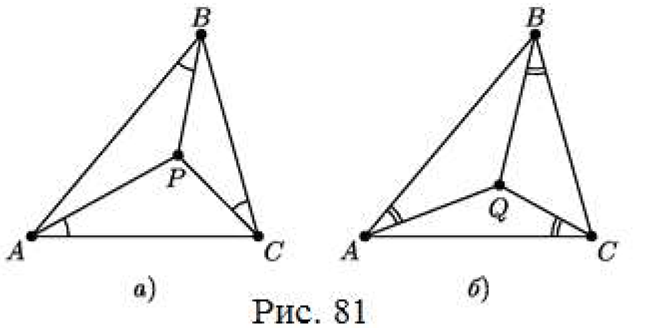


Рис. 81

Для них также верны следующие свойства:

1^0) *Пусть P – первая точка Брокара, а прямые AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Тогда* $\Delta ABC = \Delta B_1C_1A_1$ *(для второй точки Брокара* $\Delta ABC = \Delta C_1A_1B_1$*).*

2^0) *Если из первой точки Брокара P опустить перпендикуляры PA^I, PB^I и PC^I на стороны BC, CA и AB соответственно, то треугольники ABC и $B^IC^IA^I$ подобны, причём коэффициент подобия равен* $sin\varphi$ *(этот угол называют* ***углом Брокара****).*

Для угла Брокара можно получить следующее неявное выражение: $sin^3\varphi = \sin(\alpha - \varphi)\sin(\beta - \varphi)\sin(\gamma - \varphi)$. Кроме того, для него выполняются три следующие неравенства: $\varphi \le 30^0$, $\varphi^3 \le (\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi)$, $8\varphi^3 \le \alpha\beta\gamma$. Последнее из них называется ***неравенством Йиффа***.

3^0) *Пусть вершины B и C треугольника фиксированы, а вершина A движется так, что угол Брокара остаётся постоянным. Тогда движение точки A происходит по окружности радиуса* $\frac{a}{2}\sqrt{ctg^2\varphi - 3}$, *$a$=$BC$ (эту окружность называют* ***окружностью Нейберга****).*

4^0) *Если опустить из внешней точки M перпендикуляры MA_1, MB_1 и MC_1 на прямые BC, CA и AB, то множество точек M, для которых угол Брокара фиксированного треугольника $A_1B_1C_1$ имеет заданное значение, состоит из двух окружностей, причём одна из них расположена внутри описанной окружности* *треугольника ABC, а другая вне её* (эти окружности называют ***окружностями Схоуте)***.

То есть, обе точки Брокара треугольника *ABC* и центр его описанной окружности лежат на одной и той же окружности Схоуте. На этой же окружности лежит точка пересечения прямых, соединяющих каждую вершину треугольника с точками пересечения касательных к описанной окружности, проведённых из двух других вершин (точка Лемуана).

Замечание. Точки Брокара представляют интерес для решения задач, в которых требуется вывод о том, что треугольник правильный. В этом случае рассматривается их взаимное расположение с медианами, высотами и биссектрисами треугольника. Так, например, если точка Брокара некоторого треугольника является пересечением медианы с биссектрисой, то этот треугольник правильный.

Мы упоминали изогонально сопряжённые точки, симметричные относительно биссектрис углов треугольника. Но в треугольнике есть пары изогонально сопряжённых точек, которые порождены и иными геометрическими соображениями.

§ 26. Замечательные треугольники

Помимо точек и линий, «замечательными» считаются и сами треугольники, при определённых условиях.

Лучи, выходящий из вершины угла и делящие его на три равные части, называются **трисектрисами.** Задачей о трисекции угла с помощью циркуля и линейки занимались ещё античные математики. Трисектрисами треугольника называются части трисектрис, находящиеся во внутренней области треугольника.

Из каждой вершины треугольника выходят по две трисектрисы и каждая из них пересекается с четырьмя оставшимися, всего образуется 12 точек пересечения.

1^0) *Три трисектрисы треугольника не могут пересекаться в одной точке*.

Теорема (**Морлея**). *Три точки пересечения смежных трисектрис углов треугольника образуют равносторонний треугольник*.

Треугольник, описанный в теореме, называется ***треугольником Морлея*** для данного треугольника.

🕮 Назван так в честь английского математика *Франка Морлея* (1860-1937).

