МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1.

АРИФМЕТИКА. НАЧАЛА АЛГЕБРЫ. КОМБИНАТОРИКА. ФУНКЦИИ

Учебное пособие

Елец – 2015

УДК 511.1
ББК 22.1
Е 59

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 16.01.2015 г., протокол № 1

Рецензенты:

Клещёва Ирина Валерьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры методики обучения математике и информатики (Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург);

Масина Ольга Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и компьютерных технологий (Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец).

Составители: Ельчанинова Г.Г., Мельников Р.А.

Е 59 Элементарная математика. Часть 1. Арифметика. Основы алгебры. Комбинаторика. Функции: учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2015. – 128 с.

Основная цель учебного пособия – оказать помощь студентам в подготовке к занятиям по дисциплине «Элементарная математика», в написании курсовой и выпускной квалификационной работы.

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов физико-математического отделения института математики, естествознания и техники.

Данное издание может полезно преподавателям вузов, а также использоваться учителями средних школ для разработки элективных курсов.

УДК 511.1
ББК 22.1

ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТЫ АРИФМЕТИКИ

ТЕМА 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

«*Арифметика* (от греческого «число») – часть математики, наука о числах, в первую очередь о неотрицательных рациональных числах (целых и дробных), и действиях нал ними».

§ 1. Натуральные, целые, рациональные, иррациональные и действительные числа

Число является одним из основных понятий математики. Для описания и исследования количественных отношений служат числа. Они позволяют выразить результаты счета или измерения. Понятие числа является основополагающим для многих математических теорий.

Числа находят широкое применение в физике, химии, астрономии и многих других науках. Числами постоянно пользуются в повседневной жизни.

1.1. Натуральные числа $\boldsymbol{N}$

Натуральные числа выражают количество подлежащих счету однотипных или разных по типу предметов. Понятие натурального числа относится к простейшим, первоначальным понятиям математики и не подлежит определению через другие, более простые понятия.

Натуральные числа могут быть естественным образом распложены в порядке возрастания: каждое следующее натуральное число получается из предыдущего прибавлением единицы. Записанные в порядке возрастания натуральные числа:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...$$

образуют *натуральный ряд*. Многоточие показывает возможность неограниченного продолжения этого ряда. В этом смысле говорят, что имеется бесконечное множество натуральных чисел. Единица – наименьшее из натуральных чисел; наибольшего числа натуральный ряд не имеет.

Итак, $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Любое натуральное число можно записать с помощью десяти цифр: 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Цифры (числа) 0,2,4,6,8 называются *четными*, а цифры (числа) 1,3,5,7,9 – *нечетными*.

🕮Интересен вопрос о том, с каким самым большим числом приходилось иметь дело на практике. Физики считают, что во всей Вселенной количество элементарных частиц, из которых состоят атомы находящегося в ней вещества, не больше, чем 10^8. В связи с этим полагают, что нет практической необходимости пользоваться числами, большими, чем 10^{100}. Для этого числа придумано специальное название – *гугол*.

Более строгое описание понятия «*натуральное число*», выходящее за пределы курса элементарной математики, опирается на аксиомы, сформулированные итальянским математиком *Джузеппе Пеано* (1858–1932). В них, в частности, используется понятие следования, принимаемое как первичное и не определяемое через другие понятия.

Приведем указанные аксиомы Пеано:

1. Единица есть натуральное число. Единица не следует ни за каким натуральным числом.

2. Число, следующее за натуральным числом, есть натуральное число.

3. Если натуральное число a следует за натуральным числом b и одновременно за натуральным числом c, то b и c тождественно равны.

4. Если какое-либо предложение доказано для 1, и если из допущения, что оно верно для натурального числа a, вытекает, что оно верно для следующего за a натурального числа, то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Последняя аксиома, называется *аксиомой полной индукции*, она лежит в основе известного метода доказательства – *метода математической индукции*.

1.2. Целые числа Z

В арифметике рассматриваются различные действия над числами: *сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня* и т. д.

Первые четыре из этих действий называют арифметическими или рациональными.

Итак, действия, выполняемые над числами, можно разбить на два класса: *арифметические* (рациональные) и *иррациональные* (не являющиеся рациональными). Представим эту информацию в виде схемы № 1:

Действия над числами

Арифметические	Иррациональные
1. сложение	1. возведение в степень
2. вычитание	2. извлечение корня
3. умножение	
4. деление	

Схема № 1. Действия над числами

Но только два из них – сложение и умножение – безоговорочно выполняются в области натуральных чисел: *сумма и произведение натуральных чисел есть снова натуральные числа.*

Дадим формулировки законов, которым подчиняются действия сложения и умножения; строгие определения этих действий и обоснование их свойств (выводимых из небольшого числа аксиом) рассматриваются в теоретической арифметике.

Переместительный (или *коммутативный) закон сложения:*

$$a+b = b+a \qquad (1.2.1)$$

Иначе: от перестановки слагаемых сумма не изменяется.

Переместительный (или *коммутативный) закон умножения:*

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad (1.2.2)$$

Иначе: от перестановки сомножителей произведение не изменяется.

Сочетательный (или *ассоциативный) закон сложения:*

$$(a+b)+c = a + (b+c) \qquad (1.2.3)$$

Иначе: сумма не зависит от группировки слагаемых.

Этот закон позволяет записывать сумму нескольких слагаемых без скобок.

Сочетательный (или *ассоциативный) закон умножения:*

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad (1.2.4)$$

Иначе: произведение не зависит от группировки сомножителей.

Распределительный (или *дистрибутивный) закон умножения относительно сложения:*

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \qquad (1.2.5)$$

Если сложение и умножение натуральных чисел всегда приводит вновь к натуральному числу, то уже вычитание не всегда выполнимо, если оставаться в области арифметики натуральных чисел. Для возможности образования разности любых двух натуральных чисел возникает необходимость расширить совокупность чисел, вводя *нуль* и *целые отрицательные числа* –1, –2, –3, ... $-n$,....

С отрицательными числами мы сталкиваемся, например, слушая прогноз погоды зимой (температура воздуха равна – 10°), измеряя глубину моря (–200 м), подсчитывая баланс доходов и расходов (–300 руб.) и т.п.

Все натуральные числа могут быть названы также *целыми положительными числами.* Если требуется подчеркнуть, что данное число положительное, то перед ним надо поставить знак «+», но, как правило, пишут не +4, а просто 4. Перед отрицательными же числами знак «–» ставить надо обязательно. Число нуль не относят ни к отрицательным, ни к положительным числам.

Определение 1. Числа n и $-n$ называют *противоположными.*

Итак, $\boldsymbol{Z}=\{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... n, ...\}$.

Таким образом, множество Z состоит из целых положительных (натуральных) чисел, целых отрицательных чисел и нуля.

Во множестве всех целых чисел, действие вычитания (так же как и сложения) всегда выполнимо. При этом, действие вычитания может быть сведено к сложению с числом, противоположным вычитаемому:

$$a-b = a+(-b); \; a-(-b) = a+b \qquad (1.2.6)$$

Для умножения целых чисел вводится известное правило знаков:

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab; \; (-a) \cdot (-b) = ab \qquad (1.2.7)$$

В частности, *(–1)·a = – a.*

Таким образом, результат умножения двух чисел одного знака есть число положительное, двух чисел противоположного знака – число отрицательное. Число, противоположное данному, равно произведению данного числа на минус единицу.

Произведение любого числа на нуль равно нулю.

🕮Множество чисел, обладающее тем свойством, что сумма, разность и произведение двух любых чисел, принадлежащих ему, снова принадлежат этому множеству, называется *числовым кольцом.* В числовом кольце неограниченно выполнимы целые рациональные действия над числами, т.е. рациональные действия, кроме, быть может, деления.

🕮Натуральные числа не образуют числового кольца, так как действие вычитания не всегда приводит вновь к натуральному числу. Целые числа образуют числовое кольцо, которое называют *кольцом целых чисел.*

🕮Множество чисел, в котором выполнимы все рациональные действия, включая и деление (кроме деления на нуль, которое невозможно), называется *числовым полем.* Целые числа не образуют поля, так как в области целых чисел деление не всегда выполнимо.

1.3. Рациональные числа Q

По этой причине множество целых чисел вновь приходится расширять до множества рациональных чисел.

Определение 2. *Рациональным числом* называется число, представимое в виде $\frac{a}{b}$, где числитель $a \in Z$, а знаменатель $b \in N$.

Если a делится на b нацело, то рациональное число – целое; в противном случае рациональное число называется *дробным.* Оно считается положительным, если a – положительное, и отрицательным, если a – отрицательное.

Для сложения и умножения рациональных чисел справедливы те же основные законы, что и для натуральных чисел (п. 1.1).

Определение 3. *Дробью* называют часть или несколько равных частей (долей) единицы.

В старину в России дроби назывались *ломаными числами* (например, в «Арифметике» Л.Ф. Магницкого и в «Недоросле» Д.И. Фонвизина).

Дробь изображается символом $\frac{a}{b}$ (или a/b), где a и $b \in N$; число a называют числителем, число b – знаменателем дроби.

Например, $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь.

Это свойство называют *основным свойством* дроби:

$$\frac{a}{b}=\frac{an}{bn} \qquad (1.3.1)$$

Две равные дроби являются *различными записями* одного и того же числа.

Деление числителя и знаменателя дроби на их общий делитель (отличный от единицы) называется *сокращением дроби*.

Наибольшее число, на которое можно сократить дробь, есть наибольший общий делитель ее числителя и знаменателя. Дробь называют несократимой, если ее числитель и знаменатель – взаимно простые числа.

Существует две формы записи дроби:

1) в виде *обыкновенной дроби* (т.е. с использованием символа «–» для обозначения действия деления чисел). При этом число, стоящее над знаком «–»,называют *числителем* дроби, а число, стоящее под ним – *знаменателем* дроби.

2) в виде *десятичной дроби* (т.е. с использованием символа «,» для отделения целой части числа от его дробной части.

Например, 0,57; 1,233333….

Смысл понятия «обыкновенная дробь» постараемся изобразить в виде схемы № 2:

(т.е. числитель меньше знаменателя)

(т.е. числитель больше [или равен] знаменателя)

Схема № 2. Виды обыкновенных дробей

Пример 1. $\frac{3}{5}$ – правильная дробь, $\frac{8}{5}$ – неправильная дробь.

Заметим, что всякую обыкновенную неправильную дробь можно записать в виде *смешанной дроби* (*числа*). Для этого нужно числитель дроби разделить на знаменатель и найти остаток; частное покажет число целых единиц, а остаток – число долей единицы.

Например, $\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$. Здесь 1 – целая часть дроби $\frac{8}{5}$, а $\frac{3}{5}$ – её дробная часть.

Обратно, всякую смешанную дробь (число) можно записать в виде обыкновенной дроби.

Для этого надо знаменатель дробной части числа умножить на целую часть смешанного числа, а полученное произведение прибавить к числителю дробной части числа, поставив полученный результат в числитель новой дроби, а знаменатель, сохранив старым.

Пример 2. $1\frac{3}{5}=\frac{5\cdot1+3}{5}=\frac{8}{5}$.

Отметим также, что обыкновенную дробь вида $\frac{1}{n}$ (т.е. в числителе которой стоит единица, а в знаменателе – $n\in N$) принято называть *аликвотной дробью*.

Определение 4. Сумма конечного числа попарно различных аликвотных дробей определяет *египетская дробь*.

Например, $\frac{43}{48}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{16}$ – есть египетская дробь.

Определение 5. *Десятичной дробью* называется дробь, у которой знаменатель представляет собой натуральную степень числа 10.

Эту дробь можно записать так:

$$\frac{n}{10^k}, n\in N, k\in N.$$

Правило: *всякую обыкновенную дробь можно перевести в десятичную дробь, надо лишь выписать в строку все цифры числителя и отделить запятой справа столько из них, сколько нулей содержится в знаменателе дроби.*

Например, $\frac{52341}{1000}=52{,}341$.

В такой записи цифры, стоящие слева от запятой, образуют целую часть, а цифры, стоящие справа от запятой, – дробную часть данной десятичной дроби.

С помощью деления числителя на знаменатель любое дробное неотрицательное число $\frac{p}{q}\left(p,q\in Z_+\right)$ можно превратить в *конечную* или *бесконечную* десятичную дробь.

Пример 3. $\frac{3}{8}=0{,}375$; $\frac{4}{9}=0{,}444...$

Определение 6. Совокупность целых и дробных чисел (положительных и отрицательных), а также число нуль образуют *множество рациональных чисел* $Q{:}\,Q=\left\{0,\pm n,\pm\frac{a}{b}\right\}$; числа этого множества могут быть представлены в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Действия, которые можно выполнять над дробями, а также способ перевода бесконечной дроби в обыкновенную дробь будут рассмотрены в § 7.

🕮В области рациональных чисел выполнимы все рациональные действия (кроме деления на нуль): сумма, разность, произведение и частное рациональных чисел также являются рациональными числами. Поэтому рациональные числа образуют числовое поле – *поле рациональных чисел*.

1.4. Иррациональные числа *I*

Не все действия, рассматриваемые в арифметике (алгебре), выполнимы в поле рациональных чисел. Примером может служить операция извлечения квадратного корня. Так, если равенство $x^2 = 4$ выполняется при значениях $x = 2, x = -2$, то равенство $x^2 = 2$ не имеет места ни при каком рациональном значении x. Это означает, что в области рациональных чисел из числа 2 нельзя извлечь квадратный корень, символ $\sqrt{2}$ лишен смысла в области рациональных чисел. Между тем задача: «найти сторону x квадрата, зная, что площадь его равна S» столь же естественна при S=2, как и при S=4. Поэтому понятие рационального числа вновь расширяют путем введения нового вида чисел – иррациональных чисел.

Определение 7. *Иррациональным числом* называется всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь $\alpha = a,a_1a_2a_3...a_n...$, где a – целая часть числа (она может быть положительной, равной нулю или отрицательной), а $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ – десятичные знаки (цифры) его дробной части.

К иррациональным числам приводят многие действия, например, действие извлечения корня степени n из рационального числа (если оно не представляет собой n-ю степень другого рационального числа).

1.5. Действительные числа *R*

Все рациональные и иррациональные числа образуют в совокупности множество *действительных* (или *вещественных*) чисел.

Таким образом, всякая десятичная дробь, конечная или бесконечная (периодическая или непериодическая), всегда определяет действительное число.

Всякое отличное от нуля действительное число либо положительно, либо отрицательно.

Таким образом, последовательные расширения числовых множеств можно изобразить в виде схемы № 3:

Натуральные числа ***N*** → Целые числа ***Z*** → Рациональные числа ***Q*** → Иррациональные числа ***I*** → Действительные числа ***R***

Схема № 3. Числовые множества

Действительные числа образуют *поле действительных чисел*: результат рациональных действий над действительными числами снова выражается действительным числом. Заметим, что взятые в отдельности иррациональные числа не образуют ни поля, ни даже кольца, так как, например, сумма двух иррациональных чисел $\sqrt{2}$ и $5-\sqrt{2}$ равна рациональному числу 5.

Действия над действительными числами подчинены обычным законам (например, сложение и умножение – законам коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности. См. п.1.1).

Множество действительных чисел *упорядочено*.

Также говорят, что множество $\boldsymbol{R}$ обладает свойством *непрерывности*. Это свойство существенно отличает поле действительных чисел от поля рациональных чисел.

Заметим, что расширением множества действительных чисел, является множество *комплексных чисел* $\boldsymbol{C}$, которое также образует поле относительно операций сложения и умножения элементов этого множества. Изучение комплексных чисел происходит подробно в курсах высшей алгебры и теории функций комплексного переменного.

§ 2. Изображение чисел на числовой оси

Пусть l – некоторая прямая. Отметим на ней произвольную точку O, которую будем называть *началом отсчета* (или просто началом). Точка O разбивает прямую l на два луча. Один из этих лучей условимся считать *положительным*, а второй – *отрицательным*. Положительный луч обычно отмечают стрелкой (Рис. 1).

Определение 1. *Осью* называется прямая l, на которой одно из возможных направлений выделено как положительное (противоположное направление считается отрицательным).

Определение 2. *Числовой (координатной) осью* называется ось, на которой выделена начальная точка O и единица масштаба (масштабный отрезок) OE.

Таким образом, числовая ось задается указанием на прямой направления, начала и масштаба.

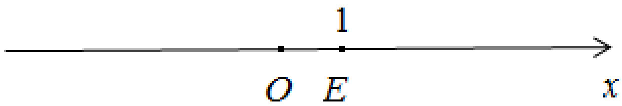


Рис. 1.

С помощью точек числовой оси изображают действительные числа. Целые числа изображаются точками, которые получаются откладыванием масштабного отрезка нужное число раз вправо от начала O в случае положительного целого числа и влево в случае отрицательного.

Нуль изображается начальной точкой O (сама буква 0 напоминает о нуле; она является первой буквой слова *origo*, означающего «начало»).

Дробные (рациональные) числа также просто изображаются точками оси. Например, число $\frac{10}{3}$ изображают следующим образом: сначала откладывают три масштабных отрезка правее нуля и добавляют еще $\frac{1}{3}$ масштабного отрезка.

Целых чисел имеется бесконечное множество, но на числовой оси целые числа изображаются точками, расположенными «редко», целочисленные точки оси отстоят от соседних на единицу масштаба.

🕮Рациональные точки расположены на оси весьма «густо» – нетрудно понять, что на любом сколь угодно малом участке оси имеется бесконечно много точек, изображающих рациональные числа.

Тем не менее, на числовой оси имеются точки, которые не являются изображениями рациональных чисел. Так, если на числовой оси построить отрезок OA, равный гипотенузе OC прямоугольного треугольника $\Delta\, OEC$ с катетами OE=EC=1 (Рис. 2), то длина этого отрезка будет равной $\sqrt{2}$ и точка A не будет изображением рационального числа.

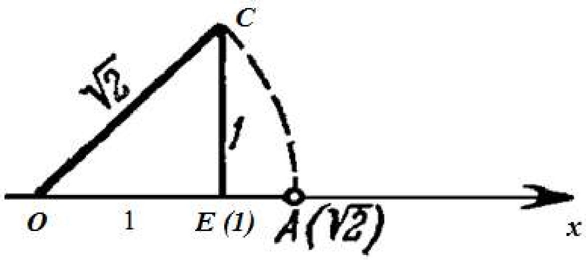


Рис. 2.

Число, изображением которого служит данная точка A числовой оси, называется *координатой* этой точки. Координата любой точки A выражается как отношение $\frac{OA}{OE}$, которому для точек, лежащих от начала O в отрицательном направлении, приписывают знак «–».

§ 3. Сравнение чисел, знаки неравенства. Числовые промежутки

Соотношения взаимного расположения чисел обладают следующими свойствами:

I. Для любых двух действительных чисел a и b имеет место одно и только одно из трех соотношений:

1) a больше b ($a>b$),
2) a меньше b ($a<b$),
3) a равно b ($a=b$).

II. Свойство *необратимости неравенств*: если $a<b$, то $b>a$, если же $a>b$, то $b<a$.

III. Свойство *транзитивности неравенств*: если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.

IV. Свойство *транзитивности равенства*: $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

V. Свойство *рефлексивности равенства*: всегда $a = a$.

Арифметические действия и соотношения взаимного расположения связаны между собой следующим образом:

1°. *Закон монотонности сложения*: *если* $a<b$, *то* $a+c<b+c$.

2°. *Закон монотонности умножения*: *если* $a<b$, то $ac<bc$ при $c > 0$; $ac>bc$ при $c < 0$.

Числа *положительные* являются большими нуля, а *отрицательные* – меньшими нуля.

Число a больше числа b в том и только в том случае, если разность $a–b$ положительна:

$$a-b\begin{cases} >0, & \text{если } a>b, \\ =0, & \text{если } a=b, \\ <0, & \text{если } a<b. \end{cases}$$

Если $a<b<c$, то говорят, что число b расположено между числами a и c.

🕮Поле рациональных и поле действительных чисел обладают свойством *плотности*: каковы бы ни были два различные действительные (или рациональные) числа, существует бесконечное множество действительных (рациональных) чисел, содержащихся между данными числами.

Во множестве всех действительных чисел рациональные и иррациональные числа расположены всюду плотно, а именно, между произвольными двумя различными действительными числами расположено бесконечное множество как рациональных, так и иррациональных чисел.

Рассмотрим подробнее вопрос о там, как происходит сравнение дробей.

Две дроби *считаются равными*, если величины, выражаемые этими числами при одной и той же единице измерения, равны между собой. Например, $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$, так как две длины, из которых одна составляет $\frac{3}{4}$*м*, а другая $\frac{6}{8}$*м*, равны (см. Рис. 3).

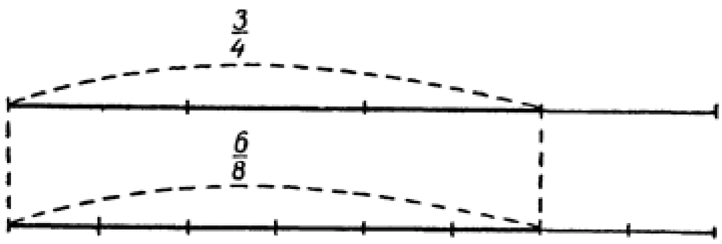


Рис. 3.

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой больший числитель.

Например, $\frac{5}{7}>\frac{3}{7}$, так как 5 > 3.

Из двух дробей с одинаковыми числителями та больше, у которой знаменатель меньше. Например, $\frac{6}{7} > \frac{6}{11}$, поскольку 7<11.

Правило сравнения дробей: умножаем числитель первой дроби на знаменатель второй, а знаменатель первой на числитель второй. Если первое из этих произведений больше (равно или меньше) второго, значит и первая дробь соответственно больше (равна или меньше) второй.

Пусть a и b – произвольные действительные числа, взятые при условии $a<b$.

Определение 1. *Интервалом* (a,b) называется множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a<x<b$.

Определение 2. *Отрезком* (*сегментом*) $[a,b]$ называется множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$.

Геометрически интервал (a,b) изображается на числовой прямой множеством точек, лежащих между точками a и b, т. е. отрезком с концами в точках a и b, при этом сами концы исключаются (Рис. 4).

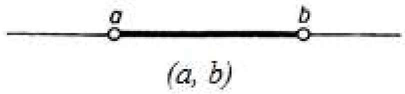


Рис. 4.

Отрезок $[a,b]$ изображается отрезком с концами в точках a и b, причем сами концы a и b входят в отрезок (Рис. 5).

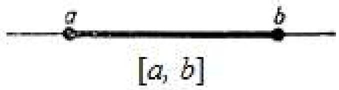


Рис. 5.

В целях единообразия терминологии и обозначений вводятся в рассмотрение «бесконечные» интервалы, посредством следующих определений.

1°. Множество всех действительных чисел называется интервалом от $-\infty$ (минус бесконечности) до $+\infty$ (плюс бесконечности) и обозначается символом $(-\infty;+\infty)$.

2°. Множество всех действительных чисел больших (меньших) числа a называется интервалом от a до $+\infty$ (или от $-\infty$ до a) и обозначается символом $(a;+\infty)$ или $(-\infty;a)$.

Символы $+\infty$ и $-\infty$ принято считать связанными с действительными числами и между собой соотношениями неравенств, именно: всякое действительное число a считается меньшим, чем $+\infty$, и большим, чем $-\infty$, а символ $-\infty$ считается меньшим, чем $+\infty$.

Итак, $-\infty < a < +\infty$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x < b$ называется *полусегментом*, обозначают $[a,b)$, а множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x \le b$, называется полуинтервалом, и обозначают $(a,b]$.

Все рассмотренные виды интервалов, сегментов, полусегментов и полуинтервалов (конечных и бесконечных) объединяются общим термином «*промежуток*».

§ 4. Модуль действительного числа. Свойства модуля. Геометрическая интерпретация модуля числа

Определение 1. *Абсолютной величиной* (или *модулем*) действительного числа a называется число $|a|$, если a положительно или равно нулю, и число $-a$, если a отрицательно, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, \textit{если } a \ge 0, \\ -a, \textit{если } a < 0. \end{cases} \qquad (1.4.1)$$

Иначе говоря, модуль неотрицательного числа равен самому этому числу; модуль отрицательного числа равен этому числу, взятому с противоположным знаком.

Примеры: $|8| = 8$; $|0| = 0$; $|-6| = -(-6) = 6$.

Можно сформулировать альтернативное определение модуля.

Определение 1*. *Абсолютной величиной* действительного числа $a \ne 0$ называется большее из двух чисел a, $-a$.

Замечание. Существует еще третье определение абсолютной величины, которое в некоторых случаях бывает очень удобным. А именно, абсолютную величину можно определить формулой

$$|a| = \sqrt{a^2}, \qquad (1.4.2)$$

где в правой части берется арифметический корень (т.е. положительное значение радикала).

Свойства модуля

1°.Из определения непосредственно следует, что для любого $a \in \boldsymbol{R}$:

$$|-a| = |a| \qquad (1.4.3)$$

2°. Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ справедливо двойное неравенство

$$-|a| \le a \le |a| \qquad (1.4.4)$$

Действительно, из определения также следует, что для любого действительного числа a справедливы неравенства: $a \le |a|$, $-a \le |a|$.

Умножим второе из этих неравенств на –1 (при этом знак неравенства изменится на противоположный), мы получим новую пару неравенств $a \le |a|$ и $a \ge -|a|$, справедливых для любого действительного числа a.

Объединяя эти два неравенства в одну «цепочку», получим неравенство (1.4.4).

Во всех ниже представленных свойствах подразумевается, что они справедливы для любых $a, b \in \boldsymbol{R}$:

3°. $$|a| \le b \Leftrightarrow -b \le a \le b \qquad (4.5)$$

4°. $$|a+b| \le |a| + |b| \qquad (4.6)$$

5°. $$|a-b| \ge |a| - |b| \qquad (4.7)$$

6°. $$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad (4.8)$$

7°. $$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \ne 0 \qquad (4.9)$$

Геометрическая интерпретация модуля

Геометрически модуль числа можно интерпретировать как *расстояние*. Дадим определение модуля числа, используя понятие «расстояние».

Определение 2. Модуль числа a – это расстояние от начала отсчета (на координатной прямой) до точки, соответствующей числу a.

Другими словами: $|a|$– расстояние заданной длины на числовой оси, взятое от точки a (или от точки $-a$)до нуля (см. Рис. 6, Рис. 7).

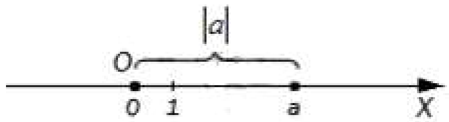


Рис. 6.

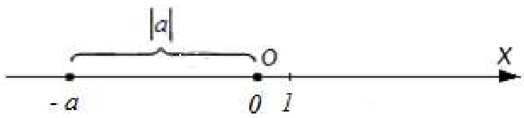


Рис. 7.

§ 5. Делитель и кратное. Простые и составные числа. НОД и НОК чисел

5.1. Делитель и кратное

Рассмотрим вопрос о том, как вводится операция деления одного натурального числа на другое.

Пусть $a, b \in \boldsymbol{N}$, причем $a = bq$, где q –также натуральное число, то говорят, что q – *частное* от деления числа a на число b.

Определение 1. Всякое число b, на которое a делится *без остатка* (*нацело*), называется *делителем* числа a. Само число a по отношению к своему делителю называется *кратным*.

Обозначение делимости нацело: $a \,\vdots\, b$ или $b \mid a$.

Имеют место два свойства:

Теорема 1. Если a кратно m, m кратно b, то a кратно b.

Доказательство. По условию теоремы имеют место равенства $a=ma_1$, $m=bm_1$, из них следует, что $a = ba_1m_1$. Тогда a представимо в виде произведения числа b на целое число a_1m_1 и, тем самым, оно делится на b.

Теорема 2. Если в равенстве вида $k+l+...+n = p+q+...+s$ относительно всех

членов, кроме какого-либо одного, известно, что они кратны b, то и этот один член кратен b.
Доказательство. Пусть таким одним членом будет k. Тогда имеем цепочку очевидных равенств: $l= bl_1,\ldots, n= bn_1, p= bp_1, q= bq_1,\ldots,s= bs_1$.
Очевидно, что число k представимо в виде: $k = p + q +...+ s – l –\ldots– n$.
Но каждое слагаемое в правой части последнего равенства содержит множитель, равный b. Поэтому, вынося b за скобки, получим:

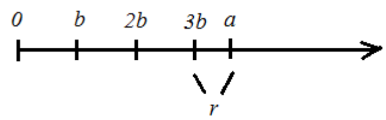
$$k = b(p_1 + q_1 + \ldots + s_1 – l_1 – \ldots –n_1).$$

Значит, k представимо в виде произведения b на целое число $(p_1 + q_1 + ... + s_1 – l_1 – ... –n_1)$ и, тем самым, оно делится на b.

Пусть теперь $a, b\in \boldsymbol{Z}$. Очевидно, что не всегда число a делится нацело на b. В таком случае пишут: $a \overline{|}\, b$.

Тогда справедливо свойство, выражаемое теоремой.

Теорема 3. Для данного целого отличного от нуля числа b , всякое целое число a единственным образом представимо в виде $a = bq+ r$, где $0 \le r < |b|$
Доказательство. Очевидно, что представление числа a равенством $a = bq+r$ мы получим, если возьмем bq равным наибольшему кратному числа b , не превосходящему a (см. рис. 8).Тогда $0 \le r < |b|$.



$(a = 3b+r)$

Рис. 8.

Докажем теперь единственность такого представления. Предположим, что существуют два различных таких представления: $a = bq + r$ и $a = bq_1 + r_1$. Очевидно, $0 = a – a = b(q – q_1) + (r – r_1)$. Здесь 0 делится на b; но и $b\,(q – q_1)$ делится на b, следовательно, разность $(r – r_1)$ обязана делиться на b. Так как $0 \le bq + r$ и $0 \le bq_1 + r_1$, то $r–r_1<b$ и $r – r_1$ делится на b , значит $r – r_1$ равно нулю, а, значит и $q– q_1$ равно нулю, т.е. два таких представления совпадают.

Определение 2. Число q называется *неполным частным*, а число r – *остатком* от деления a на b .

5.2. Простые и составные числа

Словосочетание «*простое число*» взято из латинского языка, где оно пишется следующим образом: «*numeriprimi*».

Всякое, отличное от единицы натуральное число имеет, по крайней мере, два делителя: единицу и самоё себя.

Определение 3. Натуральное число p, большее единицы называется *простым*, если оно делится нацело только на 1 и на себя. В противном случае оно называется *составным*.

Единицу не относят ни к простым, ни к составным числам.

Теорема 4. Наименьший отличный от единицы делитель целого, большего единицы числа, есть число простое.

Доказательство. Пусть q – наименьший отличный от 1 делитель целого числа a, большего 1. Если бы q было бы составным, то оно имело бы некоторый делитель q_1 с условием $1<q_1<q$, причем число a, делясь на q, должно (по теореме 1) делиться на q_1. А это противоречило бы нашему предположению относительно числа q. Это и доказывает справедливость утверждения.

Теорема 5. Наименьший отличный от единицы делитель составного числа a (по теореме 4 он должен быть простым) не превосходит $\sqrt{a}$.

Доказательство. Пусть q - этот самый делитель, тогда $a = qa_1$, $a_1 \geq q$, откуда, перемножая и сокращая на a_1, получим $a \geq q^2$, $q \leq \sqrt{a}$.

Теорема 6. Если n – натуральное число, большее 2,то между n и $n!$ содержится по меньшей мере одно простое число.

Доказательство. Так как $n > 2$, то целое число $N = n! - 1$, очевидно, >1 и. согласно теореме 4, имеет простой делитель $p \leq N$, следовательно, и $p<n!$. Если допустить, что $p \leq n$, то p будет одним из сомножителей произведения $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ и, значит, будет делителем числа $n!$. Но, будучи также делителем числа N, p будет делителем разности этих чисел, или числа $n! - N = 1$, что невозможно. Таким образом, $p>n$, а так как уже выяснено, что $p<n!$, то имеем $n < p < n!$, и, значит, теорема доказана.

