МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

В.Е. Щербатых

Базовые элементы математики

Учебное пособие для 1 курса СПО

Елец – 2018

УДК 51.0
ББК 22.1
Щ 61

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета имени И.А. Бунина
от 29.01.2018, протокол № 1

Рецензенты:
Тарова И.Н., кандидат педагогических наук, доцент
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»,
Трубицына Л.Н., учитель математики
НОУ гимназии «Альтернатива» (г. Елец)

В.Е. Щербатых

Щ 61 Базовые элементы математики: учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2018. – 51 с.

В последнее время выпускники 9-х классов все чаще хотят получать среднее профессиональное образование, для чего поступают в техникумы, колледжи, центры СПО ВУЗов, целью которых является подготовка хороших специалистов среднего звена. Поступление осуществляется без экзаменов. Но это не значит, что абитуриенты могут ничего не знать по базовым дисциплинам основного общего образования.

В пособии определен необходимый математический минимум, который обязан знать каждый школьник, окончивший 9 классов школы, без которого невозможно продолжать обучение в 10 классе или на СПО.

Представленный методический материал поможет сориентироваться в разных темах алгебры и геометрии в объеме 9-ти классов. В доступной форме (на примерах и чертежах) излагаются основные понятия, свойства математических объектов, методы решений уравнений, неравенств, разъясняется последовательность построения графиков функций.

Пособие адресовано оканчивающим 9-й класс школы и студентам первого курса СПО различных направлений.

УДК 51.0
ББК 22.1

АЛГЕБРА

Числовые множества

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Объекты, из которых состоит множество, называют элементами множества. Элементами множества могут быть числа, некоторые предметы, понятия и т.п. Множества чаще всего обозначают заглавными буквами латинского алфавита, а его элементы – строчными. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки, например, A={1,2,3,5,7}. Если элемент $\boldsymbol{x}$ принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$ (символ $\in$ обозначает "принадлежит"). Если x не принадлежит X, то пишут $x \notin X$ (символ $\notin$ обозначает "не принадлежит").

Пустое множество – это множество, не содержащее ни одного элемента, оно обозначается символом $\emptyset$. Если множество А является частью множества В, то это записывают так: $A \subset B$ (символ $\subset$ обозначает "содержится"). В этом случае множество A называется подмножеством множества B. Если A – непустое множество, и $\emptyset$ - пустое множество, тогда по определению множество A и пустое множество $\emptyset$ называются несобственными подмножествами множества A. Остальные подмножества множества А называются собственными.

Два множества A и B будут равны ($A=B$), если они состоят из одних и тех же элементов, например, если $A=\{1,12,31,45\}$, $B=\{31,12,45,1\}$, то $A \neq B$.

Объединением или суммой множеств A *и* B (обозначается символом "$\cup$") называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств. Например, если $A=\{1,3,10\}$, $B=\{3,4,5,12\}$, то $A \cup B = \{1,3,4,5,10,12\}$.

Пересечением или произведением множеств A *и* B (обозначается символом "$\cap$") называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B. Например, если $A=\{1,2,4, 7,10\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$, то $A \cap B = \{2,4\}$.

Объединение пустого множества с любым другим множеством равно последнему множеству.

Пересечение пустого множества с любым другим множеством равно пустому множеству.

Основными числовыми множествами в математике являются следующие множества.

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5, \dots\}$ – множество натуральных чисел.

У этого множества есть подмножество, которое называется множеством простых чисел. Простое число – это натуральное число, которое имеет ровно два различных натуральных делителя – единицу и самого себя. Из этого определения ясно, что 1 не является простым числом (она имеет только один делитель). К простым числам относится, например, число 2 (делители 1 и 2 – только два делителя), а 6 не является простым числом, т.к. делителей у него уже три: 1,2,3 –больше двух. Существуют таблицы простых чисел, которые упрощают некоторые вычисления.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\}$ – множество целых чисел.

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ – множество рациональных чисел. Это множество можно определить и как множество бесконечных десятичных периодических дробей. Например, $\frac{1}{3} = 0{,}33333 \dots. = 0,(3)$; $\frac{7}{11} = 0{,}636363 \dots = 0,(63)$.

Очевидно: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, т.к. $2 = \frac{2}{1}$, $-5 = \frac{-5}{1}$.

$\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел, которое определяется, как множество бесконечных десятичных непериодических дробей. Например, число 0,1010010001... – иррациональное число, т.к. отчетливо видно, что периода здесь нет. К этому множеству относятся, например, числа $\boldsymbol{\pi = 3,14}15926535 \dots$ (*число* "пи"), $\boldsymbol{e = 2,71}82818284 \dots$ (*число* "е"), $\sqrt{2} = 1{,}414213562 \dots$.

Множества $\mathbb{Q}$ *и* $\mathbb{I}$ не пересекаются. Это означает, что ни одно иррациональное число невозможно представить в виде рациональной дроби $\frac{m}{n}$, т.е. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ – объединение рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных (или вещественных) чисел. **Множество $\mathbb{R}$ сплошь заполняет числовую ось.**

Часто при выполнении некоторых вычислений необходимо знать, делится ли данное натуральное число на 2,3,4 и т.д. или нет. Поэтому полезно знать следующие признаки делимости.

На 2: число делится на 2, если последняя цифра числа четная;

на 3: число делится на 3, если сумма цифр числа делится на 3;

на 4: число делится на 4, если две последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 4;

на 5: число делится на 5, если последняя цифра числа 0 или 5;

на 6: число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3 (смотри соответствующие признаки);

на 8: число делится на 8, если три последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 8;

на 9: число делится на 9, если сумма цифр числа делится на 9;

на 11: число делится на 11, если сумма цифр, стоящих на четных местах отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, кратное 11;

на 25: число делится на 25, если две последние цифры числа 00,25,50, или 75.

Формулы сокращенного умножения

Поскольку будем говорить об умножении (делении), то необходимо напомнить правила знаков при умножении или делении: минус на минус дает плюс, плюс на минус дает минус.

Важно:

1) произведение двух множителей больше нуля тогда и только тогда, когда оба множителя имеют одинаковые знаки; произведение двух множителей меньше нуля тогда и только тогда, когда оба множителя имеют разные знаки;

2) дробь больше нуля тогда и только тогда, когда числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки; дробь меньше нуля тогда и только тогда, когда числитель и знаменатель имеют разные знаки.

Эти утверждения необходимо помнить, чтобы успешно преобразовывать различные выражения, дроби, без ошибок решать неравенства.

Формулы сокращённого умножения крайне необходимы во всех разделах математики. Они применяются при сокращении дробей, в упрощении выражений, при умножении многочленов, раскрытии скобок, приведения многочленов к стандартному виду, при решении уравнений, исследовании функций и т.д. **Эти формулы нужно знать наизусть!!!**

Ниже приведены основные формулы сокращенного умножения с правилами для заучивания, а также простейшие примеры использования их:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$ ***– квадрат суммы двух выражений.***

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого выражения на второе, плюс квадрат второго выражения.

Примеры:

$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25,$

$(2k + 3n)^2 = (2k)^2 + 2\cdot 2k\cdot 3n + (3n)^2 = 4k^2 + 12kn + 9n^2.$

$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$ ***–квадрат разности двух выражений.***

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения.

Примеры:

$(x – 7)^2 = x^2 – 14x + 49,$

$(3a – 5b)^2 = (3a)^2 - 2\cdot 3a\cdot 5b + (5b)^2 = 9a^2 – 30ab + 25b^2.$

$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$ ***- разность квадратов двух выражений.***

Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Примеры:

$49 – x^2 = (7 – x)(7 + x),$

$9x^2 – 16y^2 = (3x)^2 – (4y)^2 = (3x – 4y)(3x + 4y).$

$\boldsymbol{a^3+b^3 = (a+b)(a^2 - ab+b^2)}$***- сумма кубов двух выражений.***

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности.

Примеры:

$125+8x^3 = 5^3+(2x)^3 =(5+2x)(5^2 — 5\cdot 2x +(2x)^2)=(5 + 2x)(25 – 10x + 4x^2),$

$1 + 27m^3 = 1^3 + (3m)^3 = (1 + 3m)(1 – 3m + 9m^2).$

$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ ab+b^2)}$ ***– разность кубов двух выражений.***

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы.

Примеры:

$64c^3 – 8 =(4c)^3 – 2^3 =(4c – 2)((4c)^2+4c\cdot 2 + 2^2) = (4c – 2)(16c^2 + 8c + 4),$

$27a^3 – 125b^3 =(3a)^3 – (5b)^3 = (3a – 5b)(9a^2 + 15ab + 25b^2).$

$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ ***– куб суммы двух выражений.***

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго плюс куб второго выражения.

Примеры:

$(m+2n)^3=m^3+3\cdot m^2\cdot 2n+3\cdot m\cdot(2n)^2+(2n)^3=m^3+6m^2n+12mn^2+8n^3$,

$(3x+2y)^3=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2+(2y)^3=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$.

$\mathbf{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$ ***– куб разности двух выражений.***

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго минус куб второго выражения.

Примеры:

$(2x-y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$,

$(x-3n)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 3n+3\cdot x\cdot(3n)^2-(3n)^3=x^3-9x^2n+27xn^2-27n^3$.

Дроби

Появление дробей связано у многих народов с делением добычи после охоты. В связи с этим необходимым действием, люди стали употреблять выражения: половина, треть, два с половиной и т.д. Отсюда можно сделать вывод, что дробные числа возникли как результат измерения величин. Если не знать дробей и не уметь ими пользоваться, то человек становится беспомощным не только в математике, но и в повседневной жизни.

Дробью в математике называют рациональное число, равное одной или нескольким долям, на которые поделена единица. При этом запись дроби должна содержать указание на два числа: одно из них указывает, на сколько именно долей была разбита единица при создании этой дроби, а другое – сколько из этих долей включает в себя дробное число. Если эти два числа записываются в виде разделенных чертой числителя и знаменателя, то такой формат записи называют обыкновенной дробью. Например, $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{15}{3}$.

Обыкновенные дроби бывают правильными (когда числитель меньше знаменателя) или неправильными (когда числитель больше или равен знаменателю). Всякую неправильную дробь можно представить в виде натурального числа или смешанной дроби. Для преобразования неправильной дроби в смешанную дробь необходимо поделить числитель дроби на ее знаменатель; остаток от деления записать в числитель, а знаменатель оставить прежним, результат от деления записать в качестве целой части. Например: $\frac{20}{4} = \mathbf{5}$; $\mathbf{1}\frac{17}{4} = \mathbf{4}\frac{1}{4}$.

Важно, что знак в выражении $\mathbf{4}\frac{1}{4}$ между 4 и $\frac{1}{4}$ не умножение, а сложение, т.е. $\mathbf{4}\frac{1}{4} = \mathbf{4} + \frac{1}{4}$!

Такая форма дробей не всегда бывает удобной для записей, вычислений, да и сравнивать числа в виде обыкновенной дроби сложно (попробуйте определить без калькулятора большее число: $\frac{31}{42}$ или $\frac{43}{54}$?). Поэтому существует и другой формат записи дробей, называемый десятичным, основное назначение которого – упрощение работы с математическими величинами.

Десятичная дробь — это любая числовая дробь, в знаменателе которой стоит степень десятки. Например, $\frac{3}{10} = \mathbf{0,3}$; $\frac{725}{100} = \mathbf{7,25}$; $\frac{341}{1000} = \mathbf{0,341}$. Здесь справа от обыкновенной дроби десятичная запись ее, т. е. целая часть отделяется от дробной с помощью обычной точки или запятой. При этом сам разделитель (точка или запятая) называется десятичной точкой. Предполагаем, что действия с дробями слушателям знакомы.

Важно:

1) если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то величина дроби не изменится (основное свойство дроби):

$$\frac{a}{c} = \frac{a \cdot b}{c \cdot b} = \frac{a : b}{c : b}.$$

2) Справедливы следующие тождества:

$$\frac{ab}{c} = a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b.$$

3) При преобразованиях: знаменатель знаменателя переходит в числитель, а знаменатель числителя переходит в знаменатель:

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}\ ;\ \frac{\frac{a}{c}}{b} = \frac{a}{c \cdot b}.$$

Степени

Степенью числа a с натуральным показателем n называется произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a.$$

Число a называется ***основанием степени***. Число n называется ***показателем степени*** (n показывает, сколько раз основание надо взять в качестве множителя).

Формулы и свойства степеней используются при сокращении и упрощении сложных выражений, при решении уравнений и неравенств, при вычислениях. Основные свойства степеней:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

4) $(a:b)^n = a^n : b^n$;

5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

6) если n – целое положительное число, a и b – положительные числа, причем $a<b$, то $a^n<b^n$ и $a^{-n}>b^{-n}$;

7) если m и n – целые числа, причем $m>n$, то при $0<a<1$ справедливо неравенство $a^m<a^n$, а при $a>1$ выполняется неравенство $a^m>a^n$.

При $a=0$ степени a^m **и** a^n имеют смысл лишь когда m **и** n есть числа натуральные. Степенью числа a $(a \neq 0)$ с отрицательным показателем $-n$ есть дробь $\frac{1}{a^n}$, т.е. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Важно: $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Примеры: $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$; $\frac{1}{3^{-5}} = 3^5$; $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Корни

Арифметический квадратный корень $\sqrt{a}$ — это неотрицательное число, квадрат которого равен a, $(a \geq 0)$. *Например,* $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{121} = 11$.

Важно: на множестве действительных чисел не существует квадратного корня из отрицательного числа. Иными словами, на множестве действительных чисел квадратный корень из отрицательного числа не имеет смысла.

Основные свойства квадратных корней (если $a \geq 0$, $b \geq 0$) :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\,, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,.$$

Например, $\sqrt{64} = \sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$; $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

Кубическим корнем из числа a называется число, куб которого равен a.

Кубический корень из числа a, в отличие от квадратного корня, всегда существует, причем не только для неотрицательных чисел a, но и для любого действительного числа a. *Например,* $\sqrt[3]{-1} = -1$; $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[3]{8} = 2$.

Важно: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$; $a = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{a^3} = a$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $(a \geq 0$, $b \geq 0)$; $\sqrt{a^2} = |a|$ **(при произвольном a)** .

Корнем n-ой степени из числа a называется число b, n-ая степень которого равна a : $\sqrt[n]{a} = b$, $b^n = a$. *Например,* $\sqrt[4]{625} = 5$.