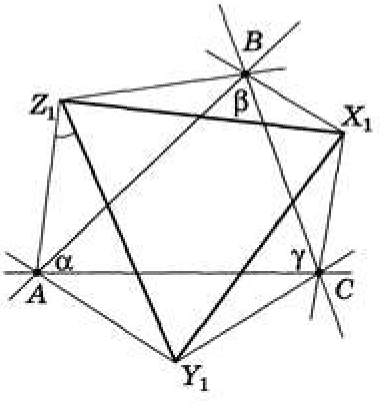


Рис. 82

2^0) *Те из трисектрис внешних углов треугольника, которые прилегают к его сторонам попарно пересекаются точках, которые являются вершинами правильного треугольника* (Рис. 82).

3^0) *Если трисектрисы углов треугольника ABC ресекают описанную около него окружность в точках A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, то треугольник, ниченный отрезками A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 ний* (Рис. 83).

Теорему, относящуюся к геометрии треугольника, сформулировал и император Франции *Наполеон Бонапарт* (1769-1821).

Теорема (Наполеона) *Если на сторонах произвольного треугольника вне его построены равносторонние треугольники, то их центры являются вершинами равностороннего треугольника*.

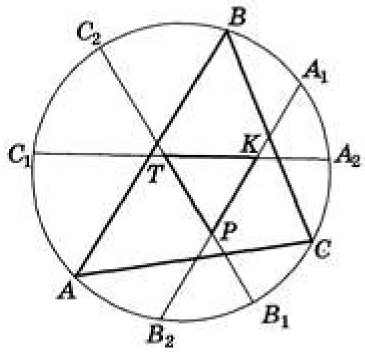


Рис. 83

Такую конфигурацию из четырёх треугольников называют ***треугольниками Наполеона.***

4^0) *Если на сторонах произвольного треугольника ABC построить правильные треугольники не вне его, а наложив их на треугольник ABC, то в этом случае центры правильных треугольников будут вершинами правильного треугольника* (Рис. 84).

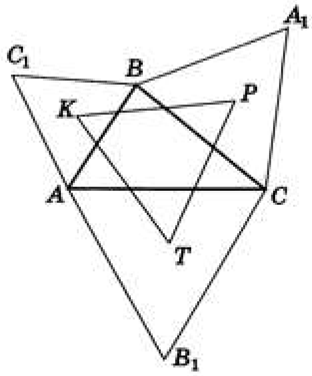


Рис. 84

Свойства треугольников Наполеона ярко прослеживаются при рассмотрении *окружности Торричелли*.

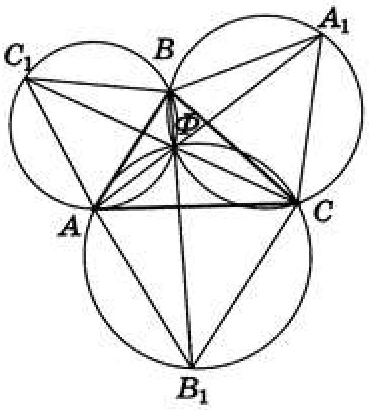


Рис. 85

Опишем около двух равносторонних треугольников Наполеона окружности.

5^0) *Если они пересекаются в точке Ф, то из неё две стороны данного треугольника ABC видно под углом* 120^0 (свойство вписанного угла). Тогда из этой точки под углом 120^0 видно и третью сторону треугольника (Рис. 85). А это означает, что через точку *Ф* проходит и окружность, описанная около третьего правильного треугольника рассматриваемой комбинации. То есть, все три описанные окружности около правильных треугольников Наполеона, проходят через одну точку *Ф*. Окружности, точку *Ф* и отрезки AA_1, BB_1, CC_1 называют соответственно ***окружностями, точкой и отрезками Торричелли.***

6^0) *Все три отрезка Торричелли равны, проходят через одну точку и пересекаются под углами* 60^0.

В зависимости от градусной меры угла *ABC* точка *Ф* может лежать внутри треугольника (меньше 120^0), вне треугольника (больше 120^0), совпадает с точкой А (равна 120^0).

7^0) *Если точка Торричелли лежит внутри треугольника, то сумма длин от неё до всех вершин треугольника минимальна* (Рис. 86).