Теорема 7. (Евклида). Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство. Каковы бы ни были различные простые p_1, p_2, ..., p_k. Для них можно указать новое простое число, среди них не находящееся. Таковым будет, например, простой делитель суммы $p_1p_2...p_k + 1$, который деля всю сумму, не может совпадать ни с одним из простых $p_1, p_2, ..., p_k$ (по теореме 2).

Для получения таблицы простых чисел, не превосходящих данного целого N, существует простой способ, называемый *решетом Эратосфена.*

Опишем процесс выделения простых чисел с помощью решета Эратосфена. Сначала выписываем последовательно числа

$$1, 2, \ldots, N \qquad (1.5.1)$$

Первое, большее 1 число этого ряда есть 2. Оно делится только на 1 и само на себя, поэтому оно простое. Отметим, что число 2 – единственное четное простое число, все остальные простые числа – нечетные.

Затем вычеркнем из ряда (1.5.1) все числа, делящиеся на 2. Первым, следующим за 2, не вычеркнутым числом окажется 3. Видим, что 3 делится только на 1 и само на себя, следовательно, это простое число.

После этого удалим (также вычеркиванием) из ряда (1.5.1) все числа, делящиеся на 3. Следующим за 3, не вычеркнутым числом окажется 5. Следовательно, 5 – простое число. Продолжим вычеркивание чисел описанным способом далее. Ниже приведена таблица простых чисел, не превосходящих 100.

~~1~~	~~2~~	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

В ПРИЛОЖЕНИИ № 5 приведена таблица простых чисел, начиная от двойки до числа, не превосходящего 1000.

Относительно бесконечной последовательности простых чисел, т. е. последовательности

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.....

возникает ряд вопросов.

Так, например, два наименьших простых числа 2 и 3 являются последовательными натуральными числами. Напрашивается вопрос, существуют ли другие последовательные натуральные числа, которые оба были бы простыми. Легко доказать, что таких чисел нет. В самом деле, из каждых двух последовательных натуральных чисел одно является четным, и, значит, если оно >2, то оно составное.

Однако существует много пар последовательных нечетных чисел, которые оба являются простыми, например пары 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, 41 и 43. Такие пары называют парами чисел близнецов.

Если взять n = 30000000, то установлено, что имеется 152 892 таких пар.

Ученые также заметили, что простые числа весьма часто оказываются членами арифметических прогрессий. Например, если общий член прогрессии имеет вид $a_n = 4n+1$, то $a_1 = 5, a_3 = 13, a_4 = 17, a_7 = 29, \ldots$.

🕮Большой интерес представляет задача о представлении любого числа в виде суммы некоторого количества простых слагаемых. Первым к решению этой задачи приступил член Петербургской Академии наук, немецкий математик *Христиан Гольдбах* (1690–1764). Он перепробовал очень много чисел, пытаясь разложить их на сумму простых, и пришел к убеждению, что трёх слагаемых всегда достаточно. Не сумев доказать это предложение, не найдя даже путей к доказательству, он написал об этом своему другу – известному математику *Леонарду Эйлеру*. В письме от 7 июня 1742 г. Гольдбах сообщил Эйлеру, что рискует высказать следующее предположение: «любое число, большее пяти, представляет собой сумму трёх простых». Эйлер написал, что он считает верным (безусловно) утверждение, что каждое чётное число есть сумма двух простых.

📖Отметим еще одно интересное свойство, связанное с записью натурального числа через простые числа. Его в 1830 г. доказал германский математик *Генрих Фердинанд Шерк* (1798–1885).

Для натуральных n при соответствующем выборе знаков «+» или «–» имеют место формулы:

$$p_{2n} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \ldots \pm p_{2n-2} + p_{2n-1};$$

$$p_{2n+1} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \ldots \pm p_{2n-1} + 2p_{2n}.$$

Так, например,

$p_6 = 1 + p_1 - p_2 - p_3 + p_4 + p_5;$ $\quad$ или $\quad$ $p_6 = 13 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 + 11;$

$p_7 = 1 + p_1 - p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + 2p_6$ $\quad\quad$ $p_7 = 17 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 - 11 + 2 \cdot 13.$

📖 Известны также «гипотеза Гильбрайта», «проблема Харди-Литтлвуда» и ряд других. Но все вопросы, касающиеся простых чисел, сейчас изучаются в *теории чисел*.

Теорема 8. Всякое составное число разлагается на произведение простых сомножителей и притом единственным способом.

Доказательство. Пусть $a \in \boldsymbol{Z}$ – число, большее 1; обозначим через p_1 его наименьший простой делитель, тогда справедливо равенство: $a = p_1 a_1$. Если a_1– составное число, то обозначим через p_2 его наименьший простой делитель (иногда он может совпадать с p_1), тогда $a_1 = p_2 a_2$. Если a_2 – составное число, то аналогично получаем $a_2 = p_3 a_3$ и т.д., пока не придем к какому-либо a_n, равному 1. В таком случае $a_{n\text{-}1}$ будем обозначать через p_n. Перемножив все найденные равенства, получим разложение числа a на простые сомножители:

$$a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \tag{1.5.2}$$

Предположим, что для a существует иное разложение на простые сомножители

$$a = q_1 q_2 q_3 \ldots q_s \tag{1.5.3}$$

Очевидно, что справедливо равенство

$$p_1 p_2 p_3 \ldots p_n = q_1 q_2 q_3 \ldots q_s \tag{1.5.4}$$

Правая часть этого равенства делится на q_1. Следовательно, по меньшей мере один из сомножителей левой части будет делиться на q_1. Положим для определенности, что p_1 делится на q_1. Тогда $p_1 = q_1$ (т.к. p_1 делится только на единицу и p_1). Сократив обе части равенства на $p_1 = q_1$, окажется, что равенство (1.5.4) примет вид:

$$p_2 p_3 \ldots p_n = q_2 q_3 \ldots q_s \tag{1.5.5}$$

Рассуждая аналогично придем к равенству $p_3 \ldots p_n = q_3 \ldots q_s$ и т.д., пока в одной из частей равенства (например, в левой) не сократятся все сомножители. Но одновременно должны сократиться и все сомножители правой части, так как равенство $1 = q_{n+1} \ldots q_s$ при $q_{n+1}, \ldots, q_s$, превосходящих 1, невозможно.

Это означает, что второе разложение на простые сомножители тождественно первому.

В разложении числа a на простые сомножители некоторые из них могут повторяться. Обозначим буквами p_1, p_2, ..., p_k различные из них, а буквами α_1, α_2,…, α_k – кратности их вхождения в a, получим так называемое *каноническое разложение* числа a на сомножители

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} \qquad (1.5.6)$$

Пример 1. Получить каноническое разложение числа 1176 на простые множители.

$$\begin{array}{r|l} 1176 & 2 \\ 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, 1176 представляется в виде 1176=2·2·3·7·7, поэтому $1176=2^2\cdot 3\cdot 7^2$ – его каноническое разложение.

5.3. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Определение 4. Всякое целое, делящее одновременно целые $a, b, ... ,l,$ называется их *общим делителем.*

Определение 5. Наибольший из всех общих делителей называется *наибольшим общим делителем* (НОД) и обозначается символом НОД($a, b,..., l$) или просто ($a, b, ... , l$).

Определение 6. Если НОД($a, b,..., l$)=1, то числа $a, b, ... , l$ называются *взаимно простыми.*

Замечание. Если каждое из чисел $a, b, ... , l$ взаимно просто с каждым другим из них, то $a, b, ... , l$называются *попарно простыми.*

Например, числа 6, 13, 25, ввиду того, что НОД (6, 13)=НОД (6, 25)=НОД (13, 25)=1, – попарно простые.

Рассмотрим свойства общих делителей двух чисел.

1^0. *Если a кратно b, то совокупность общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью делителей одного b; в частности* НОД (a,b)=b.

2^0. *Если $a=bq+c$, то множество всех общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью общих делителей чисел b и c; в частности* НОД (a, b)=НОД(b, c).

3^0. Если m – произвольное положительное целое, то НОД($a\cdot m;b\cdot m$)=$m\cdot$НОД($a; b$).

4^0.Если d – общий делитель чисел a и b,то $НОД\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=\frac{НОД(a,b)}{d}$; более того: $\left(\frac{a}{НОД(a,b)},\frac{b}{НОД(a,b)}\right)=1$, т.е. частные от деления двух чисел на их НОД есть взаимно простые числа.

5^0. Если НОД (*a, b*)=1, то НОД(*ac, b*)=НОД (*c, b*).

6^0. Если $a,b,c \in \mathbf{Z}$, то НОД (*a, b, c*)=НОД ((*a, b*),*c*).

7^0. (Лемма Гаусса) Если a и b – взаимно простые числа, то существуют такие целые числа x_0, y_0, что $ax_0 + by_0 = 1$.

НОД двух чисел можно находить, используя их каноническое разложение на простые сомножители.

Правило: Чтобы найти положительное НОД двух (или нескольких) целых чисел нужно:

1) получить канонические разложения чисел a и b (всех чисел, если их больше, чем два) на простые множители:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s},\ b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_s^{\beta_s};$$

2) отобрать только те простые сомножители, которые входят в оба (во все) разложения;

3) выбрать их в наименьших степенях и все перемножить.

Фактически применить формулу $НОД(a,b) = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} ... p_k^{\lambda_k}$, где $\lambda_k = min\{\alpha_i; \beta_i\}$.

Пример 2. Найти НОД чисел 135 и 180.

Решение. Разложим каждое из чисел на простые сомножители.

$$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ясно, $135=3^3 \cdot 5$; $180=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.Тогда НОД $(135;180)=3^2 \cdot 5=45$.

Также для отыскания наибольшего общего делителя и для получения его важнейших свойств, используется *алгоритм Евклида*.

Пусть a и b - положительные целые, причем $a>b$. Выполним последовательные деления по формулам:

$$\begin{array}{ll} a=b \cdot q_1 + r_2, & 0<r_2<b, \\ b=r_2 \cdot q_2 + r_3, & 0<r_3<r_2, \\ r_2=r_3 \cdot q_3 + r_4, & 0<r_4<r_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ r_{n-2}=r_{n-1} \cdot q_{n-1}+r_n, & 0<r_n<r_{n-1}, \\ r_{n-1}=r_n \cdot q_n. & \end{array} \tag{1.5.7}$$

Процесс деления завершим лишь тогда, когда получится некоторый остаток $r_{n+1}=0$. Последнее неизбежно, так как ряд $b, r_2, r_3, ...$ как ряд убы-

вающих целых не может содержать более чем b положительных.
Выводы: 1) совокупность общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью делителей их наибольшего общего делителя; 2) этот наибольший общий делитель равен последнему не равному нулю остатку.

Пример 3. С помощью алгоритма Евклида найти НОД (525, 231).

Решение.

$$\begin{array}{rrrrl}
 & & & 525 & \multicolumn{1}{|l}{231} \qquad 525=231\cdot 2+63 \\
 & & & 462 & \multicolumn{1}{|l}{2} \\
 & & 231 & \multicolumn{1}{|l}{63=r_1} & \qquad 231=63\cdot 3+42 \\
 & & 189 & \multicolumn{1}{|l}{3} & \\
 & 63 & \multicolumn{1}{|l}{42=r_2} & & \qquad 63=42\cdot 1+21 \\
 & 42 & \multicolumn{1}{|l}{1} & & \\
42 & \multicolumn{1}{|l}{21=r_3} & & & \qquad 42=21\cdot 2 \\
42 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & \\
\hline
0=r_4 & & & &
\end{array}$$

Видим, что последний, отличный от нуля остаток, есть $r_3=21$.

Поэтому НОД (525, 231)=21.

8^0. Если $d=(a;b)$, то существуют числа $x,y\in \mathbf{Z}$ такие, что $d=ax+by$.

Определение 7. Представление d = НОД (a;b) в виде $d=ax+by$, где $x,y\in \mathbf{Z}$ называют *линейным представлением НОД*.

9^0. Если d – общий делитель чисел a и b и d можно представить в виде $d=ax+by$, где $x,y\in \mathbf{Z}$, то d = НОД (a;b).

Пример 4. Найдите НОД чисел 117 и 15 и выразите его линейно.
Решение. Пусть a=117,b=15. Выполним для них алгоритм Евклида.

$$\begin{array}{rrrl}
 & & 117 & \multicolumn{1}{|l}{15} \\
 & & 105 & \multicolumn{1}{|l}{7=q_1} \\
 & 15 & \multicolumn{1}{|l}{12=r_1} & \\
 & 12 & \multicolumn{1}{|l}{1=q_2} & \\
12 & \multicolumn{1}{|l}{3=r_2} & & \\
12 & \multicolumn{1}{|l}{4=q_3} & & \\
\hline
0=r_3 & & &
\end{array}$$

Видим, что НОД(117; 15)=r_2=3. При этом $r_1=a-bq_1$, $r_2=b-r_1q_2$. Тогда НОД(117;15)=r_2=$b-r_1q_2=b-(a-bq_1)q_2=b-aq_2+bq_1q_2=-aq_2+b(1+q_1q_2)$ $=a(-1)+b(1+1\cdot 7)=-a+8b$.

Значит, $x=-1, y=8$.

Итак, 3 = НОД (117; 15) = 117·(–1)+15·8.

Пусть a и b – целые числа, отличные от нуля.

Определение 8. Целое число c называется *общим кратным* целых чисел a и b, если $c \vdots a$ и $c \vdots b$.

Например, a=2,b=3. Общими кратными этих чисел будут числа: ±6,±12,±18,0,...

Замечание. Всякое целое, кратное нескольких чисел, называется их *общим кратным.*

Определение 9. Наименьшее из всех положительных общих кратных двух (или нескольких) целых чисел называется *наименьшим общим кратным.* Наименьшее общее кратное чисел a и b обозначается одним из способов: НОК ($a;b$) или [$a;b$].

НОК двух чисел можно находить, используя их каноническое разложение на простые сомножители.

Правило: Чтобы найти положительное НОК двух (или нескольких) целых чисел нужно:

1) получить канонические разложения чисел a и b (всех чисел, если их больше, чем два) на простые множители:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}, \; b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s};$$

2) отобрать все повторяющиеся сомножители, которые входят в оба (во все) разложения;

3) выбрать их в наибольших степенях, все перемножить; а затем полученный результат умножить на все неповторяющиеся сомножители.

Фактически применить формулу $НОК(a,b) = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_k^{\lambda_k}$, где $\lambda_k = max\{\alpha_i; \beta_i\}$.

Пример 5. Найти НОК чисел 135 и 75.

Решение. Разложим каждое из чисел на простые сомножители.

Ясно, $135=3^3 \cdot 5$; $75=3 \cdot 5^2$. Тогда НОК $(135;75)=3^3 \cdot 5^2=27 \cdot 25=675$.

$$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

10^0. Если a и b – натуральные числа, то $[a;b] = \dfrac{a \cdot b}{(a;b)}$.

11^0. Если a и b – взаимно простые числа, то $[a;b] = a \cdot b$.

12^0. Если a и $b \in \boldsymbol{Z}$, $a \neq 0, b \neq 0$, то $[a;b] = \dfrac{|a \cdot b|}{(a;b)}$.

13^0. Если $a, b, c \in \boldsymbol{N}$, то $[ac;bc] = c \cdot [a;b]$.

14^0. Если $a, b, c \in \boldsymbol{N}$, то $[a;b;c] = [[a;b];c]$.

15^0. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $\left[\dfrac{a}{c};\dfrac{b}{c}\right] = \dfrac{[a;b]}{c}$.

§ 6. Факториал

Слово факториал происходит от латинского «*factor*» (делающий, производящий).

Определение 1. *Факториалом* числа n называется произведение натуральных чисел от 1 до самого числа n (включительно).Обозначение: $n!$.

📖 Термин «*факториал*» был введен в 1800 г. французским математиком *Луи Франсуа Антуаном Арбогастом* (1759–1811).

📖 Обозначение $n!$ стало использоваться, благодаря математику *Кристиану Крампу* (1760–1820), начиная с 1808 года.

Основные свойства факториала:

1^0. *Факториал определён только для натуральных чисел и нуля*.

2^0. Условились считать, что 0!=1.

3^0. При больших значениях n справедлива приближенная *формула Стирлинга*:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n$$

Интересные факты, связанные с факториалами:

145 = 1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145; 40 585 = 4! + 0! + 5! +8! + 5!

§ 7. Действия с дробями

Основное свойство дроби, определяемое формулой $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$, даёт возможность любые две дроби привести к общему знаменателю, т.е. найти соответственно равные им дроби, знаменатели которых совпадают. При этом наименьшим общим знаменателем для двух данных дробей будет, очевидно, наименьшее общее кратное их знаменателей (в несократимых представлениях). Аналогичным образом можно приводить к общему знаменателю три дроби и более.

I. ***Сокращение дроби.*** *Значение дроби не меняется, если разделить её числитель и знаменатель на одно и то же число, отличное от нуля*.

Например,

$$\frac{15}{40} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{3}{8}$$

II. ***Расширение дроби.*** *Значение дроби не изменится, если умножить её числитель и знаменатель на одно и то же число, отличное от нуля*.

Например, $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$

III. Сложение дробей. *Если знаменатели складываемых дробей одинаковы, то для того, чтобы сложить дроби, надо сложить их числители. Полученная сумма станет числителем результата, а знаменатель останется прежним, т.е.*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b};$$

Если же знаменатели дробей различны, необходимо сначала привести дроби к общему знаменателю, т.е.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot\alpha+c\cdot\beta}{НОК(b;d)},$$ *где α, β – дополнительные множители.*

IV. Вычитание дробей. *Если знаменатели вычитаемых дробей одинаковы, то для того, чтобы их вычесть, надо вычесть их числители (в том же порядке). Полученная разность станет числителем новой дроби, а знаменатель останется тем же.*

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Если же знаменатели дробей различны, необходимо сначала привести дроби к общему знаменателю, т.е.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot\alpha-c\cdot\beta}{НОК(b;d)},$$ *где α, β – дополнительные множители.*

Замечание 1. При сложении смешанных чисел их целые и дробные части складываются отдельно. При вычитании же смешанных чисел сначала рекомендуется преобразовать их к виду неправильных дробей, затем вычесть из одной другую, а после этого вновь привести результат, если требуется, к виду смешанного числа.

Например, $7\tfrac{2}{3}+2\tfrac{1}{8}=(7+2)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{8}\right)=9+\frac{2\cdot 8+3\cdot 1}{24}=9+\frac{19}{24}=9\tfrac{19}{24}$.

$6\tfrac{3}{4}-5\tfrac{1}{7}=\frac{27}{4}-\frac{36}{7}=\frac{27\cdot 7-36\cdot 4}{28}=\frac{189-144}{28}=\frac{55}{28}=1\tfrac{27}{28}$.

V. Умножение дроби на число. *Умножить некоторое число на дробь означает умножить его на числитель и разделить произведение на знаменатель.*

VI. Умножение дробей. *Для умножения дробей необходимо перемножить отдельно их числители и знаменатели и разделить первое произведение на второе, т.е.*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Замечание 2. Перед тем как перемножать числители и знаменатели дробей следует проверить, можно ли сократить дроби?

Замечание 3. Чтобы перемножить смешанные числа, надо вначале превратить их в неправильные дроби, после чего перемножить их по правилу умножения обыкновенных дробей.

Определение 1. *Взаимно обратные дроби* – это дроби, произведение которых равно единице.

Например, дроби $\frac{5}{8}$ и $\frac{8}{5}$ – взаимно обратные дроби.

VII. Деление числа на дробь. *Чтобы разделить некоторое число на дробь, необходимо умножить это число на обратную дробь.*

VIII. Деление дробей. *Чтобы разделить одну обыкновенную дробь на другую, отличную от нуля, нужно:*

А) числитель первой дроби умножить на знаменатель второй дроби и записать произведение в числитель новой дроби;

Б) знаменатель первой дроби умножить на числитель второй дроби и записать произведение в знаменатель новой дроби.

Иначе: *чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое (первую дробь) умножить на дробь, обратную делителю, т.е.*

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Замечание 4. При делении смешанных чисел надо представить их в виде неправильных дробей, а потом разделить их друг на друга по правилу деления дробей.

IX. Нахождение дроби от числа. *Чтобы найти дробь (часть) от числа, надо это число умножить на данную дробь.*

Пример 1. Максим читает книгу, в которой 180 страниц. Мальчик прочитал 2/9 книги. Сколько страниц прочитал Максим?

Решение. $180\cdot\frac{2}{9}=40$ (стр.)

IX. Нахождение целого по известной дроби. *Чтобы найти число по его части, выраженной дробью, надо данное число разделить на дробь.*

Пример 2. Автомобиль проехал 250 км, что составило 5/8 всего пути. Какой путь должен проехать автомобиль?

Решение. $250:\frac{5}{8}=250\cdot\frac{8}{5}=\frac{250\cdot 8}{5}=50\cdot 8=400$ (км).

§ 8. Перевод обыкновенной дроби в десятичную дробь и обратно

Обыкновенную дробь можно перевести в *конечную* десятичную дробь только в том случае, когда её знаменатель раскладывается только на множители 2 и 5 (которые могут и повторятся).

Например, дробь $\frac{7}{20}$ можно перевести в конечную десятичную дробь, т.к. $20=2^2\cdot 5$.

I способ. *Чтобы обыкновенную дробь перевести в десятичную, нужно и числитель и знаменатель умножить на одно и то же число, так чтобы в знаменателе получилось 10, 100, 1000 и т.п.*

Пример 1. $\dfrac{7}{20}=\dfrac{7}{2^2\cdot 5}=\dfrac{7\cdot 5}{2^2\cdot 5\cdot 5}=\dfrac{35}{100}=0{,}35$.

II способ. *Чтобы превратить обыкновенную дробь в десятичную дробь, надо числитель разделить углом на знаменатель*.

Пример 2. Перевести дробь $\dfrac{16}{125}$ в десятичную дробь.

$$
\begin{array}{r|l}
16 & 125 \\ \cline{2-2}
\underline{0} & 0{,}128 \\
160 & \\
\underline{125} & \\
350 & \\
\underline{250} & \\
1000 & \\
\underline{1000} & \\
0 &
\end{array}
$$

Чтобы перевести непериодическую десятичную дробь в обыкновенную, надо в качестве числителя взять число, стоящее после запятой, а в качестве знаменателя взять n-ую степень числа 10 (n – количество цифр, стоящих после запятой). При этом отличная от нуля целая часть сохраняется в обыкновенной дроби; нулевая целая часть отбрасывается.

Пример 3. $8{,}35=8\frac{35}{100}=8\frac{7}{20}=\dfrac{167}{20}$; $0{,}35=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$

Не каждая обыкновенная дробь может быть представлена в виде конечной десятичной дроби.

Например, если делить 2 на 7, то получим число вида $0{,}285714285714\ldots$ ноль целых, потом шесть десятых, а затем при делении всё время будет повторяться остаток 2, а в частном – цифра 6.

Более того, результат перевода обыкновенной дроби в десятичную можно спрогнозировать. Так, если знаменатель обыкновенной дроби имеет своими делителями только числа 2, 5 или 2 и 5, то такая дробь обращается в конечную десятичную. Если же знаменатель обыкновенной дроби не делится ни на 2, ни на 5, но делится на любое другое простое число, то такая дробь обращается в чисто периодическую, т. е. такую, у которой первый период начинается сразу после запятой. Смешанная периодическая дробь (та, у которой между запятой и записью первого периода имеются цифры, не входящие в период) получается тогда, когда знаменатель соответствующей обыкновенной дроби, помимо делителей 2 или 5, или их вместе, имеет делителем ещё какое-то простое число.

Определение 1. Если в записи десятичной дроби одна цифра (или группа цифр) повторяются бесконечно много раз, то такую дробь называют *периодической дробью*.

Заметим, что вместо числа $\frac{2}{7} = 0{,}285714285714$ пишут короче:

$$\frac{2}{7} = 0{,}(285714).$$

Для перевода периодической бесконечной десятичной дробив обыкновенную дробь используют **правило**:

1) подсчитывают количество цифр, содержащихся в периоде десятичной дроби. Обозначают количество цифр буквой k.

2) подсчитывают количество цифр, стоящих после запятой, но до периода десятичной дроби. Это количество цифр обозначают буквой m.

3) записывают все цифры, стоящие после запятой (*включая цифры из периода*) в виде натурального числа. Если вначале, до первой значащей цифры, идут нули, то их надо отбросить. Полученное число обозначают буквой a.

4) записывают все цифры, стоящие после запятой, но до периода, в виде натурального числа. Если вначале до первой значащей цифры идут нули, то их надо отбросить. Полученное число обозначают .

5) подставляют найденные значения в формулу, в которой Y– целая часть бесконечной периодической дроби.

$$\boxed{Y + \frac{a-b}{\underbrace{99...9}_{k}\underbrace{00...0}_{m}}}$$

Пример 4. Перевести периодическую десятичную дробь 2,241(35) в обыкновенную дробь.

Решение. 1) k=2; 2) m=3; a=24135; b=241; Y= 2. Тогда

2,241(35) = $2 + \frac{24135-241}{99000} = 2 + \frac{23894}{99000} = 2 + \frac{11947}{49500} = \frac{110947}{49500}$.

§ 9. Признаки делимости

⋮2	На 2 делятся только те целые числа, которые оканчиваются четной цифрой (т.е. 0, 2, 4, 6, 8).
⋮3	Если сумма цифр целого числа делится на 3, то и само число делится на 3.
⋮4	Целое число делится на 4, если две последние цифры этого числа образуют число, делящееся на 4.
⋮5	На 5 делятся только те целые числа, в записи которых последняя цифра 5 или 0.

⋮6	На 6 делятся только те целые числа, которые одновременно делятся на 2 и на 3.
⋮8	На 8 делятся только те целые числа, у которых три последние цифры образуют число, делящееся на 8.
⋮9	Если сумма цифр целого числа кратна 9, то и само число делится на 9.
⋮10	Целое число (не являющееся цифрой, кроме 0) делится на 10, если последняя цифра числа – нуль.
⋮11	Целое число делится на 11, если сумма цифр, стоящих на нечетных позициях равна (или отличается на число, кратное 11) сумме цифр, расположенных на нечетных позициях в записи этого числа.
⋮25	На 25 делятся только те целые числа, в записи которых последние две цифры образуют комбинацию 00 , 25, 50, 75.
0	Делить на 0 нельзя.

§ 10. Целая и дробная части числа

Каждое рациональное число *x*, если оно само не является целым, заключено между двумя соседними целыми числами:

$$n < x < n+1.$$

Например, число 9/2 лежит между целыми числами 4 и 5, а $\frac{12}{29}$ – между 0 и 1.

Определение 1. *Целой частью числа (антье)* называется наибольшее целое число, не превосходящее данного. Антье числа *x* обозначается символом [*x*].

Примеры. [9/2] = 4; $\left[\frac{12}{29}\right]=0$; $\left[-\frac{8}{3}\right]=-3$; [–3] = –3.

Определение 2. Разность между данным числом и его антье называется *дробной частью* числа. Дробная часть числа *x* равна *x* – [*x*]. Дробную часть числа принято обозначать символом $\{x\}$.

В примерах, рассмотренных ранее: {9/2}=0,5; $\left\{\frac{12}{29}\right\}=\frac{12}{29}$; $\left\{-\frac{8}{3}\right\}=\frac{1}{3}$; {–3} = –3.

Дробная часть всякого целого числа равна нулю, так как целое число совпадает со своей целой частью.

Для любого числа его дробная часть неотрицательна и строго меньше единицы

$$0 \le x-[x] < 1.$$

Всякое рациональное число однозначно разлагается на сумму целой и дробной частей, например, 9/2=4+0,5.

Целая часть числа может быть применена при решении следующих задач.

Задача 1. Найдите число натуральных чисел в интервале от 1 до 103, делящихся на 7.

Решение. Известно, что среди всех натуральных чисел от 1 до m чисел, делящихся на b, будет $\left[\frac{m}{b}\right]$.

Следовательно, в данном случае мы должны вычислить антье числа $\frac{m}{b}$.

Итак, $\left[\frac{m}{b}\right]=14$.

Задача 2. Найти количество целых положительных чисел, не превосходящих 107 и не делящихся ни на одно из простых чисел 3, 5 и 7.

Решение. Нужно использовать формулу

$$\boxed{B(x;p_1,p_2,...,p_k)=[x]-\left[\frac{x}{p_1}\right]-\left[\frac{x}{p_2}\right]-...-\left[\frac{x}{p_k}\right]+\left[\frac{x}{p_1p_2}\right]+...+\left[\frac{x}{p_{k-1}p_k}\right]-...(-1)^k\left[\frac{x}{p_1\cdot p_2\cdot...\cdot p_k}\right]}$$

В нашем случае

$$B(107;3,5,7)=[107]-\left[\frac{107}{3}\right]-\left[\frac{107}{5}\right]-\left[\frac{107}{7}\right]+\left[\frac{107}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{107}{3\cdot 7}\right]+\left[\frac{107}{5\cdot 7}\right]-\left[\frac{107}{3\cdot 5\cdot 7}\right]=$$

= 107 – 35 –21 –15 + 7+ 5 + 3 – 1=50.

Опорная задача. *Показатель, с которым данное простое число p входит в произведение* $n!$,*вычисляется следующим образом*

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+... \qquad (1.10.1)$$

Действительно, число сомножителей произведения $n!$, кратных p, равно $\left[\frac{n}{p}\right]$ среди них число кратных p^2 равно $\left[\frac{n}{p^2}\right]$, среди последних число кратных p^3равно $\left[\frac{n}{p^3}\right]$, и т.д. Сумма (1.10.1) и даст искомый показатель, так как каждый сомножитель произведения $n!$, кратный p^m, но не p^{m+1}, нами сосчитан точно m раз, как кратный p, p^2, p^3, ..., наконец, p^m.

Пример 1. Используя свойства функции $[x]$, разложить на простые множители число 30!.

Решение. Искомое разложение имеет вид:

$$30!=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot 7^{\alpha_4}\cdot 11^{\alpha_5}\cdot 13^{\alpha_6}\cdot 17^{\alpha_7}\cdot 19^{\alpha_8}\cdot 23^{\alpha_9}\cdot 29^{\alpha_{10}}.$$

Решение задачи сводится к нахождению показателей, с которыми входят простые числа от 2 до 30 в разложение числа 30!.

В число 30! множитель 2 входит с показателем

$$\alpha_1=\left[\frac{30}{2}\right]+\left[\frac{30}{4}\right]+\left[\frac{30}{8}\right]+\left[\frac{30}{16}\right]=26.$$

Множитель 3 входит с показателем

$$\alpha_2 = \left[\frac{30}{3}\right] + \left[\frac{30}{9}\right] + \left[\frac{30}{27}\right] = 14.$$

Множитель 5– с показателем

$$\alpha_3 = \left[\frac{30}{5}\right] + \left[\frac{30}{25}\right] = 7.$$

Таким же образом можно показать, что множители 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29 входят соответственно с показателями 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1.
Поэтому искомое разложение будет иметь вид

$$30! = 2^{26} \cdot 3^{14} \cdot 5^{6} \cdot 7^{4} \cdot 11^{2} \cdot 13^{2} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29.$$

§ 11. Пропорции и проценты

Определение 1. *Пропорция* – это равенство двух отношений.

В пропорции различают *крайние и средние члены*.

$$\frac{\boxed{8}}{4} = \frac{10}{\boxed{5}}$$

Числа 8 и 5 –крайние члены этой пропорции, а 4 и 10 –её средние члены.
Основное свойство пропорции: *произведение крайних членов пропорции равно произведению средних.*

🕮 Слово «*процент*» происходит от латинского «*procentum*» (со ста, на сто) и вошло в математику из купеческого и финансового обихода. Относительно обозначения % есть несколько мнений. Порядковые числа записывались в виде: 1^0 – «первое», 2^0 – «второе», так что C^0 означало «сотое». В итальянских рукописях XV в. встречаются символы perC, pC, pC^0, затем $p\frac{0}{0}$ – и, наконец, $\frac{0}{0}$. Косая черта / появилась в середине XIX в. из типографских соображений.

🕮 По другим источникам обозначение % произошло от искажения записи ct_0 – сокращения слова *cento*. В «Коммерческой арифметике» (1685) наборщик текста принял ct_0 за дробь и напечатал его в виде $\frac{0}{0}$. Благодаря этому знак % стал употребляться для обозначения процентов и с середины XIX в. получил всеобщее признание.

