МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

Г. Г. Ельчанинова, Р. А. Мельников

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ:
**типовые задания с примерами решений для студентов СПО
(09.02.03 Программирование в компьютерных системах;
09.02.02 Компьютерные сети;
09.02.07 Информационные системы и программирование)**

Учебное пособие

Елец – 2019

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
Э 45

Размещено на сайте по решению редакционно-издательского совета Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина от 31.01.2019, протокол № 1

Рецензенты:

О.Н. Масина, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и компьютерных технологий (Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец),

С.Ю. Корабельщикова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и информационной безопасности (ФГАОУ ВО Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова)

Г. Г. Ельчанинова, Р. А. Мельников

Е 45 Элементы высшей математики: типовые задания с примерами решений для студентов СПО (09.02.03 Программирование в компьютерных системах; 09.02.02 Компьютерные сети; 09.02.07 Информационные системы и программирование). – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2019. – 60 с.

Основная цель учебного пособия – оказать помощь обучающимся СПО в подготовке к занятиям по дисциплине «Элементы высшей математики», а также организация текущего контроля по этой дисциплине.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

Введение

Дисциплина «Элементы высшей математики» относится к обязательным дисциплинам математического и общего естественнонаучного цикла учебного плана по специальностям СПО 09.02.03 – Программирование в компьютерных системах и 09.02.02 – Компьютерные сети.

Для освоения дисциплины «Элементы высшей математики» необходим комплекс знаний, умений, навыков, способов деятельности и установок, полученных и сформированных у студентов в ходе изучения дисциплины «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия» общеобразовательного блока.

Освоение данной дисциплины в качестве предшествующей необходимо при изучении «Теории вероятностей и математической статистики», а также дисциплин профессионального цикла.

Цель курса «Элементы высшей математики» состоит в формировании у обучающихся представлений о математике как науке, предоставляющей фундамент и большие возможности для развития многих отраслей научного знания.

Уровень строгости и, соответственно, «теоретичности» соответствует поставленным задачам:

- знакомство с основными разделами высшей математики;
- развитие математического аппарата, необходимого для успешного выполнения профессиональных задач;
- воспитание математической культуры;
- формирование знаний, достаточных для самостоятельного освоения математического материала;
- привитие осознания значимости приобретаемых знаний и умений для дальнейшей профессиональной деятельности.

Безусловно, применение математических методов расширяет возможности каждого специалиста, поэтому основной специфической задачей преподавателя системы среднего профессионального образования является обучение решению задач с опорой на фундаментальные и прикладные положения теории, которые в большинстве случаев не подлежат доказательству в рамках данного курса.

Пособие содержит систематизацию основных теоретических положений, необходимых для работы с практическим материалом и примеры решения задач. Тематика соответствует 5 семестру.

Каждый блок теории снабжён задачным материалом, который может быть использован для комплектования индивидуальных семестровых заданий.

Раздел 7
Интегральное исчисление функции одной переменной

Интегральное исчисление – это раздел математического анализа, в котором изучаются интегралы, их свойства, способы вычисления и приложения. Вместе с дифференциальным исчислением оно составляет основу аппарата математического анализа. Наряду с производной, интеграл имеет в математическом анализе фундаментальное значение: восстановление функции по известной производной (это одна из основных задач в интегральном исчислении).

7.1. Неопределённый интеграл

Определение. Функция $F(x)$ в заданном промежутке называется ***первообразной функцией*** для функции $f(x)$, если во всем этом промежутке $f(x)$ является производной для функции $F(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$, или, что то же самое, $dF(x)=f(x)dx$.

Процедура выявления для функции всех её первообразных называется ***интегрированием*** её, и составляет одну из задач интегрального исчисления. Очевидно, эта задача является *обратной* к основной задаче дифференциального исчисления.

Теорема. Если в некотором промежутке $\langle a;b\rangle$ (конечном или бесконечном, замкнутом или нет) функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то для любой произвольной постоянной C функция $F(x)+C$ также будет первообразной для $f(x)$**.**

Для функции $f(x)$ выражение её первообразной записывают в виде символа

$$\int f(x)dx,$$

который называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$.

Здесь $f(x)dx$ – ***подынтегральное выражение***, $f(x)$ – ***подынтегральная функция***.

Имеют место следующие свойства:

1. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$;
2. $\int F'(x)dx=F(x)+C$;
3. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$;
4. $\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

Из определения первообразной следует, что операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратимы. Следовательно, таблица производных может служить источником ***таблицы интегралов****:*

1. $\int 0 \cdot dx = C$;

2. $\int 1 \cdot dx = x + C$;

3. $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C; \quad \mu \neq -1$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

5. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$;

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

8. $\int e^x dx = e^x + C$;

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

10. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

12. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$;

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c$;

15.
$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a}$

16.
$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \dfrac{a}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 +}\right.$

Вычисление конкретного интеграла всегда должно приводить к табличным интегралам. Результат интегрирования проверяется дифференцированием.

Методы интегрирования

Определение. Нахождение неопределённого интеграла с помощью применения основных свойств интегралов и таблицы простейших интегралов называется ***непосредственным интегрированием***.

Замечание: упомянутый метод называют иначе методом разложения, то есть подынтегральная функция представляется в виде суммы, а затем неопределённый интеграл ищут как сумму интегралов слагаемых.

Помимо непосредственного интегрирования применяют метод ***подстановки*** или ***замены переменной***, цель которого – получить интеграл, вычисляемый проще первоначального. Этот метод основан на следующей **теореме**: Если в интеграле $\int f(x)dx$ заменить x на $\varphi(t)$, а dx – на $\varphi'(t)dt$, где f,

φ, φ' – непрерывные функции, то справедлива формула $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Выделяют два случая применения метода подстановки (важнейшие подстановки):

1. $\int f[\varphi(x)]g(x)dx = F(\varphi(x)) + c$, где $g(x) = k \cdot \varphi'(x)$, используют подстановку $t = \varphi(x)$. Это случай, когда подынтегральное выражение может быть преобразовано так, что часть подынтегральной функции $f(x)$ может быть включена под знак дифференциала, в результате чего интеграл сводится к табличному интегралу.

2. $\int \frac{g(x)}{f(x)}dx = k \cdot \ln|f(x)| + c$, где $g(x) = k \cdot f'(x)$, используют подстановку $t = f(x)$.

Кроме того, в случаях, когда выражение не поддаётся непосредственному интегрированию и не интегрируется введением новой переменной, для интегрирования выражений применяют так называемую формулу ***интегрирования по частям*** $\int udv = uv - \int vdu$. Эта формула справедлива в том случае, если функции u и v дифференцируемые, а u' и v' – непрерывные.

Применение данной формулы целесообразно в следующих случаях (типы интегралов, вычисляемые путём интегрирования по частям):

1. $I = \int x^n \cdot e^{ax}dx$. Целесообразно брать $u = x^n$, $dv = e^{ax}dx$.
2. $I = \int x^n \cdot \cos axdx$. Целесообразно брать $u = x^n$, $dv = \cos axdx$.
3. $I = \int x^n \cdot arctgxdx$. Целесообразно брать $u = arctgx$, $dv = x^n dx$.
4. $I = \int x^n \cdot \arcsin xdx$. Целесообразно брать $u = \arcsin x$, $dv = x^n dx$.
5. $I = \int x^n \cdot (\ln x)^n dx$. Целесообразно брать $u = (\ln x)^n$, $dv = x^n dx$.
6. $I = \int e^{ax} \cdot \sin bxdx$. В этом случае не суть важно, какие выражения брать за u и dv. Это так называемый возвратный интеграл. То есть после применения формулы мы вновь получим интеграл такого же вида, уравнение для искомого интеграла.
7. $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}, n = 2, 3, \ldots;$ $I_n = \frac{(3-2n)I_{n-1}}{a^2(2-2n)} + \frac{x}{a^2(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}$ – рекуррентная формула.

Интегрирование рациональных выражений

Функцию вида: $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$ называют ***рациональным выражением (функцией)***.

Не всякую рациональную функцию удаётся проинтегрировать рассмотренными выше методами. Рациональные дроби интегрируются путём разложения их в сумму элементарных дробей и методом подстановки.

<u>Определение:</u> ***Элементарными (простейшими)*** называются следующие дроби:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{B}{(x-a)^{\kappa}}, \kappa = 2,3,...$ 3) $\dfrac{Cx+D}{x^2+px+q}, \dfrac{p^2}{4}-q<0$;

4) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}, n = 2,3,..., \dfrac{p^2}{4}-q<0$; здесь $A,B,C,D,M,N \in R$.

Неопределённый интеграл от любой элементарной дроби является элементарной функцией, выражающейся через *ln, arctg* и рациональные функции. Заметим, что если изначально заданная рациональная дробь неправильная (степень переменной числителя не меньше степени знаменателя), из неё нужно выделить целую часть как в обычных арифметических дробях.

Схематически процедура разложения рационального выражения в сумму элементарных дробей выглядит следующим образом.

- Из основной теоремы алгебры следует, что многочлен m-ой степени $Q_m(x)$ имеет точно «m» корней, среди которых возможны вещественные; вещественные кратные; комплексные; кратные комплексные и имеет место разложение на множители многочлена $Q_m(x)$, т. е.

$$Q_m(x) = (x-x_1)(x-x_2).....(x-x_m).$$

В этом произведении комплексно сопряженная пара корней $x_{ij} = \alpha_j \pm \beta_i i$ порождена некоторым квадратным трехчленом, и тогда следует что $(x-x_i)(x-x_j) = ax^2+bx+c$.

Таким образом, многочлен $Q_m(x)$ может быть представленным в виде

$$Q_m(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_l)^k...(ax^2+bx+c)...(dx^2+ex+f)^e.$$

- Далее рациональное выражение представляют в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-x_1}+...+\frac{B}{(x-x_l)^k}+...+\frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}+...+\frac{Mx+N}{(dx^2+ex+f)^z+...} \quad (*).$$

где числа *A, B, C, D* и т.д. пока не известны. При этом руководствуются тем, что

1) каждому линейному множителю знаменателя вида $(x-a)$ соответствует одна элементарная дробь вида $\dfrac{A}{x-x_1}$;

2) каждому множителю знаменателя вида $(x-x_l)^{\kappa}$, *к=2,3,...* соответствует сумма элементарных дробей вида $\dfrac{B_1}{x-x_1}$, $\dfrac{B_2}{(x-x_1)^2}$, ..., $\dfrac{B_{\kappa}}{(x-x_1)^{\kappa}}$;

3) каждому множителю знаменателя вида (ax^2+bx+c), где $b^2-4ac<0$ (действительных корней у трёхчлена нет) ставится в соответствие одна элементарная дробь $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

4) каждому множителю знаменателя вида $(dx^2+ex+f)^z$, *z=2,3,...* , где $b^2-4ac<0$ (действительных корней у трёхчлена нет) соответствует сумма *z* элементарных дробей вида $\dfrac{M_1x+N_1}{dx^2+ex+f}$, $\dfrac{M_2x+N_2}{(dx^2+ex+f)^2}$,..., $\dfrac{M_\kappa x+N_\kappa}{(dx^2+ex+f)^\kappa}$.

- Затем, проведя обычную операцию сложения дробей правой части (*), с приведением подобных в числителе слагаемых при одинаковых показателях степеней переменной x, сравнивают полученное выражение в числителе преобразованной «правой» части с многочленом $P_n(x)$, а именно, приравнивают, при одинаковых показателях степеней переменной x, коэффициенты «левой» и «правой» частей. В результате возникает линейная неоднородная система относительно неизвестных *A, B, C, D* …, определитель которой не равен 0. Решение этой системы и даст численное значение коэффициентам *A, B, C, D* … . Когда эти коэффициенты определены, процедура интегрирования заданного рационального выражения сводится к интегрированию простейших рациональных выражений.

Изложенный здесь схематический метод определяют как ***«метод неопределенных коэффициентов»***.