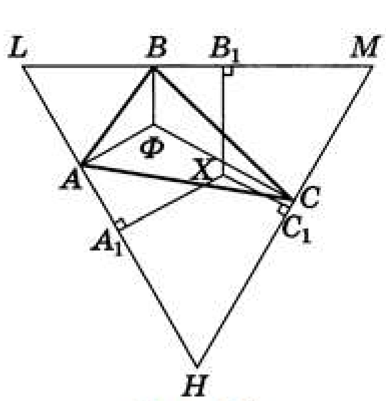
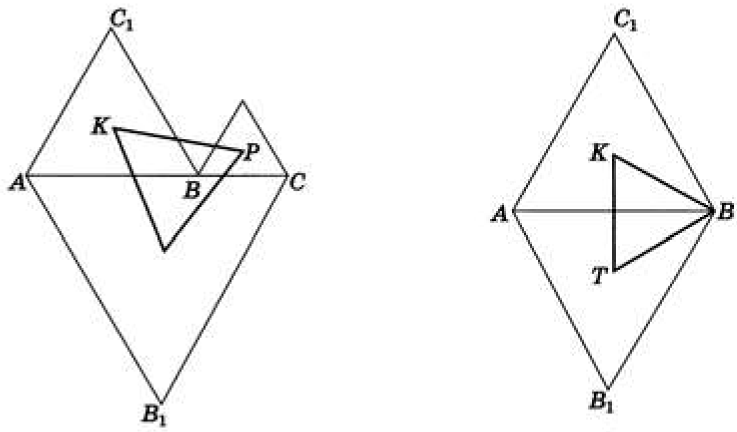


Рис. 86

Заслуживают внимания предельные случаи теоремы Наполеона. Так, если треугольник вырождается в отрезок (три отрезка на одной прямой – Рис. 87 *а*)), теорема верна. Теорема также верна, если отрезок *BC* вырождается в точку (Рис. 87 *б*)).

Если подробнее рассмотреть конфигурацию треугольников Наполеона, можно ещё найти правильные треугольники. Так, треугольники, вершинами которых являются две середины отрезков Торричелли и одна вершина треугольника *ABC*, правильные. На приведённом рисунке можно выделить цепочку из шести правильных треугольников (Рис. 88).



а) Рис. 87 *б*)

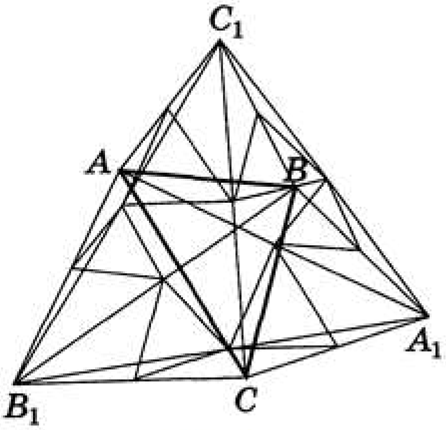


Рис. 88

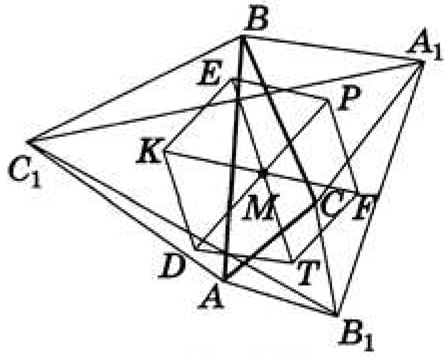


Рис. 89

Центроиды треугольников AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 (точки *D*, *E*, *F* соответственно) также являются вершинами правильного треугольника. Если какой-либо из этих треугольников вырождается в отрезок, то за его центроид берут середину отрезка (Рис. 89).

Более того, шестиугольник *DTFPEK* правильный и его центром (точкой пересечения больших диагоналей) является центроид данного треугольника.

Кроме того, если на сторонах произвольного треугольника *ABC* вне его построить равнобедренные прямоугольные треугольники (Рис. 90) с прямыми углами при вершинах *K*, *P*, *T*, то:

1) $AK=PT$ и $AK \perp PT$;

2) $BP=KT$ и $BP \perp KT$;

3) $CT=KP$ и $CT \perp KP$.

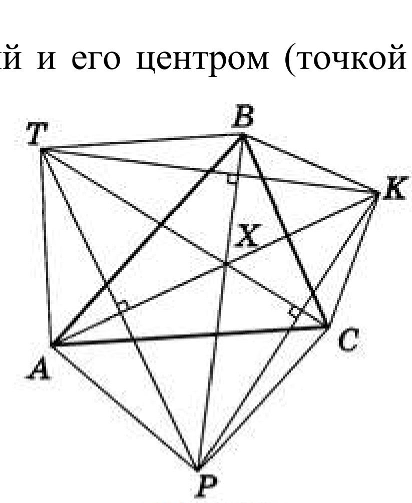


Рис. 90

Если треугольники Наполеона рассматривать вместе с центроидом треугольника *ABC*, то и теорема Наполеона доказывается проще, и появляется новая важная информация. Так, если точки *D*, *E* и *F* – центроиды треугольников AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 (даже в случае вырождения этих треугольников в отрезки), то шестиугольник *KEPFTD* правильный и точка *M* – его центр (Рис. 91). Этот шестиугольник впервые выявил советский математик *Залман Скопец* (1917-1984), он и называется в честь него.