Определение 2. *Процент* – это одна сотая часть от числа. Процент записывается с помощью знака %.

$$\boxed{1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01} \qquad (1.11.1)$$

Правило 1: Чтобы перевести проценты в дробь, нужно убрать знак % и разделить число на 100.

Пример 1. $37{,}5\% = \frac{37{,}5}{100} = 0{,}375.$

Правило 2: Чтобы перевести десятичную дробь в проценты, нужно дробь умножить на 100 и дописать знак %.

Пример 2. $0{,}14 = 0{,}14 \cdot 100\% = 14\%$.

Замечание. Чтобы перевести обыкновенную дробь в проценты, нужно сначала преобразовать её в десятичную дробь, а затем применить Правило 2.

Полезно запомнить наиболее часто используемые дроби и соответствующие им проценты.

Дробь	1/2	1/4	3/4	1/5	2/5	3/5	1/10	1/20	1/50
Десятичная дробь	0,5	0,25	0,75	0,2	0,4	0,6	0,1	0,05	0,02
Проценты	50%	25%	75%	20%	40%	60%	10%	5%	2%

Рассмотрим свойства процентов:

1^0. *Проценты можно складывать и вычитать только с самими процентами. Проценты складываются и вычитаются друг с другом как обычные числа.*

Уменьшение и увеличение числа может быть выражено в процентах. Пусть x – 100%. Известно, что x уменьшилось на 80%. Найдём, во сколько раз уменьшилось x. Вначале найдём, сколько процентов от x осталось.100% – 80% = 20%

20% осталось от x. Обозначим остаток x за y.

Составим пропорцию. По числовому коэффициенту определяем, во сколько раз уменьшился x.

$$\frac{x}{y} = \frac{100\%}{20\%} = 5 \Rightarrow x = 5y$$

Таким образом, *уменьшить на 80%,* означает *уменьшить в 5 раз*.

Рассмотрим задачи, связанные с процентом.

Задача 1. *Нахождение процента от числа.*

Чтобы найти процент от числа, нужно число умножить на процент.

Пример 1. Предприятие изготовило за год 200 насосов, из которых 60% имеют первую категорию качества. Сколько насосов первой категории изготовило предприятие?

Решение:

1) 60% = 0,6

2) 500·0,6 = 300 (насосов)

Ответ: 300 насосов первой категории качества.

Задача 2. *Нахождение числа по его проценту.*

Чтобы найти число по его проценту, нужно его известную часть разделить на то, сколько процентов она составляет от числа.

Пример 2. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23 % числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?
Решение:

$$138 : 23\% = 138 \cdot 0{,}23 = \frac{138 \cdot 100}{23} = 600\,(\text{стр.})$$

Ответ: 600 страниц.
Задача 3. *Сколько процентов одно число составляет от другого.*
Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, нужно ту часть, о которой спрашивается, разделить на общее количество и умножить на 100 %.

Пример 3. Из 200 арбузов 8 оказались незрелыми. Сколько процентов всех арбузов составляют незрелые арбузы?
Решение:

$$\left(8 : 200\right) \cdot 100\% = \frac{8}{200} \cdot 100\% = \frac{1}{25} \cdot 100\% = 4\%.$$

Ответ: 4%.

В теме «Уравнения, неравенства и их системы» элементарной алгебры изучается параграф «Текстовые задачи», в котором, в том числе, рассматриваются «Задачи на проценты». К таковым относят: задачи по вкладам, задачи на скидку (уценку), задачи на сплавы и смеси (на концентрацию), задачи на усушку (упарку) и т.п.

При решении задач с экономическим содержанием удобно пользоваться формулой:

$$\boxed{N = \frac{S_0 \cdot p \cdot \left(1 + p\right)^k}{\left(1 + p\right)^k - 1},} \qquad (1.11.2)$$

где k – количество платежей, S_0 – сумма займа, N – величина каждого платежа (*аннуитетные*, равные платежи), $p\%$ – процентная ставка, записанная в виде десятичной дроби.

§ 12. Элементы теории сравнений

Определение 1. Целые числа a и b называются *равно остаточными* при делении на целое число m, если остаток от деления a и b на m равны (или если их разность делится нацело на m).
1^0. *Для того чтобы числа a и b были равно остаточными при делении на целое число m, необходимо и достаточно, чтобы* $(a-b)\,\vdots\, m$.
2^0. Если числа a и b имеют равные остатки при делении на m и $m \vdots d$, то a и b имеют равные остатки при делении на d.

Замечание. Равно остаточные при делении на m числа a и b называются также *сравнимыми по модулю* m. Обозначение: $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$.

Эту форму записи называют *сравнением*.

Замечание. Свойства 1^0 и 2^0 можно сформулировать на языке сравнений, а именно:

$1^0)^*$ $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ *тогда и только тогда, когда* $(a-b) \vdots m$.

$2^0)^*$Если $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ и $m \vdots d$, то $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$.

Перечислим остальные свойства сравнений:

3^0. $a \equiv a (\operatorname{mod} m)$ (рефлексивность).

4^0.Если $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$, то $b \equiv a (\operatorname{mod} m)$ (симметричность).

5^0.Если $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$, $b \equiv c (\operatorname{mod} m)$, то $a \equiv c (\operatorname{mod} m)$ (транзитивность)

6^0.Если $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ и $c \equiv d (\operatorname{mod} m)$,то $a + c \equiv b + d (\operatorname{mod} m)$.

7^0.Если $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ и $c \equiv d (\operatorname{mod} m)$, то $ac \equiv bd (\operatorname{mod} m)$.

8^0.Если $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$, то при любом натуральном n $a^n \equiv b^n (\operatorname{mod} m)$.

9^0.Если $ad \equiv bd (\operatorname{mod} m)$ и $(ad, m) = 1, (bd, m) = 1$, то $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$.

10^0. Если $ad \equiv bd (\operatorname{mod} md)$, то $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$.

В теории сравнений играет важную роль теорема Ферма.

Теорема (малая теорема Ферма). *Если целое число* a *не делится на простое число* p, *то*

$$a^{p-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} p).$$

Теорема (Эйлера): *Если* $(a, n) = 1$, $\varphi(x)$ *– количество натуральных чисел, меньших* n *и взаимно простых с ним (включая единицу), то*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 (mod n).$$

Понятие сравнения, свойства сравнений и связанные с ними теоремы используются часто при нахождении остатков от деления степеней чисел во многих олимпиадных задачах. На языке сравнений также легко получить известные всем признаки делимости на 3, 9, 11.

Пример: Каков остаток от деления числа 7^{2015} на 19?

Решение: $7 \equiv 7 (\operatorname{mod} 19)$, $7^2 = 49 \equiv 11 (\operatorname{mod} 19)$,

$$7^3 = 7 \cdot 7^2 \equiv 7 \cdot 11 (\operatorname{mod} 19) \equiv \equiv 1 (\operatorname{mod} 19).$$

Представим 2015 в виде $2015 = 671 \cdot 3 + 2$, получим, что $7^{2015} = (7^3)^{671} \cdot 7^2 \equiv 1^{671} \cdot 7^2 (\mathrm{mod}\, 19) \equiv 11 (\mathrm{mod}\, 19)$.

ТЕМА 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

§ 1. Понятие последовательности чисел

Если каждому натуральному числу поставить в соответствие определенное действительное число a_n: числу 1 сопоставим число a_1, числу 2 – a_2, …, числу n – число a_n и т.д.

В таком случае говорят, что задана *числовая последовательность*, и пишут:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n \text{ или } (a_n), \{a_n\}.$$

Определение 1. Число a_n называется *общим членом* числовой последовательности.

Примеры.

Последовательность четных чисел: 2, 4, 6, 8, 10, …, $2n$, …

Последовательность квадратов натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, 25,…, n^2 …

Последовательность аликвотных дробей: 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, …, $1/n$,…

Способы задания последовательности:

1) *аналитический*, т.е. последовательность задается в виде формулы, определяющей a_n.

Например, формула $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ задает последовательность:

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{2}{3}; a_3 = \frac{3}{4}; ..., a_n = \frac{n}{n+1}; ...$$

2) *рекуррентный*, т.е. любой член последовательности, начиная с некоторого, выражается через предшествующие члены. При этом обязательно указывается первый член последовательности (или несколько начальных членов) и формулу, позволяющую определить любой член последовательности по известным предыдущим.

Например, последовательность Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …, определяемая условием, что каждый её член является суммой двух предыдущих. Она послужила математической моделью одной из старинных задач, относящихся к эпохе Возрождения (XIII в.), – задачи о размножении кроликов.

🕮Эта задача была сформулирована *Леонардо Пизанским* (*Фибоначчи*) (ок. 1170–1250): «…некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения».

3) *словесный* – задание последовательности описанием.

Например, для числа е = 2, 71828… последовательность десятичных приближений по недостатку имеет вид: 2; 2,7; 2,271; 2,718; 2,7182, 2, 71828; …

Вообще говоря, для всякой бесконечной десятичной дроби можно построить последовательность её десятичных приближений по недостатку или избытку.

§ 2. Арифметическая прогрессия

Определение 1. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом d, называется *арифметической прогрессией*.

Определение 2. Число d называется *разностью прогрессии*.

$$\boxed{d = a_n - a_{n-1}} \qquad (2.2.1)$$

Непосредственно из определения 1 следует:

$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\boxed{a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d} \qquad (2.2.2)$$

Следствие. Справедлива формула

$$\boxed{a_n = a_k + (n-k)d} \qquad (2.2.3)$$

Рассмотрим конечную часть арифметической прогрессии
$a_1 = 1; a_2 = 5; a_3 = 9; a_4 = 13; a_5 = 17; a_6 = 21; a_7 = 25; a_8 = 29$.

Можно заметить две закономерности:

1) $a_2 = 5 = \dfrac{a_3 + a_1}{2} = \dfrac{1+9}{2}, \dots$

1^0 (*характеристическое свойство арифметической прогрессии*). *Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов (т.е. полусумме соседних членов)*

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}} \qquad (2.2.4)$$

Следствие. Любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен полусумме равноотстоящих от него членов прогрессии.

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2},\ 1 \le k \le n-1,\ k,n \in N. \qquad (2.2.5)$$

Кроме того, справедливо равенство:

$$a_m + a_n = a_k + a_l, \text{ если } m+n = k+l. \qquad (2.2.6)$$

2) $a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5 = 30$.

2^0. Сумма первого и крайнего членов конечной части арифметической прогрессии равна сумме второго и предпоследнего членов и т.д.

$$\boxed{S_0 = a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots} \qquad (2.2.7)$$

Это свойство позволяет легко получить формулы, позволяющие вычислить сумму n членов арифметической прогрессии:

Действительно, имеет место равенство:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n} \qquad (2.2.8)$$

Если в формуле (2.2.8) вместо a_n подставить правую часть из формулы (2.2.2), то получим еще одну важную формулу:

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n} \qquad (2.2.9)$$

Пример 1. Найти сумму первых ста нечётных чисел.

Решение. Применим последнюю формулу. Здесь $a_1 = 1$, $d = 2$. Тогда

$$S_{100} = \frac{2 \cdot 1 + 2(100-1)}{2} \cdot 100 = 10000.$$

§ 3. Геометрическая прогрессия

Определение 1. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для этой последовательности число q ($q \ne 0, q \ne 1$), называется *геометрической прогрессией*.

Определение 2. Число q называется *знаменателем геометрической прогрессии.*

$$\boxed{q = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},} \qquad (2.3.1)$$

где b_1 – первый член прогрессии, а b_n – n-ый (или общий) член.

Непосредственно из определения 1 следует:

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3;$$

....

$$\boxed{b_n = b_{n-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1}} \qquad (2.3.2)$$

Следствие. Справедлива формула

$$\boxed{b_n = b_k \cdot q^{n-k}} \qquad (2.3.3)$$

Рассмотрим конечную часть геометрической прогрессии

$$b_1 = 1; b_2 = 2; b_3 = 4; b_4 = 8; b_5 = 16; b_6 = 32; b_7 = 64; b_8 = 128$$

Можно обнаружить две закономерности:

1) $b_4^2 = b_3 \cdot b_5$ или $8^2 = 4 \cdot 16$.

1^0 (*характеристической свойство геометрической прогрессии*). *Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, взятый в квадрате, равен произведению предшествующего и последующего членов (т.е. соседних членов).*

$$\boxed{b^2{}_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \qquad (2.3.4)$$

Иначе, *модуль любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних членов прогрессии.*

$$\boxed{|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}} \qquad (2.3.5)$$

Кроме того, справедливо равенство:

$$b_m \cdot b_n = b_k \cdot b_l \cdot \qquad (2.3.6)$$

2^0. Произведение первого и крайнего членов конечной части геометрической прогрессии равно произведению второго и предпоследнего членов и т.д.

$$\boxed{S_0 = b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \ldots} \qquad (2.3.7)$$

Это свойство позволяет легко получить формулы, позволяющие вычислить сумму n членов геометрической прогрессии:

$$\boxed{S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}} \qquad (2.3.8)$$

Определение 3. Геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*.

Для неё очень интересным образом решается вопрос о сумме.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1 - q}} \qquad (2.3.9)$$

Пример 1. Найти сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

Решение. Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\frac{1}{2}$ и первым членом $b_1=\frac{1}{2}$. Тогда по формуле (2.3.9) будем иметь $S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$. Таким образом, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...=1$.

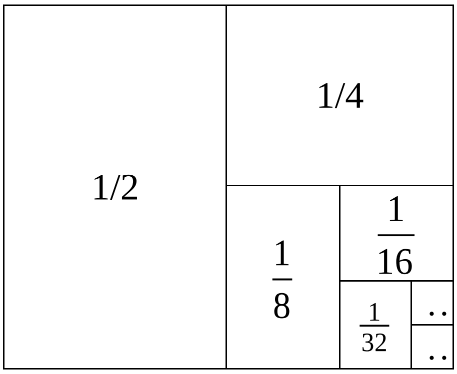


Рис. 9

Этот результат легко получается из наглядных соображений, основанных на вычисление площади квадрата, частями которого являются квадраты, имеющие площади, равные слагаемым заданной суммы (см. Рис. 9).

Пример 2. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить, соответственно, 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующих арифметическую прогрессию. Найти седьмой член данной геометрической прогрессии.

Решение. По условию имеем три последовательных члена геометрической прогрессии: $b_1, b_2=b_1\cdot q,\ b_3=b_1\cdot q.^2$

Запишем три первых члена арифметической прогрессии:
$a_1=b_1+25,\ a_2=b_1q\ +27,\ a_3=b_1q^2+1.$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1+b_1\cdot q+b_1\cdot q^2=91, \\ a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}. \end{cases} \text{или} \begin{cases} b_1+b_1\cdot q+b_1\cdot q^2=91, \\ \dfrac{b_1+25+b_1\cdot q^2+1}{2}=b_1\cdot q+27. \end{cases}$$

Далее получим систему $\begin{cases} b_1\cdot(1+q+q^2)=91, \\ b_1(q^2-2q+1)=28\ . \end{cases}$

Разделив одно уравнение системы на другое, а затем, перемножив крайние и средние члены пропорции, приведя подобные члены, получим квадратное уравнение: $63q^2-210q+63=0.$ Его корнями будут числа $q_1=3, q_2=\frac{1}{3}$. Подставляя эти значения в систему уравнений, получим $b_1=7$, или $b_1=63.$

Тогда $b_7=7\cdot 3^6=5103$ или $b_7=\frac{63}{3^6}=\frac{7}{81}$. Ответ: $b_7=5103$, $b_7=\frac{7}{81}$.

§ 4. Применение прогрессии для перевода десятичной дроби в обыкновенную дробь

В § 8 темы 1 мы рассмотрели правило, с помощью которого можно было о*братить периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь.*

Зная формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, можем теперь рассмотреть еще один способ решения этой задачи.

Обратим периодическую десятичную дробь 0,(4) в обыкновенную дробь.

1) Представим периодическую дробь в виде 0,(4) =0,444…=0,(4)=0,4+0,044+…,

т.е. в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой b_1=0,4; b_2=0,04.

2) Находим знаменатель геометрической прогрессии $q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{0{,}04}{0{,}4} = 0{,}1$.

3) По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \dfrac{b_1}{1-q}$, получим 0,444…$=\dfrac{0{,}4}{1-0{,}1} = \dfrac{0{,}4}{0{,}9} = \dfrac{4}{9}$.

ГЛАВА II. НАЧАЛА АЛГЕБРЫ

ТЕМА 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Числовые выражения и выражения с переменными

Определение 1. Выражения, составленные из чисел, знаков действий и скобок, называются *числовыми выражениями*.
Определение 2. Число, являющееся результатом выполнения всех действий в числовом выражении, называют *значением числового выражения*.

О числовых выражениях, которые не имеют значения, говорят, что они *не имеют смысла*.

Для сравнения чисел используют знаки $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. При этом могут использоваться двойные неравенства вида $a \leq x < b$ и т.п.
Определение 3. Выражения, составленные из чисел, букв, знаков действий и скобок, называются буквенными выражениями или *выражениями с переменной* или *с переменными*.
Определение 4. Множество значений переменной, при которых выражение с переменной имеет числовое значение (имеет смысл), называют *областью допустимых значений* переменной данного выражения.

Выражения с переменными используются для записи чисел определенного вида. Например, запись $\overline{abc}$ означает любое трехзначное число, у которого a сотен, b десятков и c единиц, т.е. $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

С помощью буквенных выражений удобно записывать математические правила, законы, определения.

Числовые выражения и выражения с переменными *называют алгебраическими выражениями.*

Рассмотрим формулу суммы n членов геометрической прогрессии

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q},$$

где b_1 – первый член прогрессии, q– знаменатель прогрессии.

Правая часть этой формулы даёт пример алгебраического выражения.

Другие примеры алгебраических выражений:

Пример 1. $\dfrac{a+b}{2(b-c)}$.

Пример 2. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

В первом примере алгебраическое выражение имеет смысл при всех значениях переменных b и c, кроме $b=c$.

Определение 5. *Алгебраическим выражением* называется выражение, получаемое из постоянных и переменных при помощи операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня.

🕮 Термин «алгебраическое выражение» можно применять всякий раз, когда дана запись, указывающая алгебраические действия, производимые над некоторыми числами или буквенными величинами.

Два различных по виду алгебраических выражения могут, тем не менее, иметь равные числовые значения при любых допустимых значениях буквенных параметров.

Пример 3. 1) a^3-b^3 и $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$;

2) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ и $|a+b|$.

В таких случаях говорят, что эти алгебраические *выражения тождественно равны* и пишут:

$$a^3-b^3\equiv(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right);$$

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}\equiv|a+b|.$$

Замечание. Часто вместо знака $\equiv$(тождественного равенства) используют просто = (знак равенства).

Одним из основных навыков в области алгебры должно быть умение переходить от одного алгебраического выражения к другому, ему тождественному, более простому или удобному. Такой переход осуществляют с помощью *тождественных преобразований*.

Определение 6. Два числа или какие-нибудь выражения, соединенные знаком =, образуют *равенство*.

🕮 В математике равенства употребляются в двух случаях: либо когда утверждают, что данные числа или выражения при таких-то значениях букв равны, либо когда ставят вопрос, при каких значениях букв, входящих в выражения, эти выражения равны. В первом случае равенство называют *тождествами*, а во втором – *уравнениями*.

Определение 7. Два выражения называются *тождественными*, если они имеют одинаковые числовые значения при всех допустимых значениях входящих в них букв.

Например, выражения $4\cdot(a-2)+8$ и $4\cdot a$ тождественны, так как:
при $a = 1$:$4\cdot(a–2) + 8 = 4$ и $4\cdot a = 4$;
при $a = 2$: $4\cdot(a–2) + 8 = 8$ и $4\cdot a = 8$ и т. д.

Определение 8. Два тождественных выражения, соединенные знаком равенства, составляют *тождество*.

🕮Можно сказать и так: равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него букв, называется *тождеством*.

Примерами тождеств могут служить также все равенства, выражающие законы сложения и умножения:

$$a + b = b + a,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$a \cdot b = b \cdot a,$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

🕮 Замена одного выражения другим, тождественным ему, называется *тождественным преобразованием* этого выражения.

§ 2. Одночлены и многочлены. Приведение подобных членов

Простейшими алгебраическими выражениями являются одночлены и многочлены.

Следующие алгебраические выражения: $3a^2bx$, $\sqrt{5}abc^3$, xz^4 являются примерами одночленов.

Определение 1. *Одночленом* называется выражение, получаемое при умножении числового множителя (коэффициента) на один или несколько буквенных сомножителей.

Обычно при этом буквенные сомножители располагают в алфавитном порядке, одинаковые буквенные сомножители объединяют вместе, пользуясь возведением в степень.

Определение 2. *Степенью одночлена* называется сумма показателей степеней буквенных сомножителей, входящих в одночлен.

Пример 1. Степень одночлена $-7a^2b^4$ равна 6.

Определение 3. Алгебраическое выражение, составленное из нескольких одночленов, соединенных между собою знаками «+» или «–», называется *многочленом* (*полиномом*).

Пример 2. Выражение $4x^2y - 5xy + 8$ – многочлен.

Определение 4. Отдельные выражения, от соединения которых знаками «+» или «–» получился многочлен, называются *членами многочлена*.

Обычно члены многочлена рассматриваются вместе с теми знаками, которые стоят перед ними; например, говорят: член $-\boldsymbol{a}$, член $+\ \boldsymbol{b}^2$ и т. п. Перед первым членом, если перед ним не поставлено никакого знака, можно подразумевать знак «+».

Выражение, состоящее из двух членов, называют *двучленом*, из трех – *трёхчленом* и т. д.

Замечание 1. Одночлен представляет собой или отдельное число, выраженное буквой или цифрами (например, $-a$, $+10$), или произведение (например, ab), или частное (например, $\frac{a-b}{2}$) или степень (например, b^2); но

одночлен не должен представлять собою ни сумму, ни разность, так как в противном случае это был бы двучлен, трехчлен, то есть многочлен.
Замечание 2. Если одночлен представляет собою частное, то он называется *дробным одночленом*; все другие одночлены называются *целыми*. Так, одночлен $\frac{a-b}{2}$ есть дробный. Если все члены многочлена целые, то он также называется *целым*.
Замечание 3. Если коэффициент есть целое положительное число, то он означает, сколько раз повторяется слагаемым то буквенное выражение, к которому он относится. Например, $3ab = 3(ab)=ab+ab+ab$. Если коэффициент есть дробь, то он выражает, какая дробь берется от численной величины буквенного выражения.

Так: $\frac{2}{3}ax$ означает взять $\frac{2}{3}$ от числа ax.

Рассмотрим свойства многочленов:
Свойство 1 (переместительное свойство): *численная величина многочлена не изменяется при перемещении его членов* (с их знаками).
Свойство 2 (сочетательное свойство): *численная величина многочлена не изменится, если какие-либо его члены мы заменим их алгебраической суммой.*
Свойство 3 *Если перед каждым членом многочлена изменить знак на противоположный, то численная величина многочлена изменит также знак на противоположный, а абсолютная величина ее не изменится.*

Иногда в многочлене встречаются такие члены, которые отличаются друг от друга только коэффициентами, или знаками, или даже и совсем не отличаются; такие члены называются *подобными*.

Например, в многочлене

$$\underline{4a}-\underline{\underline{3x}}+\underline{0,5a}+\underline{\underline{8x}}+3ax-\underline{\underline{2x}}$$

первый член подобен третьему (они подчеркнуты одной чертой), второй член подобен четвертому и шестому (подчеркнуты двумя чертами), а пятый член не имеет себе подобных.

Если в многочлене встречаются подобные между собой члены, то их можно соединить в один член. Так, в приведенном сейчас примере мы можем (основываясь на сочетательном свойстве многочлена) соединить члены в такие группы:

$$(4a + 0,5a) + (-3x + 8x - 2x) + 3ax = 4,5a + 3x + 3ax.$$

Соединение всех подобных между собою членов многочлена в один член принято называть *приведением подобных членов* многочлена.
Замечание 4. Говорят, что два подобных члена с одинаковыми коэффициентами, но с разными знаками *взаимно уничтожаются*.
Определение 5. Многочлен, у которого нет подобных членов, называется *многочленом стандартного вида*.

Определение 6. *Степенью многочлена* стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.
Замечание 5. Степенью многочлена, не записанного в стандартном виде, называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

Пример 3. Степень многочлена $4x^2y-5x^2y^5+8y$ равна 7, а степень многочлена $4x^2y+5xy-4x^2y$ равна 2.

§ 3. Сложение одночленов

Пусть требуется сложить несколько одночленов: $3a$, $-5b$, $+0,2a$, $-7b$ и c. Их сумма выразится так:

$$3a+(-5b)+(+0,2a)+(-7b)+c.$$

После приведения подобных членов получим: $3,2a-12b+c$.

Значит, *чтобы сложить несколько одночленов, достаточно написать их один за другим с их знаками и сделать приведение подобных членов.*

§ 4. Сложение многочленов

Пусть требуется к какому-нибудь числу или алгебраическому выражению m прибавить многочлен $a-b+c$. Искомую сумму можно выразить так:

$$m+(a-b+c).$$

Чтобы преобразовать это выражение, примем во внимание, что многочлен $a-b+c$ представляет собой сумму $a+(-b)+c$, а, чтобы прибавить сумму, можно прибавить каждое слагаемое одно за другим; поэтому:

$$m+(a-b+c)=m+a+(-b)+c$$

Но прибавить $-b$ все равно, что вычесть b; поэтому:

$$m+(a-b+c)=m+a-b+c$$

Правило. *Чтобы к какому-нибудь алгебраическому выражению прибавить многочлен, надо приписать к этому выражению все члены многочлена один за другим с их знаками* (причем перед первым членом многочлена, если перед ним не стоит никакого знака, надо подразумевать знак «+») и сделать приведение подобных членов, *если они окажутся.*

Пример. Сложить многочлены $3a^2-5ab+b^2$ и $4ab-b^2+7a^2$.

Первое слагаемое, которое мы обозначали сейчас одной буквой m, дано в этом примере в виде многочлена $3a^2-5ab+b^2$. Применяя указанное правило, найдем:

$3a^2-5ab+b^2+(4ab-b^2+7a^2)=3a^2-5ab+b^2+4ab-b^2+7a^2=10a^2-ab.$

Если данные для сложения многочлены содержат подобные члены (как в нашем примере), то слагаемые полезно писать одно под другим так, чтобы подобные члены стояли под подобными:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 3a^2 - 5ab + b^2 \\ 7a^2 + 4ab - b^2 \end{array} \\ \hline 10a^2 - ab \quad \end{array}.$$

§ 5. Вычитание одночленов и многочленов

Пусть требуется из одночлена $10ax$ вычесть одночлен $-3ax$. Искомая разность выразится так:

$$10ax-(-3ax).$$

Согласно правилу вычитания, вычитание $-3ax$ можно заменить прибавлением числа, противоположного числу $-3ax$. Такое число есть $+3ax$, поэтому:

$$10ax-(-3ax)=10ax+(+3ax)=10ax+3ax=13ax.$$

Значит, *чтобы вычесть одночлен, достаточно приписать его к уменьшаемому с противоположным знаком (и сделать приведение подобных членов, если они окажутся).*

Пусть требуется из какого-нибудь числа или алгебраического выражения m вычесть многочлен $a-b+c$, что можно обозначить так:

$$m-(a-b+c).$$

Для этого достаточно прибавить к m число, противоположное числу $a-b+c$. Такое число есть $-a+b-c$; значит:

$$m-(a-b+c)=m+(-a+b-c)$$

Применяя теперь правило сложения многочленов, получим:

$$m-(a-b+c)=m-a+b-c.$$

Значит, *чтобы из какого-нибудь алгебраического выражения вычесть многочлен, достаточно к этому выражению приписать все члены вычитаемого многочлена с противоположными знаками (и сделать приведение подобных слагаемых).*

Если требуется вычесть из одного многочлена другой многочлен и в них имеются подобные члены, то вычитаемый многочлен полезно писать под уменьшаемым, заменив знаки у вычитаемого многочлена на противоположные, и так, чтобы подобные члены стояли под подобными. Затем произвести сложение многочленов.

Например, вычитание $7a^2-2ab+b^2$ и $5a^2+4ab-2b^2$ лучше всего расположить так:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 7a^2 - 2ab + b^2 \\ -5a^2 - 4ab + 2b^2 \end{array} \\ \hline 2a^2 - 6ab + 3b^2 \end{array}.$$

§ 6. Умножение одночленов

Пусть надо умножить $3ax^2$ на $(-5abx)$.

Так как одночлен $-5abx$ есть произведение, то достаточно умножить множимое на первый сомножитель -5, результат умножить на второй сомножитель a, и т. д. Значит:

$$3ax^2(-5abx) = 3ax^2(-5)abx.$$

В этом произведении, пользуясь сочетательным свойством умножения, сгруппируем сомножители в такие группы:

$$(+3)(-5)\ (aa)\ b\ (x^2x).$$

Произведя умножение в каждой группе, получим:

$$-15\ a^2bx^3.$$

Значит, *чтобы умножить одночлен на одночлен, надо перемножить их коэффициенты, сложить показатели одинаковых букв, а те буквы, которые входят только во множимое или только во множитель, перенести в произведение с их показателями.*

§ 7. Умножение многочлена на одночлен

Пусть дано умножить многочлен $a + b - c$ на одночлен m, что можно выразить так: $(a + b - c)\ m$.

Многочлен$a + b - c$ есть сумма относительных чисел $a + b + (-c)$. Но, чтобы умножить сумму, можно умножить каждое слагаемое отдельно и результаты сложить (распределительное свойство); значит:

$$(a + b - c)\ m = [a + b + (-c)]\ m = am + bm + (-c)m\ .$$

Но $(-c)m = -cm$ и $+ (-cm) = -cm$; поэтому

$$(a + b - c)\ m = am + bm - cm.$$

Правило. *Чтобы умножить многочлен на одночлен, надо умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.*

§ 8. Умножение многочлена на многочлен

Пусть требуется произвести умножение трёхчлена $a + b - c$ на двучлен $m - n$.

Рассматривая множитель $m - n$ как одно число (как одночлен), применим правило умножения многочлена на одночлен:

$$a\ (m - n) + b\ (m - n) - c\ (m - n).$$

Рассматривая теперь выражение $m - n$ как многочлен (двучлен), применим правило умножения одночлена на многочлен:

$$(am - an) + (bm - bn) - (cm - cn).$$

Наконец, раскрыв скобки по правилам сложения и вычитания, окончательно найдем:

$$(a + b - c)(m - n) = am - an + bm - bn - cm + cn$$

П р а в и л о 1. *Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо умножить каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.*

Конечно, при умножении членов первого многочлена на члены второго многочлена нужно руководствоваться правилами знаков: одинаковые знаки дают «+» разные знаки «–».

З а м е ч а н и я. 1) Чтобы при умножении многочлена на многочлен не пропустить ни одного из произведений членов, полезно всегда держаться какого-нибудь одного порядка умножения; например, как это мы сейчас делали, умножить сначала все члены множимого на 1-й член множителя, затем умножить все члены на 2-й член множителя, и т. д.

2) В применении к арифметическим числам правило умножения многочленов может быть наглядно истолковано геометрически. Возьмем, например, 4 отрезка прямой a, b, m и n и построим два прямоугольника: один с основанием $a + b$ и высотою $m + n$, другой с основанием $a + b$, и высотою $m - n$.

Рис. 10

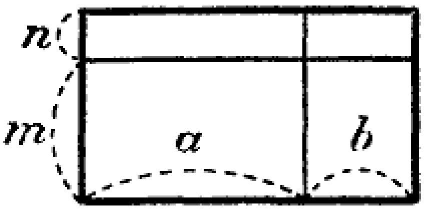


Рис 11.

Площадь первого равна $(a + b)(m + n)$, а площадь второго будет $(a + b)(m – n)$.

Из рисунков видно, что первая площадь равна $am + bm + an + bn$, а вторая равна $am + bm – an – bn$.

Умножение многочленов, расположенных в порядке убывания степеней удобнее всего производить так, как показано в следующем примере.

Пример 1. Умножить $3x – 5 + 7x^2 – x^3$ на $2 – 8x^2 + x$.