Остановимся на интегрировании «простейших» рациональных выражений вида:

$$а)\int\frac{dx}{x\pm a};\quad б)\int\frac{dx}{(x\pm a)^k};\quad в)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c};\quad г)\int\frac{M\cdot x+N}{ax^2+bx+c}dx;\quad д)\int\frac{M\cdot x+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^m}dx.$$

Ситуации **а), б)** входят в табличное интегрирование, а именно

$$а)\int\frac{dx}{x\pm a}=\ln|x\pm a|+C;\qquad б)\int\frac{dx}{(x\pm a)^\kappa}=\frac{1}{1-k}(x\pm a)^{1-k}+C,\quad (k\neq 1).$$

Случай в) требует детального рассмотрения.

Возникают ситуации: ***трёхчлен имеет вещественные корни*** x_1, x_2

Следовательно, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Таким образом,

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right),$$

и вычисление интеграла **в)** сводится к табличному интегрированию

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\int\frac{dx}{(x-x_1)}-\int\frac{dx}{(x-x_2)}\right)=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|+C.$$

В том случае, когда трёхчлен ax^2+bx+c ***не имеет вещественных корней***, его следует ***привести к полному квадрату***, а именно:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right],$$

и в этом случае интегрирование приводится к табличному, с использованием пункта 5 таблицы интегралов. Реализация интегралов **г), д)** в общем случае весьма громоздка продуктивна) и, поэтому, целесообразно рассмотреть (и освоить) технику реализации интегралов вида **в), г), д)** в конкретных ситуациях.

Реализация интеграла **г)** возможна с применением почленного деления числителя на знаменатель, введения новой неизвестной. Интеграл **д)** предполагает использование рекуррентной формулы.

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n,$$

и, зная

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a},$$

можно вычислить интеграл I_2, зная который можно вычислить I_3 и т.д. В данном случае $n=2$, $a=1$ и тогда

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C\cdot$$

<u>Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы</u>

Нередко бывает необходимо проинтегрировать иррациональное выражение. Для осуществления этого обычно применяют метод подстановки. Так, для

1) нахождения интеграла вида $I=\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$, где R рациональна относительно x и $\sqrt[n]{ax+b}$, осуществляется с помощью подстановки $t=\sqrt[n]{ax+b}$;

2) нахождения интеграла вида $I=\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где R рациональна относительно x и $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, осуществляется с помощью подстановки $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$;

<u>Замечание</u>: функция R может зависеть от нескольких однотипных кратных корней, в этом случае вводят подстановку с новой переменной, равной корню с наименьшим общим показателем всех имеющихся корней.

3) нахождение интеграла вида $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, где R рациональна относительно x и $\sqrt[n]{ax^2+bx+c}$, осуществляется с помощью подста-

новок Эйлера: а) $a>0,\Rightarrow\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$, б) $c>0,\Rightarrow\sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c}$; в) если α и β – действительные корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, то применяются подстановки $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\beta)t$.

Замечания:

- подстановки а) – в) называются соответственно первой, второй и третьей подстановками Эйлера;
- если $a<0, c<0$, то нельзя определённо сказать, имеет ли квадратный трёхчлен ax^2+bx+c корни; если он их имеет, то применяется третья подстановка Эйлера; если же не имеет, то это прежде всего означает, что квадратный трёхчлен принимает только отрицательные значения и интеграл не имеет смысла и, соответственно, вычислен быть не может.

Интегрирование биномиальных дифференциалов

Выражение $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ где *m, n, p* – рациональные числа, называется ***биноминальным дифференциалом***. Рассмотрим случаи, когда биноминальный дифференциал может быть сведен к дифференциальному выражению от рациональных функций.

а) p – целое число; б) $\frac{m+1}{n}$ – целое число; в) $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число

В случае а), когда p – целое число, применяется подстановка $x=z^N$, где N – общий знаменатель дробей «n», «m», с последующим разложением на слагаемые по формуле бинома Ньютона.

В случае б), когда $\frac{m+1}{n}$ – целое число, применяют подстановку $a+bx^n=z^N$, где N – знаменатель дроби «p».

В случае в), когда $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число, применяют подстановку $ax^{-n}+b=z^N$ или $a+bx^n=x^n z^N$, где N – знаменатель дроби «p».

Замечательный русский математик П. Л. Чебышев показал, что биноминальный дифференциал сводится к рациональному выражению лишь только в случаях а), б), в).

Интегрирование некоторых тригонометрических и трансцендентных выражений

В ряде случаев возможны преобразования подынтегрального выражения с тригонометрическими функциями к табличному интегрированию, с помощью соотношений школьной тригонометрии.

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x},$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Кроме того, выделяются следующие типы выражений и наиболее целесообразные подстановки для них:

1. $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональна относительно *sinx* и *cosx* вычисляется с помощью универсальной подстановки $t = tg\frac{x}{2}$ с использованием соответствующих формул

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad x = 2\mathrm{arctg}\, t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В ряде частных случаев возможна иная подстановка:

a) если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то целесообразно применение подстановки $t = \sin x$;

b) если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то целесообразно применение подстановки $t = cosx$;

c) если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то целесообразно применение подстановки $t = ctgx$ или $t = tgx$.

2. $I = \int \sin^m x \cdot \cos^n xdx$, где $m, n \in N$, причём

a) $m = 2k+1$, n – любое натуральное, целесообразна подстановка $t = cosx$;

b) $n = 2k+1$, m – любое натуральное, целесообразна подстановка $t = \sin x$;

c) $m = 2k$, $n = 2l$, $k > l$ интегрируется

- с применением формул $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, формулы бинома Ньютона до тех пор, пока хотя бы один из показателей *p* или *q* не станет нечётным числом;
- с помощью подстановки $t = tgx$, но вычисления будут громоздкими;
- с применением формулы интегрирования по частям, где $u = \sin^{m-1} x$ и $dv = \sin x \cos^n xdx$.

3. $I = \int \sin mx \cdot \cos nxdx$, $I = \int \cos mx \cdot \cos nxdx$, $I = \int \cos nx \cdot \sin mxdx$ вычисляются с помощью применения известных формул тригонометрии

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m-n)x\right);$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x);$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)\ .$$

4. $I = \int R(e^x)dx$, где R рациональна относительно e^x, вычисляется с помощью подстановки $t = e^x$.

Сделаем заключительные замечания. Все рассмотренные здесь интегралы от элементарных функций каким-либо методом, приемом, реализовывались опять-таки в виде элементарных функций. Однако такое положение дел не всегда имеет место.

Так, например, интегралы вида

$$\int e^{-x^2}dx; \quad \int \frac{\sin x}{x}dx; \quad \int \frac{\cos x}{x}dx; \quad \int \frac{dx}{\ln x}; \quad \int \frac{e^x}{x}dx; \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$$

и многие другие не интегрируются в элементарных функциях.

Однако, первообразные подынтегральных функций в этих случаях существуют, но имеют другую природу, отличную от природы элементарных функций. Эти функции называются специальными функциями, и построение некоторых из них будет проведено в теории функциональных рядов.

7.2. Определённый интеграл

К понятию определённого интеграла приводят классические задачи:

1. Задача о площади криволинейной трапеции: пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и положительна на $[a;b]$, требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, образованной прямыми $y = o, x = a, x = b, y = f(x)$.

2. Задача о пройденном пути: пусть материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v = f(t)$, требуется вычислить путь, пройденный этой точкой за промежуток времени от t до $t + \Delta t$.

Для графической интерпретации обеих ситуаций используют декартову прямоугольную систему координат.

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена ограниченная функция, т.е. $|f(x)| \le M$.

1. Произвольной системой точек

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < x_{3,} ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$$

отрезок $[a,b]$ разбиваем на отрезки

$$[a, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{i-1,} x_i], ..., [x_{n-1}, b]$$

длинами соответственно

$$\Delta x_1 = x_1 - a,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1}.$$

2. На каждом из построенных отрезков <u>произвольным образом</u> выбирают точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и вычисляют значение функции в этих точках $f(\xi_i)$.

3. Составляют произведения $f(\xi_i)\Delta x_i$, а затем сумму $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, которая называется ***суммой Римана***.

<u>Определение.</u> Если независимо от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на отрезки $[x_{i-1}; x_i]$ и выбора точек ξ_i на этих отрезках существует конечный предел

$$I = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

то этот предел называется ***определенным интегралом Римана*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается как

$$I = \int_a^b f(x)dx \cdot$$

Здесь b - ***верхний***, a - ***нижний пределы интегрирования***. Функции, для которых существует интеграл Римана называют ***функциями, интегрируемыми по Риману***.

Далеко не каждая функция интегрируема по Риману. Естественно, возникает задача выявления признаков интегрируемости функций по Риману. В основе решения задачи лежит следующая конструкция. Пусть на отрезке $[a,b]$ определена ограниченная функция $f(x)$. Системой точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

отрезок $[a,b]$ разбивается на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ с длинами Δx_i соответственно, $i = \overline{1, n}$. В силу ограниченности функции $f(x)$ на $[a,b]$, её значения ограничены на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ и, как ограниченные множества, имеют *точные верхнюю и нижнюю грани*

$$M_i = \sup\{f(x)\},\ m_i = \inf\{f(x)\},\ x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1,n}.$$

Составляются суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

которые называются ***верхней*** **(S)** и ***нижней*** (s) ***суммами Дарбу***.

Их свойства следующие:

1. При добавлении точек в начальной системе нижняя сумма Дарбу (s) не убывает, а верхняя сумма Дарбу (S) не возрастает.
2. Даже при различных разбиениях отрезка $[a,b]$ имеем $S \geq s$.

Инструмент сумм Дарбу позволяет установить критерий интегрируемости по Риману. Обозначим через $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$.

Критерий интегрируемости по Риману. Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема по Риману на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0.$$

Требованию критерия удовлетворяют:
а) непрерывные на $[a,b]$ функции;
б) кусочно-непрерывные на $[a,b]$ функции, т.е. функции, непрерывные на любом из отрезков, содержащихся в отрезке $[a,b]$.

Приведём теперь свойства интегрируемых функций, важные для дальнейшего.

1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то интегрируемы функции $|f(x)|$, $k\,f(x)$.
2. $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$.

<u>Свойства определённого интеграла</u>

Предполагается заведомо, что рассматриваемые здесь функции интегрируемы на $[a,b]$.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$, $\int\limits_a^a f(x)dx=0$;
2. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, $a\le c\le b$;
3. $\int\limits_a^b k\,f(x)dx=k\int\limits_a^b f(x)dx$;
4. $\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx\pm\int\limits_a^b g(x)dx$;
5. Если $f(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$;
6. Если $f(x)\le g(x)$, $x\in[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$;
7. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b |f(x)|dx$;
8. Если $m\le f(x)\le M$, то $m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a)$;

9. **<u>Теорема о среднем значении (в интегральном исчислении).</u>** Пусть $m \le f(x) \le M$, $x \in [a,b]$. Тогда можно указать μ такое, что $m \le \mu \le M$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)\cdot$$

Более того, если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\exists c \in [a,b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\cdot$$

Следует сопоставить это утверждение с теоремой о среднем в дифференциальном исчислении, а именно, для дифференцируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$ можно указать $c \in [a,b]$ такое, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Метод вычисления определенных интегралов с помощью суммы Римана не продуктивен и поэтому предлагается следующий метод.

Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, x \in [a;b]$, называется ***функцией верхнего предела***.

Отметим важные свойства $\Phi(x)$:

1. $\Phi(x)$ – непрерывна (по "x") на $[a,b]$;
2. $\Phi'(x) = f(x)$, при непрерывной функции $f(x)$.

Последнее означает, что $\Phi(x)$ – есть первообразная функции $f(x)$. Если теперь $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$, то

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C\cdot$$

При $x = a$ имеем: $\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C,\ C = -F(a)$ и $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)\cdot$

При $x = b$ получим $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Это – основная формула интегрального исчисления, называемая ***формулой Ньютона-Лейбница***. Эта формула дает эффективное и простое средство для вычисления определённых интегралов от непрерывных функций $f(x)$. Достаточно знать первообразную $F(x)$ для $f(x)$, после подстановки в которую верхнего "b" и нижнего "a" пределов интегрирования, легко получить численное значение интеграла. Символическое изображение процедуры интегрирования.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b\cdot$$

Методы интегрировая при вычислении определённого интеграла

Пусть $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ определена и непрерывна в промежутке $[\alpha,\beta]$; существует непрерывная производная $\varphi'(t)$ на $[\alpha,\beta]$, и $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\cdot$$

Это и есть ***формула замены переменной (подстановки)*** при вычислении определенного интеграла.