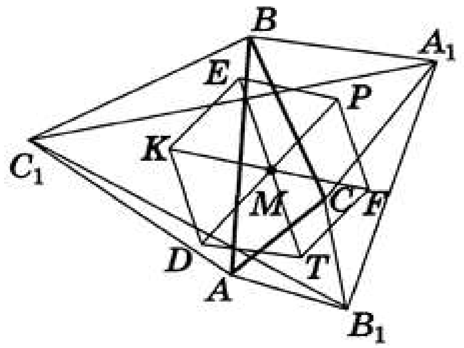


Рис. 91

Треугольник, длины сторон которого выражаются целыми числами, называется ***целочисленным.*** Таких треугольников множество. Интерес представляют целочисленные треугольники с дополнительными свойствами. Например, те, у которых не только стороны, но и площадь выражаются целыми числами. Интересен такой треугольник, если он к тому же и прямоугольный.

Так, среди целочисленных треугольников выделяют для рассмотрения ***пифагоровы*** – те, для длин сторон которых выполняется теорема Пифагора.

Существует более 100 способов доказательства теоремы Пифагора. Но ещё древнегреческие математики задавались вопросом – для каких троек натуральных чисел выполняется равенство, выражающее теорему Пифагора.

Пифагоров треугольник называется *основным*, если числа, выражающие длины его сторон, взаимно просты. Кроме того, если числа x, y и z являются длинами сторон пифагорова треугольника, то таковыми являются и числа xk, yk и zk ($k \in N$).

Древнегреческий философ и педагог *Платон* (ок. 427-347 до н.э.) нашёл тройку чисел, являющихся длинами сторон пифагорова треугольника – 3, 4, 5.

Позднее было доказано, что:

1) один из катетов пифагорова треугольника обязательно делится на 3;

2) произведение катетов делится на 12, а произведение катета и гипотенузы делится на 60;

3) длины радиусов вписанной, описанной и вневписанной окружностей для пифагорова треугольника есть числа натуральные;

4) не существует ни одного пифагорова треугольника, длины двух сторон которого были бы квадратами натуральных чисел (***теорема Ферма***).

Свою теорему известный французский математик *Пьер Фе*рма (1601-1665) сформулировал не как простую догадку, а руководствуясь глубокими рассуждениями. Так, подтверждение этому – сформулированная им соответствующая задача: найдите пифагоровы треугольники, гипотенуза и сумма катетов которых – квадраты натуральных чисел. Ферма утверждал, что таковые существуют и наименьшие значения длин сторон в этом 4565486027761, 1061652293520, 4687298610289.

Поскольку произведение катетов пифагорова треугольника делится на 12, то площадь каждого такого треугольника выражается натуральным числом, кратным 6. Кстати, древнегреческий геометр *Герон* нашёл и не прямоугольные целочисленные треугольники, площади которых выражаются натуральными числами. Такие треугольники и называются по его имени – ***героновыми***.

Простейший способ получения героновых треугольников – прикладывание или накладывание двух пифагоровых треугольников с равными катетами.

Умножив длины сторон пифагорова треугольника на произвольное натуральное число, можно получить треугольник с катетом, который равен катету другого пифагорова треугольника. Приложив же или наложив их друг на друга, совместив при этом равные катеты, можно получить два героновых треугольника. Но этот процесс может быть выполнен не для любых пифагоровых треугольников. Существуют героновы треугольники, которые нельзя «разрезать» на два пифагоровых. Например, треугольник со сторонами 65, 119, 180 с площадью 1638. Это число не делится ни на одно из натуральных чисел, выражающих длины сторон данного треугольника. Следовательно, и ни одна из высот этого треугольника не выражается натуральным числом.

Если длины сторон и площадь треугольника выражаются рациональными числами, то их и называют ***рациональными***. Так как множество натуральных чисел является подмножеством множества рациональных, то и пифагоровы, и героновы треугольники являются рациональными. Но, несмотря на это, между множествами целочисленных и рациональных треугольников можно установить взаимно однозначное соответствие: если в одной системе мер стороны и площадь некоторого треугольника выражаются дробями со знаменателями m, n, k, p, то в системе мер, в которой единица длины в $mnkp$ раз меньше, стороны и площадь этого треугольника выражаются натуральными числами.

Исследуя свойства рациональных треугольников, можно глубже рассмотреть и свойства целочисленных (пифагоровых и героновых в частности).