Корень четной степени из отрицательного числа не существует. *Например,* $\sqrt[4]{-81}$ – не имеет смысла. Для корней нечетной степени справедливо равенство $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Основные свойства :

Если $a \geq 0$, $b > 0$, $n \geq 2$ и $m \geq 2$– натуральные числа, то

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, **2)** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, **3)** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, **4)** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$,

5) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. *Например,* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$; $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Модуль числа

Модуль числа a записывается как $|\boldsymbol{a}|$. Вертикальные черточки слева и справа от числа образуют знак модуля. Модуль числа a – это либо само число a, если a – положительное число, либо число $-a$, противоположное числу a, если a – отрицательное число, либо *0*, если a=*0*. Это определение модуля в математическом виде записывается так:

$$|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a}, & \boldsymbol{a} \geq \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{a} < \mathbf{0} \end{cases}.$$

Например, $|4| = 4$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$; $|1{,}23| = 1{,}23$; $\left|-\frac{5}{7}\right| = \frac{5}{7}$.

С геометрической точки зрения модуль числа – это расстояние от начала отсчета координат (т.е. от точки 0) до точки, соответствующей числу $\boldsymbol{a}$. Модуль разности двух чисел a и b равен расстоянию между точками координатной прямой с координатами a и b.

Важно: $\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |\boldsymbol{a}|$. Например, $\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2} = \left|1-\sqrt{7}\right| = \sqrt{7}-1$ (так, как $1-\sqrt{7} < 0$).

Перечислим некоторые свойства модуля.

1) Модуль числа не может быть отрицательным числом.

2) Модуль числа равен нулю тогда и только тогда, когда это число есть нуль.

3) Противоположные числа имеют равные модули, т. е. для любого числа a имеем: $|\boldsymbol{a}| = |-\boldsymbol{a}|$.

4) Модуль произведения двух чисел равен произведению модулей этих чисел, то есть $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$.

Модуль частного от деления a на b равен частному от деления модуля числа a на модуль числа b, то есть $\left|\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right| = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$.

Важно: простейшие выражения с модулями раскрываются следующим образом:

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \pm\boldsymbol{a}; \qquad (1)$$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < \boldsymbol{a} \Leftrightarrow -\boldsymbol{a} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{a}\ ; \qquad (2)$$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| > \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < -\boldsymbol{a} \end{array}\right. . \qquad (3)$$

Примеры:

а) Решить уравнение $|2x+1|=5$.

Работаем по формуле (1). Либо под знаком модуля стоит положительное выражение, и тогда $|2x+1|=2x+1$, либо это выражение отрицательное, и тогда $|2x+1|=-(2x+1)$. В первом случае наше уравнение перепишется так:

$$2x+1=5 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2.$$

Во втором случае имеем: $-2x-1=5 \Leftrightarrow 2x+1=-5 \Leftrightarrow 2x=-6 \Leftrightarrow x=-3.$

Ответ: $x=2,\ x=-3.$

б) Решить неравенство $|2x+3|<4$.

Используем формулу (2): $|2x+3|<4 \Leftrightarrow -4<2x+3<4 \Leftrightarrow$

$$-7<2x<1 \Leftrightarrow -3{,}5<x<0{,}5;$$

Ответ: $x \in (-3{,}5; 0{,}5)$.

в) Решить неравенство $|2x-7|>5$.

По формуле (3) имеем: $|2x-7|>5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-7>5 \\ 2x-7<-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} 2x>12 \\ 2x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>6 \\ x<1. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$.

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение – это уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где коэффициенты a, b и c – произвольные числа, причем $a \neq 0$. Для решения квадратного уравнения вначале нужно найти дискриминант $D=b^2-4ac$. Если $D<0$, то действительных корней уравнение не имеет; если $D=0$, то будет **два одинаковых** корня; если $D>0$, то будет два разных корня. Корни вычисляются по формулам

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Уравнение $ax^2+bx+c=0$ называется неполным квадратным уравнением, если $a=0$ или $b=0$.

Пусть $b = 0$. Тогда имеем $ax^2 + c = 0$, откуда $x^2 = -\frac{c}{a}$, $\Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Поскольку арифметический квадратный корень существует только из неотрицательного числа, последнее равенство имеет смысл

исключительно при $-\frac{c}{a} \geq 0$, если же $-\frac{c}{a} < 0$, корней не будет.

Пусть $c = 0$. Уравнение будет иметь вид $ax^2 + bx = 0$ и корней всегда будет два, для нахождения которых достаточно разложить левую часть на множители

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Если $b = c = 0$ **,** то уравнение принимает вид $ax^2=0$**.** Очевидно, такое уравнение имеет единственный корень $x=0$.

Пример. Решить уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Здесь $a = 1$; $b = -2$; $c = -3$; $D = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot(-3) = 16$. $D > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет два разных корня. Находим их:

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{2\cdot1} = 3;\quad x_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{2\cdot1} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Теперь можно рассмотреть другой способ решения квадратных уравнений – с помощью теоремы Виета, которую имеет смысл применять к **приведенным** квадратным уравнениям (т.е. когда $a = 1$): $x^2+bx+c=0$.

Теорема Виета. *Сумма корней приведенного квадратного трехчлена* $x^2 + px + q = 0$ *равна его второму коэффициенту* b с *противоположным знаком, а произведение – свободному члену* с, т. е.

$$x_1 + x_2 = -\mathrm{b} \text{ и } x_1 \cdot x_2 = c.$$

*Пример***.** Решить уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Так как в этом уравнении $a = 1$, то квадратное уравнение считается приведённым, значит можно использовать метод Виета. Выпишем коэффициенты ***«b» и «c»: b=4; c= –5***. Запишем теорему Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = -5 \end{cases},$$

Методом подбора приходим к тому, что корнями уравнения будут числа -5 и 1. Ответ: $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Очень полезно уметь раскладывать многочлены на множители. Это часто используется при решении уравнений, неравенств, для преобразования алгебраических выражений. Разложить многочлен на множители – это значит, представить многочлен в виде произведения двух или нескольких множителей. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$. Тогда этот трехчлен раскладывается на линейные множители следующим образом: $\boldsymbol{x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)}$.

Разложим на множители многочлен из примера, рассмотренного выше: $\boldsymbol{x^2+ 4x - 5 =(x-1)(x+5)}$.

Важно: если квадратный трехчлен ax^2+bx+c не является приведенным, его также можно разложить на множители, но уже немного по другой формуле: $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

*Пример***.** Разложим на множители многочлен $2y^2 - 2y - 24$.

Приравняв многочлен к 0, найдём корни получившегося уравнения $2y^2 -2y - 24=0$: $y_1 =4$, $y_2 = -3$. Тогда $\boldsymbol{2y^2 - 2y - 24 = 2(y - 4)(y + 3)}$.

Квадратные неравенства

Неравенство называется квадратным, если старшая степень неизвестного , входящего в уравнение, равна двум, например, $\boldsymbol{x^2+ 5x \geq 0}$; $\boldsymbol{x^2+x-12 \leq 0}$; $\boldsymbol{x^2 - 4<0}$. Квадратные неравенства можно решать несколькими способами. Расскажем про один из них, который называют методом интервалов.

Метод интервалов заключается в следующем:

1) необходимо перенести все члены неравенства в левую часть так, чтобы в правой части неравенства остался только ноль;

2) сделать так, чтобы при неизвестном $\boldsymbol{x^2}$ стоял положительный коэффициент (при необходимости левую и правую части неравенства умножаем на " –1");

Важно: при умножении (или делении) неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный.

3) приравнять левую часть неравенства к нулю и решить полученное квадратное уравнение;

4) полученные корни уравнения разместить на числовой оси в порядке возрастания, тем самым получив интервалы. Корни обозначать на оси нужно правильно: если неравенство строгое (знаки "<" или ">"), то корни отмечаются "пустым кружком" (говорят: выкалываем точки) – этих точек на оси уже как бы нет; если неравенство нестрогое (знаки "≤" или "≥"), то корни отмечаем жирными точками – это уже часть решения;

5) далее рисуем "арки" над каждым интервалом. Справа налево, начиная с "+" , проставить знаки "+" и "–" на каждом интервале, чередуя эти знаки;

6) выбрать интервалы, на которых проставленные знаки совпадают со знаком неравенства и эти интервалы записать в ответ.

Важно: При определении того, какие интервалы нам нужно брать в ответ, исходить нужно из самого последнего изменения неравенства перед нахождением его корней.

Пример 1: решить неравенство $\boldsymbol{x^2+x-12}<0$.

Пункт 1) делать не надо, т.к. справа мы в исходном выражении уже имеем ноль.

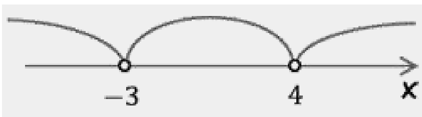
Пункт 2) тоже делать не нужно, т.к. коэффициент при $\boldsymbol{x^2}$ положительный и он равен единице (в этих случаях коэффициенты не пишутся).

Пункт 3): решаем уравнение $x^2+x-12=0$,

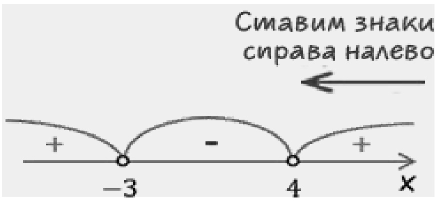
$$D=1^2-4\cdot 1\cdot(-12)=49,$$

$$x_1=\frac{1-7}{2}=-3;\quad x_2=\frac{1+7}{2}=4 \text{ – корни.}$$

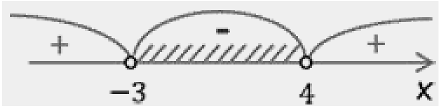
Пункт 4):



Пункт 5):



Пункт 6): выбираем интервалы, на которых проставленные знаки соответствуют знаку неравенства "<", т.е. с минусом:



Ответ: $x \in (-3; 4)$.

Пример 2. Решить неравенство $\mathbf{2x^2 - x \geq 0}$.

Здесь также первые два пункта делать не нужно по тем же причинам.

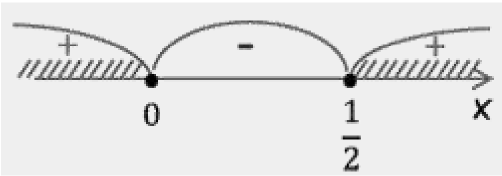
Пункт 3): раскладывая левую часть на множители, решаем уравнение

$$2x^2 - x = 0,$$

$$x(2x - 1) = 0.$$

Пользуемся утверждение: произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому либо $x = 0$, либо $2x - 1 = 0$. Следовательно, $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Результатом пунктов 4) –6) является следующий чертеж:



Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

Пример 3. Решить неравенство $\mathbf{-x^2 + 4 \geq -3x}$.

Пункт 1): переносим $3x$ из правой части неравенства в левую и при этом меняем знак:

$$-x^2 + 3x + 4 \geq 0.$$

Пункт 2): перед x^2 стоит отрицательный коэффициент $a = -1$, поэтому обе части неравенства умножаем на "-1" (при этом знак неравенства изменится):

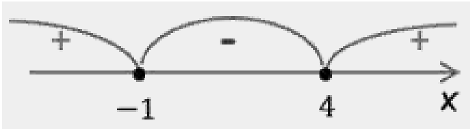
$$x^2 - 3x - 4 \leq 0.$$

Пункт 3): решаем уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$,

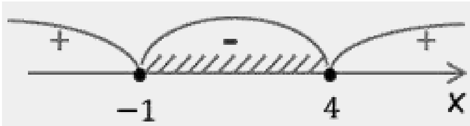
$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}; \quad x_1 = -1; \ x_2 = 4\,.$$

Пункты 4) и 5) :



Пункт 6) :



Ответ: $x \in [-1; 4]$.

Функции

Функция в математике – это понятие, которое отражает отношения элементов множеств между собой. Иначе говоря, это определенный закон, согласно которому каждому элементу одного множества ставится в соответствие элемент другого множества. При этом первое множество называется областью определения и обозначается $\mathbb{X}$, а второе – областью значений и обозначается $\mathbb{Y}$.

Другими словами, функцией называют зависимость y $(y \in \mathbb{Y})$ *от* x $(x \in \mathbb{X})$ *, где* **x** *называют независимой переменной или аргументом функции, а* **y** *называют зависимой переменной или значением функции.*

Существуют три основных способа задания функции, которые тесно связаны между собой.

Первый способ: задание функции формулой. Этот способ позволяет сразу по конкретному значению аргумента x найти значение функции y. Например, рассмотрим функцию, заданную формулой $\boldsymbol{y(x) = 32x + 5}$. Найдем значение функции y при $x=0$. Для этого подставим в формулу вместо x число 0. Вычисления записываются так: $y(0) = 32 \cdot 0 + 5 = 5$. Аналогично находятся и другие значения y, например, при $x=1$ и $x=2$: $y(1) = 32 \cdot 1 + 5 = 37$; $y(2) = 32 \cdot 2 + 5 = 64 + 5 = 69$.

Второй способ: ***табличный способ задания функции.*** Практически любую функцию можно записать с помощью таблицы. Для этого достаточно найти несколько значений y для произвольно выбранных значений x. Для примера рассмотрим функцию $\boldsymbol{y(x) = -x+4}$ и найдем ее значения при $\boldsymbol{x= -1; x=0; x=1}$.

$\boldsymbol{y(-1) = -(-1)+4=5; \quad y(0) = -0+4=4; \quad y(1) = -1+4=3.}$

Записывая полученные результаты в таблицу,

x	y
-1	5
0	4
1	3

получаем табличный способ задания функции $y(x) = -x+4$.

Третий способ: графический способ задания функции. Вначале необходимо вспомнить прямоугольную систему координат на плоскости, которую обычно называют декартовой (по имени французского математика Рене Декарта (*1596–1650*), который предложил этот способ задавать положение точки на плоскости). Прямоугольная система координат образуется двумя взаимно перпендикулярными осями координат.