Расположив оба многочлена по убывающим степеням буквы x, пишут множитель под множимым и под ними проводят черту:

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} -x^3+7x^2+3x-5 \\ -8x^2+x+2 \end{array} \\
\hline
8x^5-56x^4-24x^3+40x^2 \qquad\qquad\quad \\
+\qquad -x^4+7x^3+3x^2-5x \qquad \\
-2x^3+14x^2+6x-10 \\
\hline
8x^5-57x^4-19x^3+57x^2+x-10
\end{array}$$

Умножаем все члены множимого на 1-й член множителя (на $– 8x^2$) и полученное произведение пишем под чертою. Умножаем затем все члены множимого на 2-й член множителя (на $+ x$) и полученное второе произведение пишем под первым так, чтобы подобные члены стояли под подобными. Также поступают и далее. Под последним произведением (на + 2) проводим черту, под которою пишем полное произведение, складывая все остальные произведения.

Замечание. При умножении многочлена на многочлен, важно знать, каким будет число членов произведения. В рассмотренном примере многочлен, состоящий из 4-х членов, умножался на многочлен, состоявший из 3-х членов. Умножив каждый член множимого на 1-й член множителя, мы получили 4 члена произведения; умножив затем каждый член множимого на 2-й член множителя, мы получили еще 4 члена произведения и т. д.; значит, всех членов в произведении окажется 4•3, т. е. 12. Однако, результирующий многочлен (произведение данных многочленов) содержит всего 6 членов.

Правило 2. *Число членов произведения, до соединения в нем подобных членов, равно произведению числа членов множимого на число членов множителя.*

Установить число членов произведения двух многочленов, не выполняя самого умножения, вообще говоря, затруднительно.

§ 9. Деление одночленов

Пусть требуется разделить одночлен a^5 на a^2.

Так как делимое должно равняться делителю, умноженному на частное, а при умножении показатели одинаковых букв складываются, то в искомом частном показатель буквы *a* должен быть такое число, которое, сложенное с 2, составляет 5; такое число равно разности 5 – 2. Значит:

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3$$

Значит, *при делении степеней одного и того же числа показатель делителя вычитается из показателя делимого*.

Если только число, степени которого делятся, не равно нулю. Так, нельзя написать: $0^m : 0^n = 0^{m-n}$, так как это равенство означало бы: 0:0 = 0, тогда как частное 0:0 может равняться любому числу.

Пусть надо разделить:$(12a^3b^2x):(4a^2b^2)$.

Впрочем, ради краткости писания скобки в подобных обозначениях принято опускать. Согласно определению деления, частное, будучи умножено на делитель, должно составить делимое. Поэтому у искомого частного коэффициент должен быть 12:4, т. е. 3; показатель у буквы *a* получится вычитанием из показателя этой буквы в делимом показателя той же буквы в делителе, буква *b* совсем не войдет в частное, или, что все равно, войдет в него с показателем 0, а буква *x* перейдет в частное со своим показателем.

Таким образом, $12a^3b^2x:a^2b^2 = 3ax$. Поверка: $3ax \cdot 4a^2b^2 = 12a^3b^2x$

Правило. *Чтобы разделить одночлен на одночлен, надо коэффициент делимого разделить на коэффициент делителя, из показателей букв дели-*

мого вычесть показатели тех же букв делителя и перенести в частное, без изменения показателей, те буквы делимого, которых нет в делителе.

Замечание. Если частное от деления целых одночленов не может быть выражено точно целым одночленом, то говорят, что такое деление невозможно. Деление одночленов невозможно в двух случаях:

а) Когда в делителе есть буквы, которых нет в делимом.

Например, нельзя разделить $4ab^2$ на $2ax$, так как всякий одночлен, умноженный на $2ax$, дает произведение, содержащее букву x, а в нашем делимом такой буквы совсем нет.

б) Когда показатель какой-либо буквы в делителе больше показателя той же буквы в делимом.

Например, деление $10a^3b^2:5ab^3$ невозможно, так как всякий одночлен, умноженный на $5ab^3$, дает в произведении такой одночлен, который содержит букву b с показателем 3 или с показателем, большим 3, тогда как в нашем делимом эта буква стоит с показателем 2.

Когда один одночлен не делится на другой одночлен, то частное может быть только указано посредством знаков деления;

Например, частное от деления $4a^2b:2ac$ может быть указано так: $\frac{4a^2b}{2ac}$

§ 10. Деление многочленов

10.1. Деление многочлена на одночлен

Пусть требуется разделить многочлен $a + b - c$ на одночлен m, что можно выразить так:

$$(a + b - c):m, \text{ или } \frac{a+b-c}{m},$$

Многочлен $a + b - c$ есть алгебраическая сумма, а чтобы разделить алгебраическую сумму на какое-нибудь число, можно разделить на это число каждое слагаемое отдельно; поэтому:

$$\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}.$$

Правило. *Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо разделить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные частные сложить.*

Конечно, деление членов многочлена на одночлен производят по правилу деления одночленов.

Примеры:

1) $\left(20a^3-12a^2-a\right):4a=5a^2-3a-\frac{1}{4}.$

2) $\left(8x^3-2x+12\right):2x=4x^2-1+\frac{6}{x}.$

3) $\left(\frac{1}{4}x^3-0,24x^2+1\right):2x^2=\frac{1}{8}x-0,12+\frac{1}{2x^2}$.

10.2. Деление одночлена на многочлен

Пусть требуется одночлен a разделить на многочлен $b+c–d$. Частное от такого деления не может быть выражено ни целым одночленом, ни целым многочленом, так как если допустим, что частное равно какому-нибудь целому одночлену или целому многочлену, то произведение этого частного на многочлен $b+c–d$ дало бы тоже многочлен, а не одночлен, как требуется делением. Частное от деления a на $b+c–d$ может быть только обозначено знаками деления:

$$a:(b+c-d), \text{ или } \frac{a}{b+c-d}$$

10.3.Деление многочлена на многочлен

Частное от деления многочлена на многочлен только в редких случаях можно выразить в виде целого многочлена.

Например,

$$(a^2+2ab+b^2):(a+b)=a+b.$$

Вообще же подобные частные можно только обозначить знаком деления.

Например, частное от деления $a-b+c$ на $d-e$ выразится так:

$$\frac{a-b+c}{d-e}, \text{ или } (a-b+c):(d-e).$$

Выразить частное в виде целого многочлена иногда удастся тогда, когда оба многочлена расположены по степеням одной и той же буквы. Покажем, как это сделать, на следующем примере:

Пример 1. $(5x^2-19x^3+17x+6x^4-4):(1-5x+3x^2)$.

Запишем оба многочлена по убывающим степеням буквы x и расположим деление так, как оно располагается при делении целых чисел:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 6x^4-19x^3+5x^2+17x-4 \\ 6x^4-10x^3+2x^2 \end{array} & \begin{array}{l} 3x^2-5x+1 \\ \hline 2x^2-3x-4 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} -9x^3+3x^2+17x-4 \\ -9x^3+15x^2-3x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} -12x^2+20x-4 \\ -12x^2+20x-4 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Предположим, что искомое частное равно какому-нибудь многочлену и что члены этого многочлена расположены тоже по убывающим степеням буквы x.

Делимое должно равняться произведению делителя на частное. Из умножения расположенных многочленов известно, что высший член произведения равен произведению высшего, члена множимого на высший член множителя. В делимом высший член есть первый, в делителе и частном высшие члены тоже первые. Значит, 1-й член делимого ($6x^4$) должен быть произведением 1-го члена делителя ($3x^2$) на 1-й член частного. Отсюда следует: чтобы найти 1 й член частного, достаточно разделить 1-й член делимого на 1-й член делителя. Разделив, находим 1-й член частного $2x^2$. Пишем его под чертою в частном.

Умножим все члены делителя на 1-й член частного и полученное произведение вычтем из делимого. Для этого напишем его под делимым так, чтобы подобные члены стояли под подобными, и у всех членов вычитаемого переменим знаки на противоположные. Получим после вычитания 1-й остаток. Если бы этот остаток оказался равным нулю, то это значило бы, что в частном никаких других членов, кроме найденного 1-го, нет, т. е. что частное есть одночлен. Если же, как в нашем примере, 1-й остаток не есть нуль, то будем рассуждать так.

Делимое есть произведение всех членов делителя на каждый член частного. Мы вычли из делимого произведение всех членов делителя на 1-й член частного; следовательно, в 1-м остатке заключается произведение всех членов делителя на 2-й, на 3-й и следующие члены частного. Высший член в остатке есть 1-й; высший член делителя тоже 1-й; высший член в частном (не считая 1-го) есть 2-й член. Значит, 1-й член остатка ($-9x^3$) должен равняться произведению 1-го члена делителя на 2-й член частного. Отсюда заключаем: чтобы найти 2-й член частного, достаточно разделить 1-й член 1-го остатка на 1-й член делителя. Разделив, находим 2-й член частного $-3x$. Пишем его в частном.

Умножим на 2-й член частного все члены делителя и полученное произведение вычтем из 1-го остатка. Получим 2-й остаток. Если этот остаток равен нулю, то деление окончено; если же, как в нашем примере, 2-й остаток не равен нулю, то будем рассуждать так.

2-й остаток есть произведение всех членов делителя на 3-й, на 4-й и следующие члены частного. Так как из этих членов частного высший есть 3-й, то, подобно предыдущему, 3-й член частного найдем, если 1-й член 2-го остатка разделим на 1-й член делителя. Разделив, находим - 4. Умножив на - 4 все члены делителя и вычтя произведение из остатка, получим 3-й остаток. В нашем примере этот остаток оказался нулем; это показывает, что в частном других членов, кроме найденных, не может быть. Если бы 3-й остаток был не 0, то подобно предыдущему, надо было бы делить 1-й член этого остатка на 1-й член делителя; от этого получился бы 4-й член частного, и т. д.

Можно было бы расположить делимое и делитель по возрастающим степеням одной и той же буквы и затем поступать так, как сейчас было сказано; при этом пришлось бы основываться на том, что низший член произведения равен произведению низшего члена множимого на низший член множителя.

Пример 2.

1)

$$
\begin{array}{r|l}
-\;28x^4-13ax^3-26a^2x^2+15a^3x & 7x^2+2ax-5a^2 \\
\cline{2-2}
28x^4+8ax^3-20a^2x^2 \qquad\quad & 4x^2-3ax \\
\cline{1-1}
-\;-21ax^3-6a^2x^2+15a^3x & \\
-21ax^3-6a^2x^2+15a^3x & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

2)

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3-a^3 \qquad\qquad & x-a \\
\cline{2-2}
x^3-ax^2 \qquad\qquad & x^2+ax+a^2 \\
\cline{1-1}
-\;ax^2-a^3 \quad & \\
ax^2-a^2x \quad & \\
\cline{1-1}
-\;a^2x-a^3 & \\
a^2x-a^3 & \\
\cline{1-1}
0 \quad &
\end{array}
$$

Подобным образом можем убедиться, что разности $x^5 - a^5$, $x^6 - a^6$... и вообще $x^m - a^m$ делятся без остатка на разность $x - a$, т. е. *что разность одинаковых степеней двух чисел делится на разность этих чисел без остатка*.

Из описанного процесса видно, что деление многочлена на многочлен нельзя выполнить в следующих случаях:

а) *Если показатель главной буквы в высшем члене делимого меньше показателя той же буквы в высшем члене делителя, потому что тогда нельзя получить высшего члена частного.*

б) *Если показатель главной буквы в низшем члене делимого меньше показателя той же буквы в низшем члене делителя, потому что тогда нельзя подучить низшего члена частного.*

в) *Если показатели главной буквы в высшем и низшем членах делимого не меньше, соответственно, показателей этой буквы в высшем и низшем членах делителя, то еще нельзя сказать, чтобы деление было возможно. В этом случае, чтобы судить о возможности или невозможности деления, надо приступить к выполнению самого действия и продолжать его до тех пор, пока окончательно не убедимся в возможности или невозможности получить частное в виде многочлена*.

При этом надо различать 2 случая:

I. Когда многочлены расположены по убывающим степеням главной буквы, то продолжают действие до тех пор, пока в остатке не получится 0 (тогда деление возможно и закончено), или пока не дойдут до такого остатка, 1-й член которого содержит главную букву с показателем меньшим, чем показатель 1-го члена делителя (тогда деление невозможно).

Например,

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 10x^4-2x^3\qquad +3x+4 \\ 10x^4\qquad -5x^2\qquad\qquad \end{array} & \begin{array}{l} 2x^2-1 \\ \hline 5x^2-x+\dfrac{5}{2} \end{array} \\ \cline{1-1}
-\begin{array}{r} -2x^3+5x^2+3x \\ -2x^3\qquad +x \end{array} & \\ \cline{1-1}
-\begin{array}{r} 5x^2+2x+4 \\ 5x^2\qquad -\dfrac{5}{2} \end{array} & \\ \cline{1-1}
2x+\dfrac{13}{2} &
\end{array}
$$

Деление невозможно, потому что мы дошли до такого остатка, у которого 1-й член не делится на 1-й член делителя.

II. Когда многочлены расположены по возрастающим степеням, то, сколько бы мы ни продолжали деление, никогда не получим такого остатка, у которого показатель 1-го члена был бы меньше показателя 1-го члена делителя, потому что при таком расположении показатели главной буквы в первых членах остатков идут увеличиваясь.

Например,

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 4+3x\qquad -2x^3+10x^4 \\ 4\qquad -8x^2\qquad\qquad\qquad \end{array} & \begin{array}{l} -1+2x^2 \\ \hline -4-3x-8x^2 \end{array} \\ \cline{1-1}
-\begin{array}{r} 3x+8x^2-2x^3 \\ 3x\qquad -6x^3 \end{array} & \\ \cline{1-1}
-\begin{array}{r} 8x^2+4x^3+10x^4 \\ 8x^2\qquad -16x^4 \end{array} & \\ \cline{1-1}
4x^3+26x^4 &
\end{array}
$$

Пример 3.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 8x^6+8x^5-20x^4+40x^3-50x^2+30x-10 \\ 8x^6+12x^5-16x^4+24x^3-32x^2\qquad\qquad \end{array} & \begin{array}{l} 2x^4+3x^3-4x^2+6x-8 \\ \hline 4x^2-2x+1 \end{array} \\ \cline{1-1}
-\begin{array}{r} -4x^5-4x^4+16x^3-18x^2+30x \\ -4x^5-6x^4+8x^3-12x^2+16x \end{array} & \\ \cline{1-1}
-\begin{array}{r} 2x^4+8x^3-6x^2+14x-10 \\ 2x^4+3x^3-4x^2+6x-8 \end{array} & \\ \cline{1-1}
5x^3-2x^2+8x-2 &
\end{array}
$$

При делении многочленов с остатком можно применять предложенную М.В. Яковкиным более экономную схему записи.

Так как для нахождения членов неполного частного надо делить старшие члены промежуточных остатков на старший член делителя, то не надо находить сами эти остатки, а достаточно знать лишь их старшие члены.

Деление по схеме М.В. Яковкина:

$2x^4$	$8x^6+8x^5-20x^4+40x^3-50x^2+30x-10$
$-3x^3$	$-12x^5+16x^4-24x^3+32x^2$
$4x^2$	$6x^4-8x^3+12x^2-16x$
$-6x$	$-3x^3+4x^2-6x+8$
8	$4x^2-2x+1 \,\Vert\, 5x^3-2x^2+8x-2$

§ 11. Квадратный трёхчлен. Корни квадратного трёхчлена. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители

Определение 1. *Квадратным трёхчленом* относительно *x* называется выражение вида

$$ax^2+bx+c, \qquad (2.11.1)$$

где $a \neq 0$, $a,b,c \in R$. Значения *x*, при которых квадратный трёхчлен (2.1.11) обращается в нуль, называются *корнями* трёхчлена.

Определение 2. *Дискриминантом* называется число *D*, вычисляемое по формуле $D=b^2-4ac$.

Теорема 1. Квадратный трёхчлен ax^2+bx+c (2.11.1) имеет не более двух корней:

1) эти корни действительны и различны, если $D>0$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

2) действительны и совпадают, если $D=0$, $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

3) нет действительных корней, если $D<0$.

Следствие. Складывая и перемножая корни x_1 и x_2 квадратного трёхчлена (2.11.1), получают *формулы Виета***:**

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Доказательство:

1) $x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$.

2) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} \cdot \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{b^2 - D}{4a^2} = \dfrac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

Теорема 2. Пусть x_1 и x_2 - корни квадратного трёхчлена (2.11.1), тогда для любого значения x справедлива формула

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доказательство:
из формул Виета можно получить соотношения $b = -a(x_1 + x_2)$, $c = ax_1x_2$.
Подставим их в формулу (1):

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2) + ax_1x_2 = ax^2 - ax_1 - ax_2 + ax_1x_2 =$$
$$= ax(x - x_1) - ax_2(x - x_1) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

§ 12. Способы разложения многочлена на неприводимые сомножители

12.1. Группировка членов и вынесение общих множителей за скобки

Представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одинаковые члены) *называется разложением многочлена на множители*.

При *вынесении общего множителя за скобки* каждую переменную, входящую во все члены многочлена выносят с наименьшим показателем, который она имеет в данном многочлене. Если все коэффициенты многочлена – целые числа, то в качестве коэффициента общего множителя берут наименьший по модулю общий делитель всех коэффициентов многочлена.

Пример 1. $2x^3 + 4x^2 + 8x = 2x\left(x^2 + 2x + 4\right)$

При разложении многочлена на множители *методом группировки* стараются сгруппировать его члены так, чтобы слагаемые в каждой группе имели бы общий множитель, далее применяют метод вынесения общего множителя за скобки.

Пример 2. $\underline{ab} - \underline{2b} + \underline{\underline{3a}} - \underline{\underline{6}} = b(a-2) + 3(a-2) = (a-2)(b+3)$

12.2. Разложение на множители по формулам сокращённого умножения

Наиболее часто встречающиеся произведения рекомендуется запомнить и пользоваться ими в качестве готовых формул при выполнении действий над многочленами. Эти формулы называются *формулами сокращенного умножения*. Ниже приводится перечень основных формул сокращенного умножения.

(1)	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	квадрат суммы
(2)	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	квадрат разности
(3)	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	разность квадратов
(4)	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	куб суммы

(5)	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	куб разности
(6)	$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$	сумма кубов
(7)	$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$	разность кубов
(8)	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	полиномиальная формула (частный случай)

1) $\boldsymbol{(a + b)^2} = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$.

Геометрическое доказательство формулы (1).

Отложим отрезок прямой AB=a и к нему приложим отрезок BC=b, затем построим квадраты: ACDE и ABJK, площади которых будут равны $(a + b)^2$ и a^2. Продолжив прямые BJ и KJ до пересечения с ED и CD, мы разобьем больший квадрат на 4 части, площади которых будут: a^2, b^2, ab и ab (Рис. 12).

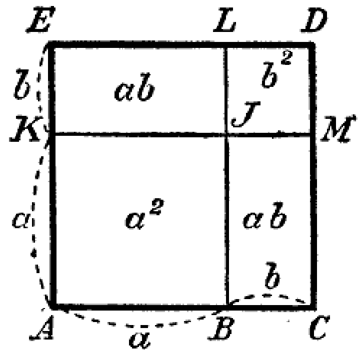


Рис. 12.

Значит, $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Таким образом, *квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.*

Например, $17^2 = (10 + 7)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2 = 100 + 140 + 49 = 289$.

2) $\boldsymbol{(a - b)}^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}$.

Геометрическое доказательство формулы (2).

Отложим AB=a и из AB вычтем BC=b; затем построим квадраты ACDE, ABFK и KLME, площади которых будут $(a - b)^2$, a^2и b^2. Продолжив CD до точки N, мы получим: пл. ACDE = пл. ABFK + пл. EKLM - пл. CBFN - пл. DNLM (Рис. 13).

Значит, $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - ab - ab = a^2 - 2ab + b^2$.

Таким образом, *квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.*

Например, $19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$.

Замечание. Полезно заметить, что возвышение в степень по отношению к сложению и вычитанию не обладает распределительным свойством; так,

$$(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2, \text{ или } (8 - 6)^2 \neq 8^2 - 6^2.$$

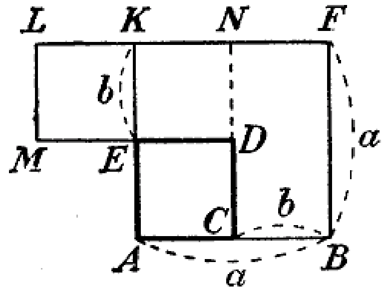


Рис. 13.

3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = a^2 + ab - ab - b^2 = \boldsymbol{a^2 - b^2}$

Геометрическое доказательство формулы (3).

Отложив AB = a, BG = b, AD = a и DE = b, построим прямоугольник ACJE и квадраты ABKD и DEML. Тогда пл. ACJE = пл. ABKD + пл. BCJN– пл. DEML – пл. LMNK. Но прямоугольники BCJN и LMNK равны, и потому их площади в написанном нами равенстве взаимно уничтожаются: пл. ACJE = пл. ABKD – пл. DEML (Рис. 14).

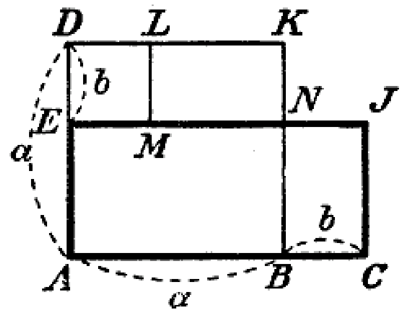


Рис. 14.

Значит, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Таким образом, *произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.*

Например, $25{\cdot}15 = (20 + 5)\,(20 - 5) = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375$.

4) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

Таким образом, *куб суммы, двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс куб второго числа.*

Например, $12^3 = (10 + 2)^3 = 10^3 + +3\cdot10^2\cdot2 + 3\cdot10\cdot2^2 + 2^3 = 1000 +$ $+600 + 120 + 8 = 1728$.

5) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^3 = (a - b)^2\,(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b$
$+2ab^2 - b^3 = \boldsymbol{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

Таким образом, *куб разности двух чисел равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа па квадрат второго, минус куб второго числа.*

Например, $19^3 = (20 - 1)^3 = 20^3 - 3\cdot20^2\cdot1 + 3\cdot20\cdot1^2 - 1^3 = 8000 - 1200 +$ $60 - 1 = 6869$.

Пример 3. $x^2+2x+1-y^2=(x+1)^2-y^2=(x-y+1)(x+y+1)$

Пример 4.

$$a^4+324=\left(a^2\right)^2+18^2=\left(a^2\right)^2+\underline{2\cdot a^2\cdot 18-2\cdot a^2\cdot 18}+18^2=\left(\left(a^2\right)^2+2\cdot a^2\cdot 18+18^2\right)-$$

$$-2\cdot a^2\cdot 18=\left(a^2+18\right)^2-(6a)^2=\left(a^2-6a+18\right)\left(a^2+6a+18\right)$$

В этом примере мы применили комбинацию нескольких методов, а именно: внесение в многочлен взаимно уничтожающихся компонентов, группировку членов многочлена и формулы сокращённого умножения.

Замечание 1. На практике конкретный пример не всегда решается с использованием только одного из методов разложения на множители, поэтому чаще используется комбинация нескольких методов.

Замечание 2. Формулы разности квадратов и разности кубов обобщаются на любой натуральный показатель:

$$a^n-b^n=(a-b)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right),\ n\in\mathbf{N}.$$

Формула суммы кубов обобщается на любой нечетный показатель:

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\cdot\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+...-ab^{2n-1}+b^{2n}\right),\ n\in\mathbf{N}.$$

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с суммой всевозможных удвоенных произведений его членов, взятых по два.

Например, справедлива формула

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

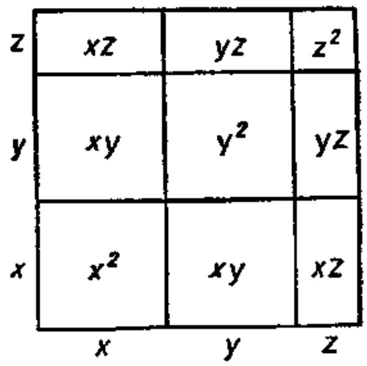


Рис. 15.

📖 Если в скобке присутствует знак «–», то его надо учитывать только при составлении удвоенных произведений.

Например, $(x-y+z)^2=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$.

12.3. Внесение в многочлен взаимно уничтожающихся выражений (представление одночлена многочленом)

Суть этого метода заключается в том, что к многочлену приписывают выражения противоположных знаков, которые помогают применить описанные выше методы там, где они сразу не могут быть применены.

Пример 5.

$$2a^3-a^2+3=2a^3-a^2\underline{-2a^2+2a^2}+3=\underline{2a^3}-\underline{\underline{3a^2}}+\underline{2a^2}+\underline{\underline{3}}=2a^2\left(a+1\right)-$$

$$-3\left(a^2-1\right)=2a^2\underline{\left(a+1\right)}-3\left(a-1\right)\underline{\left(a+1\right)}=\left(a+1\right)\left(2a^2-3a+3\right).$$

12.4. Применение различных способов разложения на множители (введение новой переменной)

Иногда удобно вводить новую переменную, чтобы избежать громоздких записей и облегчить вычисления. Разложив многочлен на множители, нужно обязательно вернуться к исходной переменной.

Пример 6.

$$\left(a^2+a+3\right)\left(a^2+a+4\right)-12=\left[\begin{array}{c} y=a^2+a+3 \\ y+1=a^2+a+4 \end{array}\right]=y\left(y+1\right)-12=$$

$$=y^2+y-12=\left(y+4\right)\left(y-3\right)=\left(a^2+a+7\right)\left(a^2+a\right)=a\left(a+1\right)\left(a^2+a+7\right)$$

Следует отметить, что не всякий многочлен допускает разложение на множители на множестве действительных чисел. Например, многочлены $x+4,\ x^2+6x+10$ разложить на множители нельзя. Такие многочлены называются *неприводимыми*.

Разложение многочлена на множители считается завершённым, если все полученные множители окажутся неприводимыми.

Заметим, что разложение многочлена на неприводимые множители существует и единственно.

12.5. Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов обычно применяется в тех случаях, когда известно, что в результате преобразования данного выражения должно получиться некоторое выражение определенного вида с коэффициентами, подлежащими вычислению. Искомые числовые коэффициенты обозначаются буквами, их рассматривают как неизвестные. В случае многочленов соответственные коэффициенты в каноническом представлении данного и преобразованного выражений должны быть одинаковы. Приравняв эти коэффициенты, получим уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов. Уравнения для нахождения искомых коэффициентов можно получить другим способом, приравняв значения данного и преобразованного выражений при частных значениях аргументов.

Для примера выведем формулу куба трехчлена.

Многочлен $(x+y+z)^3$ можно представить в виде:

$$\left(x+y+z\right)^3=A\left(x^3+y^3+z^3\right)+B\left(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y\right)+Cxyz,$$

где *A, B,C* – искомые числовые коэффициенты.

Очевидно, что коэффициенты перед x^3, y^3, z^3 равны 1, поэтому *A*=1. К тому же результату придем, положив x=1, y=z=0. Положив x=y=1, z=0, получим: 8 = 2*A*+2*B*, откуда *B*=3. Положив x = y = z = l, получим: 27 = 3*A*+6*B*+*C*, откуда *C*= 6.

Следовательно,

$$\left(x+y+z\right)^3=x^3+y^3+z^3+3\left(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y\right)+6xyz.$$

ТЕМА 2. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

§ 1. Понятие индукции. Полная и неполная индукция

Слово *индукция* происходит от латинского «inductio», что означает наведение, а *индуктивными* называют выводы, сделанные на основе наблюдений, опытов, т. е. полученные путем заключения от частного к общему.

Определение 1. *Индукция* – способ логического рассуждения, содержащий переход от частных утверждений к общим, справедливость которых выводится из справедливости частных утверждений.

При доказательстве математических утверждений различают полную и неполную математическую индукцию.

Определение 2. *Полной индукцией* называется метод рассуждений, при котором общий вывод делается на основании разбора всех частных случаев.

Этот способ рассуждений применяется для конечного числа случаев, причем целесообразно его применять для не слишком большого их числа.

Пример 1. Доказать, что каждое четное натуральное число $n\in\left(2;40\right)$ можно представить в виде суммы двух простых чисел.

Действительно,

4=2+2	10=7+3	20=17+3	30=17+13
6=3+3	12=7+5	22=17+5	32=19+13
8=5+3	14=7+7	24=17+7	34=17+17
	16=13+3	26=19+7	36=17+19
	18=13+5	28=17+11	38=19+19

Метод полной индукции часто применяется при доказательстве теорем.

Пример 2. Величина вписанного в окружность угла равна половине величины дуги, на которую он опирается (половине соответствующего центрального угла).

На Рис. 16 представлены три случая расположения вписанного угла по отношению к центру окружности: точка *O* принадлежит стороне вписанного угла, точка *O* лежит внутри вписанного угла, точка *O* лежит вне вписанного угла.

Из школьного курса геометрии известно, что этими тремя случаями исчерпываются все возможные положения центра окружности относительно вписанного угла. Также известно, что сформулированное утверждение справедливо во всех трех случаях.

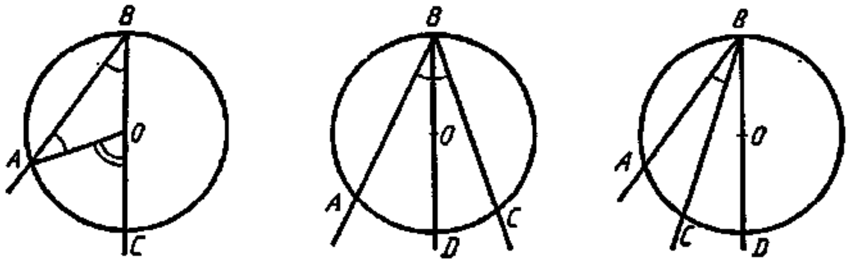


Рис. 16

🕮 Таким образом, метод полной индукции приводит к общему выводу после рассмотрения каждого из конечного числа возможных частных случаев – этот метод надежен.

Определение 3. *Неполной индукцией* называется метод рассуждений, при котором общий вывод делается на основе рассмотрения достаточно большого числа примеров, которые не охватывают всех возможных случаев.

Неполную индукцию нельзя признать методом строгого доказательства теорем, но она приводит к гипотезам, которые нужно подтвердить или опровергнуть с помощью других методов доказательства.

В истории математики известны факты, когда неполные индуктивные рассуждения приводили к неверным выводам. Например, французский математик XVII века *Пьер Ферма*, рассматривая числа $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17, 2^{2^3}+1=257, 2^{2^4}+1=65537$, пришел к выводу, что при любом натуральном значении n число $2^{2^n}+1$является простым. Проверить справедливость этого утверждения при $n = 5$ он не смог, так как не сумел выяснить, имеет ли число $2^{32}+1$ нетривиальные делители. Но *Леонарду Эйлеру* удалось показать, что это число делится на 641.

Известный советский математик *Дмитрий Александрович Граве* (1863-1939) однажды совершил ошибку такого же рода, предположив, что для всех простых чисел p число $2^{p-1}-1$ не делится на p^2, так как непосредственная проверка подтвердила это предположение для всех простых чисел p, меньших тысячи. Однако позже было установлено, что $2^{1092}-1$ делится на 1093, а 1093 – простое число. Тем самым гипотеза Граве оказалась ошибочной.

§ 2. Применение метода математической индукции к доказательству тождеств

Метод математической индукции есть особый метод математического доказательства, позволяющий на основании частных наблюдений делать заключения о соответствующих общих закономерностях.

📖 Термин «*математическая индукция*» появился впервые в 1838 г. в одноименной статье шотландского математика и логика *Огастесаде Моргана* (1806–1871) в Британской энциклопедии.

Метод математической индукции (ММИ) формулируется следующим образом:

Утверждение, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого n, если выполнены два условия:

А) *утверждение справедливо при* $n=1$;

Б) *из справедливости утверждения для* $n=k$ (*при любом натуральном значении* k) *вытекает его справедливость и для* $n=k+1$.