Л. Эйлер поставил задачу: существуют ли рациональные треугольники с целочисленными медианами. Для решения её он предложил и доказал отдельное утверждение: пусть a, b, c - стороны треугольника, а m_a, m_b. m_c - его медианы, тогда $4m_a^2 = 2(b^2+c^2)-a^2$, $4m_b^2 = 2(a^2+c^2)-b^2$, $4m_c^2 = 2(b^2+a^2)-c^2$. Чтобы медианы такого треугольника выражались рациональными числами, необходимо, чтобы правые части трёх равенств были квадратами целых чисел. Пользуясь методами теории чисел, Эйлер нашёл такой треугольник. Его стороны 68, 85, 87. Более того, он доказал, что этот треугольник - наименьший из Героновых. Его медианы 79, $\frac{131}{2}$, $\frac{127}{2}$. Если умножить все линейные элементы такого треугольника на 2, то получим целочисленный треугольник со сторонами 136, 170, 174, медианы которого выражаются целыми числами 158, 131, 127. Длины сторон этого треугольника не удовлетворяют теореме Пифагора. Но на самом деле, Эйлер ошибся, так как площадь этого треугольника не является рациональным числом. Значит, этот треугольник является наименьшим их всех целочисленных, но не героновых треугольников.

Существует ли хотя бы один геронов треугольник с целочисленными медианами, пока неизвестно.

Кроме названных и подробно рассмотренных выше существуют иные виды замечательных треугольников:

- Треугольник с вершинами в основаниях трех чевиан, проведённых через данную точку, называется ***чевианным*** треугольником этой точки
- Треугольник с вершинами в проекциях данной точки на стороны называется ***<u>подерным</u>*** или ***педальным*** треугольником этой точки (у изогонально сопряжённых точек описанные окружности для педальных треугольников совпадают)
- Треугольник с вершинами во вторых точках пересечения прямых, проведённых через вершины и данную точку, с описанной окружностью, называют ***окружностно-чевианным*** треугольником (окружностно-чевианный треугольник подобен подерному)
- Треугольник оснований медиан A′B′C′ данного треугольника ABC, то есть треугольник, вершины которого суть средины сторон треугольника ABC, называется ***дополнительным***, или ***серединным***, для данного треугольника
- ***Треугольник Нагеля*** для треугольника *ABC* определяется вершинами T_A, T_B и T_C, которые являются точками касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Например, точка $\mathrm{T_A}$ противоположна стороне A, и т. д.
- ***Треугольник Жергонна*** для треугольника *ABC* определяется вершинами T_A, T_B и T_C, которые являются точками касания вписанной окружности с соответствующими сторонами треугольника *ABC*. Треугольник Жергонна $T_AT_BT_C$ известен также как ***треугольник касаний*** треугольника *ABC*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение геометрических задач

Геометрические задачи – особого рода текстовые задачи, успешность решения которых зависит от многих факторов.

Одним из них является грамотно выполненный чертёж. Выделяют следующие требования к чертежу геометрической задач – он должен быть верный, наглядный и достаточно свободный.

В некоторых задачах требуется пояснение к чертежу (в большинстве случаев поясняются элементы, определяющие форму). Пояснение должно заканчивать выводом о существовании фигуры, заданной в условии.

Примерная схема оформления решения геометрической задачи такова:

- текст условия,
- чертёж,
- пояснение чертежа,
- решение в общем виде,
- нахождение числового значения искомой величины,
- проверка,
- ответ.

Решение задач в общем состоит из составления плана решения и определение конечной цепочки шагов для решения; пояснений и обоснования каждого шага решения.

Выделяют три основных вида геометрических задач: *на вычисление, на доказательство* и *на построение*.

При решении геометрических задач могут быть использованы различные методы.

<u>*1 группа: геометрические методы.*</u>

<u>Дополнительные построения</u>:

1. В треугольниках бывает полезно провести через одну из вершин прямую, параллельную его противоположной стороне (образуется несколько пар подобных треугольников).
2. Если в условии есть медиана треугольника, то её нужно продолжить на такое же расстояние (получится параллелограмм, стороны и одна диагональ которого равны сторонам треугольника, а вторая диагональ равна удвоенной медиане).

Вообще выделяют три разновидности дополнительных построений:

– продолжение отрезка на определённое расстояние или до пересечения с заданной прямой;
– проведение прямой через две заданные точки;
– проведение через заданную точку прямой, параллельной данной.

<u>Метод площадей.</u>

Используется в том случае, когда даётся отношение отрезков, расположенных на одной прямой (отношение отрезков заменяется отношением площадей треугольников с общей вершиной, основаниями которых являются рассматриваемые отрезки).

Метод вспомогательной окружности.

Это один из наиболее красивых методов. По условию задачи замечается, что две или более точек лежат на одной окружности, из чего делаются соответствующие выводы.

2 группа: аналитические методы.

Алгебраические методы.