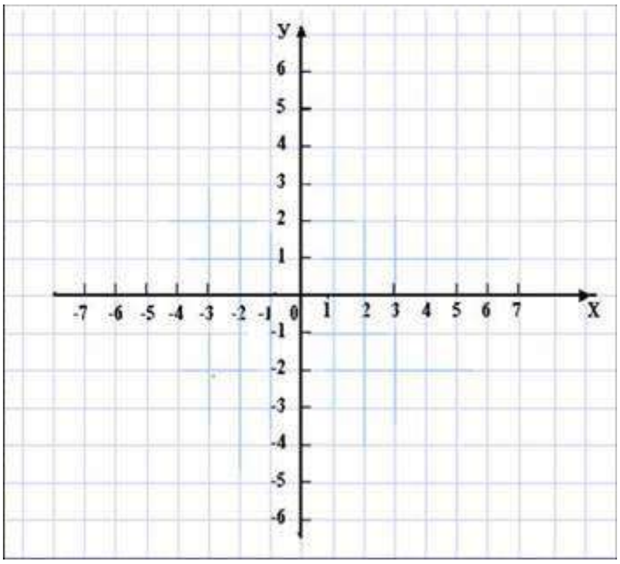
Одну рисуют горизонтально, называют осью абсцисс, обозначают буквой *"X"* и записывают $0x$. Положительное направление выбирают слева направо и показывают стрелкой на оси.

Вторую ось проводят вертикально, ее называют осью ординат, обозначают буквой *"Y"* и записывают $0y$. Положительное направление на оси выбирают снизу вверх и тоже показывают стрелкой на оси.

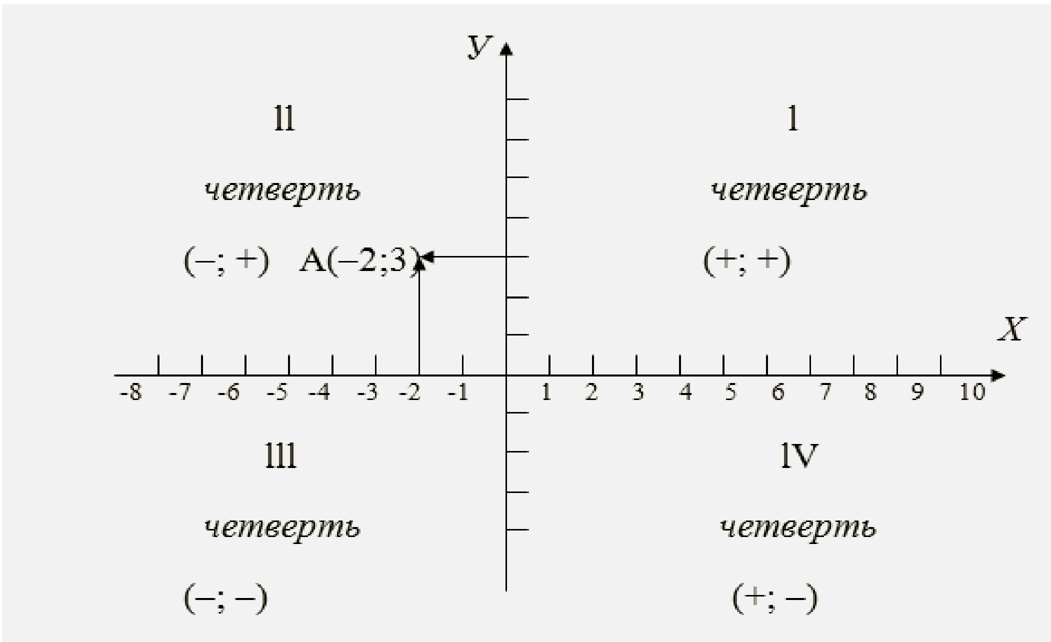
Оси взаимно перпендикулярны (т.е. угол между ними равен 90^0) и пересекаются в точке , которую обозначают "0" и называют ***началом координат***. Точка "0" является началом отсчета для каждой из осей.

Цифры, обозначающие числовые значения на осях можно располагать как справа, так и слева от оси $0y$. Цифры на оси $0x$, как правило, пишут внизу под осью. Обычно единичный отрезок на оси $0y$ равен единичному отрезку на оси $0x$.

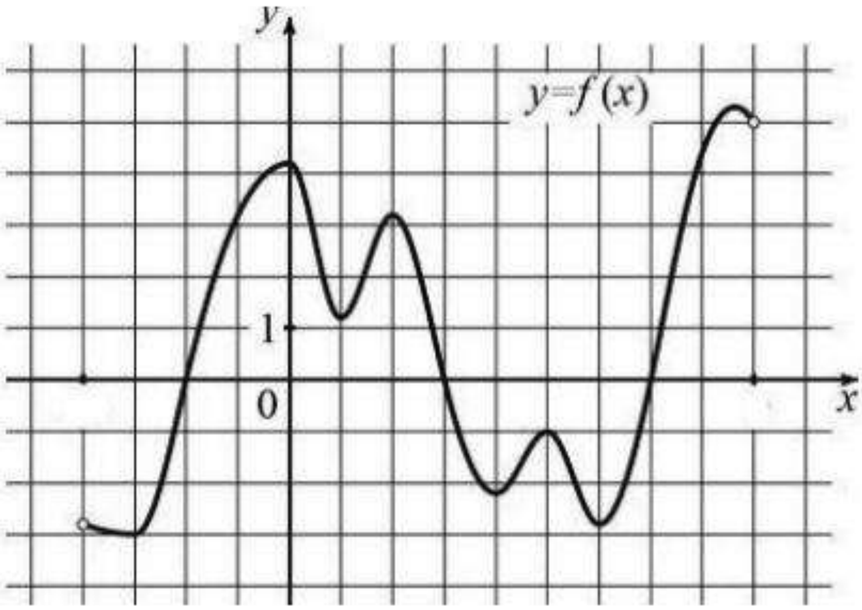
Важно: любая точка, находящаяся на оси $0x$, всегда имеет вторую координату $y=0$; любая точка, находящаяся на оси $0y$, всегда имеет первую координату $x=0$.



Оси координат делят плоскость на 4 угла, которые называют координатными четвертями. Четверть, образованная положительными полуосями (правый верхний угол) считается первой (I) четвертью. И далее, против часовой стрелки идут II, III и IV четверти.



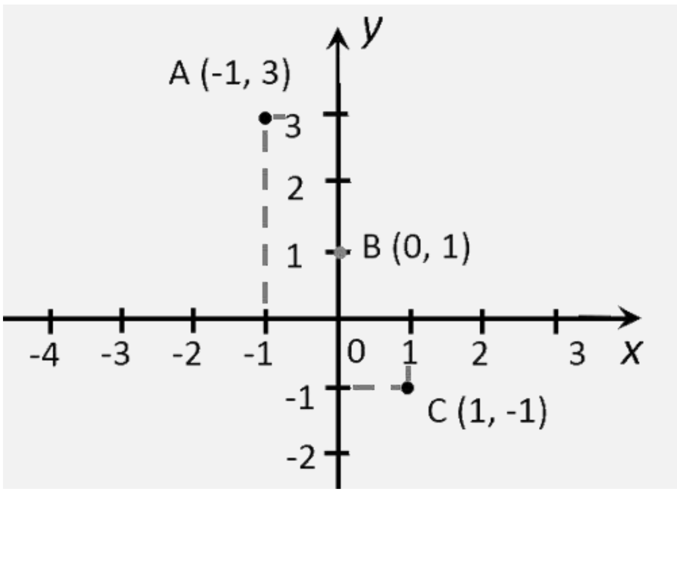
Приведем пример функции:



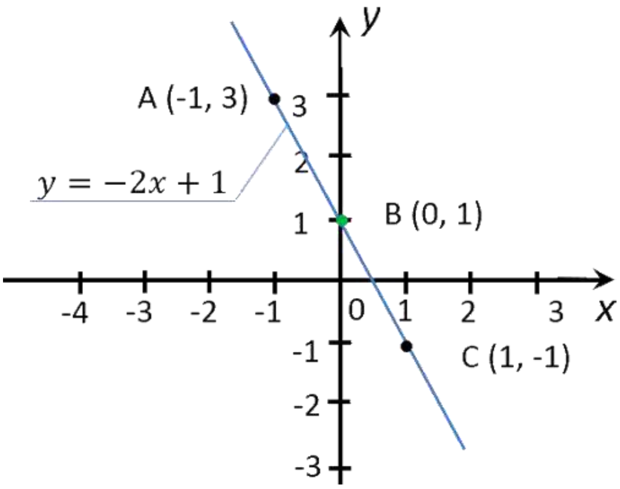
Рассмотрим функцию ***y(x) = −2x + 1*** и составим таблицу для ее некоторых значений:

x	***Расчет y***
–1	***y(−1) = −2 · (−1) + 1 = 2 +1 = 3***
0	***y(0) = −2 · 0 + 1 = 0 + 1 = 1***
1	***y(1) = −2 · 1 + 1 = −2 + 1 = −1***

Каждая пара значений ***(x; y) –*** это координаты точки в декартовой системе координат. Таким образом, имеем три точки: $\boldsymbol{A}(-\mathbf{1};\mathbf{3}), \boldsymbol{B}(\mathbf{0};\mathbf{1})$ и $\boldsymbol{C}(\mathbf{1};-\mathbf{1})$**.**



Если теперь соединим отмеченные точки, то получим прямую линию, которая и будет графиком функции $y(x) = -2x + 1$ (бесконечное множество точек, которые лежат на одной прямой).



$(k = -2; k < 0)$

Важно: график функции – это объединение всех точек, координаты которых мы можем найти, подставляя в функцию вместо x произвольные числовые значения. Множество значений x, для которых существуют y–ки, называется **областью определения функции.** Это множество обозначается $\boldsymbol{D(f)}$ или $\boldsymbol{D(y)}$ (иногда $\mathbb{X}$). Множество всех значений, которые может принимать зависимая переменная y, называется **областью значений функции** и обозначается $\boldsymbol{E(f)}$ *или* $\boldsymbol{E(y)}$ (иногда $\mathbb{Y}$**).**

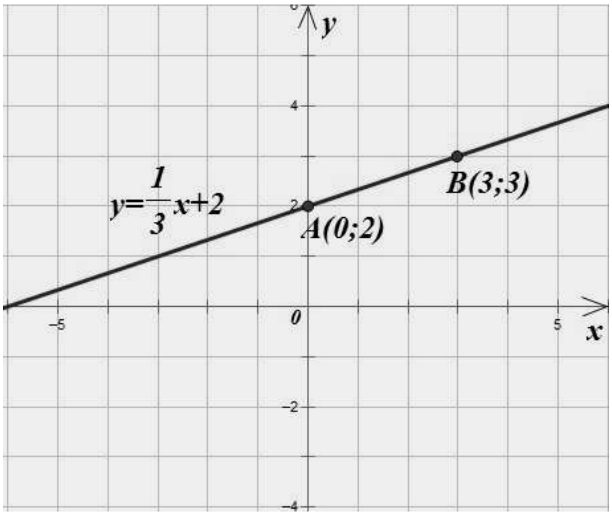
Важно: Точки пересечения графика функции с осью $0x$ называют **нулями функции** – это значения независимой переменной x, при которых значение функции y равно 0.

Важно: если график функции симметричен относительно оси $0y$, то функцию называют **четной;** если график функции симметричен относительно начала координат, т.е. точки $(0; 0)$, то функцию называют **нечетной.** В остальных случаях функция называется ни четной, ни нечетной.

Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $\boldsymbol{y = kx + b}$. Графиком линейной функции является прямая линия. Число k называется угловым коэффициентом. Если $k>0$, то график наклонен вправо; если $k<0$, то график наклонен влево (смотри примеры графиков на рисунках).

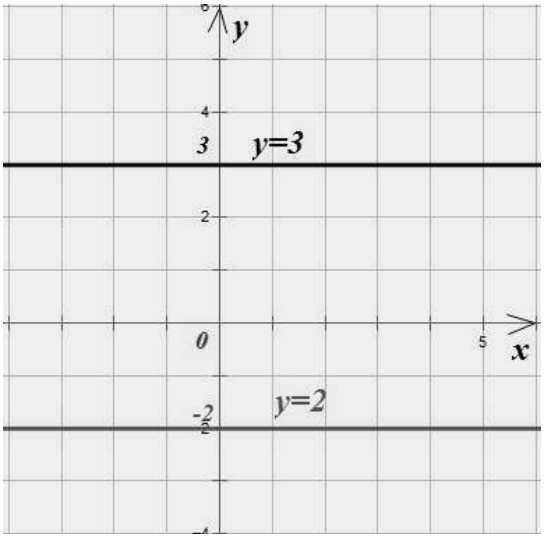
Чтобы построить график такой функции, нужно найти координаты всего двух любых точек, отметить их на координатной плоскости и соединить по линейке. Например, чтобы построить график функции $y = \frac{1}{3}x + 2$, можно взять $x = 0$ и $x = 3$, тогда ординаты этих точек будут $y = 2$ и $y = 3$. Получим точки $\boldsymbol{A(0;2)}$ и $\boldsymbol{B(3;3)}$. Соединив их, получим график функции $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + 2}$ $(k = \frac{1}{3}; k > 0)$:

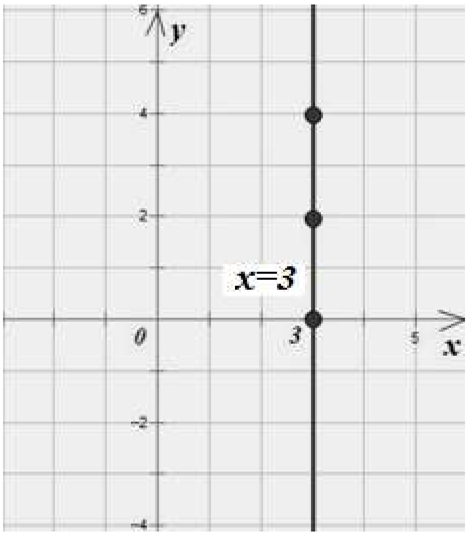


Если линейная функция представлена формулой $\boldsymbol{y = kx}$ (b=*0*), то ее называют **прямой пропорциональностью.** Графиком такой функции будет также прямая, которая будет проходить через начало координат, т.е. точку O(0;0). Очевидно, для всякой линейной функции рассмотренных типов, будет выполняться: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Если $\boldsymbol{k = 0}$, то функция $y = kx + b$ превращается в функцию $\boldsymbol{y = b}$ и ее график принимает вид прямой, параллельной оси Ox (ординаты всех точек графика равны $\boldsymbol{b}$).