С использованием ***формулы интегрирования по частям***, а именно

$$\int f(x)dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du,$$

можно вычислять определённые интегралы с помощью указанного метода. Ясно, что

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du\cdot$$

Приближённые вычисления с помощью определённых интегралов

Как уже было отмечено, далеко не все элементарные функции имеют первообразные в элементарных функциях. Однако, эти функции имеют большое прикладное значение в естественно–научных исследованиях, и численное значение определённых интегралов от них на определённом промежутке является необходимой потребностью хотя бы в приближённом виде.

К примеру, $\int_a^b e^{-ax^2}dx$, $(a>0)$, играющий важную роль в теории тепловых процессов, теории вероятностей, может быть вычислен лишь приближённо.

В связи с этим возникла неотложная задача создания методов приближённого вычисления определённых интегралов. При ведём лишь некоторые из них.

Для интеграла $\int_a^b f(x)dx$ отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей, и на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$ выбирается точка ξ_i. Вычисляется $f(\xi_i)$ и составляется интегральная сумма

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\frac{b-a}{n}\cdot$$

Отсюда вытекает первая формула приближённого вычисления определённого интеграла – ***формула прямоугольников***:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)\right]+R_n,$$

где

$$R_n=\frac{b-a}{2}\cdot h\cdot f'(\xi),\ \xi\in[a,b],\ h=\frac{b-a}{n}$$

даёт возможность оценить погрешность приближения.

Точность значения интеграла в этом случае зависит от числа «n», и формула прямоугольников не является достаточно эффективной. Требуемую точность приближения интеграла при меньших «n» и, следовательно, при меньших усилиях можно достичь с помощью ***формулы трапеций***:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

где

$$y_0=f(a),\ y_1=f\left(a+\frac{1}{n}\right),\ y_2=f\left(a+\frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ y_n=f(b),$$

$$R_n=\frac{b-a}{12}h^2\cdot f''(\xi),\ \xi\in[a,b].$$

Наконец, наиболее эффективным методом приближённого интегрирования является ***формула Симпсона***:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[(y_0+y_n)+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+4\left(y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots+y_{n-1/2}\right)\right]+R_n,$$

где

$$y_0=f(a), y_1=f\left(a+\frac{1}{n}\right),\ldots, y_{n-1}=f\left(a+\frac{n-1}{n}\right), y_n=f(b),$$

$$y_{1/2}=f\left(a+\frac{1}{2n}\right),\ y_{3/2}=f\left(a+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right),\ \ldots,\ y_{n-1/2}=f\left(b-\frac{1}{2n}\right),$$

т.е. значения подынтегральной функции в середине отрезков дробления $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$, и

$$R_n=-\frac{b-a}{180}h^4\cdot f^{IV}(\xi),\xi\in[a,b].$$

Отметим, что эффективность приближения означает требование при меньших n получить более высокую степень точности.

7.3. Несобственные интегралы

Понятие определённого интеграла (Римана) может быть распространено на случаи: а) интеграла *с бесконечными пределами интегрирования*; б) интеграла *от функции* $f(x)$*, не ограниченной в области интегрирования.* Каждый случай следует рассмотреть отдельно.

а) Пусть $f(x)$ интегрируема на каждом отрезке $[a, b_n]$.

<u>Определение.</u> Если существует ***конечный*** предел

$$\lim_{b_n \to \infty} \int_a^{b_n} f(x)dx = A,$$

то говорят, что $\int_a^{\infty} f(x)dx$ – ***сходится***, а в противном случае – расходится.

В этом случае говорят, что ***имеет место рассмотрение несобственного интеграла***.

Возможны и другие типажи несобственных интегралов:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Вычисление несобственных интегралов в точном их значении возможно далеко не всегда, и посему возникает задача исследования их лишь на предмет сходимости (расходимости).

Имеет место простая и продуктивная теорема сравнения.

<u>Теорема*.</u> Пусть на каждом промежутке $[a, b_n]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ связаны отношением сравнения $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [a, b_n]$.

Тогда из *сходимости* интеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ следует *сходимость* интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$, а из *расходимости* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ следует *расходимость* интеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$.

В связи с этой теоремой возникает необходимость выявления функций, несобственные интегралы от которых, скажем, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ – сходятся или расходятся (назовём их ***калибровочными функциями***).

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{\infty} x^{\mu} dx.$$

На каждом из отрезков $[a, b_n]$ имеем

$$\int_a^{b_n} x^{\mu} dx = \left. \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \right|_a^{b_n} = \frac{b_n^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{a^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

При $\mu < -1$

$$\lim_{b_n \to \infty} \int_a^{b_n} x^{\mu} dx = -\frac{a^{\mu+1}}{\mu+1}, \text{ т.е.}$$

рассматриваемый несобственный интеграл *сходится.* Ясно также, что при $\mu > -1$ интеграл будет расходящимся. При $\mu = -1$ имеем

$$\int_a^{b_n} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^{b_n} = \ln b_n - \ln a \cdot$$

Следовательно,

$$\lim_{b_n \to \infty} \int_a^{b_n} \frac{dx}{x} = \lim_{b_n \to \infty} \left(\ln b_n - \ln a \right) = \infty,$$

что означает расходимость рассматриваемого интеграла.
Окончательно,

$$\int_a^{\infty} x^{\mu} dx - \begin{cases} \mu < -1 & \text{сходится,} \\ \mu \geq -1 & \text{расходится,} \end{cases}$$

и функция $f(x) = x^{\mu}$ является достаточно приемлемой функцией, удовлетворяющей теореме сравнения. Понятно, что теорема сравнения может быть распространена на общие несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

<u>Интегралы от неограниченных функций</u>

Функцию $f(x)$ будем называть ***неограниченной в точке*** d отрезка $[a,b]$, если $\lim\limits_{x \to d} |f(x)| = \infty$. Оказывается, что в ряде случаев интегралы от них могут иметь определённую численную оценку. Предварительно рассмотрим отрезок $[a,b]$, где функция $f(x)$ определена на $[a,b)$, и $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$, или $\lim\limits_{x \to b} |f(x)| = \infty \cdot$

Это, например, функции вида

$$f(x) = \frac{1}{x-1};\ x \in [0,1]; \quad f(x) = \frac{1}{4 - x^2};\ x \in [2,3] \text{ и т.д.}$$

Анализ интегралов от таких функций сводится к определению.
<u>**Определение.**</u> Если $\lim\limits_{x \to b} |f(x)| = \infty$ и существует *конечный* предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x) dx$ от неограниченной функции в точке b – ***сходится***. В противном случае его считают ***расходящимся***.

Аналогичное утверждение имеет место и для точки a. Отметим случаи, когда точка бесконечного разрыва d находится внутри отрезка $[a,b]$ интегрирования функции $f(x)$. В этой ситуации следует рассмотреть

$$\int_a^{d-\varepsilon_1} f(x) dx + \int_{d+\varepsilon_2}^{b} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{d-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{d+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx = A$$

не зависящий от характера ε_1, ε_2, то $\int_a^b f(x)dx$ называют ***сходящимся*** на $[a,b]$

В противном случае – ***расходящимся***.

Исследование интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с функцией, неограниченной на $[a,b]$, на сходимость может быть проведено с использованием ***Теоремы**** (сравнения), и здесь, в качестве калибровочной функции может быть использована функция

$$g(x) = (x-d)^{\mu},$$

где d – точка бесконечного разрыва функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

7.4. Приложения определённого интеграла

<u>Длина дуги плоской кривой</u>

Пусть на плоскости определена дуга кривой, заданной в параметрическом виде

$$L - \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \cdot$$

Тогда длина этой дуги может быть вычислена как

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \cdot$$

Если дуга кривой L определена как

$$y = f(x),\ a \le x \le b,$$

то

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx \cdot$$

Наконец, если дуга кривой определена в полярной системе координат как

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1,$$

то

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\, d\varphi \cdot$$

Дуга, имеющая конечную длину, называется ***спрямляемой***.

<u>Площадь плоской фигуры</u>

Из конструкции интеграла Римана немедленно вытекает его геометрическая интерпретация. А именно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной интегрируемой функцией $y = f(x)$, $y = 0$, $a \le x \le b$, численно выразится как

$$S = \int_a^b f(x)dx \cdot$$

Если фигура ограничена линиями $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $y_1 \ge y_2$ при $a \le x \le b$, то её площадь суть

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx \cdot$$

Имея в виду, что плоская фигура может быть ограничена линиями, определёнными в различных системах координат, приведём формулу площади сектора, ограниченного непрерывной кривой $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$ в полярной системе координат:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho^2(\varphi)d\varphi \cdot$$

При вычислении площади конкретно заданной плоской фигуры следует иметь в виду ***свойство аддитивности*** площади. Если поверхность Π – есть объединение поверхностей Π_i, $i = \overline{1, n}$, т.е. $\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i$ и $\Pi_i \bigcap \Pi_j = \emptyset$ то площадь поверхности Π численно определится как $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где S_i – площади поверхностей Π_i.

Фигура, имеющая конечную площадь, называется ***квадрируемой***.

Вычисление объёмов

Один из методов вычисления объёмов тел с помощью определённого интеграла состоит в рассечении тела плоскостями, параллельными какой–либо координатной плоскости и, если, например, $P(x)$ – площадь сечения тела в точке x, то объём тела

$$V = \int_a^b P(x)dx \cdot$$

Этот метод называют методом вычисления объёмов по известным поперечным сечениям. Этот метод восходит к Архимеду (287 – 212 г.г. до н. э.!) и, по праву, Архимед – предтеча интегрального исчисления.

Тело, образованное от вращения некоторой криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, называется ***телом вращения***.

С использованием метода параллельных сечений можно показать, что объём тела вращения

$$V=\pi\int_a^b y^2dx.$$

Тело, имеющее конечный объём, называется ***кубируемым***.

Вычисление механических величин

Координаты центра тяжести дуги плоской кривой $y=f(x)$, $a\le x\le b$, вычисляются по формулам

$$x_Y=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{l};\quad y_Y=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{l},$$

где $l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ – длина дуги кривой.

Координаты центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной линией $y=f(x)$, $a\le x\le b$, вычисляются по формулам

$$x_Y=\frac{\int_a^b xy\,dx}{S};\quad y_Y=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{S},$$

где $S=\int_a^b y\,dx$ – площадь фигуры.

Пусть на объект, движущийся вдоль оси OX, действует переменная сила $F(x)$. Тогда ***работа***, совершённая этой силой на участке от $x=a$ до $x=b$ определится как

$$A=\int_a^b F(x)dx.$$

В ряде случаев определённым интегрированием можно найти и ***кинетическую энергию*** движущихся объектов.

Наконец, можно определять ***силу давления*** жидкости на плоскую пластину, погружённую в жидкость.

Индивидуальные задания

Задание 1. Найти неопределённые интегралы и в пунктах а) проверить результат дифференцированием:

1. а) $\int\frac{dx}{1-\cos x}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; в) $\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$; г) $\int\frac{2x-1}{x^2+4x-8}dx$.

2. а) $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$; б) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$; в) $\int x\cos^2 2x\,dx$; г) $\int\frac{x+3}{2x^2+3x-1}dx$.

3. а) $\int\frac{x^2dx}{1-x^2}$; б) $\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$; в) $\int x\sin^2 2x\,dx$; г) $\int\frac{x}{x^2-6x+3}dx$.

4. а) $\int\frac{dx}{1+\cos x}$; б) $\int\frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$; в) $\int\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\,dx$; г) $\int\frac{2x-5}{x^2-3x-12}dx$.

5. а) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$; б) $\int\frac{dx}{e^x+1}$; в) $\int\arcsin x\,dx$; г) $\int\frac{4-3x}{x^2+6x-3}dx$.

6. а) $\int\left(\sqrt[3]{x-4}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$; в) $\int\ln\left(x^2+1\right)dx$; г) $\int\frac{4x+1}{x^2-2x+3}dx$.

7. а) $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$; б) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$; в) $\int xe^{-x}dx$; г) $\int\frac{x+6}{x^2-12x+3}dx$.