Метод поэтапного решения и метод составления уравнений. При этом величины, заданные в условии задачи и те, которые нужно найти, мы связываем цепочкой промежуточных величин, каждая из которых определяется через предыдущие.

Метод координат.

Главное при решении задач эти методом – это удачный выбор системы координат. В большинстве случаев, в качестве осей координат выбираются прямые, фигурирующие в условии задачи, а также оси симметрии (если они есть).

Векторный метод.

Можно использовать словарь перевода с естественного языка на векторный и обратно:

- ✓ Если даны две прямые A_1A_2 и B_1B_2, то для того, чтобы эти несовпадающие прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ были коллинеарны, то есть, чтобы $\exists\lambda \in R \ / \ \overrightarrow{B_1B_2} = \lambda\ \overrightarrow{A_1A_2}$.
- ✓ Если A, B, C, D – четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, тогда для того, чтобы все эти точки лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие действительные числа α и β, чтобы $\overrightarrow{AD} = \alpha\ \overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.
- ✓ Если $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то $x = y = 0$ (то же самое для некомпланарных векторов).
- ✓ Если $(\cdot)A \in BC,$ то $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ и обратно.
- ✓ Если $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + (1-m)\overrightarrow{OB},$ то все три точки A, B, C лежат на одной прямой.
- ✓ $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2}; \overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|.$

Общий план векторного решения геометрических задач таков:

- ➢ перевод условия задачи на язык векторов (система векторных уравнений по условию задачи);
- ➢ выбор базисных векторов;
- ➢ разложение всех введённых векторов по базисным;
- ➢ тождественные преобразования системы векторных уравнений;
- ➢ замена векторных уравнений алгебраическими (на основании единственности разложения по базисным);
- ➢ решение системы алгебраических уравнений;
- ➢ пояснение геометрического смысла полученного решения.

Задачи на доказательство представляют собой вид теоремы, поэтому и решение такой задачи проводится как доказательство теоремы. В поиск решения задачи на доказательство входят следующие этапы:

- ✓ построение фигуры, в максимальной степени отвечающей всем условиям задачи;
- ✓ поиск свойств фигуры, доказательство справедливости или ложности (целесообразно вести методом полной индукции).

Методы решения задач на доказательство.

Методы геометрических преобразований:

1) метод симметрии (фигура или точка, симметричная данной);
2) метод параллельного переноса;
3) метод вращения (фигура или отрезок поворачиваются на какой-то угол);
4) метод гомотетии и подобия;
5) метод геометрических мест точек (ГМТ).

   Наиболее употребительные из ГМТ:

- ❖ ГМТ, равноотстоящих от данной точки, есть окружность с центром в этой точке;
- ❖ ГМТ, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, состоит из двух прямых, параллельных данной и отстоящих от неё на данном расстоянии;
- ❖ ГМТ, равноотстоящих от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная отрезку с концами в данных точках и проходящая через его середину;
- ❖ ГМТ, из которых отрезок АВ виден под данным углом α, и которые лежат по одну сторону от АВ, есть дуга окружности с концами в точках А и В;
- ❖ ГМТ, равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых есть биссектрисы углов, которые получаются при пересечении этих прямых;
- ❖ ГМТ, расстояния которых от двух данных точек находятся в данном отношении $m:n$, причём $m:n \neq 1$, есть окружность, которая называется окружностью Аполлония;
- ❖ ГМТ, расстояния которых от двух данных прямых находится в данном отношении λ, состоит из двух прямых;
- ❖ ГМТ, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть прямая, перпендикулярная прямой, соединяющей данные точки;
- ❖ ГМТ, из которых касательные, проведённые к двум данным окружностям равны, есть прямая (если окружности не пересекаются) или часть прямой, проходящей через точки пересечений вне окружностей с концами в этих точках пересечения;
- ❖ ГМТ, из которых данный отрезок виден под постоянным углом, состоит из двух дуг окружностей симметрично расположенных относительно данного отрезка;

- ❖ ГМТ, равноудалённых от трёх заданных точек, не лежащих на одной прямой, является центр окружности, проходящей через три данные точки;
- ❖ ГМТ (в пространстве), расстояния которых до данной точки О равны R есть сфера с центром в точке О и радиуса R.

Замечание. ГМТ точек рассматриваются не только в планиметрии.

Для нахождения геометрических мест во многих случаях используют:

1) метод координат (чтобы получить соответствующие уравнения).
2) метод алгебраических преобразований (по условиям задачи составляется уравнение или система уравнений).
3) метод инверсии.
4) метод, использующий свойства равновеликости и равносоставленности.