Доказательство методом математической индукции проводится по следующей схеме:

1) сначала проверяется справедливость утверждения при $n=1$. Эту часть доказательства называют *базисом* индукции.

Следующую часть доказательства называют *индуктивным шагом*.

2) делается предположение о справедливости доказываемого утверждения при $n=k$, а затем доказывается, что справедливо и при $n=k+1$. Исходя из последнего, делается вывод о том, что утверждение верно при любом натуральном n.

Следствие. *Если некоторое утверждение справедливо для* $n=p$ *и если из допущения его справедливости для какого-либо* $n=k$, $k \geq p$ *вытекает справедливость его и для* $n=k+1$, *то это утверждение справедливо для всех натуральных чисел, начиная с* p.

Пример 1. Доказать справедливость тождества

$$\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)=\tfrac{1}{n+1}.$$

Решение.

1) Проверим справедливость тождества при $n=1$: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$, $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (верно).

2) Предположим, что тождество справедливо для $n=k$, т.е.

$$\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{1}{k+1}\right)=\tfrac{1}{k+1}.$$

Докажем, что тождество верно и для $n=k+1$, т.е.

$$\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{1}{k+1}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{(k+1)+1}\right)=\tfrac{1}{k+2}.$$

Имеем $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}\Rightarrow$

$$\tfrac{1}{k+1}\cdot\left(1-\tfrac{1}{(k+1)+1}\right)=\tfrac{1}{k+1}\cdot\left(1-\tfrac{1}{k+2}\right)=\tfrac{1}{k+1}\cdot\tfrac{k+2-1}{k+2}=\tfrac{1}{k+1}\cdot\tfrac{k+1}{k+2}=\tfrac{1}{k+2}\Rightarrow$$

тождество верно и для $n=k+1$, а, значит, по ММИ оно верно и при $n\in\boldsymbol{N}$.

Отметим также, что доказать справедливость этого можно иначе, непосредственно вычислив разности во всех скобках, стоящих в левой части, а далее сократив дроби, получить правую часть тождества.

Действительно,

$$\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac{n}{n+1}=\tfrac{1}{n+1}.$$

§ 3. Применение метода математической индукции для доказательства формул суммы членов арифметической и геометрической прогрессий

Методом математической индукции можно доказать справедливость формул для нахождения суммы n членов арифметической и геометрической прогрессий, которые мы приняли в §2 и §3 темы 2 предыдущей главы без доказательства.

Докажем сначала справедливость формулы $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

Пусть имеется арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Докажем, что $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

1) Базис индукции n=2: $a_1+a_2=\frac{a_1+a_2}{2}\cdot 2$ (верно).

2) Предположим, что формула справедлива при n=k, т.е.

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k=\frac{a_1+a_k}{2}\cdot k.$$

Далее докажем, что эта формула справедлива и для n=k+1,т.е.

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1}=\frac{a_1+a_{k+1}}{2}\cdot(k+1).$$

Имеем, $\frac{a_1+a_k}{2}\cdot k+a_{k+1}=\frac{a_1+a_{k+1}}{2}\cdot(k+1)$.

Выразим из последнего соотношения a_{k+1}:

$$a_{k+1}=\frac{a_1+a_{k+1}}{2}\cdot(k+1)-\frac{a_1+a_k}{2}\cdot k=\frac{k\cdot a_1+k\cdot a_{k+1}+a_1+a_{k+1}-k\cdot a_1-k\cdot a_k}{2}=\frac{a_1+a_{k+1}+k\cdot(a_{k+1}-a_k)}{2}=$$

$$=\left[a_{k+1}-a_k=d\right]=\frac{a_1+a_{k+1}+k\cdot d}{2};$$

Откуда видим, что $a_{k+1}=\frac{a_1+a_{k+1}+k\cdot d}{2}\Rightarrow 2a_{k+1}=a_1+a_{k+1}+k\cdot d$.

Значит, $a_{k+1}=a_1+k\cdot d$.

Таким образом, мы получили известную (верную) формулу, что доказывает справедливость формулы $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ и для n=k+1, тогда по ММИ она будет верна для любого $n\in\boldsymbol{N}$.

Докажем теперь справедливость формулы $S_n=b_1\frac{q^n-1}{q-1}$.

Пусть имеется геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$

Докажем, что $b_1+b_2+b_3+...+b_n=b_1\frac{q^n-1}{q-1}$.

1) Базис индукции n=2: $b_1+b_2=b_1\cdot\frac{q^2-1}{q-1}=b_1\cdot\frac{(q-1)\cdot(q+1)}{q-1}=b_1\cdot(q+1)$.
С другой стороны $b_1+b_2=b_1+b_1\cdot q=b_1\cdot(q+1)$ (верно).

2) Предположим, что формула справедлива при n=k, т.е.

$$b_1+b_2+b_3+...+b_k=b_1\cdot\frac{q^k-1}{q-1}.$$

Далее докажем, что эта формула справедлива и для n=k+1,т.е.

$$b_1+b_2+b_3+...+b_k+b_{k+1}=b_1\cdot\frac{q^{k+1}-1}{q-1}.$$

Ясно, что $b_1\cdot\frac{q^k-1}{q-1}+b_{k+1}=b_1\cdot\frac{q^{k+1}-1}{q-1}$.
Выразим из последнего соотношения b_{k+1}:

$$b_{k+1}=b_1\cdot\frac{q^{k+1}-1}{q-1}-b_1\cdot\frac{q^k-1}{q-1}=\frac{b_1}{q-1}\cdot\left[q^{k+1}-1-q^k+1\right]=\frac{b_1\cdot q^k}{q-1}\cdot(q-1)=b_1\cdot q^k.$$

Тем самым получили известную формулу $b_{k+1}=b_1\cdot q^k\Rightarrow$
формула $b_1+b_2+b_3+...+b_n=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$ верна и для n=k+1, тогда по ММИ она будет справедлива для любого $n\in\boldsymbol{N}$.

Пример. Определить сумму n первых нечетных чисел, начиная с единицы.
Решение.

Требуется найти сумму 1+3+5+7+9+…+(2n –1) $=S_n$.

Гипотеза: $1=1^2$;
$1+3=4=2^2$;
$1+3+5=9=3^2$;
$1+3+5+7=16=4^2$;
……………….

$S_n=n^2$.

По доказанной ранее формуле суммы членов арифметической прогрессии будем иметь:

$$1+3+5+7+9+…+(2n-1)=n^2.$$

Докажем её справедливость методом математической индукции:
1) Базис индукции n=1: 1=1 (верно).
2) Предположим, что доказываемая формула верна при n=k, т.е.

$$1+3+5+7+9+…+(2k-1)=k^2.$$

Докажем, что она верна и при n=k+1, т.е.

$$1+3+5+7+9+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Имеем, $k^2+(2k+1)=(k+1)^2$, что представляет собой известную формулу сокращенного умножения.

Значит, сумму n первых нечетных чисел, начиная с единицы, равна n^2.

§ 4. Применение метода математической индукции к решению задач на делимость

Метод математической индукции является эффективным инструментом при решении задач на делимость.

Рассмотрим пример.

Пример. Доказать справедливость утверждения $\left(11^{n+2}+12^{2n+1}\right)\vdots 133$ для любого $n\in \boldsymbol{N}$.

Доказательство.

1) Базис индукции n=1: $11^3+12^3=1331+1728=3059=23\cdot 133$, т.е. $\left(11^3+12^3\right)\vdots 133$.

2) Предположим, что деление нацело возможно при n=k, т.е.

$$\left(11^{k+2}+12^{2k+1}\right)\vdots 133.$$

Докажем теперь, что деление возможно и при n=k+1, т.е.

$$\left(11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1}\right)\vdots 133.$$

Имеем,

$$11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1}=11^{k+3}+12^{2k+3}=11\cdot 11^{k+2}+144\cdot 12^{2k+1}=$$

$$=\underbrace{11^{k+2}+12^{2k+1}}_{\vdots 133}+10\cdot 11^{k+2}+10\cdot 12^{2k+1}+\underbrace{133\cdot 12^{2k+1}}_{\vdots 133}=$$

$$=\underbrace{11^{k+2}+12^{2k+1}}_{\vdots 133}+10\cdot\underbrace{\left(11^{k+2}+12^{2k+1}\right)}_{\vdots 133}+\underbrace{133\cdot 12^{2k+1}}_{\vdots 133}.$$

Так как каждое слагаемое последней суммы кратно числу 133, то это означает, что $\left(11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1}\right)\vdots 133$. Тем самым, по ММИ следует, что утверждение справедливо при любом $n\in \boldsymbol{N}$.

§ 5. Доказательство неравенств с помощью метода математической индукции

Метод математической индукции часто используется при доказательстве неравенств.

Докажем, например, что если $0<a<b$, то для любого натурального значения n истинно неравенство $a^n<b^n$.

1) При n=1 справедливость доказываемого неравенства непосредственно вытекает из данного условия.

2) Пусть верно $a^k < b^k$. Так как a и b – положительные числа, то можно умножить обе части последнего неравенства на соответствующие части неравенства $a < b$, которое истинно по условию, и получить требуемое неравенство $a^{k+1} < b^{k+1}$. После этого заключаем по ММИ, что неравенство $a^n < b^n$ справедливо для всех $n \in \boldsymbol{N}$.

Докажем ещё одно неравенство, которое известно как *неравенство Бернулли*:

Если $x > -1$, то для всех натуральных значений n истинно неравенство

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x (*)$$

Действительно,

1) при n=1 имеем истинное неравенство $1+x \geq 1+x$.

2) Пусть $(1+x)^k \geq 1+k \cdot x$. Так как по условию $1+x > 0$, то это неравенство не изменит смысла при умножении обеих его частей на $1+x$. Получаем $(1+x)^{k+1} \geq (1+x)^k \cdot (1+x)$, или $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1) \cdot x + k \cdot x^2$.

Так как $k \cdot x^2 > 0$, то отсюда вытекает: $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1) \cdot x$, откуда в силу ММИ заключаем, что неравенство (*) истинно для всех $n \in \boldsymbol{N}$.

Пример. Установить область истинности неравенства $2^n > n^2$ для $n \in \boldsymbol{N}$.

Решение. Проверим истинность неравенства при

n=1:	2>1	(истина)
n=2:	4>4	(ложь)
n=3:	8>9	(ложь)
n=4:	16>16	(ложь)
n=5:	32>25	(истина)

1) База индукции: n=5: 32>25 (верно).

2) Предположим, что верно неравенство $2^k > k^2$, где $k \geq 5$.

Шаг индукции: требуется доказать, что $2^{k+1} > (k+1)^2$ или $2^{k+1} > k^2 + 2k + 1$

Умножим обе части неравенства $2^k > k^2$ на 2, получим неравенство $2^{k+1} > 2k^2$.

Сравним выражения $2k^2$ и $k^2 + 2k + 1$. Для этого оценим разность $2k^2 - (k^2 + 2k + 1) = k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k + 1 - 2 = (k-1)^2 - 2$.

Ясно, что при $k \geq 5$ последнее выражение удовлетворяет неравенству $(k-1)^2 - 2 > 0$.

Тогда имеем цепочку верных неравенств: $2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$.

Откуда по свойству транзитивности следует, что $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Это означает, что по ММИ неравенство $2^n > n^2$ справедливо для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

Итак, $n \in \{1\} \cup \{n \geq 5\}$.

ТЕМА 3. СТЕПЕНИ

§ 1. Степень числа с натуральным и целым показателем

Пусть a – произвольное действительное число, n – натуральное число, т.е. $a \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N}$.

Определение 1. Произведение $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-раз}$ содержащее n сомножителей, равных a, называется *n-ой степенью числа a* и обозначается a^n. При этом a называют *основанием степени, n– показателем степени.*

При n=1 для любого действительного числа a имеем $a^1 = a$.

🕮Нулевая степень вводится только для действительных чисел, отличных от нуля, при этом для $a \neq 0$ полагают $a^0 = 1$. Число 0^0 не определено, эта операция запрещена к выполнению.

Рассмотрим свойства степеней:

① Для любых $m, n \in \boldsymbol{N}$: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Действительно, $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-раз} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-раз} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m-раз} = a^{n+m}$.

Таким образом, при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются.

② Для любых $m, n \in \boldsymbol{N}$: $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Действительно, $a^n = a^{m+(n-m)} = a^m \cdot a^{n-m} \,|\!:\, a^m$.

Получаем $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Таким образом, при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются.

③ Для любых $m, n \in \boldsymbol{N}$: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$.

Действительно, $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n-раз} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n-раз}} = a^{m \cdot n}$.

Таким образом, при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются.

④ Для любых $a, b \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N}: a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

⑤Для любых $a, b \neq 0 \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N}: \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Определим теперь степень с целым отрицательным показателем. Она, как и нулевая степень, вводится для действительных чисел, не равных нулю. Пусть n – произвольное натуральное число.

Определение 2. *Степенью* действительного числа $a,\ a \neq 0$ *с целым отрицательным показателем* $(-n)$ называют число, обратное степени с натуральным показателем n: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Замечание. Целая отрицательная степень числа нуль, т.е. 0^{-n}, не определена.

§ 2. Степень числа с рациональным показателем. Арифметический корень. Свойства корней

Определение 1. Если $n > 1,\ n \in \boldsymbol{N}$, а числа $a, b \in \boldsymbol{R}$, причем $b^n = a$, то число b называется *корнем n-ой степени из числа a*.

Обозначение: $b = \sqrt[n]{a}$.

Например, квадратный корень из 9 равен 3, так как $3^2 = 9$.

Знак $\sqrt[n]{}$ называют знаком корня n-ой степени или *радикалом*.

🕮 Число или выражение a, которое стоит под радикалом, называется *подкоренным числом* или *подкоренным выражением*.

Замечание. Знак радикала впервые появился в работах немецких алгебраистов в XV в. В 1525 г. математик *Христоф Рудольф фон Яуэр* издал первое сочинение по алгебре на немецком языке. Знак корня он применял в форме $\surd$. Горизонтальную черту над выражением, стоящим под знаком радикала, добавил французский ученый *Рене Декарт* (1637 г.), а показатель корня над радикалом первым использовал нидерландский математик *Альбер Жирар* (1629 г.).

1^0. Если n – нечетное число, то для любого $a \in \boldsymbol{R}$ существует единственное значение корня n-ой степени.

2^0. Если n – четное число, то для любого $a \in \boldsymbol{R}_+$ существуют два равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку значения.

Определение 2. Положительный корень четной степени из положительного числа называется *арифметическим корнем*.

Определение 3. Возвести число $a \in \boldsymbol{R}_+$ в степень $\frac{m}{n}$, означает извлечь корень n-ой степени из m-ой степени числа a.

Пишут: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Рассмотрим свойства радикалов:

①*Величина радикала не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножить на одно и то же число*, т. е.

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

Непосредственно из этого свойства получаем следствия:

Следствие 1. *Радикалы разных степеней можно привести к одинаковым показателям.*

При этом используют следующий *алгоритм*:

А) найти НОК показателей всех радикалов;

Б) умножить показатель каждого из них на соответствующий дополнительный множитель;

В) возвести вместе с тем каждое подкоренное выражение в надлежащую степень.

Пример 1. Привести к общему показателю радикалы $\sqrt{ax}$ и $\sqrt[3]{a^2}$.

Решение. Наименьшее общее кратное показателей радикалов 6; дополнительные множители будут: для первого радикала 3, для второго 2. Тогда:

$$\sqrt{ax}=\sqrt[6]{(ax)^3}=\sqrt[6]{a^3x^3}\ ;\ \sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{\left(a^2\right)^2}=\sqrt[6]{a^4}.$$

Следствие 2. *Если подкоренное выражение есть степень, показатель которой имеет общий множитель с показателем радикала, то на этот множитель можно разделить оба показателя*, т. е.

$$\sqrt[mn]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^p}.$$

<u>*Замечание*</u>. Это следствие требует дополнительного условия, которое состоит в том, что $\sqrt[n]{a^p}$ должен существовать, так как без этого формула может дать неверный результат.

Например, вместо радикала $\sqrt[8]{(-2)^6}$ нельзя писать $\sqrt[4]{(-2)^3}$, так как последний радикал в области действительных чисел не имеет смысла.

Всегда верно следующее равенство:

$$\sqrt[mn]{\left|a^{mp}\right|}=\sqrt[n]{\left|a^p\right|}.$$

Следствие 3. *Если подкоренное выражение есть произведение нескольких степеней, показатели которых имеют один и тот же общий множитель с показателем радикала, то на этот множитель можно разделить все показатели.*

Пример 2. Сократите показатели корня и подкоренного выражения для радикала $\sqrt[6]{8x^3y^3}$.

Решение. $\sqrt[6]{8x^3y^3}=\sqrt[6]{2^3x^3y^3}=\sqrt{2xy}$.

②*Корень из произведения нескольких чисел равен произведению корней той же степени из каждого числа, если корень из каждого числа существует,* т. е.

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

③*Чтобы извлечь корень из дроби, надо извлечь его из числителя и знаменателя, если эти корни существуют, и первый результат разделить на второй*, т. е.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b\neq 0.$$

④*Чтобы извлечь корень из степени, показатель которой делится на показатель корня, нужно разделить показатель степени на показатель корня,* т. е.

$$\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m.$$

Замечание. При a отрицательном*,* n четноми m нечетном приведенное выше равенство неверно. Однако всегда справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{\left|a^{mn}\right|}=\left|a^m\right|.$$

⑤*Для извлечения корня из радикала достаточно перемножить показатели радикалов, сохранив подкоренное выражение неизменным*, т.е.

$$\sqrt[l]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[lm]{a}.$$

⑥*Для возведения радикала в степень достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение*, т.е.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}.$$

§ 3. Вынесение множителя из-под знака квадратного корня и внесение его под знак корня

1. Вынесение множителей за знак радикала.

Если подкоренное выражение разлагается на такие множители, что из некоторых можно извлечь точный корень, то такие множители, при извлечении из них корня, могут быть написаны перед знаком радикала (т. е. могут быть вынесены за знак корня).

Это выполняется по формуле:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n\cdot b}=a\cdot\sqrt[n]{b},\quad a>0} \qquad (3.3.1)$$

Примеры: а) $\sqrt[3]{a^6\cdot b}=a^2\cdot\sqrt[3]{b}$;

б) $\sqrt{500}=\sqrt{100\cdot 5}=10\sqrt{5}$.

Замечание. При отрицательном a и четном n формула (3.3.1) неверна, но при любых значениях a, b и n справедлива формула:

$$\boxed{\sqrt[n]{\left|a^n\cdot b\right|}=|a|\cdot\sqrt[n]{|b|}} \qquad (3.3.2)$$

Пример 2. Вынести множители за знак радикала $\sqrt{\dfrac{3\left(x^2+2xy+y^2\right)}{16\left(x^2-2xy+y^2\right)}}$, учитывая допустимые значения букв или ограничения в нем.

Решение.

$$\sqrt{\frac{3\left(x^2+2xy+y^2\right)}{16\left(x^2-2xy+y^2\right)}}=\frac{|x+y|}{4|x-y|}\cdot\sqrt{3}.$$

2. Внесение множителей под знак радикала.

Для внесения под знак корня множителей, стоящих перед ним, достаточно возвести эти множители в степень, показатель которой равен показателю корня, а затем написать эти степени под знаком корня.

Это выполняется по формуле:

$$\boxed{a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b},\quad a>0} \tag{3.3.3}$$

Пример 3. Внести x под знак радикала

$$x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt[3]{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt[3]{x^3+x}.$$

§ 4. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Определение 1. Выражение, которое содержит один или несколько знаков радикала, называется *иррациональным выражением*.

Для того чтобы привести радикал к более простому виду (*нормальному виду*), надо выполнить последовательно такие операции:

1) упростить подкоренное выражение (если это возможно);
2) сократить показатели корня и подкоренного выражения (если они имеют общий множитель);
3) вынести из-под радикала рациональные множители;
4) освободить подкоренное выражение от дроби.

Определение 2. Два или несколько радикалов называются *подобными*, если они одинаковой степени и имеют одинаковые подкоренные выражения.

Например, $a\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot c}$ и $7b\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot c}$ – подобные радикалы, так как они оба третьей степени и имеют одинаковые подкоренные выражения x^2c.

Иногда радикалы оказываются подобными только после некоторых преобразований.

Пример 1. Радикалы $\sqrt{18}, \sqrt{32}, \sqrt{128}$ являются подобными, так как $\sqrt{18}=3\sqrt{2}, \sqrt{32}=4\sqrt{2}, \sqrt{128}=8\sqrt{2}$.

① *Чтобы сложить (или вычесть) радикалы, их соединяют знаками плюс (или минус) и приводят подобные члены, если они окажутся.*

Пример 2. Упростите выражение $\left(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y}\right)-\left(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x}\right)$.

Решение.

$\left(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y}\right)-\left(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x}\right)=3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{y}-3\sqrt[3]{y}+4\sqrt{x}=7\sqrt{x}-5\sqrt[3]{y}$.

② *Чтобы перемножить несколько радикалов одинаковой степени, надо перемножить подкоренные выражения и из произведения извлечь корень той же степени. Если перемножаются радикалы с различными показателями, то их надо предварительно привести к одному показателю. Если перед радикалами имеются коэффициенты, то их перемножают.*

Пример 3. Выполните умножение выражений $5\sqrt[4]{2a}$ и $2\sqrt[4]{8a^3}$.

Решение. $5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^3}=10\sqrt[4]{16a^4}=10\cdot 2a=20a$.

③ *Чтобы разделить радикалы с одинаковыми показателями, надо разделить их подкоренные выражения и из частного извлечь корень той же степени. Чтобы разделить радикалы с различными показателями, их надо привести предварительно к одинаковым показателям. Если есть коэффициенты, то их делят.*

Пример 4. Выполнить деление $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}$.

Решение. $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}=\sqrt[3]{\dfrac{6a^4}{2a}}=\sqrt[3]{3a^3}=a\cdot\sqrt[3]{3}$.

При упрощении иррациональных выражений часто приходится работать с радикалами, содержащими двучлены вида $A\pm\sqrt{B}$.

В таких случаях можно пользоваться *формулой сложного радикала*:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

где $A>0, B>0, A^2>B$, а знаки в правой и левой частях одновременно берутся либо «+», либо «–» (соответственно).

Пример 5.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

<u>*Замечание*</u>. Существует альтернативный способ решения этой задачи. Нужно постараться выделить полный квадрат под знаком радикала.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 1\cdot\sqrt{3}+1^2}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Еще одной важной задачей при упрощении иррациональных выражений является задача, связанная с освобождением от иррациональности, содержащейся в знаменателе дроби.

Определение 3. Замена дроби, у которой знаменатель (числитель) – иррациональное выражение, тождественной ей дробью с рациональным знаменателем (числителем) называется *избавлением от иррациональности* в знаменателе (числителе) дроби.

Рассмотрим основные приемы избавления от иррациональностей в знаменателях (уничтожение иррациональностей в числителях дробей выполняется аналогично):

А) Дробь вида $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}, n > k$. В этом случае умножают числитель и знаменатель на такой множитель, чтобы в знаменателе корень извлекался бы нацело, т.е. на $\sqrt[n]{b^{n-k}}$.

Пример 6. $\frac{5}{\sqrt[4]{125}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[4]{5}} = \frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{5} = \sqrt[4]{5}$.

Б) Дробь вида $\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$. В этом случае числитель и знаменатель умножают на сопряженное выражение $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$.

Определение 4. *Сопряженным* множителем относительно иррационального выражения *M* называется всякое выражение *B*, неравное тождественно нулю, такое, что произведение *M·B* не содержит радикалов.

Например, выражения $1-\sqrt{x}$ и $1+\sqrt{x}$, $x \geq 0$ являются сопряженными, так как $\left(1-\sqrt{x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right) = 1-x$.

В) Дробь вида $\frac{\alpha}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$. В этом случае числитель и знаменатель дроби умножают на неполный квадрат разности или суммы, т.е. на $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$

§ 5. Логарифмы и их свойства

Пусть дано равенство $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Определение 1. *Логарифмом числа* b ($b > 0$) *по основанию* a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Обозначение: $log_a b$.

Непосредственно из определения видно, что $x = log_a b$. Если $x = log_a b$ подставить в равенство $a^x = b$, то получим тождество:

$$\boxed{a^{log_a b} = b} \tag{3.5.1}$$

Формулу (3.5.1) называют *основным логарифмическим тождеством*.

📖 Логарифм числа b по основанию 10 называется *десятичным логарифмом* и обозначается $\lg b$.

📖 Логарифм по основанию $e(e = 2{,}71828\ldots)$ называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln b$.

Далее рассмотрим свойства логарифмов. Если $a, b, c > 0, a \neq 1$, тогда:

1^0) *Логарифм единицы по любому допустимому основанию равен нулю*, т.е.

$$\boxed{log_a 1 = 0} \tag{3.5.2}$$

Обратно: если логарифм равен нулю, то число логарифма по любому допустимому основанию равно единице.

2^0) *Если число и основание логарифма равны между собой, то логарифм равен единице*, т.е.

$$\boxed{log_a a = 1} \tag{3.5.3}$$

Действительно, по определению $a^1 = a \Rightarrow log_a a = 1, x = 1.$

Обратно: *если логарифм равен единице, то число и основание логарифма равны между собой*.

Для обратного утверждения: пусть $log_a b = 1$. По основному логарифмическому тождеству будем иметь: $b = a^{log_a b} = a^1 = a \Rightarrow b = a.$

3^0) *Логарифм произведения двух (или нескольких) положительных чисел по данному основанию равен сумме логарифмов по тому же основанию*, т.е.

$$\boxed{log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c} \tag{3.5.4}$$

Доказательство: ограничимся рассмотрением случая двух множителей.

Имеем:

$a^{log_a bc} = b \cdot c \Rightarrow a^{log_a bc} = a^{log_a b} \cdot a^{log_a c} = a^{log_a b + log_a c}$. Так как левая и правая части последнего равенства имеют одинаковое основание, то, очевидно, $log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$.

<u>*Замечание 1*</u>. Если $b; c < 0$, то

$$\boxed{log_a(b \cdot c) = log_a |b| + log_a |c|} \tag{3.5.4*}$$

4^0) *Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, взятых по тому же основанию*, т.е.

$$\boxed{log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c} \tag{3.5.5}$$

Доказательство:

$$a^{log_a \frac{b}{c}} = \frac{b}{c} = \frac{a^{log_a b}}{a^{log_a c}} = a^{log_a b - log_a c} \Rightarrow log_a \frac{b}{c} = log_a b - log_a c.$$

<u>*Замечание 2*</u>. Если $b; c < 0$, то

$$\boxed{log_a\left(\frac{b}{c}\right)=log_a|b|-log_{\ a}|c|} \qquad (3.5.5^*)$$

5^0) *Логарифм степени какого-либо положительного числа равен логарифму этого числа, умноженному на показатель степени*, т.е.

$$\boxed{log_a b^k = k\cdot log_a b, k\in\mathbf{R}} \qquad (3.5.6)$$

Доказательство:

$a^{log_a b^k}=b^k=\left(a^{log_a b}\right)^k=a^{k\cdot log_a b}\Rightarrow log_a b^k=k\cdot log_a b$.

Следствие. *Логарифм корня, извлекаемого из положительного числа, равен логарифму подкоренного выражения, деленного на показатель корня*, т.е.

$$\boxed{log_a\sqrt[n]{b}=\frac{log_a b}{n}} \qquad (3.5.7)$$

6^0) *При возведении в некоторую (ненулевую) степень основания логарифма, сам логарифм делится на показатель этой степени*, т.е.

$$\boxed{\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b,\ m\in\mathbf{R}, m\neq 0} \qquad (3.5.8)$$

Доказательство:

С одной стороны $b=\left(a^m\right)^{log_{a^m} b}=a^{m\cdot log_{a^m} b}$, а с другой $b=a^{log_a b}$.

Приравнивая правые части этих равенств, получим:

$a^{m\cdot log_{a^m} b}=a^{log_a b}$. Тогда $m\cdot log_{a^m} b=log_a b$. Разделим обе части последнего равенства на m. Имеем: $log_{a^m} b=\frac{1}{m}log_a b$.

7^0) *При возведении основания и числа логарифма в одну и ту же (ненулевую) степень k сам логарифм не изменится*, т.е.

$$\boxed{\log_a b=\log_{a^k} b^k,\ k\in\mathbf{R}, k\neq 0} \qquad (3.5.9)$$

8^0) Если $a;b>0, a\neq 1, b\neq 1$, то

$$\boxed{log_a b\cdot log_b a=1} \qquad (3.5.10)$$

Доказательство:

Прологарифмируем обе части основного логарифмического тождества $a^{log_a b}=b$ по основанию b.

Получим: $log_b a^{log_a b}=log_b b$. Применим теперь 5^0.

Будем иметь: $log_a b\cdot log_b a=1$.

Следствие. Справедлива формула

$$\boxed{\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ b\neq 1;} \qquad (3.5.11)$$

9^0) Имеет место формула перехода к новому основанию

$$\boxed{log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}, c \neq 1} \qquad (3.5.12)$$

10^0) $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$;

11^0) $log_a b = log_a c \Leftrightarrow b = c$;

12^0) $\log_a b > \log_a c$, где $a > 1$, тогда и только тогда, когда $b > c$;

13^0) $\log_a b > \log_a c$, где $0 < a < 1$, тогда и только тогда, когда $b < c$.

14^0) *Если число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, то логарифм положителен, если же число и основание логарифма лежат по разные стороны от единицы, то логарифм отрицателен*, т.е.

① Если $a > 1, b > 1$, то $log_a b > 0$.

② Если $a < 1, b < 1$, то $log_a b > 0$.

③ Если $a < 1, b > 1$, то $log_a b < 0$.

④ Если $a > 1, b < 1$, то $log_a b < 0$.

Некоторые из представленных свойств могут быть обобщены.

Если $a > 0, a \neq 1$ и $f(x), g(x)$ – выражения с переменной, то:

3^*) $\log_a(f(x) \cdot g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|$, где $f(x) \cdot g(x) > 0$;

4^*) $\log_a\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|$, где $f(x) \cdot g(x) > 0$;

5^*) $\log_a\left(f(x)\right)^{2n} = 2n \cdot \log_a|f(x)|$, где $f(x) \neq 0$;

6^*) $\log_{(f(x))^{2n}} b = \dfrac{1}{2n} \cdot \log_{|f(x)|} b$, где $\begin{cases} f(x) \neq 0, \\ f(x) \neq \pm 1, n \in \mathbf{N}. \end{cases}$

Замечание 3. Следует различать произведение логарифмов $\log_a b \cdot \log_c d$ и повторный логарифм $\log_a \log_c d = \log_a(\log_c d)$, $c \neq 1$.

Замечание 4. Степень логарифма может быть записана двумя способами: $(\log_a b)^k$ или $\log_a^k b$.

ГЛАВА III. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 1. Конечные множества. Комбинаторные задачи в конечных множествах

На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов его подмножества, располагать элементы каких-то множеств в том или ином порядке.

Например, выбор троих делегатов от студенческой группы для участия в конференции; составление подарочного набора из нескольких компонентов, если известно количество каждого вида компонентов и т.д.

Комбинаторика – это область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Это раздел математики, в котором изучаются комбинаторные задачи.

Комбинаторные задачи – это задачи, связанные с выбором из конечного множества элементов и расположением их в том или ином порядке.