8. а) $\int\frac{x-2}{\sqrt{x-3}}dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int\operatorname{arctg}x\,dx$; г) $\int\frac{2x-3}{2x^2-4x+13}dx$.

9. а) $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; в) $\int\ln\left(x^2+x\right)dx$; г) $\int\frac{3x-1}{x^2-5x+24}dx$.

10. а) $\int\frac{x\,dx}{4+x^4}$; б) $\int x\sqrt{x+3}\,dx$; в) $\int\sin\left(\ln x\right)dx$; г) $\int\frac{x+1}{x^2-4x+4}dx$.

11. а) $\int\frac{x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}$; б) $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$; в) $\int\sin\sqrt{x}\,dx$; г) $\int\frac{x-1}{x^2-6x+6}dx$.

12. а) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$; б) $\int\frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$; в) $\int e^{\sqrt{x+a}}dx$; г) $\int\frac{2x+1}{x^2+5x+4}dx$.

13. а) $\int\frac{x^2dx}{1+x}$; б) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-3}}$; в) $\int\cos(\ln x)dx$; г) $\int\frac{2x+3}{x^2-12x+12}dx$.

14. а) $\int\sin^2 x\,dx$; б) $\int\frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}}dx$; в) $\int\sqrt{x}\ln^2 x\,dx$; г) $\int\frac{6x+1}{x^2-2x-3}dx$.

15. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$; б) $\int\frac{\sqrt{x}}{x+a^2}dx$; в) $\int x\arccos x\,dx$; г) $\int\frac{1+2x}{x^2+4x-2}dx$.

16. а) $\int\cos^2 x\,dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; в) $\int x\operatorname{arctg}6x\,dx$; г) $\int\frac{5x-1}{x^2+6x-1}dx$.

17. а) $\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$; б) $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$; в) $\int x\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx$; г) $\int\frac{x-1}{2x^2-4x+5}dx$.

18. а) $\int\frac{dx}{\cos x}$; б) $\int x\sqrt{x+3}\,dx$; в) $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$; г) $\int\frac{4x-3}{x^2-2x+2}dx$.

19. а) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$; в) $\int x\arcsin x\,dx$; г) $\int\frac{x-3}{2x^2-2x-3}dx$.

20. а) $\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$; б) $\int x(2x+5)^{100}dx$; в) $\int x\cos\sqrt{x^2+a}\,dx$; г) $\int\frac{4x+1}{x^2-6x+5}dx$.

21. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x}}$; б) $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{a^2-x}$; в) $\int x\sin\sqrt{x^2+a}\,dx$; г) $\int\frac{2x\,dx}{x^2-8x-5}$.

22. а) $\int\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$; б) $\int\frac{dx}{2\sqrt{x^2+x}}$; в) $\int\sin\sqrt{x+a}\,dx$; г) $\int\frac{1-2x}{x^2-3x-6}dx$.

23. а) $\int \frac{(\sqrt{x}-x)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$; в) $\int \frac{\sin\sqrt{\ln x}}{x}dx$; г) $\int \frac{2x+1}{2x^2-3x-4}dx$.

24. а) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$; б) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$; в) $\int x^2\cos x\,dx$; г) $\int \frac{3x-2}{x^2-x-2}dx$.

<u>Задание 2.</u> Найти интегралы:

1. а) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$; б) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}$; г) $\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx$.

2. а) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx$; в) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$; г) $\int \sqrt{x^2+6x+3}\,dx$.

3. а) $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; в) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$; г) $\int \sqrt{x^2+x-2}\,dx$.

4. а) $\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$; б) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; в) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; г) $\int \sqrt{x^2-4x-4}\,dx$.

5. а) $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; в) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$; г) $\int \sqrt{x^2+6x-6}\,dx$.

6. а) $\int \frac{x\,dx}{x^3+4x^2+4x+1}$; б) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; в) $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx$; г) $\int \sqrt{4+4x-x^2}\,dx$

7. а) $\int \frac{x\,dx}{x^3+4x^2+6x+4}$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

8. а) $\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+6}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx$; в) $\int \cos 2x\cdot\cos 3x\cdot\cos 4x\,dx$; г) $\int \sqrt{x^2-3x}\,dx$.

9. а) $\int \frac{x\,dx}{x^3-4x^2+7x-6}$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}-1}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin x-\sin\alpha}$; г) $\int \sqrt{x^2-6x}\,dx$.

10. а) $\int \frac{(x^3+3)dx}{x^3+x^2-6x}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx$; в) $\int \cos^5 x\,dx$; г) $\int \sqrt{2x^2+2x-3}\,dx$.

11. а) $\int \frac{x^3dx}{x^3-1}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^2}}$; в) $\int \sin^4 x\cdot\cos^5 x\,dx$; г) $\int \sqrt{x-x^2+1}\,dx$.

12. а) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$; б) $\int x^3\sqrt{1+x}\,dx$; в) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

13. а) $\int \frac{x\,dx}{x^3 - x^2 - 4x - 6}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - 3}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$; г) $\int \sqrt{x^2 - 2x - 3}\,dx$.

14. а) $\int \frac{dx}{x^4 - x}$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx$; в) $\int \frac{\cos x\,dx}{1 + \cos x}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}$.

15. а) $\int \frac{x^2\,dx}{x^3 + x^2 - 3x - 6}$; б) $\int \frac{dx}{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$; г) $\int \sqrt{2x - x^2 + 3}\,dx$

16. а) $\int \frac{x\,dx}{(x - 1)^2 (x^2 + 2x + 2)}$; б) $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\,dx$; в) $\int \sin x \cdot \sin(x + a) \cdot \sin(x + b)\,dx$;
г) $\int \sqrt{x^2 - x}\,dx$.

17. а) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 6x - 4}\,dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{1 + \varepsilon\cos x}$, $0 < \varepsilon < 1$; г) $\int x\sqrt{x^2 - 9}\,dx$

18. а) $\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + x + 3}$; б) $\int \frac{dx}{x\left(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)}$; в) $\int \cos x \cdot \cos^2 3x\,dx$;
г) $\int \sqrt{x + x^2}\,dx$.

19. а) $\int \frac{x + 1}{x^2 (x + 3)}\,dx$; б) $\int \sqrt{x^3 + x^4}\,dx$; в) $\int \frac{\sin x}{1 - 2\sin x}\,dx$; г) $\int \sqrt{x^2 + 2x - 1}\,dx$.

20. а) $\int \frac{x^6\,dx}{(x + 2)^2 x}$; б) $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$; г) $\int \sqrt{x^2 - 3x + 2}\,dx$.

21. а) $\int \frac{x\,dx}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$; б) $\int \sqrt{x + x^2}\,dx$; в) $\int \sin^4 x\,dx$; г) $\int \sqrt{x^2 + x - 6}\,dx$.

22. а) $\int \frac{x + 1}{x(1 + x)(1 + x^2)}\,dx$; б) $\int \sqrt{x^2 - x}\,dx$; в) $\int \sqrt{1 + \sin x}\,dx$; г) $\int \sqrt{x^2 - 9}\,dx$.

23. а) $\int \frac{dx}{x^4 - 27x}$; б) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1}\,dx$; в) $\int \cos^4 x\,dx$; г) $\int \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

24. а) $\int \frac{x^4\,dx}{x^4 - 1}$; б) $\int \sqrt{x - \sqrt{x}}\,dx$; в) $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx$; г) $\int \sqrt{x^2 - 2x - 2}\,dx$.

Задание 3. Вычислить определённые интегралы:

1. а) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$; б) $\int\limits_0^{10} x e^{-x} dx$; в) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

2. а) $\int\limits_0^{3} \ln(x+3)dx$; б) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx$.

3. а) $\int\limits_1^{e} \cos(\ln x)dx$; б) $\int\limits_1^{4} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$.

4. а) $\int\limits_1^{e} \frac{1+\ln^4 x}{x}dx$; б) $\int\limits_0^{1} e^{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$.

5. а) $\int\limits_1^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$; б) $\int\limits_0^{1} x\cdot 2^x dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.

6. а) $\int\limits_1^{4} \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$; б) $\int\limits_1^{e} \ln^2 x\,dx$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos x}$.

7. а) $\int\limits_e^{e^3} \frac{\ln x}{x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{1} x \operatorname{arctg} x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} \sin 5x\cdot\cos 3x\,dx$.

8. а) $\int\limits_0^{1} e^x(e^x-1)^2 dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 dx}{1+x^2}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\sin x}$.

9. а) $\int\limits_2^{3} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}}dx$; б) $\int\limits_0^{1} x\arcsin x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$.

10. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos^2 x\,dx$; б) $\int\limits_1^{\pi} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,dx$.

11. а) $\int\limits_{-5}^{1} \frac{dx}{x^2+4x-5}$; б) $\int\limits_0^{e} x\ln(1+x)dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2\cos x}$.

12. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_0^{2} \frac{x\,dx}{e^x}$; в) $\int\limits_0^{\pi} \sin 7x\cdot\cos 3x\,dx$.

13. а) $\int\limits_0^{3} x e^{4x^2} dx$; б) $\int\limits_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$; в) $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx$.

14. а) $\int\limits_1^{2} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int\limits_2^{5} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\cos x}$.

15. а) $\int_0^1 x e^{x^2+1} dx$; б) $\int_1^e x\ln x\,dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin x}\,dx$.

16. а) $\int_0^{\pi} x\cos 3x\,dx$; б) $\int_0^2 \frac{x-2}{\sqrt{x+3}}dx$; в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx$.

17. а) $\int_0^1 x(2-x)^{12} dx$; б) $\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}} dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$.

18. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 dx}{x^2+4}$; б) $\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$; в) $\int_0^{\pi} \cos x\cdot\cos 3x\,dx$.

19. а) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; б) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$; в) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x\,dx$.

20. а) $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2-4x^2}\,dx$; б) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$; в) $\int_0^{\pi} \sin^5 x\,dx$.

21. а) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$; б) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$; в) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx$.

22. а) $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{3}}\,dx$.

23. а) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; б) $\int_e^{e^2} \sin(\ln x)\,dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3-\sin x}$.

24. а) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2}$; б) $\int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$; в) $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos 4x}{7}}\,dx$.

Задание 4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

1. а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

2. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

3. а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

4. а) $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4+a^2}$; б) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

6. а) $\int\limits_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

7. а) $\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$; б) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$

8. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int\limits_{-2}^{-0} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

9. а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

10. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x}$; б) $\int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt[8]{x-3}}$

11. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+8}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1-e^{x^2}}$

12. а) $\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^2-8x-9}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

13. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{4+9x^2}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\sin x}$

14. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-8x-9}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}$

15. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$; б) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

16. а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)}$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1+\sin x}$

17. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}} dx$; б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{2\sqrt{4-x^2}}$

18. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+2)}$; б) $\int\limits_{-6}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+6}}$

19. а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$

20. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x-5}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$

21. а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^5 x}$; б) $\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

22. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-8}$; б) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

23. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^{4x}}$; б) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$

24. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x-7}$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

Задание 5. Решить задачи.

1. Найти длину дуги линии $y = x^{3/2}$, а) $0 \le x \le 4$; б) $2 \le x \le 7$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями а) $y = \sqrt{x}$, $y = x-1$; б) $y = \sqrt{x}$, $y = 1-x$.

3. Найти длину дуги линии $y = \sqrt{x}$, а) $0 \le x \le 4$; б) $2 \le x \le 7$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями а) $y = -x^2+2x+7$, $y = x+5$; б) $y = -x^2+2x+7$, $y = x-5$.

5. Найти длину дуги линии $y = \sqrt{x-2}$, а) $0 \le x \le 4$; б) $2 \le x \le 6$.

6. Скорость движения точки вдоль прямой $v(t) = t \cdot e^{-0{,}1t}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой а) до остановки; б) за 5 первых секунд от начала движения.

7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями а) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2-x}$; б) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4-x}$.

8. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x = 2t - t^2$, $y = t$, а) $0 \le t \le 2$; б) $1 \le t \le 2{,}5$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями а) $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$; б) $y = x^2 - 2x$, $x + y = 0$.

10. Скорость точки $v(t) = 3t^2 + 4t$ м/с. Найти пройденный точкой путь за время а) $t = 10$с; б) до остановки.