Приёмы доказательства:

- o приём преобразования условий (синтез);
- o приём преобразования заключения (восходящий и нисходящий анализ);
- o приём попеременного преобразования то условия, то заключения (анализ через синтез, челнок);
- o доказательство от противного;
- o метод построения правильных умозаключений (в этом случае некоторые предложения исключаются);
- o методы конкретизации, обобщения, аналогии, индукции и др.;
- o приём разбиения задачи на разрешимые подзадачи.

Библиографический список

1. Адамар, Ж. Элементарная геометрия. Ч.1. Планиметрия: пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы / Ж.Адамар. – М.: Учпедгиз, 1957. – 608с.

2. Амелькин, В.В. Школьная геометрия в чертежах и формулах / В.В. Амелькин, Т.И. Рабцевич, В.Л. Тимохович. – Минск: Красико Принт, 2008. – 80 с.

3. Аргунов, Б.И. Элементарная геометрия: учеб. пособие для пед. ин-тов / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – М.: Просвещение, 1966. – 366 с.

4. Аргунов, Б.И. Геометрические построения на плоскости: пособие для студентов пед. ин-тов / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – М.: Учпедгиз, 1957. – 266 с.

5. Атанасян, Л.С. Курс элементарной геометрии: учебное пособие для студентов педагогических университетов и учащихся классов с углублённым изучением математики / Л. С. Атанасян, Н. С. Денисова, Е. В. Силаев. – М.: Сантакс-Пресс, 1997. – 304 с.

6. Атанасян, Л.С. Сборник задач по элементарной геометрии / Л. С. Атанасян, Г. Б. Гуревич и др. – М.: Учпедгиз, 1958. – 96с.

7. Бевз, Г. П. Геометрія трикутника: навч.-метод. посіб. для загальноосвіт. навч. закл. – Киев: Генеза, 2005. – 120 с.

8. Болтянский, В.Г. Элементарная геометрия: кн. для учителя. – М: Просвещение, 1985. – 320 с.

9. Василевский, А.Б. Обучение решению задач по математике: учебное пособие для пед. ин-тов / А.Б. Василевский. – Минск: Выш.шк., 1988. –255 с.

10. Василевский, А.Б. Методы решения задач по математике / А.Б. Василевский. – Минск, 1981.

11. Василевский, А.Б. Дидактические материалы к «Практикуму по решению математических задач» / А.Б. Василевский. – Минск, 1978.

12. Виленкин, Н.Я. За страницами учебника математики: Геометрия. Старинные и занимательные задачи: пособие для учащихся 10-11 кл. / Н. Я Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. – М.: Просвещение, 2008. – 175 с.

13. Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике. – М., 2006. – 509 с.

14. Геометрия: 7-9 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 15-е изд. – М.: Просвещение, 2005. – 383 с.

15. Геометрия в таблицах: 7-11 классы: справочное пособие / авт.-сост.: Л.И. Звавич, А.Р. Рязановский. 15-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2010. – 124 с.

16. Геометрия: профильный уровень: учебник для 10 класса / В. А. Гусев, Е.Д. Куланин, А.Г. Мякишев, С.Н. Федин. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 311 с.

17. Геометрия треугольника в задачах: эксперим. пособие для 8-10-х кл. шк. (классов) физ.-мат. направления / Куланин Е.Д., Федин С.Н. – М.: НИИШ, 1990. – 143 с.

18. Глаголев, Н.А. Геометрия: учебник для сред. школы / Под ред. А.А. Глаголева. 4-е изд., перераб. Ч. 1. – М.: Учпедгиз, 1958.

19. Гордин, Р. К. Геометрия, Планиметрия: 7-9 кл.: учеб. пособие / Р. К. Гордин. 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МЦНМО, 2004. – 414 с.

20. Готман, Э. Г. Задачи по планиметрии и методы их решения: пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1996 – 241 с.

21. Гусев, В. Н. Практикум по элементарной математике: Геометрия: учеб. пособие для студентов / В. А. Гусев, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1991. – 352с.

22. Дьедонне, Ж.А.Э. Линейная алгебра и элементарная геометрия / Пер. с фр. Г.В. Дорофеева. Под ред. И.М. Яглома. – М.: Наука, 1972. – 335 с.

23. Евдокимова, Н. Н. Геометрия: теория и примеры: для школьников и абитуриентов. – СПб: Изд. Дом Литера, 2005. – 109 с.

24. Ефремов, Д. Новая геометрия треугольника / Сост. канд. физ.-мат. наук, преп. шк. колористов при Иваново-Вознес. реал. уч-ща Д. Ефремов. – Одесса: тип. бланкоизд. М.: Шпенцера, 1902. – 350 с.