🕮 Первые работы по комбинаторике датируются 16 веком. Д. Кардано, Г. Галилей, Б. Паскаль, П. Ферма тоже изучали эти вопросы. Ряд комбинаторных задач был рассмотрен Л. Эйлером. Например, *задача о Кёнигсбергских мостах.*

🕮 *В городе Кёнигсберге (ныне Калининграде) было 7 мостов через реку Прегель. Их расположение показано на Рис. 17. Здесь B – левый берег, C – правый, A и D – острова. Можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через каждый мост ровно по одному разу?*

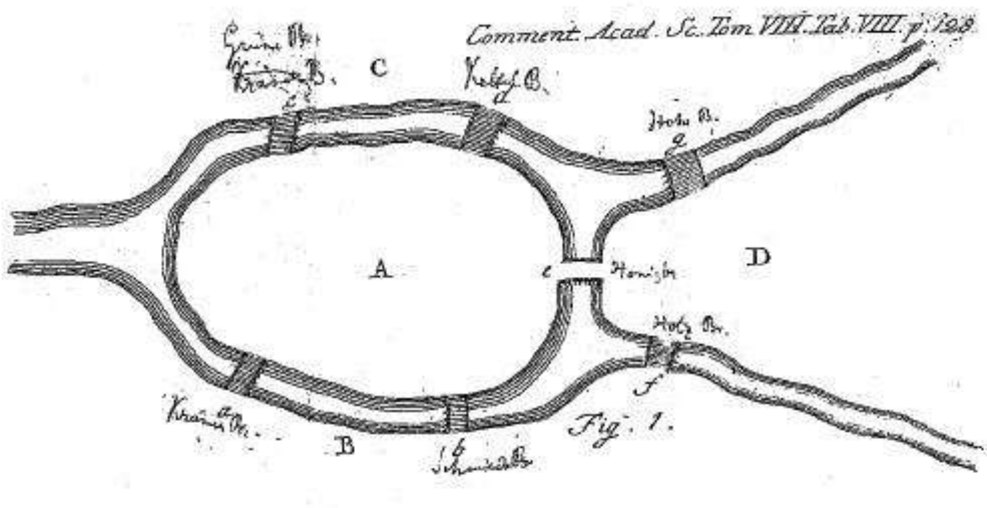


Рис. 17

Эта задача связана с другими головоломками, суть которых в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаш от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, то есть, «нарисовать одним росчерком». Такие контуры образуют так называемые уникурсальные графы. Этой задаче Л. Эйлер посвятил целое исследование, которое в 1736 году было представлено в Петербургскую Академию наук.

Комбинаторика становится наукой лишь в 17 веке, в период, когда возникла теория вероятностей. Чтобы решать теоретико-вероятностные задачи, нужно было уметь подсчитывать число различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям.

Термин «комбинаторика» впервые появился в 1666 году в книге Лейбница «рассуждения о комбинаторном искусстве».

По сути дела в комбинаторике изучают конечные множества, их подмножества, отображения, а также кортежи, составленные из элементов конечных множеств. Поэтому комбинаторику можно рассматривать как часть теории конечных множеств.

§2. Правила суммы и произведения. Число элементов в объединении двух множеств

Комбинаторные задачи бывают самых разных видов, но большинство задач решается с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения. Первое позволяет найти число элементов в объединении двух конечных множеств, а второе – число элементов их декартова произведения.

Правило суммы. *Пусть множество X содержит* m *элементов, а У – n элементов. Если множества X и У не пересекаются, то множество* $X \cup Y$ *содержит* $m+n$ *элементов, то есть,* $X \cap Y = \varnothing, \Rightarrow$

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) = m + n.$$

Данное правило подсчёта числа элементов объединения непересекающихся конечных множеств часто формулируют иначе: Если элемент *x* можно выбрать *m* способами, а элемент *y* – *n* способами, причём ни один из способов выбора элемента *x* не совпадает со способом выбора элемента *y*, то выбор «*x* или *y*» можно осуществить $m+n$ способами.

В случае, когда $X \cap Y \neq \varnothing$, сформулированное выше правило утрачивает силу. В этом случае число элементов объединения двух множеств равно сумме чисел элементов в каждом из них, минус число элементов в пересечении этих множеств, то есть, $X \cap Y \neq \varnothing, \Rightarrow$

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y).$$

Правило произведения. *Число упорядоченных пар, которые можно составить из* m *элементов множества X и n – множества У, равно* $m \cdot n$, *то есть,*

$$n(X \times Y) = n(X) \cdot n(Y) = mn.$$

Данное правило подсчёта числа элементов декартова произведения конечных множеств часто формулируют иначе: Если элемент *x* можно выбрать mспособами, а элемент y – n способами, то выбор «x и y» (или выбор пары $(x;y)$) можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Пример. В букинистическом магазине лежат шесть экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», три экземпляра его же романа «Дворянское гнездо»и четыре экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть пять томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», семь томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети», три тома, содержащих романы «Рудин» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

Решение. Указанная покупка может быть совершена одним из следующих способов. 1) три отдельных тома с перечисленными романами (назовём её покупкой первого вида) , 2) отдельный том романа «Отцы и дети» и том, содержащий одновременно два романа «Рудин» и «Дворянское гнездо» (покупка второго вида), 3) отдельный том романа «Рудин» и том, содержащий одновременно два романа «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети» (покупка третьего вида), 4) отдельный том романа «Дворянское гнездо» и том, содержащий одновременно два романа «Рудин» и «Отцы и дети» (покупка четвёртого вида). Или первым, или вторым, или третьим, или четвёртым. Союз «или», применяемый при перечислении способов, говорит о том, что необходимо использовать правило суммы при подсчёте итогового количества способов. Союз «и», который мы применяли при пояснении каждого из четырёх способов, указывает на использование правила произведения при подсчёте возможных случаев для каждого из них. Таким образом, покупку первого вида можно совершить $6 \cdot 3 \cdot 4 = 72$ способами, второго вида –$4 \cdot 5 = 20$ способами, третьего вида –$6 \cdot 7 = 42$ способами, четвёртого –$3 \cdot 3 = 9$ способами. Значит, покупку, о которой говорится в требовании задачи, можно совершить $72 + 20 + 42 + 9 = 143$ способами.

§ 3. Принцип включений и исключений

Для подсчёта количества элементов множества, не обладающих ни одним из заданных свойств, пользуются так называемым *правилом (принципом) включений и исключений*.

Словесная формулировка принципа: *чтобы подсчитать размер объединения нескольких множеств, которые в общем случае могут пересекаться друг с другом, надо просуммировать размеры этих множеств по отдельности, затем вычесть размеры всех попарных пересечений этих множеств, прибавить размеры пересечений всевозможных троек множеств, вычесть размеры пересечений четвёрок и так далее вплоть до пересечения всех множеств.*

Пусть имеется N предметов, некоторые из которых обладают свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. При этом каждый элемент (предмет) может либо не обладать ни одним из этих свойств, либо обладать одним или несколькими свойствами. Обозначим через $N(\alpha_i,\alpha_j,...,\alpha_k)$ количество предметов, обладающих свойствами α_i, α_j,…, α_k (и, ещё, быть может, некоторыми из других свойств).

Если надо подчеркнуть, что берутся лишь предметы, не обладающие некоторым свойством, то это свойство пишем со штрихом. Например, через $N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4')$ обозначается количество предметов, обладающих свойствами α_1 и α_2, но не обладающих свойством α_4 (вопрос об остальных свойствах остаётся открытым). Число предметов, не обладающих ни одним из указанных свойств, обозначается по этому правилу через $N(\alpha_1',\alpha_2',...,\alpha_n')$.

Общий принцип состоит в том, что (он сформулирован выше словесно):

$$N(\alpha_1',\alpha_2',...,\alpha_n')=N-N(\alpha_1)-N(\alpha_2)-...-N(\alpha_n)+N(\alpha_1,\alpha_2)=$$
$$=N(\alpha_1,\alpha_3)+..+N(\alpha_{n-1},\alpha_n)-N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)-N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)-$$
$$-...-N(\alpha_{n-2},\alpha_{n-1},\alpha_n)+...+(-1)^n N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$ *формула включений и исключений.*

Общее правило: алгебраическая сумма распространяется на все комбинации свойств α_1, α_2,…, α_n (без учёта их порядка), причём знак «+» ставится, если число учитываемых свойств чётно, и знак «–» – если это число нечётно.

Пример. В отделе НИИ работает несколько человек, причём каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Шестеро знают английский, шестеро – немецкий, семеро – французский, четверо – английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек, работающих в отделе, знают только английский язык?

Решение: Для ответа на вопрос задачи отберём нужные нам данные. «Шестеро знают английский» – эта фраза не говорит о том, что они знают только английский. Они могут знать хотя бы один из оставшихся языков. Поэтому область данных «сужается» и эти шестеро сейчас играют роль N – общего количества в формуле включений и исключений. Тогда выделяем два свойства – α_1 – знать, кроме английского языка и немецкий, α_2 – при тех же условиях знать французский. Тогда $N(\alpha_1)=4$, $N(\alpha_2)=2$, $N(\alpha_1, \alpha_2)=1$, $N(\alpha_1^I,\alpha_2^I)=6–4–2+1=1$.

§ 4. Упорядоченные выборки. Соединения. Сочетания, размещения, перестановки с повторениями и без

Определение 1. Различные группы, составленные из каких-либо элементов и отличающиеся одна от другой или самими элементами, или порядком расположения элементов, называются *соединениями***.**

Определение 2. Всевозможные *упорядоченные* множества, составленные из данных неповторяющихся *n* элементов, называются *перестановками без повторений.*

Обозначение: P_n.

Формула для подсчёта:

$$\boxed{P_n = n!} \tag{3.4.1}$$

🕮 Название «перестановка» (*permutation*) впервые употребил бельгийский математик *Андре Таке* (1612–1660) – преподаватель иезуитских колледжей в Лувене и Антверпене. Этот термин появился в его книге «Теория и практика арифметики» (1656), а закрепился в научном обороте благодаря тому, что его стал использовать Я. Бернулли.

Пример 1. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 4, 6, 7, 8, если каждую из них можно использовать лишь один раз?

Решение. Порядок важен, каждое разрядное место может быть занято одной цифрой, как и одна и та же цифра не может занимать два из пяти разрядов. Значит, повторений нет и общее количество P_5=5!=120. Заметим, что ответ на вопрос задачи можно получить и другим способом – используя правило произведения. Число пятизначное – значит, у него пять разрядов – единиц, десятков, сотен, тысяч, десятков тысяч. Тогда цифра десятков тысяч (старшая) может быть выбрана пятью способами (на её месте может быть любая из цифр – 1, 4, 6, 7, 8). Цифра тысяч – четырьмя способами (так как цифры не могут повторяться, то есть, на её месте могут быть оставшиеся четыре цифры, кроме уже выбранной). Цифра сотен – тремя, десятков – двумя и, наконец, цифра единиц – одним способом. А так как для образования пятизначного числа нужны цифры всех разрядов – и десятков тысяч, и тысяч, и т.д., то общее количество пятизначных чисел: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способами.

Определение 3. *Размещениями без повторений* из n элементов по m элементов называются всевозможные *упорядоченные* подмножества, содержащие m неповторяющихся элементов из данных n элементов.

Обозначение: A_n^m.

Формула для подсчёта:

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}} \tag{3.4.2}$$

Заметим, что перестановки из n элементов – есть размещения из n элементов по n элементов: $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$.

🕮 Слово «*размещение*» встречается у Я. Бернулли, который истолковывал его как «сочетание вместе с перестановками». Обозначение размещения через A_n^m (от «*arrangement*» – размещение) появилось впервые в 1904 г. в статье немецкого математика *Эугена Отто Эрвина Нетто* (1846–1919).

Пример 2. Десять спортсменов разыгрывают одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами медали могут быть распределены между студентами?

Решение. Так как в условии задачи специально оговорено, что медали разного достоинства, то конкретному спортсмену важно, какую медаль он получит. Кроме того, не все спортсмены получат какую-либо медаль. Поэтому речь идёт о размещениях без повторений (два спортсмена не могут «поделить» медаль, как и две медали разного достоинства не могут быть отданы одному и тому же спортсмену). Значит количество способов

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720.$$

Не всегда нас интересует порядок, в котором располагаются элементы. В тех случаях, когда нас не интересует порядок элементов в комбинации, а интересует лишь её состав, говорят о сочетаниях.

Определение 4. *Сочетаниями без повторений* из n элементов по m элементов называются всевозможные подмножества, содержащие m неповторяющихся элементов из данных n элементов.

Обозначение: C_n^m.

Формула для подсчёта:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}} \qquad (3.4.3)$$

📖Термин «*сочетание*» (*combination*) появился у французского математика *Блеза Паскаля* в 1653 г., а в публикациях он употребил его лишь в 1665 г. в «Трактате об арифметическом треугольнике». Обозначение C_n^m по первой букве латинского названия введено британским математиком *Робертом Поттсом* (1805–1885) в 1880 г. Второе принятое сейчас обозначение $\binom{m}{n}$ введено Леонардом Эйлером в 1778 г.

Пример 3. Сколькими способами из десяти спортсменов можно отобрать команду, состоящую из 6 человек?

Решение. В условии задачи не сказано, какие функции будут выполнять отобранные спортсмены, т. е., чем они друг от друга будут отличаться в составе отобранной команды. Поэтому порядок, в котором спортсмены будут отбираться в команду, неважен. Кроме того, один и тот же спортсмен не может дважды войти в состав команды, как и два спортсмена не могут претендовать на одно и то же место в команде. Значит, речь идёт о сочетаниях без повторений и количество способов

$$C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = 210.$$

Свойства сочетаний:

1. $C_n^n = C_n^0 = 1$.
2. $C_n^m = C_n^{n-m}$ $(m > \frac{n}{2})$.
3. $C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$.
4. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.
5. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

При решении комбинаторных задач полезно использовать следующий алгоритм:

обратите внимание на *порядок* расположения элементов

если он *не имеет значения*, то в задаче речь идёт о *сочетаниях*, т.е. C_n^m.

если порядок *имеет значение,* то это либо *перестановки*, либо *размещения*

если *все* элементы входят в соединение, то в задаче речь идёт о *перестановках*, т.е. P_n.

если *не все* элементы входят в соединение, то в задаче речь идёт о *размещениях,* т.е. A_n^m.

Схема 4

Замечание: для больших значений n соответствующий факториал $n!$ считают по *формуле Стирлинга*

$$\boxed{n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \qquad (3.4.4)$$

Определение 5. *Размещениями с повторениями* из n элементов по m элементам называются всевозможные *упорядоченные* подмножества, содержащие m элементов из данных n элементов.

Обозначение: $\overline{A}_n^m$.

Формула для подсчёта:

$$\boxed{\overline{A}_n^m = n^m} \qquad (3.4.5)$$

Пример 4. Имеются три письма, каждое из которых нужно послать по шести различным адресам. Сколькими способами можно послать по одному адресу более одного письма?

Решение. Так как в условии задачи специально оговорено, что по одному адресу будет послано более одного письма, то это означает, что письма, а точнее факты отправки письма по определённому адресу, повторяются. Порядок важен. Здесь имеется в виду порядок адресов для рассылки. Не все элементы входят в соединение, то есть, не по всем адресам будут разосланы письма, а только по некоторым. Значит, речь идёт о размещениях с повторениями и искомое количество способов равно

$$\overline{A}_6^3 = 6^3 = 216.$$

Определение 6. *Перестановками с повторениями* состава $m_1, m_2, \ldots, m_k$ называются всевозможные подмножества, содержащие m элементов, в которые m_1 раз входит элемент a_1, m_2 раз входит элемент a_2, ..., $m_к$ раз входит элемент $a_к$ $(m_1+ m_2+…+ m_к =m)$.

Обозначение: $P(m_1, m_2, ..., m_k)$.

Формула для подсчёта:

$$\boxed{P(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{m!}{m_1!\,m_2!...m_k!},} \qquad (3.4.6)$$

где $m! = (m_1+ m_2+…+ m_к)!$

Общая формулировка задач на сочетания с повторениями такова: *имеются предметы n различных типов. Сколько к-комбинаций можно сделать из них, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации (иначе говоря, комбинации должны отличаться хотя бы одним предметом)?*

Эта задача в общем виде решается так. Надо зашифровать каждую комбинацию с помощью нулей и перегородок: для каждого типа написать столько нулей, сколько предметов этого типа входит в комбинацию, а различные типы отделять друг от друга перегородками (при этом, если предметы какого-нибудь типа совсем не вошли в комбинацию, то надо писать подряд две или большее число перегородок). При этом мы получим столько нулей, сколько предметов входит в комбинацию, то есть, *к*, а число перегородок будет на одну меньше, чем число типов предметов, то есть, *n-1*. Таким образом, мы получаем перестановки с повторениями из *к* нулей и *n-1* перегородок. Различным комбинациям при этом будут соответствовать различные перестановки с повторениями, а каждой перестановке с повторениями соответствует своя комбинация. Итак, число сочетаний с повторениями из *n* элементов по *к* элементов равно числу перестановок с повторениями состава *к, n-1*.

$$P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}, \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k} \qquad (3.4.7)$$

Пример 5. Сколько всевозможных «слов» (они могут не иметь смысла) может быть составлено из слова «зоология»?

Решение. Искомое количество слов $P(1,3,1,1,1,1) = \frac{(1+3+1+1+1+1)!}{1!3!1!1!1!1!} = \frac{9!}{3!} = 6720$.

§ 5. Комбинаторные тождества и уравнения

Тождества с биномиальными коэффициентами занимают в математике особое место. Поскольку биномиальные коэффициенты являются простейшими комбинаторными величинами (например, число сочетаний с повторениями или без повторений), то некоторые комбинаторные тождества возникают непосредственно в результате сравнения различных решений одной и той же комбинаторной задачи, в связи с чем оказывается полезно решение задачи и «трудным» способом. Такой путь появления комбинаторных тождеств является обычным практически для всех разделов комбинаторной математики. Однако возможно появление комбинаторных тождеств и другим путем. В этом случае подбор для их доказательства подходящей комбинаторной задачи оказывается часто вне наших возможностей. Проверка комбинаторных тождеств может основываться помимо их непосредственного комбинаторного содержания еще и на свойствах биномиальных коэффициентов. Специалисты-комбинаторики пользуются при этом рекуррентными соотношениями, производящими функциями, а также преобразованиями типа свертки Вандермонда. Некоторые же используют еще и контурные интегралы, дифференциальные уравнения и прочий арсенал математического анализа. Многочисленный опыт показывает, что основной интерес представляет сам выбор способа проверки доказываемого тождества; будучи единожды доказанным, тождество, как правило, перестает привлекать к себе внимание.

Комбинаторными тождествами называют соотношения между выражениями для чисел различного вида соединений. Для их доказательства, как уже было сказано, могут применяться различные методы. В частности, эти тождества могут устанавливаться:

1) непосредственно из рассмотрения самих соединений;
2) при помощи тождественных преобразований;
3) косвенным путём из оснований свойств многочленов (в частности применение формулы бинома Ньютона);
4) путём применения метода математической индукции.

Докажем свойство сочетаний 2 из § 4: $C_n^m = C_n^{n-m}$ $\left(m > \frac{n}{2}\right)$.

1 способ. Левая и правая части выражаются одной и той же формулой $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

2 способ. C_n^m и C_n^{n-m} – есть коэффициенты при $x^{n-m}y^m$ и $x^m y^{n-m}$ в представлении симметрического многочлена $(x+y)^n$.

3 способ. Всякой части, содержащей *m* элементов данного *n*-элементного множества, соответствует единственная часть, содержащая *n–m* оставшихся элементов и обратно. Это соответствие взаимно-однозначное. В самом деле, если две части, содержащие данное число элементов, различны, то различны и соответствующие части, образованные оставшимися элементами. Это значит, что число частей, содержащих *m* элементов, равно числу частей, содержащих *n–m* элементов.

Остальные свойства сочетаний доказываются аналогично.

Комбинаторные уравнения решаются заменой предложенных обозначений по соответствующим формулам с обязательным ограничением в виде условия (условий), определяющих область допустимых значений переменной (переменных).

Пример. Решить уравнение $3C_{x+1}^2 + P_2x = 4 \cdot A_x^2$.
Решение.

$$3 \cdot \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} + 2x = 4 \cdot \frac{x!}{(x-2)!}.$$ Из чего следует, что *x=3.*

§6. Коэффициенты многочлена и бином Ньютона

Всем хорошо известны формулы сокращённого умножения – квадрата и куба суммы: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$. Первая из них доказывается раскрытием скобок, после чего приводятся подобные члены, а для доказательства второй формулы куб $(a+b)^3$, рассматривается, естественно, как произведение $(a+b)^2(a+b)$, квадрат заменяется по первой формуле, раскрываются скобки и приводятся подобные члены.

Точно так же могут быть выведены формулы $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, но выкладки, ясно, будут ещё сложнее.

Между тем эта формула в общем виде – для показателя *n* имеет для математики исключительно важное значение, и для её получения можно использовать схему Горнера, но в расширенном виде.

Рассмотрим для примера многочлен $(x+1)^5$.

Наша задача состоит в том, чтобы разложить его по степеням переменной *x*. Однако, мы поступим несколько иначе: разложим сначала многочлен x^5 по степеням двучлена $x–1$. Это делается с помощью расширенной схемы Горнера.

	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	
1	1	3	6	10		
1	1	4	10			
1	1	5				
1	1					

Мы видим отсюда, что $x^5 = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$

Подставляя в это равенство вместо *x* двучлен $x+1$, будем иметь $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$, и искомая формула получена.

Ясно, что точно также могут быть получены и все остальные формулы для степени вида $(x+1)^n$, причём это можно сделать очень просто.

На диагоналях последней таблицы нетрудно обнаружить коэффициенты для степеней $(x+1)^2$ - это 1, 2, 1 и $(x+1)^3$ - это 1, 3, 3, 1 и $(x+1)^4$ – это 1, 4, 6, 4, 1. Подмеченной закономерностью можно воспользоваться с целью «почти автоматического» получения формул для всякого показателя n многочлена $(x+1)^n$.

Каждый элемент очередной диагонали вычисляется как сумма двух чисел – «соседей слева и сверху» (по правилу схемы Горнера, он получается, если сложить стоящее над ним число с произведением стоящего перед ним, умноженным на 1).

Поэтому для вычисления коэффициентов многочлена $(x+1)^n$ при степенях x (то есть в его стандартном виде) более удобно расположить запись иначе, вообще забыв о схеме Горнера, следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Замечание. Процесс получения чисел в треугольнике Паскаля связан с понятием чисел Фибоначчи 0,1, 1, 2,3,5…(каждое последующее есть сумма предыдущего и последующего).

🕮Здесь для красоты вверху поставлена 1 (так как $(x+1)^0=1$), далее поставлены две 1 (так как $(x+1)^1=1\cdot x+1$), каждая следующая строка начинается и кончается 1, а каждое из промежуточных чисел – это сумма двух стоящих над ним чисел предыдущей строки. Эту таблицу можно продолжать сколько угодно далеко, она называется *треугольником Паскаля*.

Теперь от двучлена $x+1$ перейдём к двучлену более общего вида $a+b$. Это делается совершенно формально: в любую формулу для $(x+1)^n$ вместо x надо подставить $\frac{a}{b}$ и провести очевидное преобразования.

Формулу $(a+b)^n$ обычно называют *формулой бинома Ньютона*, хотя она была известна математикам задолго до Ньютона (Аль-Каши, 15 век; Паскаль). Зато Ньютон сумел получить гораздо более общую формулу – для степени $(a+b)^n$, где n – любое действительное число. Без введения новых математических понятий даже трудно себе представить, что означает, например, хотя бы степень $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ и как её можно выразить через степени a и b. Однако этот вопрос относится уже к математическому анализу.

Коэффициенты разложения степени $(a+b)^n$ по степеням a и b называют *биномиальными коэффициентами* и обозначают через C_n^k; более точно, C_n^k - это коэффициент, стоящий разложении степени $(a+b)^n$ при одночлене $a^{n-k}b^k$.

Таким образом, формула бинома Ньютона имеет вид:

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n} \quad (3.6.1)$$

Вернёмся к треугольнику Паскаля. Число, стоящее в строке с номером *n* и имеющее в этой строке номер *k* (мы начинам нумеровать с 0), есть, по определению C_n^k. По правилу построения треугольника это число есть сумма двух его верхних «соседей», стоящих в предыдущей строке и имеющих в ней номера *k-1* и *k.*

Поэтому правило построения треугольника Паскаля можно записать в виде $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$.

Некоторые биномиальные коэффициенты легко вычисляются в общем виде при любом *n*: например, достаточно ясно, что $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Можно подметить также, что строки треугольника Паскаля справа налево читаются также, как и слева направо, то. Есть, биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов строки, равны: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Замечания:

1) Если в формуле (3.6.1) положить $b=-x$, то

$$(a-x)^n = a^n - nxa^{n-1} + C_n^2 a^{n-2}x^2 + \ldots + (-x)^n.$$

2) Правая часто формулы (3.6.1) содержит *n+1* слагаемое и *к+1* член вычисляется по формуле:

$$\boxed{T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} x^k} \quad (3.6.2)$$

3) Сумма показателей степеней a и b равна *n* и коэффициенты разложения, одинаково удалённые от нулевого и от *n*-го членов в разложении равны, так как $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Пример 1. Найти $(1+\sqrt{2})^6 = 1^6 + C_6^1 1^5\sqrt{2} + C_6^2 1^4(\sqrt{2})^2 + C_6^3 1^3(\sqrt{2})^3 + C_6^4 1^2(\sqrt{2})^4 + C_6^5 1^1(\sqrt{2})^5 + C_6^6 1^0(\sqrt{2})^6 = 99 + 70\sqrt{2}$.

Здесь $C_6^1 = C_6^5$, $C_6^2 = C_6^4$.

Пример 2. В разложении бинома $\left(\mathbf{x^5 + \frac{1}{x^{20}}}\right)^{\mathbf{1000}}$ найти член, не зависящий от *x*.

Решение: По формуле (3.6.2). $T_{k+1} = (-1)^k C_{1000}^k (x^5)^{1000-k}\left(\frac{1}{x^{20}}\right)^k$. По условию сказано, что указанный член не должен содержать *x*, значит $(x^5)^{1000-k}\left(\frac{1}{x^{20}}\right)^k = x^0$, *5000-25k=0, k=200.*

Свойства биномиальных коэффициентов:

1. Коэффициенты крайних членов и членов, равноудалённых от краёв, равны между собой.
2. Вычисление коэффициентов в разложении можно вести по следующему правилу: *для того, чтобы из коэффициента к-того члена получить коэффициент следующего, к+1-го члена, достаточно коэффициент к-того члена умножить на показатель степени при а в этом члене и разделить на число членов, предшествующих определяемому.*
3. Сумма всех коэффициентов в разложении $(a+b)^n$ равна 2^n.
4. Сумма коэффициентов членов разложения $(a+b)^n$, стоящих на чётных местах, равна сумме коэффициентов членов, находящихся на нечётных местах.

Докажем некоторые из этих свойств.

3. Положим в формуле бинома Ньютона $a=b=1$, тогда

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

4. Полагая в биноме Ньютона $a=1, b=-1$, получим, что $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots (-1)^n C_n^n$. Перенесём все отрицательные члены в левую часть, получим: $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^{2l+1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{2l}$.

🕮Доказательство того факта, что каждая строка треугольника Паскаля содержит биномиальные коэффициенты проводится методом математической индукции.

§7. Полиномиальная теорема

Полиномиальная теорема даёт формулу для разложения

$$\boxed{(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_k \overline{P_n}(k_1, k_2, \ldots, k_m) \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}} \quad (3.7.1)$$

,

где сумма распространяется на все возможные разбиения $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ на m неотрицательных слагаемых, где полиномиальные коэффициенты вычисляются по формуле:

$$\boxed{\overline{P_n}(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}} \quad (3.7.2)$$

и достаточно найти коэффициенты для таких разбиений, что $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m$, а потом переставлять показатели всеми возможными способами.

Формула (3.7.1) является обобщением бинома Ньютона для многочленов (полиномов). Её доказательство можно провести методом математической индукции по числу слагаемых m.

Полиномиальную теорему можно получить посредством обобщения формулы для квадрата многочлена

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^2 = x_1^2 + \ldots + x_m^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \ldots + 2x_{m-1}x_m.$$

Этой формуле можно придать вид

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)^2 = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=2} \frac{2!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{k_m}.$$

Далее можно воспользоваться методом математической индукции по показателю n.

Полиномиальные коэффициенты представляют собой число перестановок с повторениями, т.е. $\overline{P_n}(k_1,k_2,\ldots,k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$.

Сумма коэффициентов разложения $\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)^n$ равна m^n.

Действительно, если положить $x_1=x_2=\ldots=x_m=1$, тогда по формуле (3.7.2)получим $m^n=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n}\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$.

Пример. Возвести в степень: $(x+y+z)^5$

Решение. Представим показатель степени 5 в виде суммы трёх (по количеству внутри скобки) слагаемых: *5=3+2+0=3+1+1=4+1+0=5+0+0=2+2+1.* Соответственно, подсчитаем коэффициенты $\overline{P_n}(k_1,k_2,\ldots,k_m)$

$\overline{P_5}(5{,}0{,}0)=\frac{5!}{5!}=1$, $\overline{P_5}(4{,}1{,}0)=\frac{5!}{4!}=5$, $\overline{P_5}(3{,}2{,}0)=\frac{5!}{3!2!}=10$, $\overline{P_5}(2{,}1{,}1)=\frac{5!}{3!}=20$,

$\overline{P_5}(2{,}2{,}1)=\frac{5!}{2!2!}=30$.

$\Rightarrow, (x+y+z)^5=x^5+y^5+z^5+5(x^4y+x^4z+y^4x+y^4z+z^4x+z^4y)+10(x^3y^2+x^3z^2+y^3x^2+y^3z^2+$
$+z^3x^2+z^3y^2)+20(x^3yz+xz^3y+y^3xz)+30(x^2y^2z+x^2yz^2+xy^2z^2)$

§ 8. Полиномиальная формула

Можно найти произведение двучленов $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$, $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3 \_(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-bc$, произведение n таких двучленов $P_n(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)$. Раскрывая скобки и группируя члены с одинаковыми степенями x, получим многочлен, расположенный по убывающим степеням x:

$$\boxed{P_n(x)=x^n-x^{n-1}(a+b+c+\ldots+p)+x^{n-2}(ab+ac+\ldots)-x^{n-3}(abc+abd+\ldots)+\ldots+(-1)^n abcd..} \tag{3.8.1}$$

Последнее равенство называется *полиномиальной формулой.*

Сумма степеней т первых п натуральных чисел имеет такой вид:

$$S_m(n)=1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m.$$

Выведем формулу, позволяющую найти $S_m(n)$, если $S_1(n)$, $S_2(n)$, …, $S_{m-1}(n)$ известны.

По формуле бинома Ньютона

$$(a+1)^{m+1}=a^{m+1}+C_{m+1}^1a^m+C_{m+1}^2a^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^m a+1.$$

Положим здесь a последовательно равным 1, 2, …, n.

$$2^{m+1}=1^{m+1}+C_{m+1}^{1}1^{m}+C_{m+1}^{2}1^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^{m}1+1,$$
$$3^{m+1}=2^{m+1}+C_{m+1}^{1}2^{m}+C_{m+1}^{2}2^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^{m}2+1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^{m+1}=n^{m+1}+C_{m+1}^{1}n^{m}+C_{m+1}^{2}n^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^{m}n+1$$

Сложим эти равенства и после взаимного уничтожения в левой и правой части равенства одинаковых сумм, получим искомое равенство.

Пример. Раскрыть скобки (х-1)(х-5)(х-4)=$x^3 - x^2(1+5+4) + x(1\cdot 5+1\cdot 4+5\cdot 4) + 1\cdot 5\cdot 4 = x^3 - 10x^2 + 29x - 20$.

§ 9. Комбинаторные задачи на вычисление вероятности

Не стоит думать, что ответ во всякой комбинаторной задаче выражается через число сочетаний или размещений.

Определение 1. *Испытанием* называется определённый подлежащий производству или мыслимый опыт, действие, результат которого нас интересует.

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний).

Определение 2. Всякий результат или исход испытания называется *событием.*

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным.* В том случае, когда событие непременно должно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти – *невозможным.*

Определение 3. События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них.

Определение 4. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из них не исключает появление другого в том же испытании.

Определение 5. События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Совокупность элементарных событий, объединяющая все те исходы, при которых происходит событие *A*, называют *множеством элементарных событий, благоприятствующих событию A.*

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Определение 6 *(классическое определение вероятности). Вероятностью* события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события к числу n всех исходов данного испытания (несовместных, единственно возможных и равновозможных), то есть, $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, то есть, $0 \le P(A) \le 1$. Невозможному событию соответствует $P(A) = 0$, а достоверному – вероятность $P(A) = 1$.

При решении многих задач теории вероятностей оказываются полезными формулы комбинаторики – при определённых условиях у нас с равной вероятностью получаются размещения с повторениями (если, например, жетоны извлекаются и потом возвращаются обратно), размещения без повторений (если жетоны не возвращаются обратно), перестановки с повторениями и без, сочетания и т. д.