11. Найти длину дуги кривой $y = \ln\frac{1}{1-x^2}$, а) $0 \le x \le \frac{1}{2}$; б) $0{,}1 \le x \le \frac{1}{e}$.

12. Найти длину дуги линии $y = e^x$, а) $0 \le x \le 1$; б) $1 \le x \le 2$.

Раздел 8. Функции двух переменных

8.1. Функции двух переменных (основные понятия)

Определение. Множество точек $N \in R^n$, удовлетворяющих условию

$$\rho(N, N_0) < \varepsilon,$$

называется ε-***окрестностью*** точки N_0 и обозначается как

$$S_\varepsilon = \{N : N \in R^n,\ \rho(N, N_0) < \varepsilon\}.$$

Множество же S_R, такое, что $\rho(N, N_0) \le R$, называют *шаром* в R^n радиуса R с центром в точке N_0.

Определение. Множество $D \subset R^n$ называется ***ограниченным***, если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса.
Определение. Точка $N \in D$ называется ***внутренней*** для D, если она содержится в D вместе с некоторой своей ε - окрестностью.
Определение. Множество $D \subseteq R^n$ называется ***открытым***, если все его точки - внутренние.
Определение. Точка N_0 называется ***предельной*** для множества D, если существует последовательность точек $\{N_k\} \subseteq D$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} N_k = N_0$.

Предельная точка может и не содержаться в множестве D.
Определение. Множество $D \subseteq R^n$ называют ***замкнутым***, если оно содержит все свои предельные точки.

Функция многих вещественных переменных
$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\{x_i\}_{i=1}^n$$
определяется на некоторой области $D \subseteq R^n$, и область ее определения D, а также характер этой области, выявляется с использованием известных средств. Опять, ограничимся случаем пространства R^3 и тогда, в обычных обозначениях, будем рассматривать функции вида
$$z = f(x, y); \quad u = f(x, y, z),$$
имея в виду, что все построения и идейные моменты могут быть перенесены и на случай более трёх переменных.

По аналогии с одномерным случаем формулируется и определение предела функции многих переменных в предельной для D точке.
Определение. Число A называется ***пределом*** функции $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0)$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, как только $\rho(N(x, y), N_0(x_0, y_0)) < \delta$.

Различают два типа пределов для функции двух переменных: ***повторные*** и ***двойные***.

Повторные пределы определяются следующим образом:
$$\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y); \quad \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = a;$$
$$\lim_{y\to y_0} f(x, y) = \psi(x); \quad \lim_{x\to x_0} \psi(x) = b.$$

Двойной предел отвечает требованию определения.

Свойство непрерывности функции многих переменных в точке и области формулируются по аналогии с одномерным случаем, а именно: функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной в точке*** $N_0(x_0, y_0)$, если $\lim\limits_{N\to N_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, и ***непрерывной в области*** $D \subseteq R^2$, если она непрерывна во всех точках $N \in D$.

Следует иметь в виду, что функция z может быть непрерывной по каждой переменной x, y, но, тем не менее, не иметь свойства непрерывности в целом, как говорят, по совокупности переменных. Например, функция

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x, y \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна по каждой из переменных в точке $N_0(0{,}0)$, однако, принимая $y = x$, получим $\lim\limits_{N \to N_0(0,0)} f(x,y) = \dfrac{1}{2} \neq 0$, т.е. отсутствует непрерывность по совокупности переменных.

8.2. Дифференциальное исчисление функции двух переменных

Техника вычисления частных производных от функции многих переменных требует свободного владения техникой дифференцирования функций одной переменной.

Существенной и принципиально важной является возможность представления приращения функции $z = f(x,y)$ в точке $N_0(x_0,y_0)$ при наличии приращения переменных $(\Delta x, \Delta y)$, где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, в виде

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon(x_0,y_0,x,y)$$

Если

$$\lim_{N \to N_0} \frac{\varepsilon(x_0,y_0,x,y)}{\rho(N,N_0)} = 0,$$

то говорят, что $f(x,y)$ ***дифференцируема*** в точке N_0, и выражение

$$dz = df(x,y) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$$

называют ***полным дифференциалом*** функции $f(x,y)$ в точке N_0.

При наличии частных производных высоких порядков в окрестности точки N_0 может быть указан и дифференциал n-го порядка функции z. При определенных требованиях к функции z и ее частным производным имеет место теорема о смешанных производных, а именно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ и т.д.}$$

С учетом выполнения требований теоремы о смешанных производных, дифференциал n-го порядка от функции $z = f(x,y)$ в точке N_0 может быть записан в виде

$$d^{(n)}z = d^{(n)}f(x_0,y_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^{(n)} f(x_0,y_0)}{\partial x^k \cdot \partial y^{n-k}},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Следует обратить внимание на эту формулу с точки зрения бинома Ньютона. В частности

$$d^2z = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Наличие полного дифференциала функции $f(x,y)$ позволяет в ряде случаев получать приближения значений этой функции в окрестности некоторой точки $N_0(x_0, y_0)$.

Дифференцирование *неявно заданных функций* $y = f(x)$ в виде представления $F(x,y)=0$, при условиях ее существования и дифференцируемости, можно проводить по формуле

$$y_x^{/} = -\frac{F_x^{/}}{F_y^{/}},$$

или непосредственно дифференцированием выражения $F(x,y)=0$ как сложной функции, полагая $y = f(x)$.
Тогда

$$F_x^{/} + F_y^{/} \cdot f_x^{/} = 0,$$

откуда и может быть определено $f_x^{/}$. Этот прием позволяет вычислять и производные от $f(x)$ более высокого порядка, т.е. $f^{(n)}(x)$, при ее неявном определении.

Определенные геометрические представления о функции $u = f(x,y,z)$ дает понятие *поверхности*, или *линии уровня* (в случае $z = f(x,y)$). ***Поверхностью***, или ***линией уровня*** функции называют множество точек в области ее определения такое, что

$$u = f(x,y,z) = C = const.$$

Например, линии уровня функции

$$z = x^2 - y^2 - 4x$$

определяются уравнениями

$$x^2 - y^2 - 4x = (x-2)^2 - y^2 - 4 = C,$$

$$\frac{(x-2)^2}{C+4} - \frac{y^2}{C+4} = 1,$$

где c - произвольная постоянная, $c \neq -4$, и линии уровня рассматриваемой функции - семейство гипербол. При $c = -4$ имеем две прямые (см. рис.1).

Касательная плоскость к поверхности, определяемой соотношением $z = f(x,y)$, в точке $N_0(x_0, y_0)$ выражается уравнением плоскости

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)=z-z_0,$$
где $p=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $q=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$, $z_0=f(x_0,y_0)$.

Нормаль же к этой поверхности в $N_0(x_0,y_0)$ определится нормальным уравнением прямой в пространстве R^3:
$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Экстремумы функций многих переменных

Необходимым условием локального экстремума функции $u=f\{x_i\}_{i=1}^n$ в точке $N_0\{x_i^0\}_{i=1}^n$ являются равенства
$$\frac{\partial u(x_i^0)}{\partial x_i}=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$
а решения системы
$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$
выявляют точки, «подозрительные» на локальный экстремум. Достаточные условия экстремума в точке N_0, являющейся решением последней системы, определяются производными второго порядка от функции u в точке N_0. Составляется матрица с элементами
$$a_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},\ i,j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$
где частные производные вычисляются в точке N_0.

Имеют место достаточные условия экстремума:
если A - <u>положительно определена</u> в R^n, то в точке N_0 - <u>локальный минимум</u>;
если A - <u>отрицательно определена</u> в R^n, то в точке N_0 - <u>локальный максимум</u>;
если A не является знакоопределенной, то в точке N_0 нет экстремума.

Обратимся к случаю функции двух переменных $z=f(x,y)$. В этом случае матрица частных производных второго порядка в точке $N_0(x_0,y_0)$ примет вид
$$A_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}\\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$
Из вышесказанного следует, что:
если $a_{11}>0,\ \Delta(A)>0$, то в рассматриваемой точке - <u>локальный минимум</u>;

если $a_{11} < 0$, $\Delta(A) > 0$, то в рассматриваемой точке - локальный максимум.

В том случае, когда ставится задача определения наибольшего и наименьшего значений функции в некоторой области D, то, если D - ограничена, в силу теоремы Вейерштрасса о непрерывной в замкнутой и ограниченной области $D \subset R^n$ функции u, она достигает своих наибольшего и наименьшего значений на D. Поиск этих точек ведется следующим образом:

- Из системы необходимых условий экстремума выявляются точки, «подозрительные» на локальный экстремум, и отбираются те, которые попали в рассматриваемую область;
- Проводится изучение поведения функции на границе области D на экстремум;
- Вычисляя значения функции в полученных точках, путем сравнения устанавливаются ее максимальное и минимальное значения в области D.

8.3. Интегральное исчисление функций многих переменных

Символом

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

обозначают двойной интеграл от подынтегральной функции $f(x,y)$ на области D. В ряде случаев, численная реализация процедуры интегрирования может быть сведена к повторному вычислению интегралов от функции одной переменной. Предполагая, что область D на плоскости ограничена линиями $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $x_1 \le x \le x_2$, получим

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \cdot$$

Чертеж области интегрирования всегда обязателен для точного выявления пределов интегрирования.

Отметим, что иногда следует менять порядок интегрирования (в целях упрощения выкладок) в смысле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Как и в случае интегралов от функций с одной переменной, возможен прием вычисления интегралов от функций многих переменных с помощью замены переменных (подстановки).

Важнейшими приложениями двойного интеграла являются возможности вычисления объемов тел, площадей плоских фигур, других геометрических свойств тела с точки зрения их приложений в механике.

Интеграл вида

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

называют ***тройным интегралом*** от функции трех переменных $f(x,y,z)$ по «объему» V, т.е. область интегрирования есть часть пространства R^3, ограниченная некоторыми поверхностями.

В конкретных ситуациях всегда необходимо видеть графически область V, и вычисление интеграла сводится к повторному интегрированию в виде

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \cdot$$

Физический смысл тройного интеграла, в частности, масса объема V с плотностью вещества в нем $f(x,y,z)$. Если $f(x,y,z) \equiv 1$ на V, то тройной интеграл выражает объем тела V.

Замена переменных в тройном интеграле осуществляется с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u,v,w); \; y = y(u,v,w); \; z = z(u,v,w).$$

Индивидуальные задания

Задание 1.

1. $z = y^3 + 4xy^2$

2. $z = x^2y + y^2x$

3. $z = x^3 + 4yx^2$

4. $z = 4x^3 + yx^2$

5. $z = xy^2 + 4y^3$

6. $z = x^3y + y^3x$

7. $z = 4x^3 + yx^2$

8. $z = ylnx + yx^2$

9. $z = xlny + yx^2$

10. $z = ylnx + y^2x$

11. $z = yx + y^2e^x$

12. $z = y^2e^x + 2^x$

а) исследуйте функцию на экстремумы;

б) найдите наименьшее и наибольшее значения функции в области $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le x + y \le 1$.

Задание 2.

1. $\iint\limits_D (x^3y + y^3x)dxdy$,

2. $\iint\limits_D (xy^2 + 4y^3)dxdy$

3. $\iint\limits_D (4x^3 + yx^2)dxdy$

4. $\iint\limits_D (x^3 + 4yx^2)dxdy$

5. $\iint\limits_D (x^2y + y^2x)dxdy$

6. $\iint\limits_D (y^3 + 4xy^2)dxdy$

7. $\iint\limits_D (4x^3 + yx^2)dxdy$

8. $\iint\limits_D (x^2 + xy + y^2)dxdy$

9. $\iint\limits_D \left(\frac{x}{4+y^2}\right)dxdy$

10. $\iint\limits_D \left(\frac{y}{4+x^2}\right)dxdy$

11. $\iint\limits_D e^{2x-y}dxdy$

12. $\iint\limits_D e^{2y-x}dxdy$

где область (D): а) задана неравенствами $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$, б) ограничена кривыми $y = x^2 - 4$, $y = 1 - \frac{x^2}{4}$.