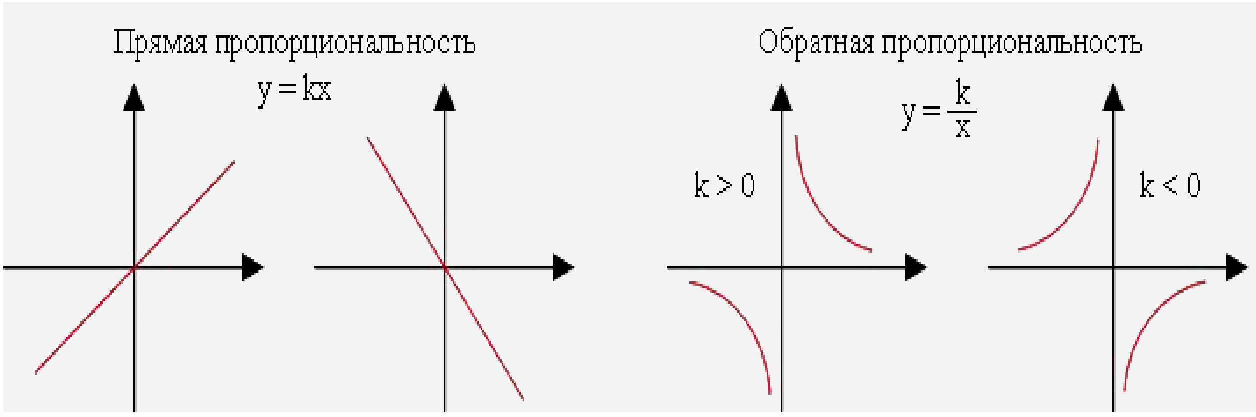
Важно: уравнение $\boldsymbol{x = a}$ не является функцией, т.к. одному значению аргумента соответствует бесконечное множество различных значений функции. Графиком этого уравнения является прямая линия, параллельная оси Oy.





Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой: $\boldsymbol{y=\frac{k}{x}}$ **(k≠0).** Название функции вполне оправдано, т.к. чем больше будет значение x, тем меньше будет значение y и наоборот. Графиком обратной пропорциональности является кривая, которую называют **гиперболой.** Для этой кривой оси $0x$ *и* $0y$ выступают в роли асимптот. **Асимптота** – это прямая, к которой приближаются точки кривой по мере их удаления в бесконечность. Так как делить на 0 нельзя, то $x \neq 0$, поэтому $D(f) = \left(-\infty; 0\right) \cup (0; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Ниже приведены примеры графиков прямой и обратной пропорциональностей.

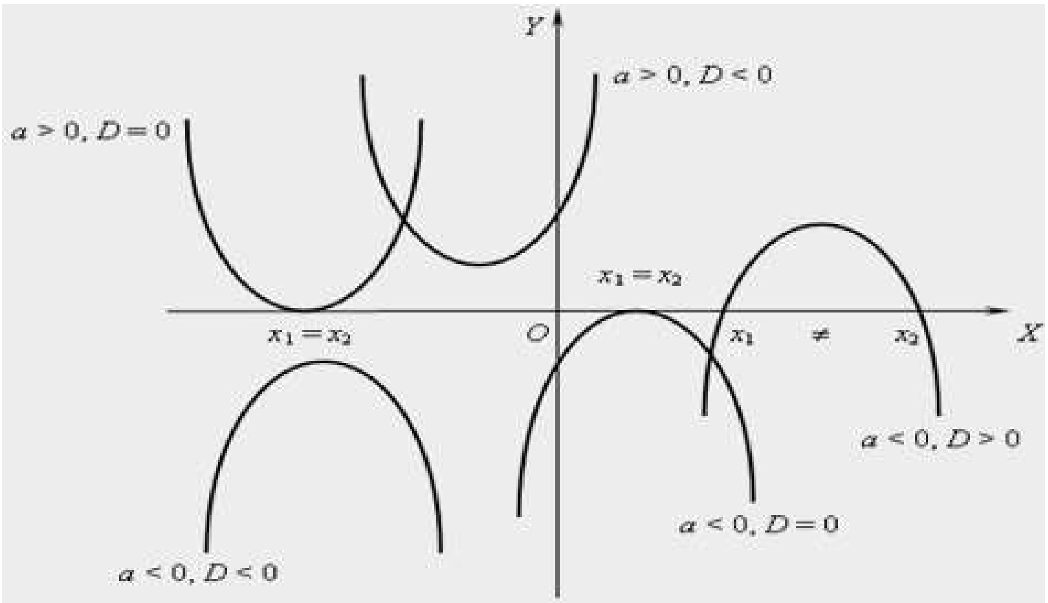


Квадратичная функция

Функция вида $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c,}$ *где* $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, называется **квадратичной функцией**, числа a, b и c называются **коэффициентами**. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Графиком этой функции является парабола, форма и расположение которой в системе координат полностью зависит от двух параметров – коэффициента a *и дискриминанта* $D = b^2 - 4ac$.

Важно: при $\boldsymbol{a} > 0$ **ветви параболы направлены вверх, при** $\boldsymbol{a} < 0$ **ветви направлены вниз.**

Если $D > 0$, то будет два корня уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, а значит, будут две точки пересечения графика с осью Oy; если $D = 0$, то будет только одна такая точка (поскольку корни уравнения будут одинаковыми); и, наконец, если $D < 0$, то график функции будет располагаться либо над, либо под осью Ox:



На рисунке нет одного случая, когда $a > 0$ и $D > 0$. Этот вариант мы рассмотрим на примере ниже.

У каждой параболы имеется вершина $(\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{y_0})$ – это или самая нижняя точка графика (когда ветви направлены вверх), или самая верхняя точка (когда ветви направлены вниз). Заметим, что график параболы будет симметричен относительно вертикальной прямой, проходящей через ее вершину.

Важно: Чтобы найти абсциссу вершины параболы, нужно воспользоваться формулой: $\boldsymbol{x_0 = \frac{-b}{2a}}$, тогда ордината вершины вычисляется подстановкой найденного значения $\boldsymbol{x_0}$ в формулу для функции вместо x: $\boldsymbol{y_0 = f(x_0)}$.

Рассмотрим примеры квадратичных функций, для которых определим коэффициенты a, b и c:

Квадратичная функция	*Коэффициенты*
$y = 2x^2 - 7x + 9$	$\boldsymbol{a = 2}$ $\boldsymbol{b = -7}$ $\boldsymbol{c = 9}$
$y = 3x^2 - 1$	$\boldsymbol{a = 3}$ $\boldsymbol{b = 0}$ $\boldsymbol{c = -1}$
$y = -3x^2 + 2x$	$\boldsymbol{a = -3}$ $\boldsymbol{b = 2}$ $\boldsymbol{c = 0}$

*Пример***.** Построим график квадратичной функции $y = x^2 - 7x + 10$.

В нашей функции коэффициенты такие: $a = 1,\ b = -7, c = 10$. Поскольку $a = 1 > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Найдем координаты вершины параболы:

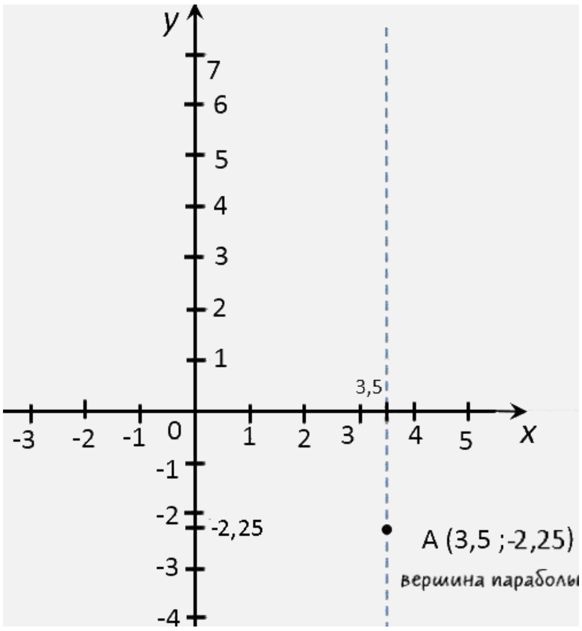
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-7)}{2 \cdot 1} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Теперь нужно найти y_0, для чего подставляем найденное значение x_0 в исходную функцию:

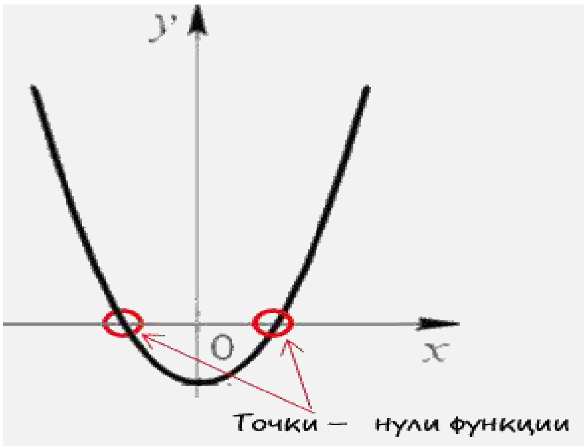
$y_0\ (3{,}5) = (3{,}5)^2 - 7 \cdot 3{,}5 + 10 = 12{,}2 - 24{,}5 + 10 = -12{,}25 + 10 = -2{,}25.$

Таким образом, точка $\boldsymbol{A(3,5; -2,25)}$ является вершиной параболы,

которую отмечаем в системе координат. Также проводим через отмеченную вершину ось симметрии.



Найдем нули функции (точки пересечения графика с осью <u>$0x$</u>). Эти точки наглядно выглядят так:

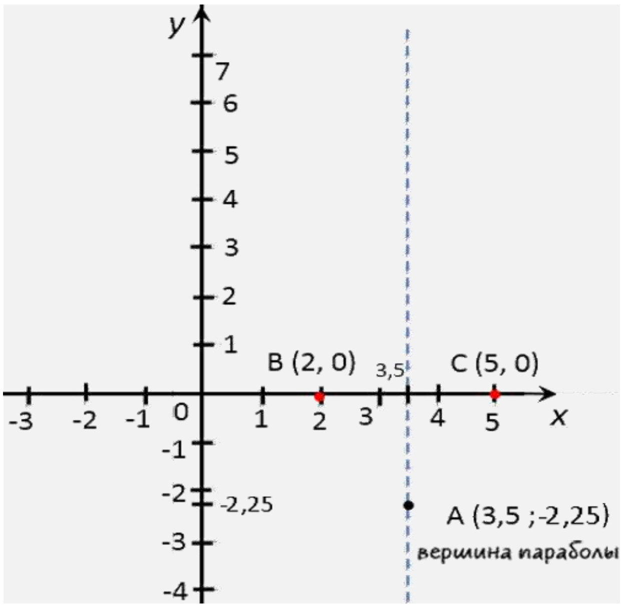


Чтобы найти координаты точек нулей функции, нужно в исходную функцию подставить вместо y – нуль: $0 = x^2 - 7x + 10$ и решить полученное квадратное уравнение:

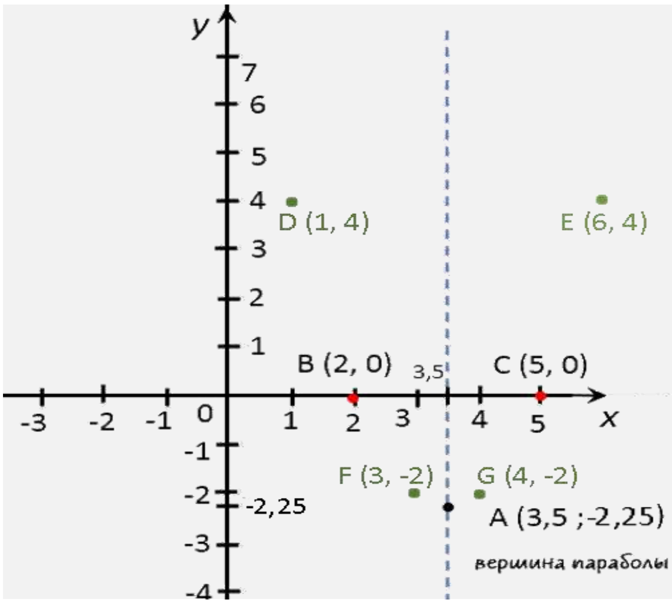
$$x^2 - 7x + 10 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} \implies x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow$$
$x_1 = 2\,; x_2 = 5.$

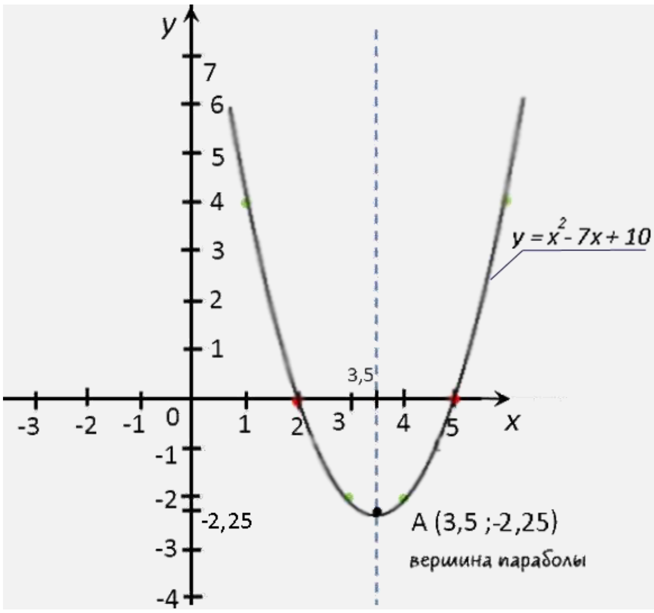
Мы получили два корня уравнения, поэтому у нас две точки пересечения с осью $0x$. Назовем эти точки $B(2;0)$ и $\mathrm{C}(5;0)$. Отметим полученные точки в системе координат:



Найдем дополнительные точки для более точного построения графика. Возьмем четыре произвольные значения для x (для удобства эти значения берем целыми и наиболее близкими к оси симметрии) и посчитаем значения соответствующих у-ов. Результаты запишем в виде координат точек *(1;4), (3;-2), (4;-2), (6;4).* Отметим полученные точки в системе координат:

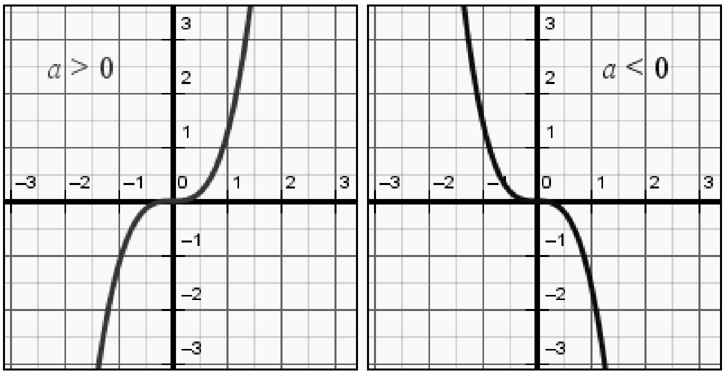


Плавно соединяя построенные точки, получим искомый график функции:



Кубическая парабола

Кубическая парабола – кривая, являющаяся графиком функции $\boldsymbol{y = ax^3}$, где $\boldsymbol{a \neq 0}$. $\boldsymbol{D(f) = (-\infty; +\infty)}$ и $\boldsymbol{E(f) = (-\infty; +\infty)}$. При $\boldsymbol{a} > 0$ функция находится в первом и третьем координатных углах, при $\boldsymbol{a} < 0$ – во втором и четвертом. Функция нечетная. Поэтому начало координат для кубической параболы является ее центром симметрии.