Пример. Из мешка с 33 жетонами, помеченными буквами русского алфавита, извлекают жетоны, записывают соответствующие буквы, причём вынутые жетоны обратно не возвращаются. Какова вероятность получения при этом слова «око», «ар»?

Решение. Так как жетоны обратно не возвращаются, то вынуть дважды букву «о» невозможно, значит, вероятность составить слово «око» равна нулю. Что касается слова «ар», то при двух извлечениях букв получаются всевозможные размещения без повторений из 33 букв по 2. И они равновероятны. Общее число их - $A_{33}^2 = 1056$. Значит, искомая вероятность равна $1/_{1056}$.

Теперь из того же мешка вынимаются 6 жетонов и располагаются в порядке извлечения. Какова вероятность получить слово "Москва", если жетоны после извлечения возвращаются обратно.

Количество всех исходов равно количеству всех размещений с повторениями $\overline{A}_{33}^6 = 33^6$.

В итоге искомая вероятность равна 33^{-6}

Долгое время комбинаторика рассматривалась как вспомогательная дисциплина для теории вероятностей, но теперь она приобрела самостоятельное значение.

Вычислять вероятность события, строя каждый раз множество равновероятных исходов и подсчитывая число благоприятных исходов, довольно затруднительно. Поэтому для вычисления вероятностей пользуются правилами, позволяющими по известным вероятностям одних событий вычислить вероятности других событий, получаемых из них с помощью некоторых операций.

На языке теории множеств *невозможному* событию отвечает пустое множество исходов, а *достоверному* – всё множество возможных исходов.

Множество исходов испытания, благоприятных *объединению* событий *X* и *У*, является объединением множества исходов, благоприятных *X*, с множеством исходов, благоприятных *У*. Применяют также название «*сумма событий*».

Множества исходов, соответствующих двум *несовместным* событиям, имеют пустое пересечение: $X \cap Y = \varnothing$.

События *Х* и *У* называются *противоположными* друг другу, если любой исход благоприятен одному и только одному из них.

Множество исходов испытания, благоприятных *пересечению* событий *Х* и *У*, является пересечением множества исходов, благоприятных *Х,* с множеством исходов, благоприятных *У*. Применяют также название «*произведение событий*».

Из классического определения вероятности нетрудно вывести правило, которое часто бывает удобно использовать при конкретных подсчётах. *Если p_1 и p_2 – вероятности двух независимых событий, то вероятность одновременного осуществления обоих этих событий равна* $p_1 p_2$.

Во многих случаях бывает нужно найти вероятность события в случае бесконечного множества возможных исходов. Предположим, что существует взаимно однозначное соответствие между исходами испытания и точками некоторого множества *G* на плоскости, причём процесс выбора точки этого множества происходит случайным образом. Если нас интересует вероятность наступления некоторого события, которому при имеющемся соответствии сопоставлено подмножество $X \subset G$, то вероятность этого события равна отношению площади множества *Х* к площади всего множества *G*.

Вероятность того, что в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна *p* $(0 < p < 1)$, событие *A* наступит ровно *k* раз (безразлично, в какой последовательности), находится по *формуле Бернулли:* $P_n(k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$, $q = 1 - p$.

Вероятность же получить выборку объёма *k+r*, где *k* элементов принадлежат одной группе, состоящей из *n* элементов, а *r* – другой, состоящей из *m* элементов, определяется формулой: $P(A) = \dfrac{C_m^r C_n^k}{C_{m+n}^{r+k}}$.

Пример. В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причём 5 из них стандартные. Рабочий берёт наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной.

Решение. Добавление "по крайней мере" означает, что среди трёх выбранных деталей может быть одна, две или все три стандартные. Событие А состоит в том, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной. Оно произойдёт, если произойдёт любое из трёх несовместных событий: В - одна деталь стандартная, С - две детали стандартные, Д - все три выбранные детали стандартные.

Вероятность каждого из событий B, C, D ищем по формуле $P(A)=\dfrac{C_m^r C_n^k}{C_{m+n}^{r+k}}$: $P(B)=\dfrac{C_5^1 C_{15}^2}{C_{20}^3}=\dfrac{35}{76}$, $P(C)=\dfrac{C_5^2 C_{15}^1}{C_{20}^3}=\dfrac{5}{38}$, $P(D)=\dfrac{C_5^3 C_{15}^0}{C_{20}^3}=\dfrac{1}{114}$, $\Rightarrow P(A)=\dfrac{137}{228}$.

ГЛАВА IV. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Понятие функции. Способы задания функций. Область определения функции и множество значений функции

Одним из основных понятий является понятие функциональной зависимости или функции. В отличие от стандартных методов исследования функций с использованием производной, в рамках элементарной математики используют элементарные методы исследования и применяют их для изучения как достаточно простых, так и весьма сложных функций.

Итак, переменные величины изменяются не независимо друг о друга, а изменение численных значений одних из них влечёт за собой изменение других.

Пусть дано некоторое множество чисел X и пусть указано некоторое правило (закон), обозначаемое буквой f, по которому каждому значению величины x (*независимой переменной*) из множества X ставится в соответствие одно вполне определённое значение величины y (*зависимой переменной*) из множества $У$. Тогда принято говорить, что дана *функцию*$y = f(x)$ с *областью определения* X, или что дана функция $y = f(x)$, определённая на множестве X. Множество $У$ – множество всех значений, которые принимает при этом переменная, называется *областью изменения* ции$y = f(x)$или *областью её значений*.

Следует заметить, что в определении функции участвуют два понятия: правило или закон (соответствие) и область определения функции.

Наиболее естественным способом задания функции (задание закона, соответствия) является описание функции на естественном языке. Например. Числу поставлен в соответствие его квадрат. Такой способ описания функции называется *словесным*. Этот способ часто употребляется тогда, когда другим способом функцию задать невозможно или затруднительно.

Достаточно часто для сокращения записи определения функции используют символы и обозначения математических операций. Такой способ называется *аналитическим*. Например, $y = x^2$.

Аналитический способ задания функции является самым распространённым в математике. Он состоит в том, что функциональная зависимость между величинами изображается в виде аналитического выражения, указывающего, какие действия надо провести над аргументом, чтобы получить соответствующее значение функции.

Одно и то же аналитическое выражение может определять различные функции в зависимости от области задания. Если область задания X указана неявно, то функция считается заданной для тех значений аргумента, для которых указанные действия выполнимы. Множество этих значений аргумента называется областью определения аналитического выражения. Следует помнить, что область определения функции и область определения аналитического выражения могут не совпадать.

Если множество X содержит конечное число элементов $x_1, x_{2,} \ldots, x_n$,то можно расположить в таблице соответствующие значения $y_1, y_{2,} \ldots, y_n$.

x	x_1	x_2	…	x_{n}	
y	y_1	y_2	…	y_{n}	

Такой способ представления функции называется *табличным.* Табличным способом пользуются тогда, когда функциональную зависимость между x и y изучают опытным путём. В таких случаях рядом опытов устанавливают, что определённым значениям переменной x соответствуют определённые значения переменной y. Затем эти данные сводят в таблицу. Пользуясь таблицей по значению аргумента x можно быстро найти соответствующее ему значение y.

Недостатком этого способа является то, что таблица не может охватить все значения функции, если область определения есть бесконечное множество. Примерами табличного способа задания функции могут служить таблицы логарифмов, тригонометрические таблицы.

Если функция $y = f(x)$ задана на множестве X, то каждому значению x соответствует значение y. Каждую пару x и y будем рассматривать как абсциссу и ординату точки M в некоторой прямоугольной системе координат. Геометрическое множество таких точек называется *графиком функции*. Такой способ задания называется *графическим*. Он часто встречается в физике и технике, где пользуются самозаписывающими приборами.

Обычно графиком функции является некоторая линия, однако, не всякая линия может служить графиком функции. Линия служит графиком функции в том и только том случае, если каждому значению x соответствует одно и только одно значение y. Для построения графика функции обычно составляют таблицу его значений для некоторых значений аргумента. Полученные точки на координатной плоскости соединяют плавной линией. Однако встречаются графики функций, которые не удаётся изобразить (например, функция Дирихле).

Часто, задавая функцию аналитически, не указывают явно её область определения. В таких случаях принять рассматривать её на естественной области определения. Область определения может задаваться также условиям решаемой задачи, физическим смыслом изучаемого явления, математическими соглашениями.

Естественной областью определения или *областью существования* функции$y = f(x)$, заданной аналитически, называют совокупность всех действительных значений независимой переменной x, для каждой из которых функция принимает действительные значения.

Область существования функции определяется самим законом (формулой), задающим функцию, а область определения её задаётся условиями или смыслом решаемой задачи. Иначе, областью определения может быть любая часть области существования функции или они могут полностью совпадать.

Таким образом, когда говорят, что дана функция$y = f(x)$, то считается, что её область определения уже дана: она либо указана явно, либо по известной области существования её нужно найти.

§ 2. Чётность и нечётность функции. Периодичность и ограниченность функции

Определение 1. Функция$y = f(x)$, определённая на множестве *X*, называется *ограниченной снизу*, если существует число *A* такое, что $A \leq f(x)$ для любого $x \in X$.
Определение 2. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве *X*, называется *ограниченной сверху*, если существует число *B* такое, что $B \geq f(x)$ для любого $x \in X$.
Определение 3. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве *X*, называется *ограниченной*, если существует число *M*>0 такое, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$. То есть, функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, ограничена на этом множестве тога и только тогда, когда она одновременно ограничена и снизу и сверху на этом множестве.

Множество *X* симметрично относительно начала координат, если оно таково, что $(-x) \in X$ для любого $x \in X$.
Определение 4. Функция называется *чётной*, если область её определения есть множество, симметричное относительно начала координат, и ли$f(x) = f(-x)$при любом $x \in X$.

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат, так как $\forall x \in X$ точки плоскости $(x; f(x))$и $(-x; f(-x))$ симметричны относительно оси ОУ.

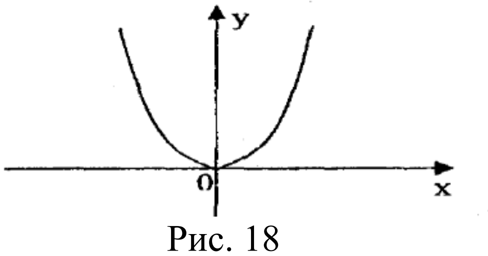


Рис. 18

Определение 5. Функция называется *нечётной*, если область её определения есть множество, симметричное относительно начала координат, и ли$f(x) = -f(x)$при любом $x \in X$.

График любой нечётной функции симметричен относительно начала координат (то есть, не изменяется при вращении его на 180^0 относительно начала координат), так как $\forall x \in X$ точки плоскости $(x; f(x))$и $(-x; -f(x))$ симметричны относительно начала координат.

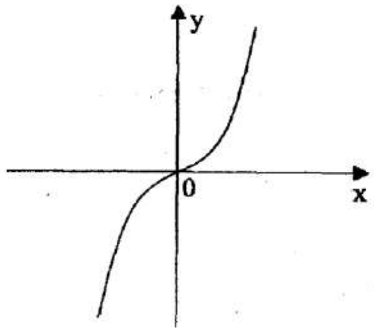


Рис. 19

Наряду с чётными и нечётными функциями есть функции (и их большинство), не являющиеся ни теми, ни другими. Их называют *функциями общего вида*.

Если область определения функции f не является симметричным относительно начала координат множеством, то эта функция заведомо является ни чётной, ни нечётной. Кроме того, если область определения функции является симметричным относительно начала координат множеством, но $f(-x) \neq f(x)$и$f(-x) \neq -f(x)$, то функция является ни чётной, ни нечётной.

Теорема: *Всякую функцию, определённую на множестве X, симметричном относительно начала координат, можно представить в виде суммы двух функций, каждая из которых определена на том же множестве X и одна из которых чётная, а другая нечётная*.

Действительно, пусть $\mathrm{y} = \varphi(\mathrm{x})$ – чётная функция, а $\mathrm{y} = \tau(\mathrm{x})$ – нечётная функция, удовлетворяющие условиям теоремы.

Положим $\varphi(\mathrm{x}) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $\tau(\mathrm{x}) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Ясно, что каждая из этих функций определена на множестве X и, исходя из определений чётности и нечётности, выполняются соответствующие равенства ($\varphi(-\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x})$и $\tau(-\mathrm{x}) = -\tau(\mathrm{x})$) и теорема доказана.

Сумма двух чётных функций есть функция чётная. Сумма двух нечётных – нечётная. Произведение двух чётных (нечётных) функций есть функция чётная. Произведение чётной функции на нечётную есть функция нечётная.

Определение 6. Функция$y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $\mathrm{T} \neq 0$, такое, что для любого x из области определения функции $y = f(x)$ числа $x+T$ и $x–T$ также входят в область определения и для любого x из области определения $f(x + T) = f(x)$.

Определение 7. Числовое множество называется *периодическим* с периодом T, если оно вместе с каждым x из области определения содержит числа $x+T$ и $x–T$.

Соответственно, функция $y = f(x)$ называется *периодической с периодом Т*, если:

1) множество X - периодическое, с периодом T;
2) $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}$: $f(x + T) = f(x)$.

Свойства периода функции выражают следующие теоремы:
1. *Если T – период функции, то и число $-T$- также период функции.*
2. *Если T_1 и T_2 – периоды функции, то и число $T_1 + T_2$ – период той же функции.*
3. *Если T – период функции, то число $m \cdot T$, где m – любое фиксированное отличное от нуля целое число, также будет периодом этой функции.*

Число T называется *главным периодом*, если оно положительно и является наименьшим среди всех положительных периодов.

Если T – основной период функции $y = f(x)$, то число T/W является основным периодом функции $y = f(w \cdot x)$.

Если T_1 и T_2 основные периоды функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (T_1 и T_2 целые числа), то наименьшее общее кратное также является периодом (не обязательно основным).

График периодической функции с основным периодом T достаточно построить на любом отрезке длины T, а затем сдвигать эту кривую вправо и влево на отрезки T, $2T$, $3T$....

§ 3. Монотонность функции. Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции

Определение 1. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *возрастающей* на этом множестве, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.
Определение 2. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *неубывающей* на этом множестве, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)$.

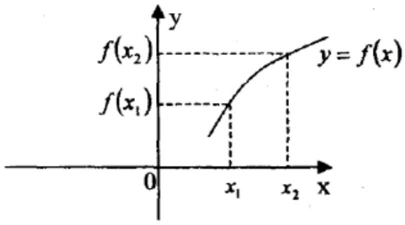


Рис. 20

Определение 3. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *убывающей* на этом множестве, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$.
Определение 4. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется невозрастающей на этом множестве, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \geq f(x_2)$.

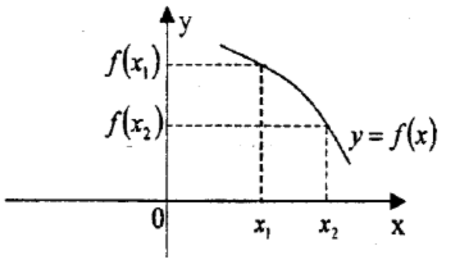


Рис. 21

Класс возрастающих функций является частью класса неубывающих функций. Класс убывающих – частью класса невозрастающих.

Определение 5. Функции возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие называются *монотонными функциями*. Функции возрастающие и убывающие называются *строго монотонными функциями*.

Неубывающие и невозрастающие функции на некоторых промежутках области определения могут сохранять постоянные значения, то есть их графики могут представлять собой прямую линию, параллельную оси абсцисс.

Определение 6. Функция называется *постоянной*, если для любых x_1 и x_2 , взятых из области определения функции имеет место равенство $f(x_1)=f(x_2)$. В этом случае пишут, что $f(x) = c = const$.

При элементарном исследовании функции на возрастание и убывание полезно иметь в виду следующие утверждения:

1) *сумма двух возрастающих функций возрастает*;

2) *сумма двух убывающих функций убывает*;

3) *если функции f(x) и g(x) возрастают и положительны на некотором промежутке, то функция f(x)+g(x) также возрастает и положительна на этом промежутке*;

4) *если функция f(x) возрастает, то функция –f(x) убывает и обратно*;

5) *если функция f(x) возрастает, то функция* $\frac{1}{f(x)}$ *убывает и обратно*;

6) *если функция x=f(t) возрастает на* $[\alpha;\beta]$, *то функция* $y = f(x)$ *возрастает на*$[f(\alpha);f(\beta)]$ *обратно.*

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве *X*. Если существует такое $x_0 \epsilon X$, что для любого $x \epsilon X$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, принимает наименьшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

Если существует такое $x_0 \epsilon X$, что для любого $x \epsilon X$ справедливо неравенство$f(x) \leq f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, принимает наибольшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

§ 4. График функции. Асимптоты

Введём на плоскости прямоугольную систему координат XOY и рассмотрим функцию $y = f(x)$. Придавая x последовательно значения

$x_1, x_2, \ldots, x_n$,... получим соответствующие значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ... Отметим на плоскости точки с координатами (x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_n;y_n),...

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек на плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:
а) всякая точка с координатами (x_0; y_0), где $y_0 = f(x_0)$, принадлежит этому множеству;
б) всякая точка, принадлежащая этому множеству точек, имеет координаты *(x_1; y_1)*, такие, что $y_1 = f(x_1)$.

Иными словами, график функции$y = f(x)$ - это множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $y = f(x)$, и не содержащее других точек.

§ 5. Схема исследования функции

Исследование функции элементарными методами происходит следующей схеме:

1) область существования;
2) область изменения;
3) ограниченность;
4) наибольшее и наименьшее значения;
5) периодичность;
6) чётность;
7) промежутки монотонности;
8) точки пересечения графика с осями координат.

Если использовать неэлементарные методы, то, помимо указанных шагов (которые, кстати, можно проводить в произвольном порядке) добавляются следующие:

- точки экстремума, экстремумы функции;
- направление выпуклости и точки перегиба;
- асимптоты графика.

В некоторых случаях для построения более точного графика необходимо найти значение функции в некоторых дополнительных или особых точках. В других случаях аппарата элементарной математики бывает недостаточно и обязательно используются неэлементарные методы.

§ 6. Классификация функций

6.1. Антье и дробная часть

Рассмотрим функцию $y=[x]$, её свойства и график.

1. $D([x]) = \boldsymbol{R}$.
2. $E([x]) = \boldsymbol{Z}$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. Функция непериодическая.

5. Функция не ограничена, так как множество значений функции – все целые числа, а множество всех целых чисел не ограничено.
6. Функция разрывная. Все целые значения x – точки разрыва первого рода с конечным скачком равным 1. В каждой точке разрыва имеется непрерывность справа.
7. Функция принимает значение 0 для всех x, принадлежащих интервалу [0;1), Следовательно, нулями функции будут все значения этого интервала.
8. Учитывая свойства целой части числа функция $y = [x]$ принимает отрицательные значения при xменьших нуля, и положительные значения при x больших 1.
9. Функция y = $[x]$ «кусочно-постоянная»: на каждом промежутке $[k; k+1)$ функция принимает одно значение k. Поэтому функция неубывающая, то есть для любых$x_1 \leq x_2$ имеет место неравенство $[x_1] \leq [x_2]$.
10. Точек экстремума функция не имеет.
11. Так как функция $y = [x]$ постоянна на каждом интервале $[n; n+1)$, она не принимает наибольшего и наименьшего значений на области определения.

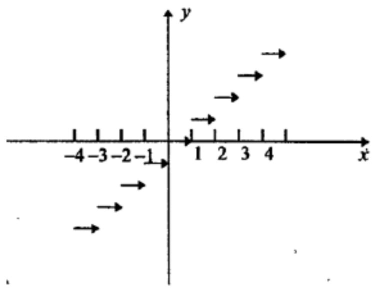


Рис. 22.

Рассмотрим функцию $y = \{x\}$, её свойства и график.
1. $D(\{x\}) = \boldsymbol{R}$.
2. $E(\{x\}) = [0; 1)$.
3. Функция $y = \{x\}$ ограничена.
4. Функция ни четная, ни нечетная.
5. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом $T = 1$.
6. Функция $y = \{x\}$ непрерывна на каждом интервале $[n; n+1)$, где n– целое, в каждой точке n функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка равна 1.
7. Функция $y = \{x\}$ обращается в *0* при всех целых значениях x, что следует из определения функции. То есть нулями функции будут все целочисленные значения аргумента.
8. Функция $y = \{x\}$ на всей области определения принимает только положительные значения.
9. Функция строго монотонно возрастающая на каждом интервале $[k; k+1)$, где k – целое число.
10. Точек экстремума не имеет, так как не меняет характер монотонности.
11. На каждом интервале $[k;k+1)$ функция $y = \{x\}$ принимает минимальное значение в точке k.

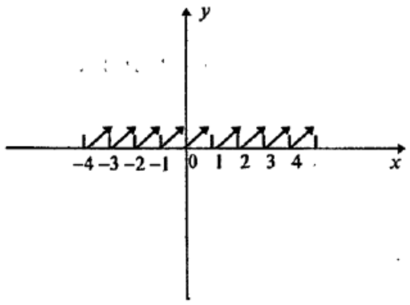


Рис. 23.

6.2. Линейная функция

Зависимость $y = kx + b$ называется *линейной*.

Частные случаи:

$y = b$ – постоянная (см. Рис. 24);

$y = kx$ – прямая пропорциональность (см. Рис. 25).

График – прямая.

Свойства:

1) область существования и область изменения $(-\infty;\ +\infty)$;
2) функция не ограничена ни снизу, ни сверху;
3) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;
4) функция не периодическая;
5) функция $y = x$ – нечётная, а функция $y = kx + b$ не является ни чётной, ни нечётной;
6) функция $y = kx + b$ возрастает на всей области существования, если $k > 0$ и убывает в противном случае;
7) (0; b) и ($-\frac{b}{k}$;0) - точки пересечения с осями координат.

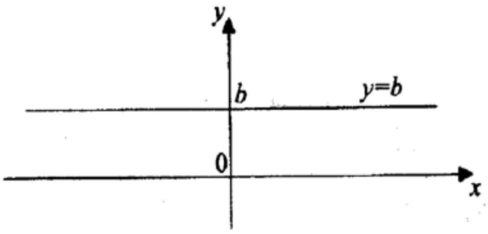


Рис. 24

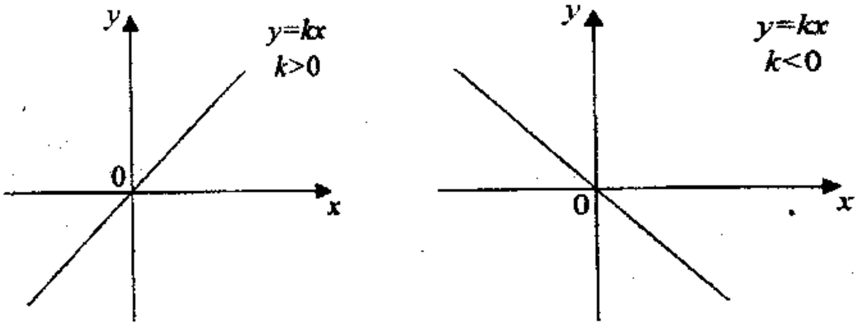


Рис. 25.

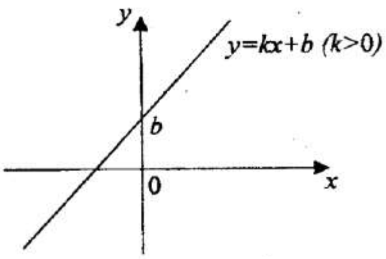


Рис. 26.

6.3. Дробно-линейная функция

Зависимость вида $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $a,\ b,\ c,\ d$ – постоянные, причём $c\neq 0$ (иначе мы имели бы линейную функцию) и $a\cdot d\neq b\cdot c$ (иначе произошло бы сокращение и мы получили бы постоянную функцию) называется *дробно-линейной функцией*.

Частный случай её – $y=\frac{к}{x}$ – обратная пропорциональность. График – гипербола.

Свойства:

1) область существования: $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$; область изменения: $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$;
2) функция не ограничена, но ограничена снизу на промежутке $(0;\infty)$, сверху - на промежутке $(-\infty;0)$;
3) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;
4) функция не периодическая;
5) функцияу $=\frac{к}{x}$ нечётная, а функция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ не является ни чётной, ни нечётной;
6) функция не является монотонной на всей области существования, но она убывает на интервалах $(0;\infty)$ и $(-\infty;0)$, если $к>0$ или $ac>0$ и возрастает на тех же интервалах в противном случае;
7) точек пересечения с осями нет.

Преобразуем уравнение функции к виду

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Полагая

$$k=\frac{bc-ad}{c^2},\ m=\frac{d}{c},\ n=\frac{a}{c},$$

получаем

$$y=n+\frac{k}{x+m}.$$

Следовательно, график функции $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ легко получить из графика функции $y=\frac{k}{x}$ с помощью элементарных преобразований

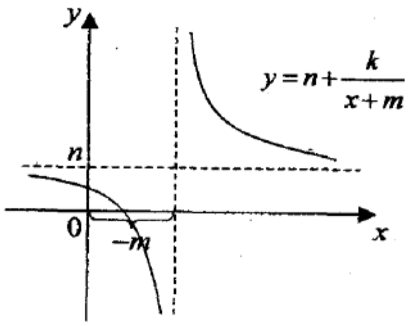


Рис. 27.

6.4. Квадратный трёхчлен. Парабола

Зависимость вида $y=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$ называется квадратичной. Частный случай $-y=ax^2$, График – парабола.

Свойства:

1) область существования $(-\infty;\ +\infty)$, область изменения $[y_0;\ \infty[$, если $a>$ ли $a>0$ или $]-\infty;0]$, если $a<0$ $(y_0=y\left(-\frac{b}{2a}\right))$;
2) функция ограничена снизу при$a>0$, сверху – при $a<0$;
3) функция принимает наибольшее значение y_0 при $a<0$, наименьшее y_0– при $a>0$;
4) функция не периодическая;
5) функция $y=ax^2$чётная, а функция $y=ax^2+bx+c$ не является ни чётной, ни нечётной;
6) функция не является монотонной на всей области существования, но она убывает на интервале $(-\infty;0)$ и возрастает на $(0;\infty)$ в случае $y=ax^2$;
7) точек пересечения с осями нет.

6.5. Степенные функции

Зависимость вида $y=x^{\alpha}$называется *степенной*.

Частные случаи: $y=x,\ \ y=x^2,\ \ y=\frac{1}{x}, y=x^{2m},\ \ y=x^{2m-1}$...

Свойства$y=x^{2m}$:

1) область существования $(-\infty;\ +\infty)$, область изменения $[0;\ \infty[$;
2) функция ограничена снизу: $y\geq 0$;
3) функция принимает наименьшее значение y=0 при $x=0$;
4) функция не периодическая;
5) функция чётная;
6) функция не является монотонной на всей области существования, но она убывает на интервале $(-\infty;0)$ и возрастает на $(0;\infty)$;
7) точка (0;0) - единственная точка пересечения с осями координат.

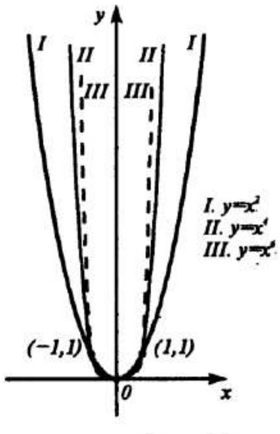


Рис. 28.

Свойства $y = x^{2m-1}$:

1) область существования $(-\infty;\ +\infty)$, область изменения$(-\infty;\ +\infty)$;
2) функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу;
3) функция не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений;
4) функция не периодическая;
5) функция нечётная;
6) функция возрастает на всей области существования;
7) точка (0;0) – единственная точка пересечения с осями координат.

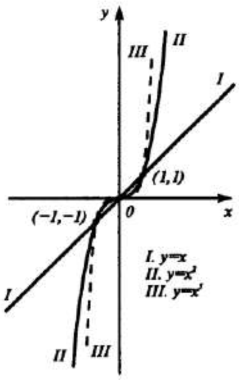


Рис. 29.

Свойства$y = x^{-2m}, m \in \boldsymbol{N}$:

1) область существования $(-\infty;\ 0) \cup (0; +\infty)$, область изменения $(0;\ +\infty)$;
2) функция ограничена снизу: $\text{y} > 0$;
3) функция не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений;
4) функция не периодическая;
5) функция чётная;
6) функция не является монотонной на всей области существования, но она возрастает на интервале $(-\infty; 0)$ и убывает на $(0; \infty)$;
7) точек пересечения с осями координат нет.

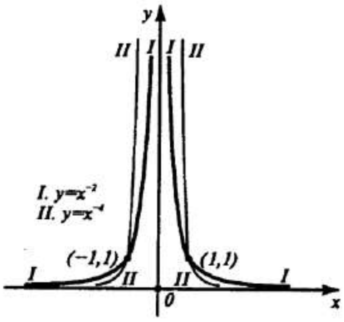


Рис. 30.

Свойства $y = x^{-2m+1}, m \in \boldsymbol{N}$:

1) область существования $(-\infty;\ 0) \cup (0; +\infty)$, область изменения $(-\infty;\ 0)\ \cup (0; +\infty)$;
2) функция является ограниченной ни сверху, ни снизу;
3) функция не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений;
4) функция не периодическая;
5) функция нечётная;
6) функция не является монотонной на всей области существования, но она возрастает на интервале $(0; \infty)$и убывает на $(-\infty; 0)$;
7) точек пересечения с осями координат нет.

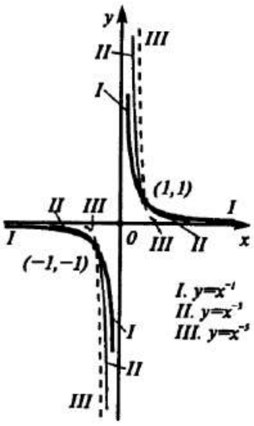


Рис. 31.

Свойства $y = \mathrm{x}^{\alpha}, \alpha$ – фиксированное положительное нецелое число1) область существования $[0; +\infty[$, область изменения $(-\infty;\ 0)\ \cup (0; +\infty)$;
2) функция ограничена снизу: $\mathrm{y} \geq 0$;
3) функция принимает наименьшее значение y=0 при x=0;
4) функция не периодическая;
5) функция не является ни чётной, ни нечётной;
6) функция возрастает на всей области существования;
7) точка (0;0) - единственная точка пересечения с осями координат.

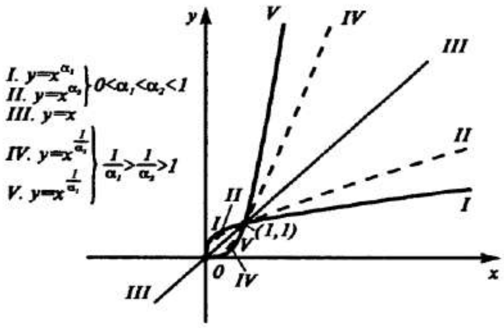


Рис. 32.

Свойства$y = \mathrm{x}^{-\alpha}$, α – фиксированное положительное нецелое число
1) область существования $[0; +\infty[$, область изменения $(0; +\infty)$;
2) функция ограничена снизу: $\mathrm{y} > 0$;
3) функция не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений;
4) функция не периодическая;
5) функция не является ни чётной, ни нечётной;
6) функция убывает на всей области существования;
7) точек пересечения с осями координат нет.

Рис. 33.

6.6. Показательная функция

Зависимость вида$y = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$, где *а*– фиксированное число такое, что $\mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1$, называется *показательной*.

Свойства:
1) область существования $(-\infty;\ +\infty)$, область изменения $[0;\ \infty[$;
2) функция ограничена снизу: $y > 0$;
3) функция не принимает ни наибольшего ни наименьшего значений;
4) функция не периодическая;
5) функция не является ни чётной, ни нечётной;
6) если$\mathrm{a} > 1,$тофункция возрастает, если $0 < \mathrm{a} < 1,$ то функция убывает на всей области существования;
7) точка (0;1) – единственная точка пересечения с осями координат.