Раздел 9. Дифференциальные уравнения

9.1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях

При решении многих задач механики, физики, техники не удается установить связь между искомой и заданной переменными величинами, а удается установить такую связь между заданной переменной, искомой функцией и ее производными некоторого порядка. При этом возникает дифференциальное уравнение.

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Здесь x – независимая переменная, y – искомая функция, F – заданная функция $n+1$ переменных. Наивысший порядок производной искомой функции $y = y(x)$, входящей в уравнение, называется ***порядком*** дифференциального уравнения.

Иногда требуется определить сразу несколько функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, связанных определенными соотношениями. При этом возникают системы дифференциальных уравнений.

К дифференциальному уравнению приводит, например, решение задач:

1. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость угловой скорости от времени, если известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 5 об./сек., по истечении двух минут вращается со скоростью 3 об./сек.

Обозначим через $\omega(t)$ угловую скорость в момент времени t,а через λ коэффициент пропорциональности. Согласно второму закону Ньютона можем записать

$$m\frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} == -k\omega, \text{где } k = \frac{\lambda}{m}.$$

По условию задачи $\omega(0) = 5, \omega(2) = 3$.

2. На покоившееся в начальный момент времени тело массы m начинает действовать линейно возрастающая со временем сила $F=\vec{k}t$, где $\vec{k}$ – постоянный вектор. Найти смещение тела от начального положения, если сила сопротивления среды пропорциональна скорости: $\vec{F}_c=-\eta\vec{v}$.

Воспользовавшись законом Ньютона, можем записать следующие векторные соотношения:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{k}t-\eta\vec{v},\quad \vec{v}(0)=0.$$

Если в полученных соотношениях перейти к покоординатной записи, то придем к нормальной системе трех дифференциальных уравнений.

9.2. Дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x,y,y')=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют уравнением, ***не разрешенным относительно производной.*** Если из этого уравнения удается выразить y', то получим уравнение

$$y'=f(x,y). \qquad (2)$$

Это уравнение ***разрешенное относительно производной***.

Определение. Дифференцируемая на интервале (α,β) функция *y(x)* называется ***решением*** уравнения (1), если $y'(x)\equiv f(x,y(x))$ на этом интервале.

График функции *y(x)* на (α,β) называется ***интегральной кривой*** дифференциального уравнения.

На примере простейшего уравнения $y'=x$ видно, что оно имеет бесконечно много решений $y(x)=\frac{x^2}{2}+C$. Для того, чтобы из этого множества решений выделить какое-либо одно (из множества интегральных кривых выделить одну), необходимо задать точку $M_0(x_0,y_0)$, через которую проходит интегральная кривая. Иными словами, нужно потребовать, чтобы

$$y(x_0)=y_0. \qquad (3)$$

Задача отыскания решения уравнения (2), удовлетворяющего условию (3) называется ***задачей Коши.***

Фундаментальным результатом теории обыкновенных дифференциальных уравнений является следующая теорема.

Теорема Коши (теорема существования и единственности решения): Пусть функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D на плоскости OXY, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$. Тогда в некоторой окрестности $|x-x_0|<\delta$ точки x_0 существует решение задачи Коши (2) - (3). Если $y_1(x), y_2(x)$ – два решения уравнения (2), удовлетворяющие начальному условию (3), то $y_1(x) \equiv y_2(x)$ при всех тех значениях х, при которых оба этих решения определены.

Теорема Коши имеет простую *геометрическую интерпретацию*. Ее можно сформулировать так: если условия теоремы Коши выполнены, то через каждую точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит интегральная кривая уравнения (2) и притом только одна.

Из теоремы Коши следует, что уравнение (2) имеет бесконечно много решений. Семейство решений зависит от одного параметра $y_0 : y = y(x, y_0), y(x_0, y_0) = y_0$. Таким образом, область D «расслаивается» на интегральные кривые.

Каждая из этих кривых проходит таким образом, что угловой коэффициент касательной к ней в любой ее точке равен значению функции $f(x, y)$ в этой точке. То есть в произвольной точке $M(x, y) \in D$ задано направление касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Множество направлений касательных образуют ***поле направлений*** уравнения (2) в *D*. Построив это поле, можно нарисовать интегральные кривые уравнения (2). Для удобства построения поля направлений применяют ***метод изоклин.*** *Изоклины* – линии на плоскости *OXY,* задаваемые уравнением $f(x, y) = k = const$. В каждой точке изоклины касательные к интегральным кривым имеют один и тот же наклон к оси *OX.*

Семейство решений, определяемых этой формулой, называют ***общим решением*** данного дифференциального уравнения. Если задана точка $M_0(x_0, y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая уравнения, то этого можно добиться выбором постоянной $C_0 = y_0 - \frac{x_0^2}{2}$. Выделенное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию – ***частное решение.***

Определение. Функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от аргумента *x* и произвольной постоянной С, называется ***общим решением*** дифференциального уравнения (2) в области D, в которой выполнены условия теоремы Коши, если 1) для произвольного C функция $y = \varphi(x, C)$ есть решение уравнения (2); 2) для любого $M_0(x_0, y_0) \in D$ существует единственное значение $C = C_0$ такое, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Всякое решение, получающееся из общего при конкретном значении постоянной *C*, называется ***частным решением.***

Замечание. Если общее решение удается найти в виде $\Phi(x, y, C) = 0$, не разрешенном относительно *y*, то его называют ***общим интегралом*** дифференциального уравнения.

Точки, в которых нарушаются условия теоремы Коши – ***особые точки.*** Через особую точку может не проходить ни одной интегральной кривой и в ней может нарушаться единственность решения. Если кривая $y = \varphi(x)$ целиком состоит из особых точек и является интегральной кривой дифференциального уравнения (2), то это ***особое решение***. Для отыскания особого решения нужно найти кривую $y = \varphi(x)$, в каждой точке которой нарушаются условия теоремы Коши и проверить, будет ли эта кривая решением уравнения (2).

9.3. Методы интегрирования некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной

9.3.1. Уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к ним

Пусть правая часть уравнения (2) может быть представлена в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, или пусть уравнение (1) имеет вид $\varphi_1(x)\psi_1(y)dx + \varphi_2(x)\psi_2(y)dy = 0$. Тогда переменные в этих уравнениях могут быть разделены и мы получим следующие уравнения с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx,$$

или

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = -\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy.$$

Общие интегралы этих уравнений имеют вид:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,$$

или

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = -\int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy + C.$$

Замечание. При делении обеих частей уравнения на $f_2(y)$, $\varphi_2(x), \psi_1(y)$ могли быть потеряны решения, являющиеся нулями этих функций и не входящие в общие интегралы.

При разделении переменных могли быть потеряны решения, обращающие в ноль знаменатели дробей: $y = \pi k \ (k \in Z), x = \ln 2$. Непосредственная подстановка в исходное уравнение показывает, что эти функции являются его решениями. Причем решения вида $y = \pi k \ (k \in Z)$ могут быть получены из общего решения при $C = 0$, а решение $x = \ln 2$ должно быть добавлено к общему.

Уравнения вида $y' = f(ax + by + d)$ $(b \neq 0)$ сводятся к уравнению с разделяющимися переменными заменой $u = ax + by + d$.

9.3.2. Геометрические и физические задачи

Решение многих геометрических и физических задач приводит к необходимости составления и решения дифференциальных уравнений. При этом наибольшую трудность вызывает, как правило, именно моделирование задачи в виде соответствующего дифференциального уравнения.

При решении геометрических задач, в которых требуется найти уравнение кривой по заданным свойствам ее касательной, нормали или ограниченной ею криволинейной трапеции, используется геометрическое истолкование производной (угловой коэффициент касательной) и интеграла с переменным верхним пределом (площадь криволинейной трапеции с подвижной ограничивающей ординатой).

Общего метода составления дифференциальных уравнений для описания различных физических процессов не существует. Можно лишь дать некоторые указания. Пусть $y = y(x)$ – искомая зависимость между характеристиками x и y изучаемого процесса. При составлении дифференциального уравнения, решением которого является функция $y(x)$, необходимо выразить приращение Δy этой функции через приращение Δx независимой переменной, то есть выразить разность $y(x + \Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, описывающее изучаемый процесс. Во многих случаях искомая зависимость определяется исходя из закона или экспериментального факта, установленного для той или иной области естествознания.

9.3.3 Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

Дифференциальное уравнение называется ***однородным***, если оно может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (4)$$

Например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \sin\frac{y}{x} + 3$$

является однородным. Однородным всегда является уравнение вида $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные многочлены одинаковой степени однородности: $P(tx,ty)=t^k P(x,y), Q(tx,ty)=t^k Q(x,y)$. Здесь k – степень однородности.

9.3.4 Линейные уравнения и уравнения Бернулли

Линейным называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \qquad (5)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные функции. Решение этого уравнения будем искать в виде произведения двух непрерывно дифференцируемых функций

$$y=u(x)v(x) \qquad (6)$$

Такой метод решения линейного уравнения был предложен Бернулли.

Имеем

$$u'v+v'u+puv=q \Rightarrow u(v'+pv)+vu'=q \qquad (7)$$

В качестве функции $v(x)$ возьмем какое-либо решение уравнения

$$\frac{dv}{dx}+pv=0 \Rightarrow \frac{dv}{v}=-pdx \Rightarrow v=Ce^{-\int pdx}.$$

Положим *C=1* и подставим найденное *v* в (8):

$$\frac{du}{dx}e^{-\int pdx}=q \Rightarrow u=\int e^{\int pdx}qdx+C.$$

Итак: $y=uv=\left[\int e^{\int pdx}qdx+c\right]e^{-\int pdx}$. Нетрудно проверить, что найдено общее решение уравнения (5).

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n, n\neq 0, n\neq 1.$$

Разделив обе части этого уравнения на y^n, получим

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{-n+1}=q(x)\cdot$$

Положим $z=y^{-n+1}$. Тогда

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=q(x)(1-n).$$

Пришли к линейному уравнению относительно *z*.

Замечание. Можно не выполнять описанную выше замену переменных, а сразу искать решение исходного уравнения в виде $y(x)=u(x)v(x)$, то есть воспользоваться методом Бернулли.

Индивидуальные задания

Задание 1.

Решить уравнение. Найти общее или частное решение.

1. $(x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$
2. $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0, y(1)=1.$
3. $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0, y(1)=0.$
4. $2x^3y' = y(2x^2-y^2).$
5. $y^2+x^2y' = xyy'.$
6. $(x^2+y^2)y' = 2xy.$
7. $xy'-y = xtg\,{}^{y}\!/_{x}.$
8. $xy' = y-xe^{{}^{y}\!/_{x}}.$
9. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}.$
10. $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}.$
11. $(y+\sqrt{xy})dx = xdy.$
12. $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0.$
13. $x-y-1+(y-x+2)y'=0.$
14. $(x+4y)y' = 2x+3y-5.$
15. $(y+2)dx=(2x+y-4)dy.$
16. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$
17. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx.$
18. $xy'-y=\dfrac{x}{arctg({}^{y}\!/_{x})}.$
19. $3y\sin\left(\dfrac{3x}{y}\right)dx+[y-3x\sin\left(\dfrac{3x}{y}\right)]dy=0.$
20. $(y'+1)\ln\dfrac{y+x}{x+3}=\dfrac{y+x}{x+3}$
21. $y' = \dfrac{y+2}{x+1}+tg\dfrac{y-2x}{x+1}.$
22. $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2}+y.$
23. $(2x^2y-2x^3)y'+2y^2x-6x^2y+4x^3=0.$
24. $x^2(3y+2x)y'+3x(y+x)^2=0.$

Раздел 10. Ряды
10.1. Общие сведения теории рядов

Числовые ряды

Пусть дана бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$

Определение: Выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется числовым рядом, числа $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$ называются членами ряда.

Общий или n-ый член ряда a_n есть функция от номера члена, a_n = f(n).

Определение: Пусть дан ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ Сумма первых n членов ряда называется n-ой частичной суммой ряда.

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$

Образуем последовательность частичных сумм: $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n \ldots$

Определение: Если при n $\to \infty$ существует конечный предел последовательности частичных сумм $\lim_{n\to\infty} S_n = S,$ то ряд (2) называется ***сходящимся***, а число S называется ***суммой ряда***. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Если предел последовательности частичных сумм при n стремящемся к бесконечности, не существует, то ряд называется ***расходящимся.***

Сумма членов геометрической прогрессии

Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии

$$aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots$$

Как известно из школьного курса, частичная сумма n членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

Рассмотрим различные случаи при разных значениях знаменателя прогрессии q.