Функцию удобно строить по точкам в какой–то одной четверти, вычисляя ее значения для произвольных абсцисс одного знака, предварительно записывая результаты вычислений в таблицу. Построенную линию после симметрично отображаем относительно точки $(0; 0)$.

ГЕОМЕТРИЯ

Треугольник

Так как большинство задач планиметрии и стереометрии сводятся к рассмотрению треугольников, то считается, что эта фигура – одна из основных в геометрии, поэтому очень важно знать свойства треугольников.

Треугольник – это фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, трех отрезков, попарно соединяющих эти точки, а также части плоскости, ограниченной этими отрезками.

Определить треугольник можно и так: это многоугольник с тремя сторонами (или тремя углами). Стороны треугольника часто обозначают маленькими буквами, которые соответствуют заглавным буквам, обозначающим вершины напротив.

Прямоугольным треугольником называется треугольник, у которого один из углов прямой, то есть равен 90°. Стороны a *и* b, образующие прямой угол, называются **катетами**; сторона c, противоположная прямому углу, называется **гипотенузой** (рис.1).

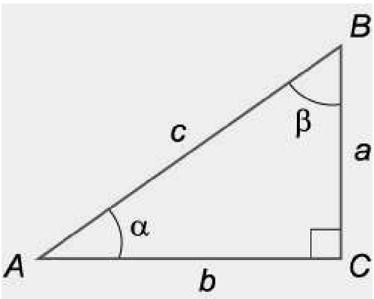


Рис.1

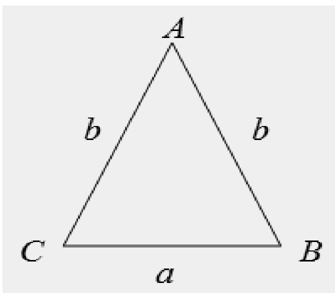


Рис.2

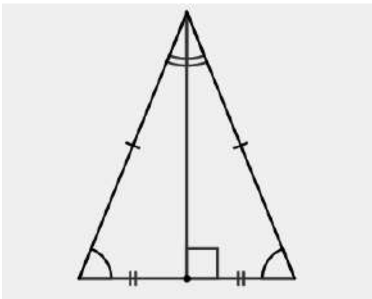


Рис.2а

Равнобедренным треугольником называется треугольник, у которого две его стороны равны ($\boldsymbol{b = c}$); эти равные стороны называются **боковыми**, третья сторона a называется **основанием треугольника** (рис.2).

Важно:

1) в равнобедренном треугольнике углы при основании равны (рис. 2а);

2) в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является и биссектрисой и высотой (рис. 2а).

Равносторонним треугольником называется треугольник, у которого все его стороны равны: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ (а значит и углы) (рис.3).

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-либо углом треугольника (на рис.4 внешний угол α является смежным с углом $\angle$А треугольника $\triangle ABC$).

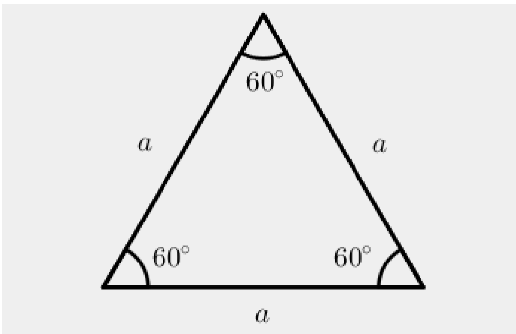


Рис.3

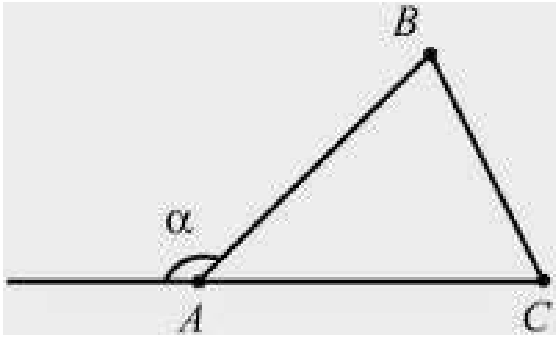


Рис.4

Важно:

1) любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон;

2) сумма углов треугольника равна 180°;

3) внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним;

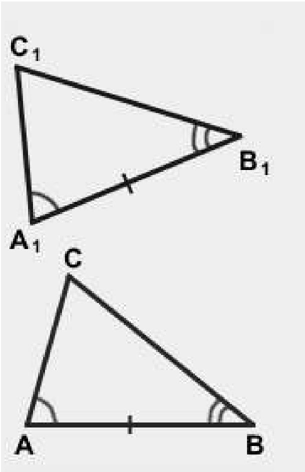
4) во всяком треугольнике против равных сторон лежат равные углы; против большей стороны лежит больший угол.

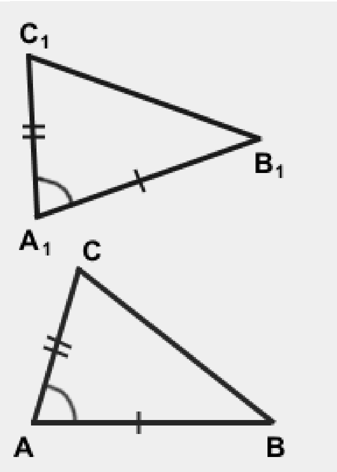
Признаки равенства треугольников

Первый признак (по двум сторонам и углу между ними): если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис.5).

Второй признак (по стороне и двум прилежащим к ней углам): если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис.6).

Третий признак (по трём сторонам): если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис.7).





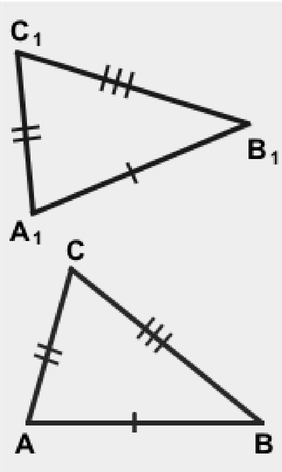


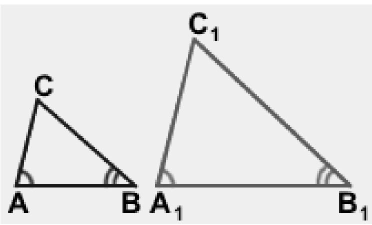
Рис.5 *Рис.6* *Рис.7*

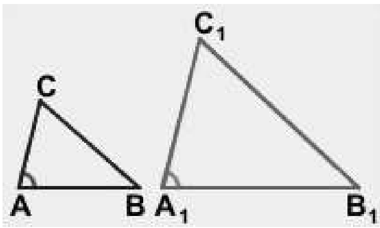
Признаки подобия треугольников

Первый признак (по двум углам): Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны (рис.8).

Второй признак (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними): Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны (рис.9).

Третий признак (по трём сторонам): Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны (рис.10).





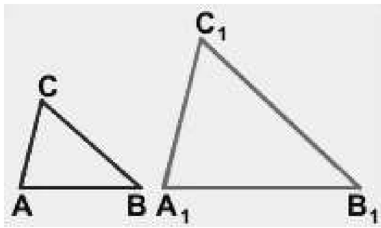


Рис. 8 *Рис. 9* *Рис. 10*

Важно: если два треугольника подобны, то любой линейный элемент одного треугольника относится к соответствующему линейному элементу другого треугольника как соответственные стороны. **Отношение**

площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия: $\frac{s'}{s} = k^2$.

Элементы треугольника

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис.11).

Важно:

1) средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна половине этой стороны;

2) средняя линия отсекает от треугольника треугольник подобный исходному с коэффициентом подобия $\boldsymbol{k = 1/2}$ (рис.11: $\triangle ABC \sim \triangle MBN$).

Высота треугольника — это перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противоположную сторону (или её продолжение). Эта сторона называется **основанием треугольника (**на рис.12 высотой $\triangle ABC$ является отрезок BF, а основанием –сторона AC).

Свойства высот треугольника:

1) все три высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентром** треугольника и обозначается **H**;

2) в прямоугольном треугольнике две высоты совпадают со сторонами, являющимися катетами;

3) в прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному;

4) в остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.

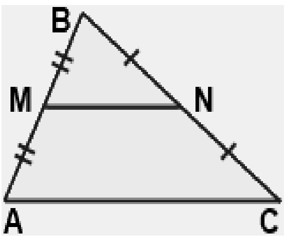


Рис. 11

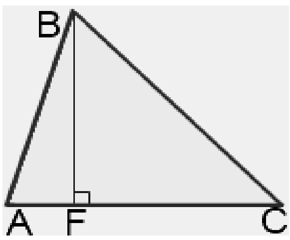


Рис. 12

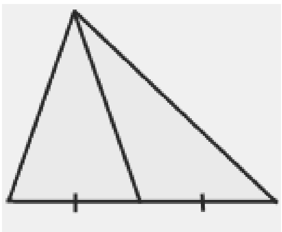


Рис. 13

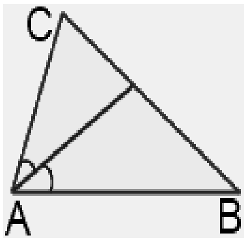


Рис. 14

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис.13).

Свойства медиан треугольника:

1) медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади (у этих треугольников равные основания и высоты)**;**

2) все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая лежит внутри треугольника и является его центром тяжести. Эту точку называют центроидом треугольника и обозначают $\boldsymbol{G}$, она делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины;

3) весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников (т.е. имеют одинаковые площади).

Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы угла от вершины до точки пересечения с противоположной стороной (рис.14).

Свойства биссектрис треугольника:

1) биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла;

2) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, всегда лежащей внутри треугольника;

3) точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной в треугольник окружности; обозначается буквой O (рис. 15; $\boldsymbol{OM = ON = OK = r}$).

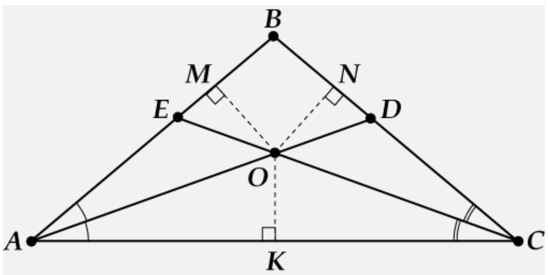


Рис. 15

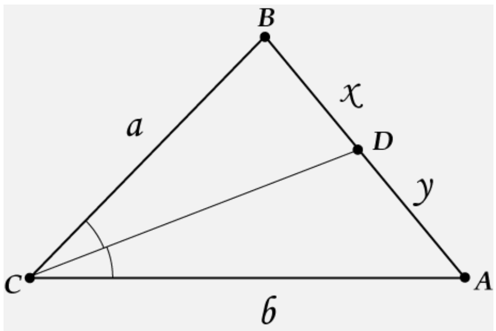


Рис. 16

4) биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам (рис.16; $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$).

5) биссектриса лежит между соответствующими медианой и высотой;

6) биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная к этому отрезку и проходящая через его середину (на рис.17 серединным перпендикуляром является прямая $\boldsymbol{l}$).

Срединный перпендикуляр к стороне треугольника – это прямая, перпендикулярная стороне треугольника и проходящая через ее середину.

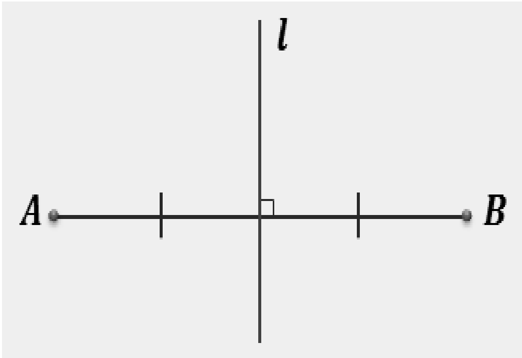


Рис. 17

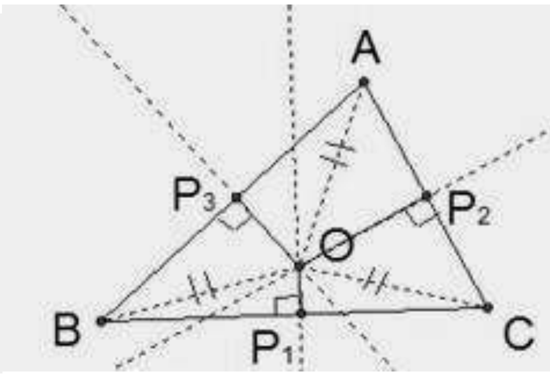


Рис. 18

Свойства серединных перпендикуляров треугольника:

1) каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка;

2) все три срединных перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром описанного около этого треугольника окружности (рис.18) (для прямоугольного треугольника эта точка совпадает с серединой гипотенузы (рис.19)).