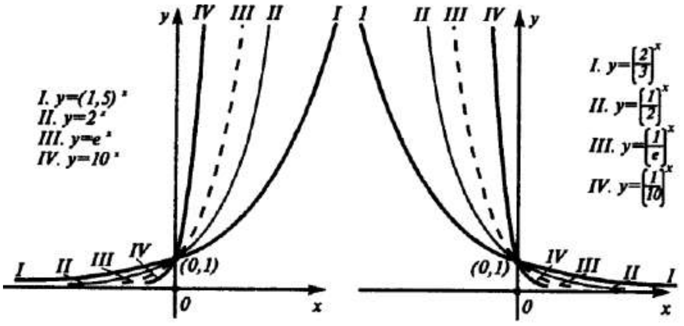


Рис. 34.

6.7. Логарифмическая функция

Зависимость вида $y = log_a x$, где a– фиксированное число такое, чтоа > 0, а $\neq 1$, называется логарифмической.

Свойства:

1) область существования $[0;\ \infty[$, область изменения$(-\infty;\ +\infty)$;
2) функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу;
3) функция не принимает ни наибольшего ни наименьшего значений;
4) функция не периодическая;
5) функция не является ни чётной, ни нечётной;
6) еслиа > 1, тофункция возрастает, если $0 <$ а < 1, то функция убывает на всей области существования;
7) точка (1; 0) – единственная точка пересечения с осями координат.

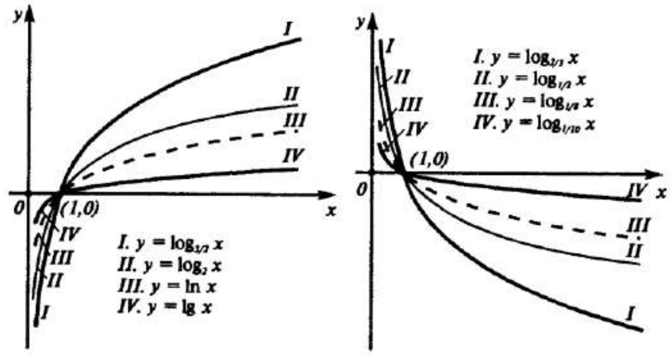


Рис. 35.

§ 7. Элементарные способы построения графиков функций

Чтобы по известному графику функции $\mathrm{y} = f(x)$ построить график функции

- $\mathrm{y} = -f(x)$, нужно симметрично отобразить график функции $\mathrm{y} = f(x)$ относительно оси *OX*;
- $\mathrm{y} = f(-x)$, нужно симметрично отобразить график функции $\mathrm{y} = f(x)$ относительно оси *OУ*;
- $\mathrm{y} = \mathrm{к}f(x)$, нужно увеличить все ординаты в k раз (растянуть график в k раз вдоль оси ординат, если $\mathrm{к} > 1$, или уменьшить (сжать), если $\mathrm{к} \in (0; 1)$, оставив соответствующие абсциссы без изменения;

- $у = f(кx)$, нужно увеличить в k раз абсциссы (растянуть график вдоль оси *OX*), если $к \in (0; 1)$, или уменьшить (сжать), если $к > 1$, оставив без изменения соответствующие ординаты;
- $у = f(х - а)$, нужно сдвинуть все точки графика $у = f(x)$ на a единиц вправо вдоль оси *OX*, еслиа < 0, или на a единиц влево, если $а > 0$, оставив без изменения соответствующие ординаты;
- $у = f(х) + b$, нужно сдвинуть все точки графика $у = f(x)$ на b единиц вниз вдоль оси *OУ*, если $b < 0$, или на b единиц вверх, если $b > 0$, оставив без изменения соответствующие абсциссы.

§ 8. Способы построения графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля

Чтобы по известному графику функции $у = f(x)$ построить график функции

- $у = |f(x)|$, нужно часть графика $у = f(x)$, находящуюся ниже оси OX, отобразить симметрично наверх, а часть, находившуюся первоначально выше оси *OX*, оставить без изменения;
- $у = f(|x|)$, нужно часть графика $у = f(x)$, находящуюся левее оси OУ, стереть, а часть, находившуюся первоначально правее оси OУ, оставить без изменения и, кроме того, отобразить симметрично в часть плоскости левее *OУ*;
- $|у| = f(х)$, нужно часть графика $у = f(x)$, находящуюся ниже оси OX, стереть, а часть, находившуюся первоначально выше оси OX, оставить без изменения и, кроме того, отобразить симметрично в часть плоскости ниже OX.

Если же функция представляет собой комбинацию (сумму, произведение и др.) функций, содержащих переменную под знаком модуля, то её график строится как график кусочно-заданной функции, т. е. представляет собой объединение графиков-частей на различных участках области определения.

§ 9. Композиция функций

Пусть функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве *X* и множество значений этой функции входит в область существования функции $y = F(u)$. Тогда любому *x* из области определения *X* функции $u = \varphi(x)$ соответствует определённое значение переменной *u*, а этому значению *u* функция $y = F(u)$ ставит в соответствие определённое значение переменной у, то есть, переменная *y* является функцией от *x* на множестве *X*: у=F[$\varphi(x)$]. Полученная функция от функции называется сложной функцией переменной *x*. Функцию $u = \varphi(x)$ называют внутренней, а $y = F(u)$– внешней.

Сложную функцию y=F$[\varphi(x)]$ называют часто суперпозицией двух функций: внутренней $u = \varphi(x)$ и внешней $y = F(u)$.

График сложной функции можно построить, зная график внутренней и свойства внешней функции.

§ 10. Понятие обратной функции

Итак, каждая функция $\mathrm{y} = f(x)$ производит отображение области существования функции на область её изменения так, что каждому x из области существования соответствует единственное значение y из области изменения.

В том случае, когда каждое значение y из области изменения получается лишь при одном значении x из области существования, говорят, что функция осуществляет взаимно однозначное отображение своей области существования на область изменения. Есть функции, которые этим свойством не обладают. Например, $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$. Эта функция при x=1 и при x= –1 принимает одно и то же значение y=1.

В связи с вышесказанным, функции можно разделить на два класса:
1) функции, осуществляющие взаимно однозначное отображение области существования на область изменения;
2) функции, не обладающие этим свойством.

Если функции второго из предложенных классов рассматривать не на всей области существования, то часто удаётся выбрать такую область определения (часть области существования), что функция будет отображать эту область определения на соответствующую область изменения уже взаимно однозначно. так, функция $\mathrm{y} = f(x)$ на той части области определения X (из области существования функции), где она является строго монотонной, принадлежит к первому классу (для функцииу $= \mathrm{x}^2$ такой областью будет промежуток $]-\infty;\ 0]$; или $[0; +\infty[$.

Из аналитического выражения функции первого класса можно выразить переменную x через переменную y, то есть, составить обратное правило. Если в нём ещё и заменить x на y, а y на x с одновременной заменой области определения на область значений (и наоборот), то получают новую функцию, которую называют обратной к данной функции $\mathrm{y} = f(x)$.

Замечание. Не для всякой функции удаётся найти такую область определения, которую она взаимно однозначно отображает на соответствующую область изменения.

Например,
1) функция y=*const* не отображает взаимно однозначно никакой промежуток числовой прямой на соответствующую область изменения
2) функция Дирихле.

Теорема. *Любые точки A(x_0; y_0) и B(y_0; x_0) симметричны относительно прямой y=x.*

Пусть функция $y = f(x)$ взаимно однозначно отображает область определения X на область изменения $У$. Тогда график этой функции таков, что по любому x_1 однозначно находится $y_1 = f(x_1)$ и, наоборот, по любому y_2 однозначно находится $x_2=f^{-1}(y_2)$.

Если точка $M(x_0,y_0)$ лежит на графике функции $y = f(x)$, то её координаты удовлетворяют условию $y_0 = f(x_0)$, а следовательно, и условию $x_0 = f^{-1}(y_0)$. То есть, все точки (и только они) графика $y = f(x)$ удовлетворяют условию $x = f^{-1}(y)$. Так как для получения обратной функции нужно в обратном правиле заменить x на y, а y на x, то каждая точка графика $y = f^{-1}(x)$ получается из точки графика функции $y = f(x)$ заменой x на y, а y на x, то есть, если точка $M(x;y)$ – точка графика $y = f(x)$, то точка $M_1(y;\ x)$ – точка графика $y = f^{-1}(x)$. Вывод: график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$симметричным отображением последнего относительно прямой $y=x$.

Свойства прямой и обратной функций связаны между собой, так

- область определения функции $y = f(x)$ является областью значений функции $y = g(x)$;
- область значения функции $y = f(x)$ является областью определения функции $y = g(x)$;
- если функция $y = f(x)$возрастает (убывает), то функция $y = g(x)$ также возрастает (убывает);
- если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Учебно-методическое пособие [Текст] / Н.Д. Золотарёва, Ю.А. Попов, Н.Л. Семендяева, М.В. Федотов. М.: Фойлис, 2010. 568 с.
2. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями ЕГЭ (часть С), олимпиады, экзамены в ВУЗ [Текст] / Н.Д.Золотарева, Ю.А. Попов, В.В. Сазонов [и др.]. М.: МГУ, 2011 535 с.
3. Александров, Б.И. Пособие по математике для поступающих в МГУ: [Метод. руководство] [Текст] / Б.И. Александров, М.В. Лурье; МГУ им. Ломоносова. Подгот. курсы естеств. фак. М.: Изд-во МГУ, 1977. 304с.
4. Александров, В.А. Задачник-практикум по теории чисел: [Для заоч. отд-ний физ.-мат. фак. пед. ин-тов] [Текст] / В.А. Александров, С.М. Горшенин; Гл. упр. высш. и сред.пед. учеб. заведений М-ва просвещения РСФСР, Моск. гос. заоч. пед. ин-т . – 3. изд., перераб. М.: Просвещение, 1972. 80 с.
5. Александрова, Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений. Словарь-справочник [Текст] / Н.В.Александрова. – Изд. 3-е, испр. М.: URSS ЛКИ, 2008. 246 с.
6. Алексеев, В.М. Элементарная математика. Решение задач [Текст] / В.М. Алексеев Киев: Вища школа, 1983. 351 с.
7. Амелькин, В.В. Задачи с параметрами. Справочное пособие по математике [Текст] / В.В.Амелькин, В.Л. Рабцевич.3-е изд., доработ. Минск: Асар, 2004. 464 с.
8. Андреев, А.А. Антье. Учебное издание. Серия А: Математика. Вып. 2.[Текст] / А.А. Андреев, А.И.Люлев, А.Н. Савин. Самара: Пифагор,1997. 23 с.
9. Бардушкин, В. Тригонометрические уравнения. Отбор корней / В. Бардушкин, А. Прокофьев, Т.Соколова, Т. Фадеичева [Текст] // Математика, №12, 2005. С. 23–27.
10.Башмаков, М.И. Алгебра и начала анализа. Задачи и решения [Текст] /М.И. Башмаков, Б.М.Беккер, В.М. Гольховой, Ю.И.Ионин. М.: Высшая школа, 2004. 296 с.
11.Башмаков, М.И. Задачи по математике: Алгебра и анализ [Текст] / М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой; под редакцией Д. К. Фадеева – М.: Наука, 1982. – 191с.
12.Башмаков, М.И. Математика 11 класс: книга для учителя [Текст] / М.И. Башмаков. М.: Академия, 2011. 128 с.
13.Башмаков, М.И. Теория и практика продуктивного обучения [Текст] / (коллективная монография). М.: Народное образование, 2000. 248 с.
14.Башмаков, М.И. Школьная математика. Методическое пособие для подготовки к ЕГЭ [Текст] / М.И. Башмаков, Ш.И. Цыганов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 271 с.

15.Башмаков, М. И. Школьная алгебра [Текст] / М.И. Башмаков. СПб: ИПО, 1995.
16.Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике [Текст] / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М.: Наука, Физматлит, 1971. 592 с.
17.Болтянский, В.Г. Шесть зайцев в пяти клетках [Текст] / В.Г. Болтянский // Квант, 1977, №2.
18.Бурлакова, Т.В. Дополнительные разделы школьного курса математики [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т. В. Бурлакова. – Шуя: Шуйский государственный педагогический университет, 2010. – URL: http://www.bibliorossica.com/book.html?currBookId=8196
19.Василевский, А.Б. Дидактические материалы к «Практикуму по решению математических задач» [Текст] / А.Б. Василевский. Минск: МПИ им. А. М. Горького, 1978. 20 с.
20. Василевский, А. Б. Задания по внеклассной работе по математике: 9-11 классы [Текст]: книга для учителя / А.Б. Василевский. Минск: Народная асвета, 1988. 172 с.
21.Василевский, А.Б. Методы решения задач по математике: метод. пособие [Текст] / А.Б. Василевский. Минск: МПИ, 1981. 107 с.
22. Василевский, А.Б. Обучение решению задач по математике: учебное пособие для пед. ин-тов по физ.-мат. спец. [Текст] / А.Б. Василевский. Минск: Вышэйшая школа, 1988. 254 с.
23. Василевский, А.Б. Упражнения по алгебре и началам анализа: кн. для учителя [Текст] / А.Б. Василевский. Минск: Нар. асвета, 1991. 221 с.
24.Василевский, А.Б. Упражнения по алгебре и началам анализа: эксперим. материалы в помощь слушателям семинара учителей шк. и классов с углубл. изуч. математики [Текст] / А. Б. Василевский (сост.); М-во нар.образования БССР, Респ. ин-т усоверш. Учителей, Мин. гос. пед. ин-т им. А. М. Горького. Минск: Б. и., 1988. 104 с.
25.Вересова, Е.Е. Практикум по решению математических задач: для пед. ин-тов по мат. и физ. спец.[Текст] / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 239 с.
26.Виленкин, Н.Я. Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей. [Текст] / Н.Я. Виленкин. М.: Просвещение, 1976. 48 с.
27.Виленкин, Н.Я. Задачник-практикум по элементарной алгебре: для студентов-заочников физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов[Текст] / Н.Я. Виленкин, А.А. Кочева, И.В. Стеллецкий. М.: Просвещение, 1969. 191с.
28.Виленкин, Н.Я. За страницами учебника математики. Арифметика Алгебра. Пособие для учащихся 10-11 классов [Текст] /Н.Я. Виленкин, Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова. М.: Просвещение, 2008. 190 с.
29.Вирченко, Н.А. Графики функций. Справочник: пер. с укр. [Текст] / Н.А. Вирченко, И.И. Ляшко, К.И. Швецов. Киев: Наукова думка, 1979. 320с.

30.Владимирцева, С.А. Пособие по элементарной математике [Текст] / С.А. Владимирцева, Т.Г.Полякова, И.М. Стенникова. Барнаул, 2004.
31.Воробьев, Н.Н. Признаки делимости [Текст] / Н.Н. Воробьев. – 2. изд., испр. М.: Наука, 1974. 79 с.
32.Воробьев, Н.Н. Числа Фибоначчи [Текст]/ Н. Н. Воробьев. – 4. изд., доп. М.: Наука, 1978. 141 с. (Популярные лекции по математике; Вып. 6) .
33.Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике [Текст]. – М., 2006. – 509 с.
34.Гайдуков, И.И. Абсолютная величина: пособие для учителей [Текст]/ И.И. Гайдуков. – 2-е изд. М.: Просвещение, 1968. 96 с.
35.Галин, Б.К. Модуль действительного числа. Теоремы о свойствах модуля. Модуль действительного числа в задачах: Учеб.-метод. материалы по спец. 010100 «Математика»: для студентов, учителей и учащихся [Текст] / Б.К. Галин; Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 1999. 44 с.
36. Галин, Б. К. Уравнения и неравенства. Некоторые нестандарт. способы их решения: спецкурс для учащихся 10-11-х кл. [Текст] / Б.К. Галин; Стерлитамак: Изд-во Стерлитамак. гос. пед. ин-та, 1995. 61 с.
37.Галицкий, М.Л.Сборник задач по алгебре для 8-9 классов [Текст] / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. М.: Просвещение, 1992.
38.Гельфанд, И.М. Функции и графики (основные приемы) [Текст] / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, Э.Э. Шноль. – 7-е изд., стер. М.: Изд-во МЦНМО, 2006. 116 с.
39.Герасименко, П. В. Элементарная математика. Часть первая. Рациональные числа [Текст] / В. А. Андреева, Л. З. Пиотровская, А. В. Соколова. – СПб.: ВИКУ, 1999.
40.Голубев, В. И. Абсолютная величина числа в конкурсных экзаменах по математике [Текст] / В.И. Голубев; Вессоюз. ассоц. Учителей математики. Львов: Журн. «Квантор», 1991. 97 с.
41.Горшенин, С.М. Дополнительные вопросы арифметики: (Пособие для учителей восьмилетней школы) [Текст] / С.М. Горшенин. Орел, 1970. 54 с.
42.Графики функций: пособие для поступающих в вузы [Текст] / А.М. Дороднов, И.Н. Острецов, В.А. Петросов и др. М.: Высшая школа, 1972. 104 с.
43.Гусак, А.А. В мире чисел. Книга для учащихся [Текст] /А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Гусак. Минск: Народная асвета, 1987.190 с.
44.Гусак, А.А. Математика для поступающих. Обучающий курс [Текст] / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. Минск: Вышейшая школа, 2003. 493 с.
45.Дорофеев, Г.В.Пособие по математике для поступающих в вузы [Текст] / Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов. М.: Наука, 1976.640с.
46.Егерев, В.К.Методика построения графиков функций [Текст] / В.К. Егерев, Б.А. Радунский, Д.А. Тальский. М.: Высшая школа, 1967. 130 с.
47.Ежов, И. И. Элементы комбинаторики [Текст] / И. И. Ежов, А. В. Скороход. – М., 1977.

48.Зайцев, В.В. Элементарная математика: Повторительный курс [Текст] / В.В. Зайцев, В.В. Рыжков, М.И. Сканави; Под ред. В.В. Рыжкова. – 3. изд., стереотип. М.: Наука, 1976. 592 с.
49.Земляков, А.Н. Алгебра плюс: рациональные и иррациональные алгебраические задачи: учебное пособие [Электронный ресурс] / А.Н. Земляков. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 326 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222096
50. Иванов, О.А. Избранные главы элементарной математики [Текст] / О.А. Иванов; С.-Петербург. гос. ун-т. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1995. 223 с.
51. Иванов, О.А. Обучение поиску решения задач (Фантазии в манере Пойа) [Текст] // Математика в школе. – 1997 г. – №6. – с. 47-51.
52. Иванов, О.А. Практикум по элементарной математике: алгебро-аналитические методы: учеб. пособие [Текст] / О.А. Иванов. М.: МЦНМО, 2001. 319 с.
53.Ильичев, А.Т. Графики элементарных функций и их преобразования: Методические указания к выполнению типового расчета [Текст]/ В.В. Кузнецов, И.Д. Фаликова. Под ред. С.К. Соболева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 56 с.
54.Калужнин, Л.А. Основная теорема арифметики [Текст] / Л.А. Калужнин. М.: Наука, 1969. 31 с. (Популярные лекции по математике; Вып. 47).
55.Канель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи [Текст] / А.Я. Каннель-Белов, А.К. Ковальджи; В.О. Бугаенко (ред.); Моск. центр непрерыв. мат. образования. М.: Изд-во Моск. центра непрерыв. мат. образования, 2001. 96 с.
56.Колягин, Ю.М. Учись решать задачи: пособие для учащихся VII-VIII кл. [Текст]/ Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян. М.: Просвещение, 1980. 96 с.
57.Колягин, Ю. М. Математика: Алгебра и элементарные функции [Текст]: учебное пособие для вузов, часть 1 / Ю. М. Колягин. – М.: Агар, 1999.
58.Литвиненко, В.Н. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для ст-в физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей [Текст] / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1991. 348 с.
59.Лихолетов, И.И. Элементарные функции [Текст] / И.И. Лихолетов. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР, 1960. 69 с.
60.Лихолетов, И.И. Функции и их графики: учебное пособие [Текст] / И.И. Лихолетов. Минск: Народная асвета, 1970. 149 с.
61.Ляпин, С.Е. Сборник задач по элементарной алгебре: [Для физ.-мат. фак. пед. ин-тов] [Текст] – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1973. – 351 с.

62. Мерлин, А.В. Нестандартные задачи по математике в школьном курсе: конспект лекций [Текст] / А.В. Мерлин, Н.И. Мерлина. Чебоксары: Чуваш.гос. ун-т, 1997. 64 с.
63.Методика факультативных занятий в 9-10-х классах: Избр. вопр. математики: Пособие для учителей [Текст] / И.Н. Антипов, В.Н. Березин, А.А. Егоров и др.; Сост.: И.Л. Никольская, В.В. Фирсов. М.: Просвещение, 1983. 176 с.
64.Моденов, П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики: учебное пособие для вузов [Текст] / П.С. Моденов. М.: Сов.наука, 1957. 666 с.
65.Модуль действительного числа (Основные свойства, эффектив. схемы и методы решений уравнений и неравенств, примеры решения стандарт.инестандарт. задач, сводка основных фактов): прав. пособие [Текст]/ В.И. Голубев и др., Е. В. Шикин (ред.). Пущино: Пущин. Науч. центр РАН, ОНТИ, 1992. 34 с.
66.Мордкович, А.Г., Литвиненко, В.Н., Кочева, А.А. Практикум по решению задач школьной математики: для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов[Текст]/ А. Г. Мордкович (ред.) и др.; Моск. гос. заоч. пед. ин-т. – Вып.1: Вводный практикум. М.: Просвещение, 1975. 160 с.
67.Мордкович, А.Г. Беседы с учителями математики [Текст] / А.Г. Мордкович. М.: Школа-пресс, 1994.
68.Новоселов, С.И. Специальный курс по элементарной алгебре [Текст]/ С.И. Новоселов. М.: Наука, 1965.
69.Плакатина, О. И. Методика обучения школьников решению геометрических задач: метод. рекомендации для учителей математики [Текст]/ О.И. Плакатина (сост.); Ленингр. отд-ние Пед. о-ва РСФСР, Секция методики преподавания математики. Иркутск: ИГПИ, 1987. 15 с.
70.Пойа, Д. Как решать задачу: пособие для учителей [Текст]/ Д. Пойа; пер. с англ. В. Г. Звонарёвой и Д. И. Белли; Ю. М. Гайдука (ред.). – 2-е изд. М.: Учпедгиз, 1961. 207 с.
71.Пойа, Д. Математическое открытие: решение задач: основные понятия, изучение и преподавание [Текст] / Д. Пойа; пер. с англ. В. С. Бермана; И. М. Яглом (ред.). – 2-е изд., стереотип. М.: Наука, 1976. 448 с.
72.Полякова, Т.Н. Практикум по решению задач (алгебра): учеб. пособие для студентов [Текст]/ Т.Н. Полякова; М-во прос. РСФСР, Моск. гос. пед. ин-т имени В. И. Ленина, кафедра алгебры. М., 1977. 121 с.
73.Пособие по математике для поступающих в вузы [Текст] / Под ред. Г.Н. Яковлева. М.: Наука, 1981. 608с.
74.Потапов, М.К. Алгебра и анализ элементарных функций [Текст]: Учеб. пособие для подготовит. отд-й вузов / М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко. – М: Наука, 1980. – 560 с.

75. Романцова, С.А., Сычиков, А.Ф. Задачник-практикум по элементарной математике [Текст] / С.А. Романцова, А.Ф. Сычиков; Калининский гос. пед. ин-т им. М. и. Калинина. – Для студентов 1 курсов мат. факультетов. Ч. 1. Калинин, 1968. 106 с.
76.Рыбников, К.А. Введение в комбинаторный анализ [Текст]. – 2-е изд. – М.: Издательство МГУ, 1985. – 308 с.
77.Сборник задач по математике для поступающих во втузы [Текст] / Под ред. М.И. Сканави. М.: Высшая школа, 1988.
78.Смышляев, В.К. Практикум по решению задач школьной математики. Выпуск V. Практикум по решению задач повышенной трудности [Текст] / В.К. Смышляев. М: Просвещение, 1978.96с.
79.Справочник по элементарной математике для поступающих в вузы [Текст] / Г.П. Бевз, П.Ф. Фильчаков, К.И. Швецов, Ф.П. Яремчук; Под ред. П.Ф. Фильчакова. Киев: Наукова думка, 1972. 527 с.
80.Туманов, С.И. Поиски решения задачи [Текст] / С. И. Туманов. М.: Просвещение, 1969. 280 с.
81.Туманов, С.И. Элементарная алгебра. Пособие для самообразования. [Текст] / С. И. Туманов. – 3-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1970. 864 с.
82.Успенский, В.В. Школьные исследовательские задачи [Текст] // Советская педагогика, 1968. № 7.
83.Фельдман, Я.С., Жаржевский, А.Я. Математика. Решение задач с модулями: пособие для абитуриентов и старшеклассников [Текст]/ Я.С. Фельдман, А.Я. Жаржевский. СПб: Изд. ООО «Оракул», 1997. 304 с.
84.Финкельштейн, В.М. Когда задача не выходит…: рекомендации для тех, кто хочет научиться решать задачи, развить свои способности: (в помощь учащимся 6-11 классов)[Текст]/ В.М. Финкельштейн. М.: Шк.-Пресс, 1999. 64 с.
85.Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи [Текст] / Л.М. Фридман. М.: Моск. психол.-социал. ин-т; Воронеж: Издательство НПО «МОДЭК», 1999. 236 с.
86.Фридман, Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач [Текст] / Л.М. Фридман; Науч.-исслед. ин-т общей и пед. психологии АПН СССР. М.: Педагогика, 1977. 207 с.
87.Фридман, Л.М. Основы проблемологии. Серия «Проблемология» [Текст] / Л. М. Фридман. – М.: СИНТЕГ, 2001. – 228 с.
88.Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи: кн. для учащихся [Текст] / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1984. 175 с.
89. Халамайзер, А.Я. Комбинаторика и бином Ньютона [Текст]. – М. Просвещение, 1980. – 32 с.

90.Хрущёва, И.В. Элементарная математика с точки зрения высшей: учеб. пособие для курсантов первых курсов [Текст]/ И.В. Хрущёва и др.; Воен. инж.-косм. ун-т им. А.Ф. Можайского. СПб: ВИКУ, 1999. 166 с.
91.Цукарь, А.Я. Метод взаимно обратных задач в обучении математике: метод. рекомендации [Текст] / Л.А. Фадина, М.И. Таненбаум (отв. ред.); Новосиб. обл. ин-т усоверш. учителей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. 36 с.
92.Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. Учеб. пособие для 10-го кл. сред. шк. [Текст] / И.Ф. Шарыгин. М.: Просвещение, 1989. 350 с.
93.Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач Учеб. пособие для 11-го кл. сред.шк. [Текст] / И.Ф. Шарыгин. М.: Просвещение, 1991. 383 с.
94.Шахмейстер, А.Х. Множества. Функции. Последовательности. Прогресси: пособие для школьников, абитуриентов и учителей [Текст] / А.Х. Шахмейстер. – 3-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2014. 291 с.
95.Шахмейстер, А.Х. Логарифмы. Пособие для школьников, абитуриентов и преподавателей /А.Х. Шахмейстер. – 3-е изд., испр. и доп.СПб, М.: Петроглиф Виктория плюс, Изд-во МЦНМО, 2011. 274 с.
96.Шахмейстер, А.Х. Построение графиков функций элементарными методами. Пособие для школьников, абитуриентов и учителей [Текст] / А.Х. Шахмейстер. – 3-е изд., испр. и доп. М., СПб: Изд-во МЦНМО, Петроглиф Виктория плюс, 2011. 183 с.
97.Шибасов, Л.П. За страницами учебника математики. Мат. анализ. Теория вероятностей. Старинные и занимательные задачи. Кн. для учащихся 10-11-х классов общеобразовательных учреждений [Текст] / Л.П. Шибасов. М.: Просвещение, 1997. 268 с.
98.Шибасов, Л.П. От единицы до бесконечности [Текст] /Л.П. Шибасов. М.: Дрофа, 2004. 206 с.
99.Шибасов, Л. П. История математики: учебное пособие для студентов педвузов [Текст] /Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова. Коломна: Коломенский государственный педагогический институт, 2008. 487 с.
100. Шипачев, В. С. Основы высшей математики [Текст]: Учеб. пособие для студентов вузов / В.С. Щипачев; Под ред. акад. А.Н. Тихонова. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 479 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 1. ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ПРИЛОЖЕНИЕ № 2. ТАБЛИЦА КУБОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
1	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859
2	8000	9261	10648	12167	13824	15625	17576	19683	21952	24389
3	27000	29791	32768	35937	39304	42875	46656	50653	54872	59319
4	64000	68921	74088	79507	85184	91125	97336	103823	110592	117649
5	125000	132651	140608	148877	157464	166375	175616	185193	195112	205379
6	216000	226981	238328	250047	262144	274625	287496	300763	314432	328509
7	343000	357911	373248	389017	405224	421875	438976	456533	474552	493039
8	512000	531441	551368	571787	592704	614125	636056	658503	681472	704969
9	729000	753571	778688	804357	830584	857375	884736	912673	941192	970299

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. ТАБЛИЦА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	1,41421	1,73205	2	2,23607	2,44949	2,64575	2,82843	3
1	3,16228	3,31662	3,4641	3,60555	3,74166	3,87298	4	4,12311	4,24264	4,3589
2	4,47214	4,58258	4,69042	4,79583	4,89898	5	5,09902	5,19615	5,2915	5,38516
3	5,47723	5,56776	5,65685	5,74456	5,83095	5,91608	6	6,08276	6,16441	6,245
4	6,32456	6,40312	6,48074	6,55744	6,63325	6,7082	6,78233	6,85565	6,9282	7
5	7,07107	7,14143	7,2111	7,28011	7,34847	7,4162	7,48331	7,54983	7,61577	7,68115
6	7,74597	7,81025	7,87401	7,93725	8	8,06226	8,12404	8,18535	8,24621	8,30662
7	8,3666	8,42615	8,48528	8,544	8,60233	8,66025	8,7178	8,77496	8,83176	8,88819
8	8,94427	9	9,05539	9,11043	9,16515	9,21954	9,27362	9,32738	9,38083	9,43398
9	9,48683	9,53939	9,59166	9,64365	9,69536	9,74679	9,79796	9,84886	9,89949	9,94987

ПРИЛОЖЕНИЕ № 4. ТАБЛИЦА КУБИЧЕСКИХ КОРНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	1,25992	1,44225	1,5874	1,70998	1,81712	1,91293	2	2,08008
1	2,15443	2,22398	2,28943	2,35133	2,41014	2,46621	2,51984	2,57128	2,62074	2,6684
2	2,71442	2,75892	2,80204	2,84387	2,8845	2,92402	2,9625	3	3,03659	3,07232
3	3,10723	3,14138	3,1748	3,20753	3,23961	3,27107	3,30193	3,33222	3,36198	3,39121
4	3,41995	3,44822	3,47603	3,5034	3,53035	3,55689	3,58305	3,60883	3,63424	3,65931
5	3,68403	3,70843	3,73251	3,75629	3,77976	3,80295	3,82586	3,8485	3,87088	3,893
6	3,91487	3,9365	3,95789	3,97906	4	4,02073	4,04124	4,06155	4,08166	4,10157
7	4,12129	4,14082	4,16017	4,17934	4,19834	4,21716	4,23582	4,25432	4,27266	4,29084
8	4,30887	4,32675	4,34448	4,36207	4,37952	4,39683	4,414	4,43105	4,44796	4,46475
9	4,4814	4,49794	4,51436	4,53065	4,54684	4,5629	4,57886	4,5947	4,61044	4,62607

ПРИЛОЖЕНИЕ № 5. ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ОТ 2 ДО 1000

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251
257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317
331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557
563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619
631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787
797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953
967	971	977	983	991	997

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА IV. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Учебное издание

Галина Георгиевна Ельчанинова,
Роман Анатольевич Мельников

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1.

АРИФМЕТИКА. НАЧАЛА АЛГЕБРЫ. КОМБИНАТОРИКА. ФУНКЦИИ

Учебное пособие

Техническое исполнение – В. М. Гришин
Книга печатается в авторской редакции

Формат 60 х 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Усл.-печ.л. 8 Уч.-изд.л. 8
Тираж 500 экз. (1-й завод 1-50 экз.). Заказ 93

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28