1. $|q| < 1.$ Тогда $\lim_{n\to\infty} q^n = 0; \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q};$ То есть S=$\frac{a}{1-q}$.

2. $|q| > 1.$ Тогда $\lim_{n\to\infty} |q|^n = \infty, \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \pm\infty,$ то есть не существует предела последовательности частичных сумм при n$\to\infty$; следовательно, ряд расходится.

3. $q = 1.$ Тогда ряд примет вид $a + a + a + \ldots + a + \ldots;$ $S_n = na; \lim_{n\to\infty} S_n = \infty;$ ряд расходится.

4. $q=-1$. Тогда ряд примет вид $a-a+a-a+...;$ последовательность частичных сумм будет: $a,0,a,0.a,0...$

Видим, что последовательность S_n колеблется, принимая значения то a, то 0, и не стремится к определенному пределу, то есть при q=-1 ряд расходится.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ при $|q|<1$ сходится, при $|q|\geq 1$ расходится.

<u>Теорема:</u> Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем приписывания или отбрасывания любого конечного числа членов.

<u>Следствие.</u> Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ можно представить $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$, причем $\sum_{i=1}^{n} a_i$ - это конечная сумма, а $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = a_{n+1}+a_{n+2}+...$ - это тоже ряд, он называется остатком ряда.

Если сходится ряд , то сходится остаток ряда и наоборот.

<u>Свойства рядов</u>

1. Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится и сумма его равна S, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} Ca_i$ тоже сходится и сумма его равна CS.

2.Если сходятся ряды $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1+a_2+...=S_1$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = b_1+b_2+...=S_2,$$

то ряды, полученные почленным сложением и вычитанием рядов, тоже сходятся и их суммы равны S1+S2 и S1-S2 соответственно.

<u>Необходимый признак сходимости ряда</u>

Если ряд сходится, то его n-ый член стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера n.

<u>Замечания</u>:

1. Этот признак не является достаточным для доказательства сходимости ряда. Существуют ряды, имеющие общий член, стремящийся к нулю, но расходящиеся.

2. несоблюдение необходимого признака сходимости является достаточным для доказательства расходимости ряда.

Ряды с положительными членами
(Знакоположительные ряды)

Достаточные признаки сходимости

Пусть даны два ряда с положительными членами:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + ... + v_n + ...$

Признаки сравнения

Теорема. Если $u_n \le v_n$ для $n \ge N$ (N-некоторое число, может быть равное 1), то если сходится ряд, то сходится и ряд. То есть, из сходимости ряда, члены которого соответственно больше, следует сходимость ряда с меньшими членами.

Теорема . Если $u_n \ge v_n$ для $n \ge N$ $(N \ge 1)$, то если расходится ряд, составленный из меньших членов, то и ряд расходится.

На практике удобно заменить общий член ряда a_n на эквивалентное ему более простое выражение при $n \to \infty$,так, чтобы оно представляло ряд, который легко исследовать на сходимость. При этом оба ряда сходятся и расходятся одновременно.

Заметим, что a_n эквивалентно b_n $(a_n \sim b_n)$ при $n \to \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$

Для сравнения часто используют следующие ряды:

$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$,сходится при $|q|<1$

(5)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, сходится при p>1

(11)

Интегральный признак сходимости Коши

Дан ряд с положительными членами $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...(u_n > 0)$

1. Пусть члены ряда являются значениями непрерывной функции $f(x)$, причем $u_1 = f(1), u_2 = f(2), ..., u_n = f(n), ...$
2. Пусть функция $f(x)$ монотонно убывает при x, принадлежащем интервалу $(1;\infty)$, т.е. $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$

   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Рассмотрим несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

а) Если $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и первоначальный ряд .

б) Если $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и первоначальный ряд.

Признак Даламбера

Дан ряд с положительными членами $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots(u_n>0)$

Если при n $\to\infty$ существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то

при q < 1 ряд сходится,
при q > 1 ряд расходится,
при q = 1 ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Радикальный признак Коши

Дан ряд с положительными членами $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots(u_n>0)$

Пусть при n$\to\infty$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r$.

При r < 1 ряд сходится,
при r > 1 ряд расходится,
при r = 1 ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Ряды с произвольными членами

Знакочередующиеся ряды

Дан ряд, где члены имеют чередующиеся знаки

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots$$

Здесь все u_n положительны

Теорема (признак) Лейбница

Если в знакочередующемся ряде

а) абсолютные величины членов ряда убывают, т. е. $u_1>u_2>u_3>\ldots$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

то ряд сходится, его сумма S положительна и не превосходит первого члена ряда, т. е. $S<u_1$

Следствие:
Остаток ряда $r_n = (-1)^{n+2} u_{n+1} + (-1)^{n+3} u_{n+2} + \ldots$ по абсолютной величине меньше первого из отброшенных членов.

Знакопеременные ряды

Определение: Ряд называется ***знакопеременным***, если его члены имеют разные знаки. Знакочередующиеся ряды, рассмотренные ранее, являются частным случаем знакопеременных рядов.

Дан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$,

где члены ряда $u_1, u_2 \ldots u_n$ имеют разные знаки, то есть некоторые из них положительные, а некоторые, отрицательные.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

Ряд из абсолютных величин членов ряда есть $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$

Замечание: Этот признак является достаточным, но не является необходимым, т. е. существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, но ряды из абсолютных величин их членов расходятся.

Абсолютная и условная сходимость

Определение: Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$.

Определение: Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов расходится, то знакопеременный ряд называется ***условно*** или ***неабсолютно сходящимся***.

План исследования сходимости знакочередующихся рядов

Пусть дан знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

I этап. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$ и исследуем его сходимость.

Исследование заканчивается в 2-х случаях:

1. Проверим, соблюдается ли необходимый признак сходимости ряда. Если он не соблюдается, то оба ряда расходятся.

2. Если ряд из абсолютных величин сходится (по достаточным признакам), то исходный ряд является абсолютно сходящимся.

Если, несмотря на соблюдение необходимого признака сходимости, по достаточным признакам получаем, что ряд из абсолютных величин расходится, то переходим ко II этапу.

II этап. Если ряд знакочередующий, то исследуем сходимость ряда по признаку Лейбница.

Если члены ряда удовлетворяют требованиям теоремы Лейбница, то он является условно сходящимся. Если эти требования не удовлетворяются, то ряд является расходящимся.

Функциональные ряды

Дан ряд $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...,...$, где члены ряда - это функции от x. Все функции $u_1(x)...u_n(x)$ определены и непрерывны в одном и том же интервале значений x.

Если вместо x подставить его значение, то получим числовой ряд.

При одних значениях x ряд будет сходящимся числовым рядом, а при других значениях может оказаться расходящимся.

Определение: Значение $x = x_0$, при котором числовой ряд $u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+...+u_n(x_0)+...$ сходится, называется ***точкой сходимости*** функционального ряда.

Определение: Совокупность всех точек сходимости называется ***областью сходимости.*** Обычно это интервал оси OX.

Определение. Сумма функционального ряда – это функция от x, определенная в области сходимости ряда $S(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...$

Обозначим $S_n(x)$ - n-ую частичную сумму, $r_n(x)$ - остаток ряда, $S_n = u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)$, $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$ если ряд сходится в точке x, то $S(x)=S_n(x)+r_n(x)$, $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S(x)-S_n(x)\right)=0$.

Итак, в области сходимости ряда остаток ряда $r_n(x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$.

Степенные ряды

Определение: ***Степенным*** рядом называется функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...$$

Члены степенного ряда – это произведения постоянных $a_0, a_1 ... a_n ...$ на степенные функции с целыми показателями степеней от разности $(x - x_0)$. Постоянные $a_0, a_1 ... a_n ...$ называются коэффициентами ряда, a_0 – нулевой член ряда. При $x_0 = 0$ получим степенной ряд, расположенный по степеням x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

К последнему виду можно привести первоначальный ряд. Произведя замену $x - x_0 = t$, получим ряд $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n + ...$.

Степенные ряды имеют большое применение в приближенных вычислениях задач на ЭВМ.

Теорема Абеля

Рассмотрим степенной ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$.

Если степенной ряд сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, при всяком x, удовлетворяющем условию $|x| < |x_0|$, то есть в интервале $(-|x_0|; |x_0|)$.

Следствие: Если степенной ряд расходится при $x = x_0$, то он расходится при любом x таком, что $|x| > |x_0|$.

Определение. ***Радиусом сходимости*** степенного ряда называется такое число R, что при всех x, таких, что $|x| < R$ степенной ряд абсолютно сходится, а для всех x, таких, что $|x| > R$ степенной ряд расходится. Интервал $(-R; R)$ называется ***интервалом сходимости***.

При $x = R$ и $x = -R$ ряд может сходиться или расходиться. Это необходимо исследовать дополнительно. Центр интервала сходимости находится в точке $x = 0$. Для рядов, расходящихся при всех x, кроме $x = 0$, радиус сходимости $R = 0$, а для рядов, сходящихся при всех x, радиус сходимости $R = \infty$.

Замечание: Для рядов вида $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$ центр интервала сходимости находится в точке $x = x_0$, а интервал сходимости будет $(x_0 - R; x_0 + R)$.

План нахождения интервала сходимости и радиуса сходимости R

Дан ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$.

I. Составим ряд из абсолютных величин членов ряда $|a_0|+|a_1|\cdot|x|+|a_2|\cdot|x|^2+\ldots+|a_n|\cdot|x|^n+\ldots$

Интервалы сходимости рядов одинаковы.

II. К ряду, все члены которого положительны, можно применить признак Даламбера. Найдем предел отношения последующего члена к предыдущему при $n\to\infty$. Он будет содержать множитель $|x|$ или некоторую его степень.

Для тех x, при которых этот предел меньше 1, ряд сходится, а при которых он больше 1, ряд расходится. Значение $|x|$, при котором этот предел равен 1, является значением радиуса сходимости R.

Если этот предел при любом $|x|$ будет равен нулю, то ряд сходится при любых x и радиус сходимости $R=\infty$.

Если при всех $|x|$ этот предел окажется равным бесконечности, ряд будет расходиться при всех x (кроме $x=0$) и радиус сходимости $R=0$.

<u>Применение признака Даламбера</u>

Если ряд содержит все члены со степенями $|x|$, то есть коэффициенты ряда не обращаются в ноль, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|\cdot|x|^{n+1}}{|a_n|\cdot|x|^n}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1$

Если ряд содержит только четные степени, то есть имеет вид $a_0+a_2x^2+a_4x^4+\ldots+a_{2n}x^{2n}+a_{2n+2}x^{2n+2}+\ldots$, то этот предел равен $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{2n+2}|\cdot|x|^{2n+2}}{|a_{2n}|\cdot|x|^{2n}}=|x|^2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{2n+2}|}{|a_{2n}|}<1$

Аналогично в других случаях.

Можно к рядам применить радикальный признак Коши. Тогда неравенства для определения R будут иметь вид $\lim\limits_{n\to\infty}|x|\sqrt[n]{|a_n|}<1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}|x|^2\sqrt[2n]{|a_{2n}|}<1$

III. Исследуем сходимость числовых рядов при $x=R$ и $x=-R$.

<u>Свойства степенных рядов</u>

1. Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в интервале сходимости ряда.
2. Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости ряда.
3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости любое число раз.

Пусть $S(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+...+a_n(x-x_0)^n+...$, тогда $S'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+...+na_n(x-x_0)^{n-1}+...$

Разложение функции в степенные ряды

Пусть функция $f(x)$ - бесконечное число раз дифференцируема в окрестности точки x_0. Допустим, что её можно представить в виде ряда $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+...+a_n(x-x_0)^n+...$. Найдем коэффициенты $a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$.

Положим в равенстве $x=x_0$. Тогда $f(x_0)=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+...$, следовательно $a_0=f(x_0)$.