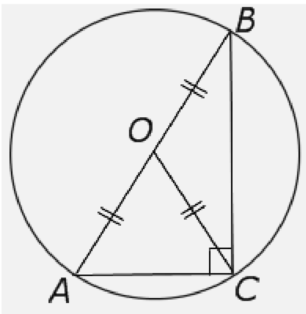


Рис. 19

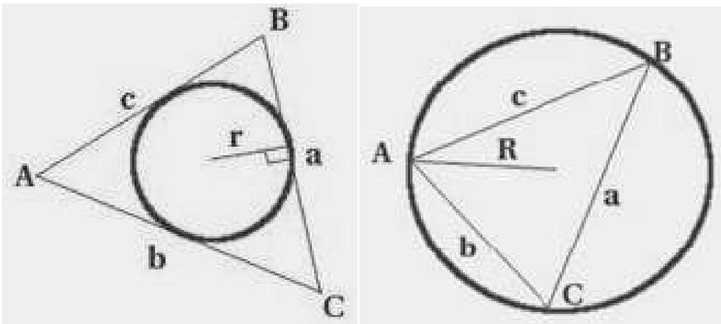


Рис. 20

Важно: в любом (но не в равностороннем) треугольнике его ортоцентр H, центроид G и центр описанной окружности O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $HG: OG = 2: 1$.

В дальнейшем радиусы описанной около треугольника окружности и вписанной в треугольник окружности будем обозначать соответственно буквами $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}$ (рис. 20). Для произвольных треугольников значения $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}$

можно найти по следующим формулам: $\boldsymbol{R=\frac{abc}{4S}}$, $\boldsymbol{r=\frac{S}{p}}$,где $\boldsymbol{p=\frac{a+b+c}{2}}$ – полупериметр треугольника, а $\boldsymbol{S}$ – его площадь.

Для успешного решения геометрических задач на разные темы, в том числе на нахождение площадей, необходимо знать широкий спектр формул.

Площадь треугольника можно вычислять по следующим формулам:

1) $\boldsymbol{S=\frac{1}{2}ah}$;

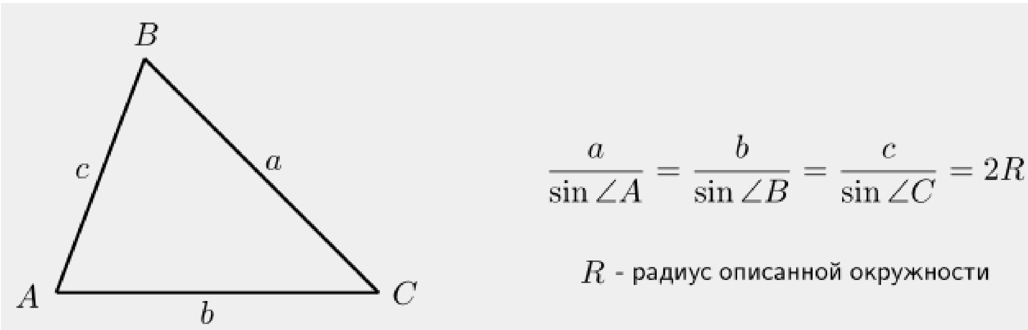
2) $\boldsymbol{S=\frac{1}{2}ab\sin\angle C}$;

3) $\boldsymbol{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ – знаменитая формула Герона;

4) $\boldsymbol{S=pr}$; 5) $\boldsymbol{S=\frac{abc}{4R}}$.

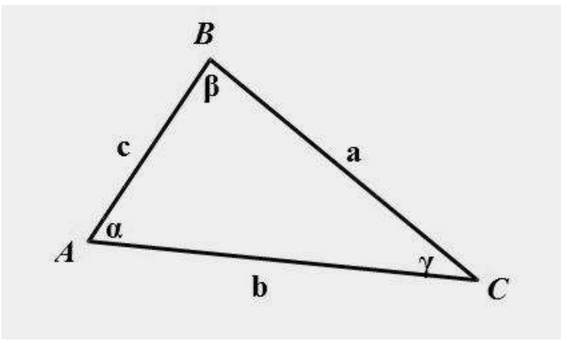
Теорема синусов

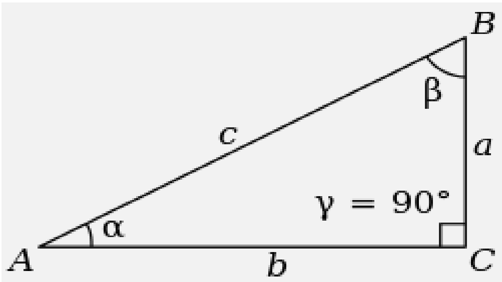
Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:



Теорема косинусов. *Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:* $\boldsymbol{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$

.





В прямоугольном треугольнике справедливы следующие тригонометрические соотношения:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$
$$tg\alpha = \frac{a}{b}, \quad ctg\alpha = \frac{b}{a}.$$

Важно: произносятся эти соотношения так.

Синусом острого угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенсом острого угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Свойства прямоугольного треугольника:

1) катет против угла в 30 градусов, равен половине гипотенузы (рис.21);

2) в равнобедренном прямоугольном треугольнике с боковыми сторонами, равными $\boldsymbol{a}$, третья сторона равна $\boldsymbol{a\sqrt{2}}$ (рис.22: по теореме Пифагора);

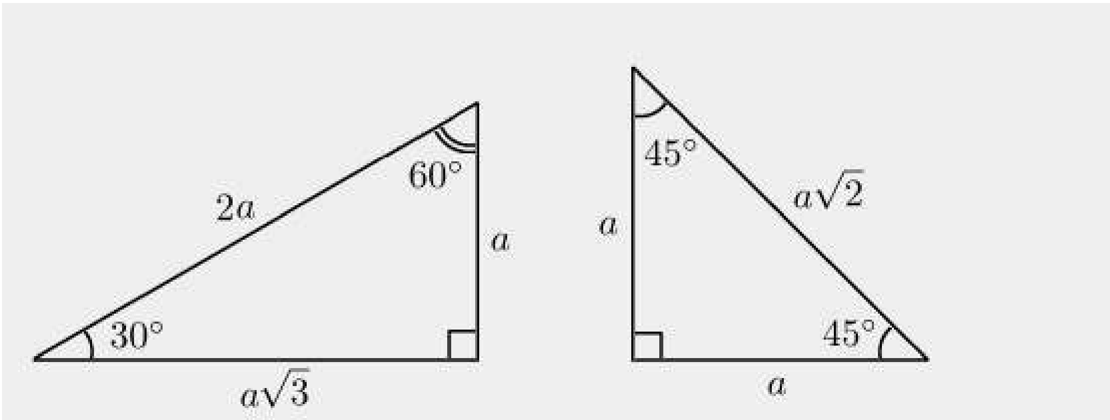


Рис. 21 ***Рис. 22***

3) для прямоугольного треугольника справедлива **теорема Пифагора:** $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ (рис.23);

4) в любом прямоугольном треугольнике, высота, опущенная из вершины прямого угла (на гипотенузу), делит прямоугольный треугольник, на три подобных треугольника: $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$ (рис.24);

5) площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов: $\boldsymbol{S = \frac{ab}{2}}$.

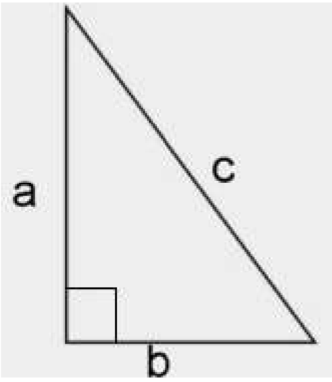


Рис. 23

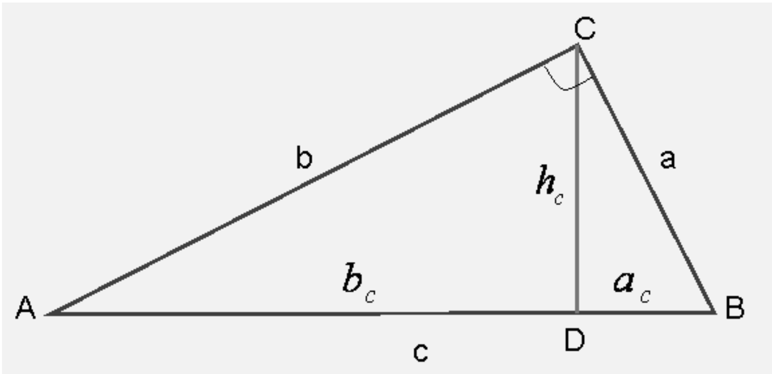


Рис. 24

6) Соотношения между сторонами прямоугольного треугольника: пусть $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ – катеты, $\boldsymbol{c}$ – гипотенуза, $\boldsymbol{a_c}$, $\boldsymbol{b_c}$ – проекции катетов на гипотенузу, $\boldsymbol{h_c}$ – высота, опущенная на гипотенузу. Тогда справедливы соотношения :

$$\boldsymbol{h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}\,,\ a = \sqrt{c \cdot a_c}\,,\ b = \sqrt{c \cdot b_c}} \quad \text{(рис.24);}$$

7) центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы ($\boldsymbol{c = 2R}$) (рис.19);

8) в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей:

$$\boldsymbol{a + b = 2r + 2R.}$$

Важно: следствием свойств 7) и 8) является формула для радиуса вписанной в прямоугольный треугольник окружности (рис.25):

$$\boldsymbol{r = \frac{a+b-c}{2}}.$$

9) В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине (рис. 19).

10) Биссектриса прямого угла лежит между медианой и высотой и делит угол между ними пополам.

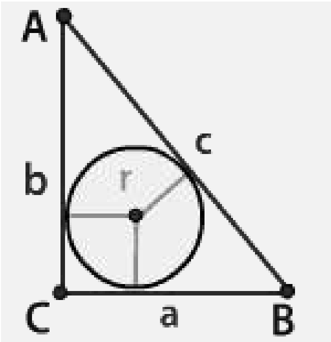


Рис. 25

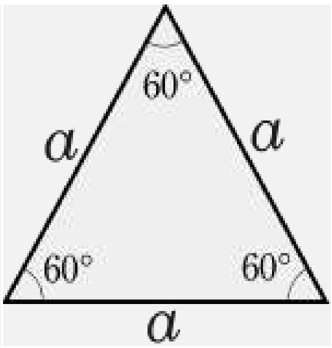


Рис. 26

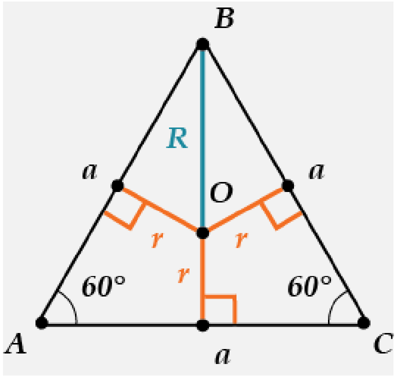


Рис. 27

Свойства равностороннего треугольника.

Как нетрудно догадаться из названия, каждая сторона равностороннего треугольника равна двум другим. Кроме того, он обладает рядом признаков, благодаря которым можно определить, правильная ли эта фигура или нет.

1) Все углы такого треугольника равны и их величина составляет 60 градусов (рис.26).

2) Биссектрисы, высоты и медианы, проведенные из каждой вершины, совпадают.

3) Центр описанной окружности также является и центром вписанной окружности – это точка пересечения медиан, биссектрис, высот и срединных перпендикуляров (рис.27).

4) Радиусы описанной и вписанной окружностей равностороннего треугольника вычисляются по формулам: $\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{2\sqrt{3}}$.

Четырехугольники

Многоугольник (n–угольник) – это фигура, состоящая из замкнутой ломаной ($A_1A_2 \dots A_nA_1$) без самопересечений и части плоскости, ограниченной этой ломаной.

Многоугольник называется выпуклым, если для каждой его стороны, он расположен по одну сторону от прямой, проведенной через эту сторону. В противном случае многоугольник называется невыпуклым.

выпуклый многоугольник **невыпуклый многоугольник**

Другими словами: если любые две точки выпуклого многоугольника соединить отрезком – весь отрезок будет лежать внутри многоугольника. Для невыпуклых фигур это не выполняется.

Выпуклый **многоугольник называется правильным**, если все его стороны и углы равны. Диагоналями многоугольника называются отрезки, соединяющие две вершины многоугольника, не принадлежащие одной стороне. Число диагоналей $\boldsymbol{N}$ для любого $\boldsymbol{n}$– угольника вычисляется по следующей формуле: $\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{n(n-3)}}{\boldsymbol{2}}$. Сумма внутренних углов выпуклого n – угольника равна $\boldsymbol{180^0(n-2)}$. В школе, как правило, рассматривают только выпуклые многоугольники.

Произвольные четырехугольники в задачах геометрии встречаются редко. Намного чаще такие, у которых есть параллельные стороны. Это параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат и трапеция.

Важно: площадь любого выпуклого четырехугольника вычисляется по формуле $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi}$, где $\boldsymbol{d_1}$ и $\boldsymbol{d_2}$ диагонали четырехугольника, а $\boldsymbol{\varphi}$ – угол между диагоналями.

Параллелограмм

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис.27).