25. Зеленяк, О.П. Решение задач по планиметрии [Электронный ресурс] / О.П. Зеленяк. – М.: ДМК Пресс, б.г. – 330 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=86303.

26. Зетель, С.И. Новая геометрия треугольника: пособие для учителей. 2-е изд. – М.: Учпедгиз, 1962. – 152 с.

27. Зив, Б. Г. Задачи к урокам геометрии для 7-11 классов: пособие для учителей, школьников и абитуриентов. – СПб: Петроглиф Victory, 2008. – 605 с.

28. Киселев, А.П. Элементарная геометрия: кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1980. – 286 с.

29. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: Лекции, читанные в Геттинген ун-те [В 2-х томах]. Т.1. Арифметика. Алгебра. Анализ: Пер. с нем. Д. А. Крыжановского / Под. ред. [и с предисл.] В.Г. Болтянского. 4-е изд. – М.: Наука, 1987. – 432 с.

30. Кокстер, Г.С. Новые встречи с геометрией / Г. С. Кокстер, С. Л. Грейтцер. – М.: Просвещение, 1995.

31. Куланин, Е. Д. Геометрия треугольника в задачах / Е.Д. Куланин, С.Н. Федин. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: URSS Либроком, 2009. – 204 с.

32. Литвиненко, В.Н. Решение типовых задач по геометрии: книга для учителя / В. Н. Литвиненко. – М.: Просвещение, 1999. – 304с.

33. Литвиненко, В.Н. Сборник задач по стереометрии с методами решений: пособие для учащихся [Для ст. классов общеобразоват. школ] / В. Н. Литвиненко. – М.: Просвещение, 1998. – 254 с.

34. Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы: пособие для учителя / А. И. Фетисов (ред.). – М.: Просвещение, 1967. - 271 с.

35. Моденов, П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики: учеб. пособие для вузов / П. С. Моденов. – 2-е изд., доп. и испр. – М.: Сов. наука, 1957. – 666 с.

36. Перельман, Я. И. Занимательная геометрия: для среднего и старшего школьного возраста. – М.: Терра-Кн. клуб, 2008. – 382 с.
37. Погорелов А. В. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений. 7-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 223 с.
38. Понарин, Я. П. Элементарная геометрия: Изд. 3-е, стер. – М.: МЦНМО, 2015.
39. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов. – М.: Наука, 1991.
40. Прасолов, В.В. Рассказы о числах, многочленах и фигурах / В.В. Прасолов. – М.: ФАЗИС, 1997. – 104 с.
41. Прасолов, В.В. Три классические задачи на построение / В.В. Прасолов. – М.: Наука, 1991.
42. Прасолов, В.В. Точки Брокара и изогональное сопряжение / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2000. – 24 с.
43. Прасолов, В.В., Тихомиров, В. М. Геометрия. – М.: МЦНМО, 2007. - 2-е изд., перераб. и доп., 328 с.
44. Преподавание геометрии в 6-8 классах: сб. статей / Сост. В.А. Гусев. - М.: Просвещение, 1979. – 281 с.
45. Прокофьев, А. А. Пособие по геометрии для подготовительных курсов: (планиметрия). – М.: МИЭТ, 2007. – 232 с.
46. Смирнова, И. М. Геометрия: нестандарт. и исслед. задачи: учеб. пособие для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2004. – 147 с.
47. Солтан, В.П. Тождества и неравенства в треугольнике / В. П. Солтан, С. И. Мейдман. Ред. Ю.М. Рябухина. – Кишинев: Штиинца, 1982. – 59 с.
48. Чичигин, В. Г. Методика преподавания геометрии. Планиметрия: пособие для учителей средней школы – М.: Учпедгиз, 1959.– 392 с.
49. Шарыгин, И. Ф. Геометрия: 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. 8-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2007. – 367 с.
50. Шоластер, Н.Н. Элементарная геометрия: краткий курс для студентов-заочников педагогических институтов. – М.: Учпедгиз, 1959.
51. Яглом, И.М. Элементарная геометрия прежде и теперь / И.М. Яглом. – М.: Знание, 1972. – 47 с.
52. Яковлев, Г. Н. Геометрия: теория и её использование для решения задач / Г.Н. Яковлев. – Минск: Альфа Попурри, 1995. – 335 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебно-методическое издание

Галина Георгиевна Ельчанинова,

Роман Анатольевич Мельников

ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

ТРЕУГОЛЬНИК

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебно-методическое
пособие

Технический редактор – О. А. Ядыкина
Техническое исполнение – В. М. Гришин

Формат 60 x 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 5,8   Уч.-изд.л. 5,4
Тираж 300 экз. (1-й завод 1-5 экз.). Заказ 64

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28