Продифференцируем равенство

$$f'(x)=1\cdot a_1+2\cdot a_2(x-x_0)+3\cdot a_3(x-x_0)^2+...+n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1}+...$$

Положим $x=x_0$ в равенстве: $f'(x_0)=1\cdot a_1$, т. е. $a_1=\dfrac{f'(x_0)}{1}$

Продифференцируем равенство

$$f''(x)=1\cdot 2\cdot a_2+3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0)+...+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+...$$

Положим $x=x_0$ в равенстве: $f''(x_0)=1\cdot 2\cdot a_2$. Отсюда $a_2=\dfrac{f''(x_0)}{1\cdot 2}=\dfrac{f''(x_0)}{2!}$

Продифференцируем равенство

$$f'''(x_0)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0)+...+n(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3}+...$$

Положим $x=x_0$ в равенстве: $f'''(x_0)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3=3!a_3$. Отсюда $a_3=\dfrac{f'''(x_0)}{3!}$

. Продолжим последовательное дифференцирование. Очевидно, получим: $f^{(n)}(x_0)=n!a_n$. Отсюда $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Итак, коэффициенты ряда:

$$a_0=f(x_0);\ \ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!};\ \ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!};\ \ a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!};\ ...\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}...$$

Ряд имеет вид

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...$$

Этот ряд называется рядом Тейлора в окрестности точки x_0, а коэффициенты – коэффициентами ряда Тейлора.

Условие разложения функции в ряд Тейлора

Представим ряд в виде $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$, где $T_n(x)$ - многочлен n-ой степени, т. е. n-ая частная сумма.

$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ - остаточный член ряда Тейлора.

Если ряд (35) в точке x сходится к функции $f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Теорема: Если функция $f(x)$ во всех точках интервала, содержащего точку x_0, имеет $(n+1)$ производную $f^{(n+1)}(x)$, то остаточный член $R_n(x)$ для любого x из этого интервала можно представить так: $R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, (38), где точка ξ заключена между точками x_0 и x. Тогда бесконечный ряд Тейлора можно представить

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Остаточный член ряда применяется для оценки точности представления функции рядом Тейлора.

Замечание: Если в интервале, содержащим точку x_0, выполняется неравенство $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$, где M_{n+1} - некоторое число, тогда для любой точки x из этого интервала $|R_n(x)| < M_{n+1}\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$

Теорема: Если в некотором интервале, окружающем точку x_0, абсолютные величины всех производных функции $f(x)$ ограничены одним и тем же числом, то функция $f(x)$ в этом интервале разлагается в ряд Тейлора, который сходится к функции $f(x)$.

Частный случай ряда Тейлора

Если $x_0 = 0$ получим разложение функции в окрестности начала координат $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$.

Ряд называется ***рядом Маклорена.***

План разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора

1. Вычисляют значения $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0)...f^{(n)}(x_0)$ и составляют ряд Тейлора.
2. Находят интервал сходимости ряда, в котором $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена в окрестности начала координат $(x_0 = 0)$

1. $f(x) = e^x$

$f(0) = e^0 = 1;\ f'(x) = e^x \ldots f^{(n)}(x) = e^x$

$f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$

$$\text{Тогда } e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),$$

В любом интервале $[-N; N]$, где N - фиксированное число $e^x < e^N = M$, т. е все производные ограничены. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Так как N - любое число, то интервал сходимости ряда есть $(-\infty; \infty)$.

2. $f(x) = \sin x$

$f(0) = 0;\ f'(x) = \cos x;\ f'(0) = \cos 0 = 1;$

$f''(x) = -\sin x;\ f''(0) = -\sin 0 = 0;\ f'''(x) = -\cos x;\ f'''(0) = -1$

Очевидно, значения производных идут в таком порядке: 0,. 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1,…

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\ n = 1,2,..$$

3. $f(x) = \cos x$

$f(0) = \cos 0 = 1,\ f'(x) = -\sin x;\ f'(0) = 0;\ f''(x) = -\cos x;\ f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x;\ f'''(0) = 0,\ f^{IV}(x) = \cos x;\ f^{IV}(0) = 1\ldots$

Значения производных, как видно, идут в таком порядке 1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; 0..

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots, \qquad (\text{причем } 0! = 1).$$

Все производные функции $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ ограничены и не превосходят по абсолютной величине единицу для любого x на числовой оси. Следовательно, интервал сходимости рядов есть $(-\infty; \infty)$.

4. $f(x) = (1+x)^m$, где m - любое действительное число.

$f'(x) = m(1+x)^{m-1};\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}\ldots$

$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$

$f(0) = 1,\ f'(0) = m,\ f''(0) = m(m-1),\ldots f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1)$

$$\text{Тогда } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots$$

Ряд называется ***биномиальным рядом***.

Найдем интервал сходимости по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)(m-n+1)(n-1)!|x|^n}{n!m(m-1)\dots(m-n+2)|x|^{n-1}}= \;=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right|=|x|$$

Ряд сходится при $|x|<1$, т. е. $-1<x<$ или радиус сходимости $R=1$.

Можем проверить, что при $m>0$ ряд сходится при $-1\le x\le 1$.
Если m - целое положительное число, то ряд превращается в многочлен m-ой степени – бином Ньютона.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k+\dots+mx^{m-1}+x^m$$

<u>Частные случаи биномиального ряда</u>

a. $f(x)=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\dots$

Здесь $m=-1$. Заменив x на $(-x)$, получим

b. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1}+$

c. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 4\dots(2n-2)}x^{n-1}+\dots$

Заменив x на $(-x)$, получим:

d. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\dots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 4\dots(2n-2)}x^{n-1}\dots$

e. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Воспользуемся формулой, взяв x^2 вместо x

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\dots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 4\dots(2n-2)}x^{2n-2}+\dots$$

Все эти ряды сходятся при $-1<x<1$

5. $f(x)=\ln(1+x)$

Представим $\ln(1+x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t}$:

По формуле (47) $\dfrac{1}{1+t}=1-t+t^2-\dots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\dots$

Применим теорему об интегрировании степенных рядов и проинтегрируем ряд в пределах интервала сходимости от 0 до x. Тогда

$$\ln(1+x)=\int_0^x(1-t+t^2-\dots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\dots)dt=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots$$

Ряд сходится при $-1<x<1$.

При $x=1$ получим ряд Лейбница, который условно сходится. Итак, интервал сходимости ряда $(-1;1]$.

6. $f(x)=\operatorname{arctg}x$

Представим: $\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}x$, но $\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots$

Применим теорему об интегрировании степенных рядов и проинтегрируем ряд в пределах от 0 до x. Получим

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

Интервал сходимости $-1\le x\le 1$.

7. $f(x)=\arcsin x$

Представим: $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin x$, но: из формулы

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\frac{t^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 4\ldots 2n}t^{2n}+\ldots$$

Применим теорему об интегрировании степенных рядов и проинтегрируем ряд в пределах от 0 до х

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n(2n+1)}x^{2n+1}+\ldots$$

Это разложение справедливо в замкнутом интервале $[-1;1]$.

Некоторые применения рядов Тейлора

1. *Приближенное вычисление значений функции.*
   Все вычисления значений функции в системе ЭВМ производятся, как правило, с помощью представления этих функций рядами Тейлора.
2. *Интегрирование функций.*
   Пользуемся теоремой об интегрировании степенных рядов внутри интервала сходимости.
3. *Применение разложения функции в ряд Тейлора для решения дифференциальных уравнений.*
   Пусть задано дифференциальное уравнение и начальные условия в точке $x=x_0$, определяющие частные решения. Предположим, что в окрестности точки $x=x_0$ решение уравнения можно разложить в степенной ряд.
   $y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$. Этот ряд можно почленно дифференцировать столько раз, сколько надо. Рассмотрим этот метод на примерах.

Индивидуальные задания

I. Какие из данных рядов сходятся, какие расходятся и по какому признаку?

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$
2. $\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{20}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10n}}+\ldots$
3. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$
4. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$
5. $1+\frac{8}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{64}{4!}+\ldots+\frac{n^3}{n!}+\ldots$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3+n^2}$
7. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

II. Какие из данных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся?

8. $1-\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$
9. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$
10. $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}+\ldots$

Найти интервалы сходимости и радиусы сходимости степенных рядов.

11. $\frac{x}{10}-\frac{x^2}{20}+\ldots(-1)^{n+1}\frac{x^n}{10n}+\ldots$
12. $1+x+\ldots+n!x^n+\ldots$
13. $\frac{(x-1)}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{n(n+1)}+\ldots$
14. $x-\frac{x}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{x^5}{3^2\cdot 3\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}}+\ldots$
15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$

Написать разложение в ряд Тейлора функций и определить их интервалы сходимости.

16. $f(x)=\ln x$ в окрестности точки $x_0=1$

17. $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$ в окрестности точки $x_0=0$.

Вычислить приближенные значения с помощью разложения в ряд Тейлора.

18. $\dfrac{1}{e}$ с точностью 0,0001

19. $\cos 1$. Оценить погрешность, если взято 3 члена ряда.

Вычислить приближенные значения данных определенных интегралов с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировать его почленно.

20. $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$

21. $\int\limits_0^{0,5}\cos\dfrac{x^2}{4}dx$

22. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y''+xy=0$ $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

23. Написать пять первых членов ряда $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}, n=2k-1\\ \dfrac{1}{n^2}, n=2k\end{cases}$

24. Установить сходимость ряда $a_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\dfrac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots$

I.Основные правила интегрирования:

1. Дифференциал функции $df(x) = f'(x)dx$; $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + c$.
2. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.
3. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$ (α – число).
4. Если $\int f(x)dx = F(x) + c$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$ $(a,\ b - const,\ a \neq 0)$.
5. Если $\int f(x)dx = F(x) + c$, а $u = u(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + c$.
6. Метод интегрирования по частям: если $u = u(x)$, $v = v(x)$, то $\int udv = uv - \int vdu$.
7. Правильность результатов интегрирования проверяется так: $(F(x)+c)' = f(x)$. Взятие неопределённого интеграла есть действие, обратное взятию производной.

Таблица основных неопределённых интегралов

$u = u(x)$, $\alpha,\ a,\ b,\ c$ – постоянные числа;
$du = u(x)'\,dx$, если $u = x$, то $du = dx$;

1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $(\alpha \neq -1)$; $\int du = u + c$; 1a. $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$;
2. $\int u^{-1}du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$; 2a. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$;
3. $\int e^u du = e^u + c$; 3a. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$;
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$;
5. $\int \sin u du = -\cos u + c$; 5a. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$;
6. $\int \cos u du = \sin u + c$; 6a. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$;
7. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + c$;

8. $\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$; $\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+c$;

9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+c$;

10. $\int \frac{du}{\cos^2 u}=\mathrm{tg}\,u+c$; 10а. $\int \frac{du}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\mathrm{tg}(ax+b)+c$;

11. $\int \frac{du}{\sin^2 u}=-\mathrm{ctg}\,u+c$; 11а. $\int \frac{du}{\sin^2(ax+b)}=-\frac{1}{a}\mathrm{ctg}(ax+b)+c$.

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+c$;

Формулы 1а, 2а, 3а, 5а, 6а, 10а, 11а получены по правилу 4.

Для взятия неопределённого интеграла, надо преобразовать подынтегральное выражение, воспользоваться правилами, чтобы привести его к табличным интегралам.

II. Определённый интеграл и несобственный интеграл по бесконечному промежутку

1) Определённый интеграл по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)$ – первообразная функция $f(x)$, т. е. $F(x)=\int f(x)dx$.

2) Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)dx=\lim_{B\to\infty}F(B)-F(a)$$

Если предел существует, то несобственный интеграл сходится и равен ему, иначе интеграл расходится.

.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Галина Георгиевна Ельчанинова,
Роман Анатольевич Мельников

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ:

типовые задания с примерами решений для студентов СПО (09.02.03 Программирование в компьютерных системах; 09.02.02 Компьютерные сети; 09.02.07 Информационные системы и программирование)

Учебное пособие

Техническое исполнение – В. М. Гришин
Технический редактор – О. А. Ядыкина

Формат 60 х 84 1/16. Гарнитура Times.
Печ.л. 3,8 Уч.-изд.л. 3,6
Электронная версия.
Размещено на сайте: http://elsu.ru/kaf/maem/edu
Заказ 48

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1