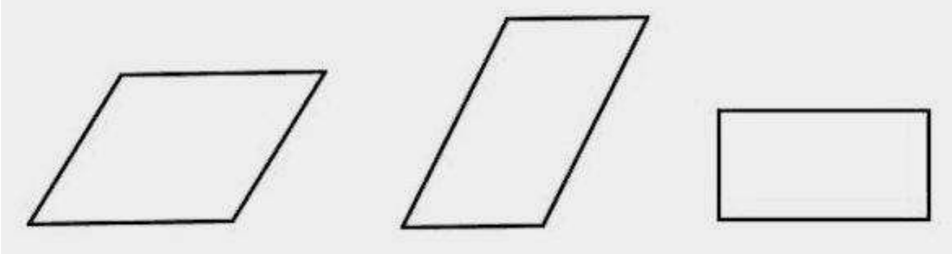


Рис. 27

Важно: середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Свойства параллелограмма:

1) противоположные стороны, как и противоположные углы равны (рис. 28);

2) сумма смежных углов (прилегающих к одной стороне) равняется 180 градусов (рис. 28: $\angle A + \angle B = \mathbf{180^0}$; $\angle C + \angle D = \mathbf{180^0}$);

3) сумма всех углов параллелограмма равна $\mathbf{360^0}$;

4) диагонали пересекаются, и делятся точкой пересечения пополам (рис. 29);

5) точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма (рис. 29);

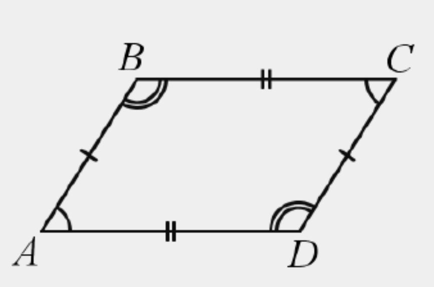


Рис. 28

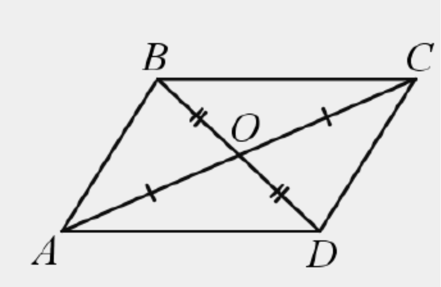


Рис. 29

6) каждая диагональ разделяет параллелограмм на 2 равных треугольника (рис. 30: $\triangle \boldsymbol{ABC} = \triangle \boldsymbol{CDA}$);

7) биссектриса отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник (рис. 31: треугольники $\triangle \boldsymbol{ABE}$ и $\triangle \boldsymbol{ECD}$ – равнобедренные);

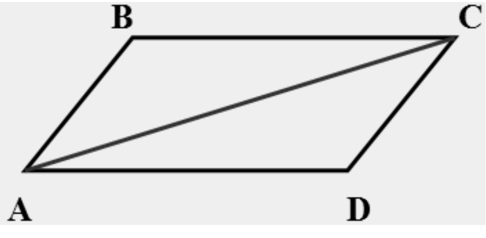


Рис. 30

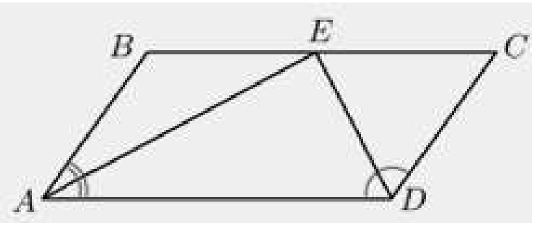


Рис. 31

8) угол между высотами параллелограмма будет равен его острому углу (рис. 32: $\angle \boldsymbol{A} = \angle \boldsymbol{HDG}$);

9) биссектрисы 2-х противоположных углов параллельны (рис. 33: $\boldsymbol{AM} \parallel \boldsymbol{CN}$).

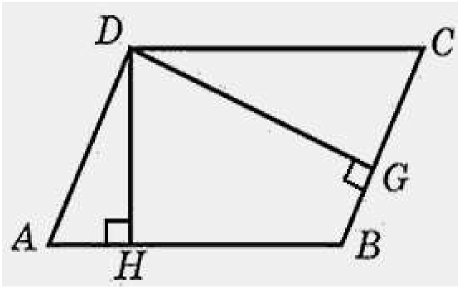


Рис. 32

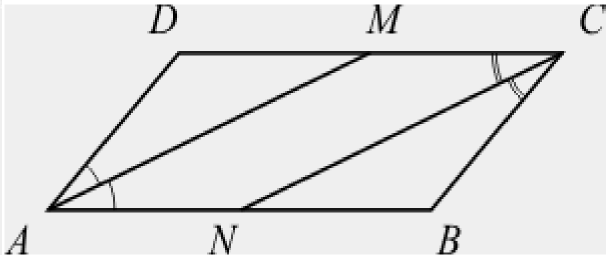


Рис. 33

Формулы площади параллелограмма (рис. 34):

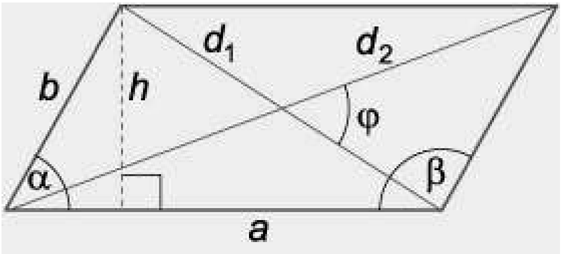


Рис. 34

$$S = ah\,;$$
$$S = absin\alpha\,;$$
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$$

Ромб

Ромб – четырехугольник, у которого все стороны равны.

Ромб – это частный случай параллелограмма.

Свойства ромба.

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма, поэтому укажем свойства, присущие только ромбу:

1) диагонали ромба перпендикулярны друг другу и точкой пересечения делятся пополам (рис. 35);

2) диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов (т.е. делят углы ромба пополам);

3) диагонали делят ромб на четыре равных прямоугольных треугольника (рис. 35);

4) в любой ромб можно вписать окружность с центром в точке пересечения диагоналей (рис.36);

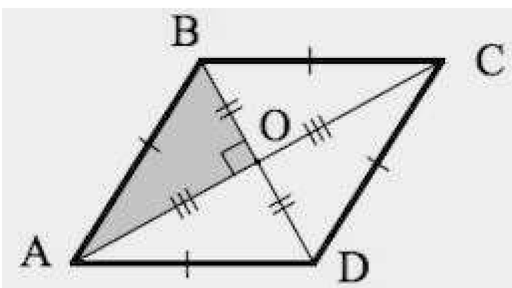


Рис. 35

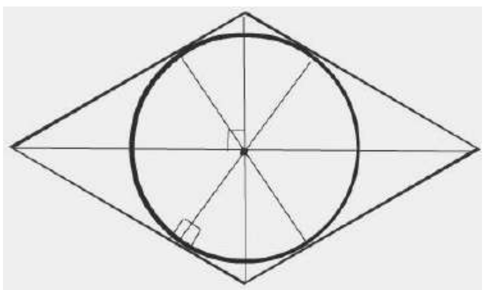
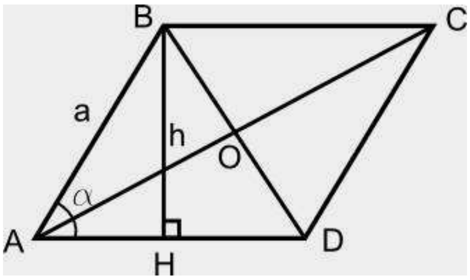


Рис. 36

Формулы площади ромба (рис. 37):



$$\boldsymbol{S = ah};$$
$$\boldsymbol{S = a^2 sin\alpha};$$
$$\boldsymbol{S = \frac{d_1 d_2}{2}}.$$

Рис. 37

Прямоугольник

Прямоугольник – это четырехугольник, у которого все углы прямые. Прямоугольник является частным случаем параллелограмма (рис.38).

Свойства прямоугольника:

1) диагонали прямоугольника равны друг другу (рис. 38);

2) точка пересечения диагоналей прямоугольника является центром окружности, описанной около этого прямоугольника (рис.39);

3) площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину: $\boldsymbol{S = ab}$.

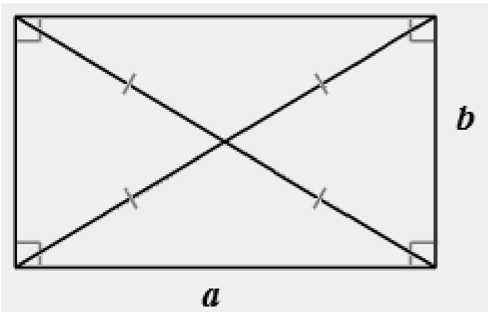


рис. 38

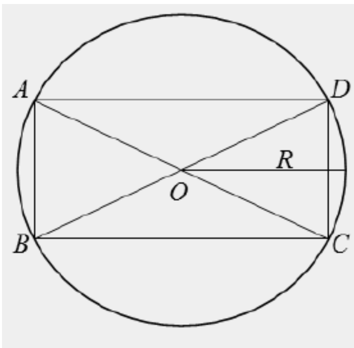


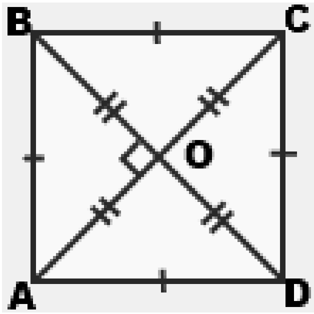
Рис. 39

Квадрат

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Так как прямоугольник является параллелограммом, то и квадрат является параллелограммом. А так как все его стороны равны, то он также является и ромбом. Отсюда следует, что для квадрата выполняются и свойства прямоугольника, и свойства ромба.

А поскольку у квадрата все углы прямые (т.е. одинаковые), то – это правильный четырехугольник.



Свойства квадрата:

1) все углы квадрата равны 90°;

2) диагонали квадрата равны и точкой пересечения делятся пополам;

3) диагонали квадрата пересекаются под углом 90°;

4) диагонали квадрата являются биссектрисами его углов;

5) квадрат имеет четыре оси симметрии: две диагонали и два серединных перпендикуляра;

6) в любой квадрат можно вписать окружность и вокруг любого квадрата можно описать окружность;

7) радиус вписанной в квадрат окружности равен половине стороны квадрата, а радиус описанной окружности равен половине диагонали квадрата.

Интересно. Несмотря на кажущуюся простоту квадрата, до сих пор не решена задача, которой более четырех тысяч лет (о квадратуре круга) : как построить с помощью циркуля и линейки (без шкалы) квадрат, равновеликий по площади данному кругу.

Одна из самых обсуждаемых картин в русском искусстве–это знаменитое во всем мире полотно Казимира Малевича "Черный квадрат", которое поделило историю художественного искусства на два периода. Уже сто лет прошло с момента ее написания, а споры и бурные дискуссии не прекращаются до сих пор.

Трапеция

Трапеция — это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются соответственно **верхним и нижним основаниями**; не параллельные – боковыми сторонами (рис.40). Отрезки, соединяющие противоположные вершины, называются **диагоналями трапеции**.

Высотой трапеции называется расстояние между ее основаниями (на рис.40 – отрезок ***KF***), а **средней линией** трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон (на рис.40 – отрезок ***MN***).

Все трапеции можно разделить на три вида: произвольные, равнобедренные и прямоугольные (рис. 42).

Равнобедренные трапеции – это трапеции, у которых боковые стороны равны (такие трапеции иногда называют равнобокими или равнобочными).

Прямоугольные трапеции – это трапеции, у которых одна боковая сторона перпендикулярна основаниям.

Рис. 40

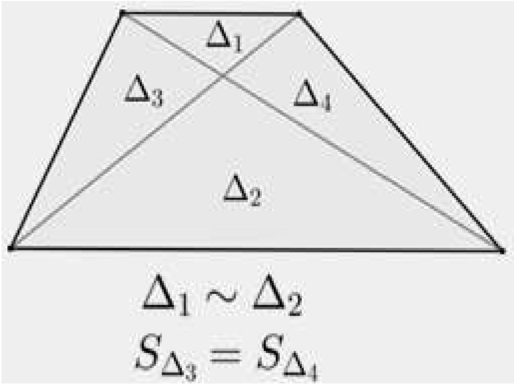


Рис. 41

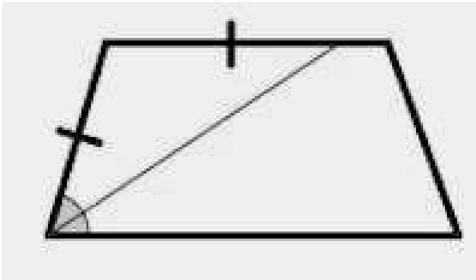
Рис. 42

Основные свойства трапеции:

1) средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме;

2) биссектриса любого угла трапеции отсекает на ее основании (или продолжении) отрезок, равный боковой стороне (рис.43);

3) диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника, причем треугольники, прилежащие к основаниям, подобны друг другу, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики, т.е. имеют равные площади (рис.41);



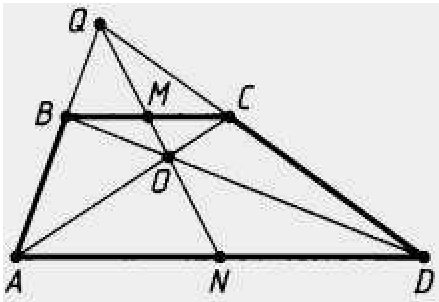
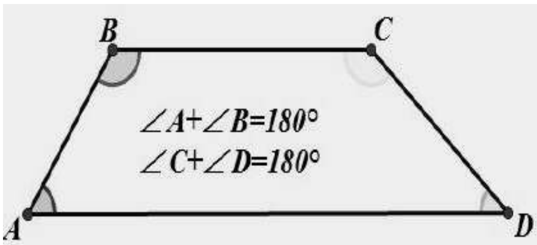


Рис. 43 *Рис. 44*

4) в любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой: середины оснований, пересечения диагоналей, пересечения продолжений боковых сторон (рис.44);

5) сумма углов трапеции, прилежащих к каждой боковой стороне, равна 180^0 (рис.45) (поэтому биссектрисы углов при боковой стороне перпендикулярны (рис.46));



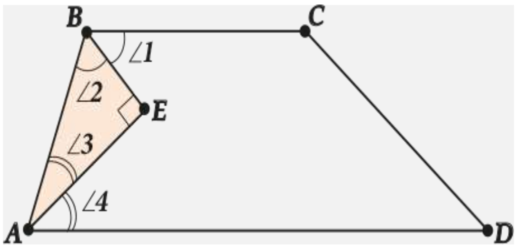
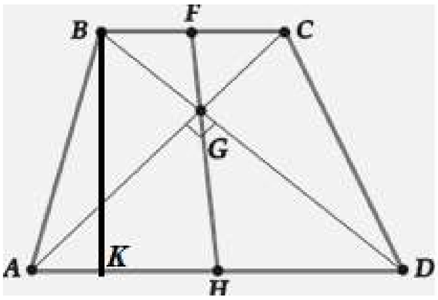


Рис. 45 *Рис. 46*



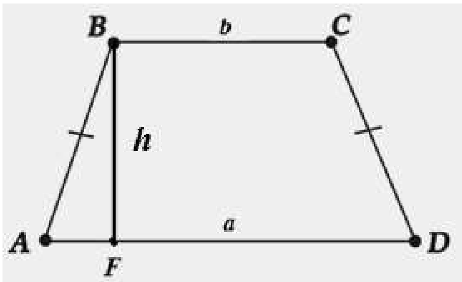


Рис. 47 *Рис. 48*

6) **каждый отрезок**, соединяющий основания и проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, поделен этой точкой в отношении: $\frac{GH}{GF} = \frac{AD}{BC}$ (рис.47);

7) если в трапеции сумма оснований равна сумме боковых сторон, то в нее можно вписать окружность.

Свойства равнобедренной трапеции:

1) углы при основании равнобедренной трапеции равны;

2) сумма противолежащих углов равнобедренной трапеции равна 180º;

3) диагонали равнобедренной трапеции равны;

4) если трапеция вписана в окружность, то она равнобокая;

5) высота, опущенная из вершины на большее основание, делит это основание на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, а другой – полуразности оснований. На рис.48

$$\boldsymbol{AF = \frac{a-b}{2}}, \quad \boldsymbol{FD = \frac{a+b}{2}};$$

6) если диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны, то длина ее высоты равна длине средней линии (рис.47: $\boldsymbol{BK = \frac{AD+BC}{2}}$) , а площадь равна квадрату высоты трапеции ($\boldsymbol{S = h^2}$);

7) высота описанной равнобочной трапеции есть среднее пропорциональное ее оснований, т.е. $\boldsymbol{h = \sqrt{ab}}$;

8) если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона равна средней лини трапеции.

Важно: площадь трапеции можно вычислить по формулам

$\boldsymbol{S = \frac{a+b}{2}}$; $\boldsymbol{S = \frac{d_1 d_2}{2} \sin\varphi}$, где $\boldsymbol{d_1}$ **и** $\boldsymbol{d_2}$ диагонали четырехугольника**,** а $\boldsymbol{\varphi}$ **–** угол между диагоналями.

Окружность и круг

Окружностью называется множество точек, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки, которая называется центром окружности.

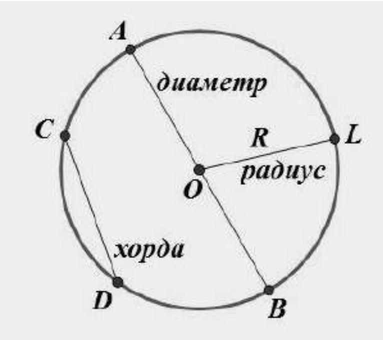
Важно: через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.

Расстояние между любой точкой окружности и ее центром называется **радиусом окружности** (радиус обозначают буквой $\boldsymbol{R}$).

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой.**

Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром** окружности. Диаметр окружности равен ее удвоенному радиусу: $\boldsymbol{D=2R}$.

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью.



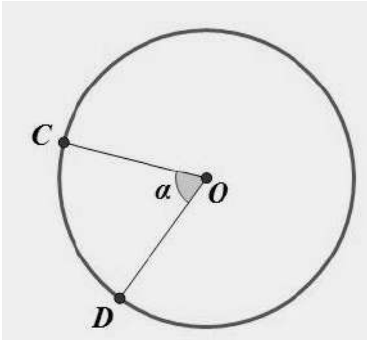


Рис. 49

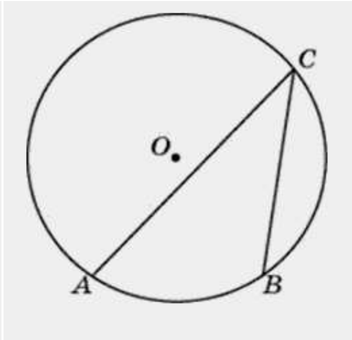


Рис. 50

Угол между двумя радиусами называется **центральным углом**; градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается: (рис.49: $\angle \boldsymbol{COD} = \smile \boldsymbol{CD} = \boldsymbol{\alpha}$).

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны содержат хорды, называется **вписанным углом** (рис.50). **Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается,** т.е. измеряется половиной центрального угла, опирающегося на ту же дугу (рис.51: $\angle \boldsymbol{ACB} = \frac{1}{2}\angle \boldsymbol{AOB}$).

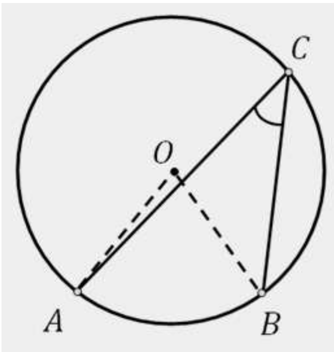


Рис. 51

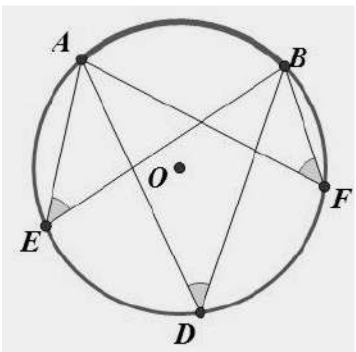


Рис. 52

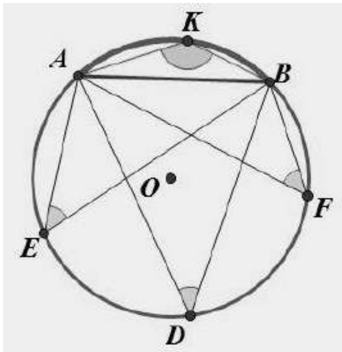


Рис. 53

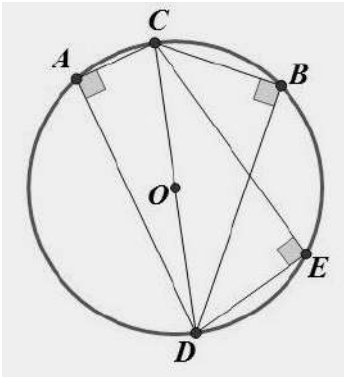
Градусные меры **всех вписанных углов**, которые опираются на одну дугу окружности, равны (рис.52: $\angle \boldsymbol{AEB} = \angle \boldsymbol{ADB} = \angle \boldsymbol{AFB}$ – все эти углы опираются на одну и ту же дугу $\smile \boldsymbol{AB}$).

Вписанные углы, опирающиеся **на одну хорду** равны, или их сумма равна $\boldsymbol{180^0}$ (рис.53: $\angle \boldsymbol{AEB} = \angle \boldsymbol{ADB}$; $\angle \boldsymbol{AEB} + \angle \boldsymbol{AKB} = \boldsymbol{180^0}$).

В случае, когда вписанный угол опирается на диаметр, то его градусная мера равна 90^0 (рис.54).

Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется **касательной** к окружности (рис.55: касательная – $\boldsymbol{CK}$).

Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется **секущей** (рис.55: секущие – $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{EC}$).



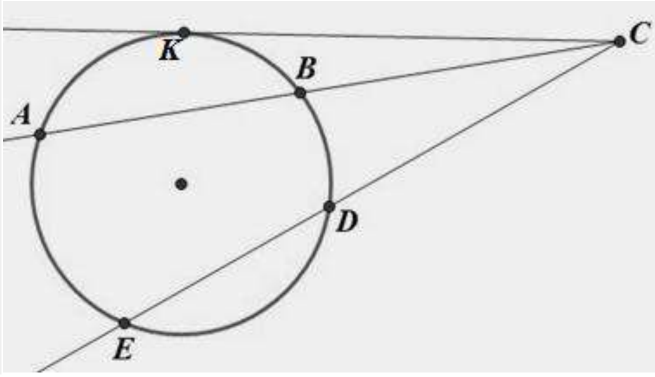
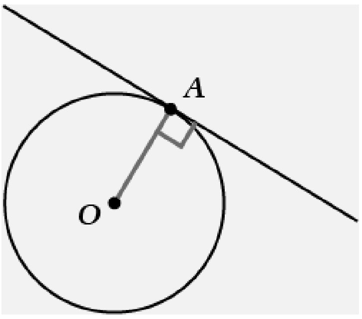
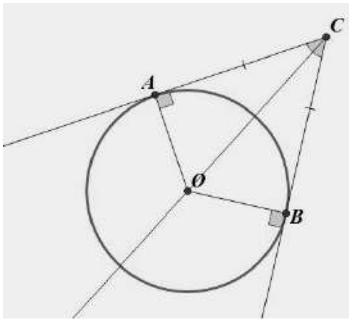


Рис. 54 *Рис. 55*

Важно: касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному к точке касания (рис. 56).

Если из данной точки проведены к окружности две касательные, то **отрезки касательных равны между собой** и центр окружности лежит на биссектрисе угла с вершиной в этой точке (рис. 57: $\boldsymbol{AC = BC}$).





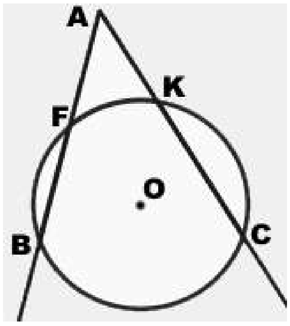
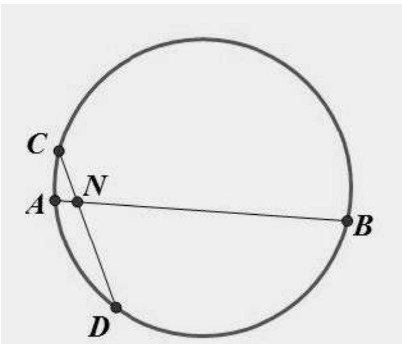
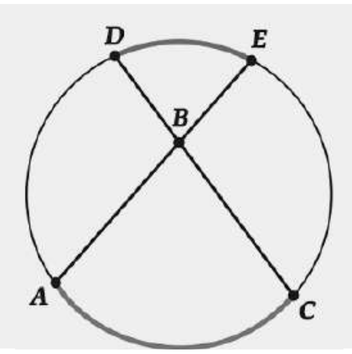


Рис. 56 *Рис. 57* *Рис. 58*

Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение длин секущих на их внешние части буду равны (рис.58: $\boldsymbol{AF \cdot AB = AK \cdot AC}$).

Если хорды $\boldsymbol{AB}$ *и* $\boldsymbol{CD}$ окружности пересекаются в точке $\boldsymbol{N}$, то произведения отрезков хорд, на которые они делятся точкой $\boldsymbol{N}$, равны между собой (рис. 59: $\boldsymbol{AN \cdot NB = CN \cdot ND}$).





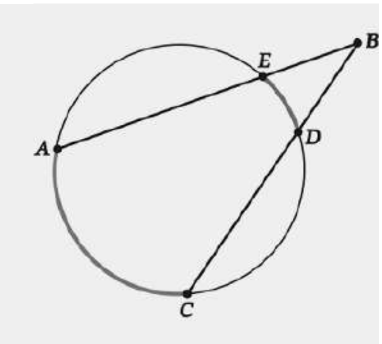


Рис. 59 *Рис. 60* *Рис. 61*

Угол, образованный пересекающимися хордами с вершиной в внутри окружности, равен полусумме соответствующих дуг (рис.60: $\angle \boldsymbol{ABC} = \frac{1}{2}(\smile \boldsymbol{AC} + \smile \boldsymbol{ED})$).

Угол, образованный секущими к окружности с вершиной вне окружности, равен полуразности соответствующих дуг (рис.61: $\angle \boldsymbol{ABC} = \frac{1}{2}(\smile \boldsymbol{AC} - \smile \boldsymbol{ED})$).

Для касательной и секущей к окружности, проведённых из одной точки, квадрат расстояния от этой точки до точки касания равен произведению длины секущей на длину её внешней части (рис.62: $\boldsymbol{AK^2} = \boldsymbol{AB \cdot AC}$).

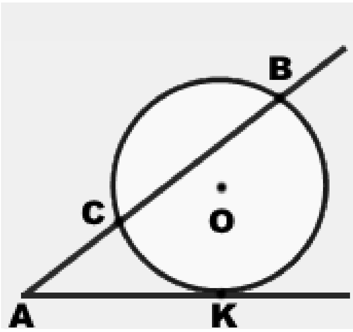


Рис. 62

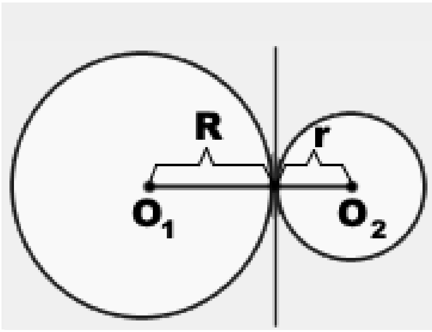


Рис. 63

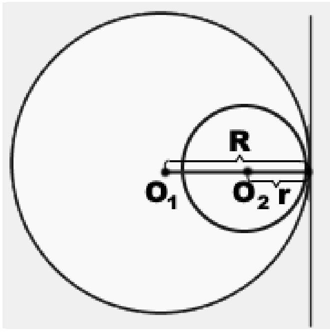


Рис. 64

Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку. Эта точка называется **точкой касания окружностей**. Точка касания окружностей и их центры лежат на одной прямой. Касание окружностей бывает **внутренним** или **внешним**.

Касание называется внешним, если центры окружностей лежат по разные стороны от точки касания. Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры, поэтому расстояние между их центрами равно сумме их радиусов (рис.63: $\boldsymbol{d = r_1 + r_2}$).

Касание называется внутренним, если центры окружностей лежат по одну сторону от точки касания. При внутреннем касании расстояние между центрами равно разности радиусов (рис.64: $\boldsymbol{O_1O_2 = R - r}$).

Длина окружности и площадь круга вычисляются соответственно по формулам $\boldsymbol{C = 2\pi R, S = \pi R^2}$.

Список литературы

1. Гусев В.А., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Геометрия. Полный справочник. – М.: Махаон, 2006. – 320 с. – (Для школьников и абитуриентов).
2. Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Математика. Полный справочник. – М.: Махаон, 2006. – 320 с. – (Для школьников и абитуриентов).
3. Степанова Т.С. Геометрия. Весь школьный курс в таблицах. – Минск: Букмастер: Кузьма, 2013. – 224 с.
4. Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачева М.В. и др. Изучение алгебры в 7–9 классах: Кн. Для учителя. – М.: Просвещение, 2002. – 287 с.
5. Кузнецова Е.П., Муравьева В.Л. и др. Алгебра. 7 класс. Минск, 2014. – 318 с.
6. Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. Алгебра. 8 класс. Методические рекомендации. – М.: Просвещение, 2017. – 128 с.
7. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. и др. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций. – М.: Просвещение, 2017. – 287 с.
8. https://www.stranamam.ru/
9. http://fb.ru/
10. http://math-prosto.ru
11. https://spravochnick.ru/
12. http://kak.znate.ru/
13. https://ege-ok.ru/
14. http://pandia.ru/
15. http://www.treugolniki.ru/
16. http://resolventa.ru/

Содержание

Учебное издание

Владимир Егорович Щербатых

Базовые элементы математики

Учебное пособие для 1 курса СПО

Техническое исполнение - *В. М. Гришин*
Печатается в авторской редакции

Формат 60 x 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 3,2. Уч.-изд.л. 2,9
Тираж 300 экз. (1-й завод 1-35 экз.). Заказ 102

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1