

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

**Е.В. Игони́на, О.Н. Масина, О.В. Дружинина**

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ИНТЕЛЛЕКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
И СВОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ  
МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ**

Монография

Елец – 2020

УДК 517.9, 519.6, 519.7

ББК 22.161

**И 26**

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина  
от 28.01.2020 г., протокол № 1

Рецензенты:

**Ю.А. Флёров** – член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник  
Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН.

**З.Л. Шулиманова** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры  
«Высшая математика и естественные науки» ФГАОУ ВО «Российский университет  
транспорта» (РУТ (МИИТ))

**Е.В. Иголина, О.Н. Масина, О.В. Дружинина**

**И 26** Анализ устойчивости динамических систем на основе методов интеллектуального  
управления и свойств линейных матричных неравенств. – Елец: Елецкий  
государственный университет им. И.А. Бунина, 2020. – 174 с.

**ISBN 978-5-00151-110-6**

Рассмотрены вопросы моделирования и анализа устойчивости динамических систем на основе методов интеллектуального управления и свойств линейных матричных неравенств. Дано развитие метода функций Ляпунова исследования устойчивоподобных свойств систем с логическими регуляторами. Изучены условия стабилизации управляемых систем, представленных моделями Такаги–Суджено (ТС-моделями). Рассмотрены актуальные аспекты когнитивного подхода к моделированию управляемых систем. Изложены результаты исследований динамики управляемых маятниковых систем с учетом условий неполной информации. Решен ряд задач устойчивости обобщенных моделей перевернутого маятника с помощью результатов синтеза и анализа ТС-моделей, а также с помощью свойств разработанных алгоритмов стабилизации и численных методов.

Представленные в монографии результаты и методы могут найти применение в задачах устойчивости и стабилизации управляемых динамических систем.

Монография предназначена для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, студентов, интересующихся вопросами моделирования, устойчивости и стабилизации управляемых систем. Она может быть использована в качестве учебного пособия при изучении специализированных курсов по математическому моделированию, теории устойчивости и по динамике систем.

УДК 517.9, 519.6, 519.7

ББК 22.161

**ISBN 978-5-00151-110-6**

© Елецкий государственный  
университет им. И.А. Бунина, 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Требования к проектированию и эксплуатации сложных управляемых объектов и процессов с течением времени повышаются. В связи с этим возникает необходимость в разработке новых и в модификации известных математических моделей динамических процессов, описываемых системами многомерных нелинейных дифференциальных уравнений. При этом появляется потребность в расширении понимания целей управления, в развитии теории нелинейных управляемых динамических систем, в учете факторов, связанных с параметрическими и постоянно действующими возмущениями, а также со структурными неопределенностями. Развитие цифровых технологий, искусственного интеллекта, компьютерной техники, программного обеспечения сочетается с развитием математического аппарата, с разработкой новых, направленных на практическое использование качественных и приближенно-аналитических методов исследования нелинейных управляемых динамических систем. В конечном счете указанные методы могут служить целям обеспечения оптимальных условий работы и повышения безопасности функционирования сложных систем, а построение алгоритмов исследования их устойчивости позволяет проводить анализ влияния различных проектных параметров на качество функционирования того или иного сложного динамического объекта или процесса.

Как известно, важным математическим аппаратом описания процессов динамики и управления динамическими системами являются различные типы нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, включая многосвязные системы и системы с переключениями. Проблемы создания новых эффективных методов анализа таких систем во многом определяют развитие методов исследования динамических систем управления [9, 125, 132]. В большинстве задач технического характера структура управляемых динамических систем и ее параметры известны с некоторой погрешностью. Следовательно, необходимым требованием к нелинейным управляемым динамическим системам является их устойчивость (в том или ином смысле) по отношению к структурным и внешним возмущениям. Математическая теория устойчивости динамических систем, созданная в 90-х годах прошлого века великим русским ученым А.М. Ляпуновым [109], занимает особое место среди методов качественного исследования динамических систем.

Развитие классической теории устойчивости динамических систем представлено в трудах Е.А. Барбашина [23], Н.Н. Красовского [95], В.И. Воротникова и В.В. Румянцева [39], В.Д. Горяченко [46],

Е.А. Гребеникова и Ю.А. Рябова [48], Б.П. Демидовича [51], Н.П. Еругина [72], В.И. Зубова [76а,б], И.Г. Малкина [112а,б], Ю.Н. Меренкова [127а-в], Леонова Г.А. [104], В.В. Немыцкого и В.В. Степанова [134], Н.Г. Четаева [177], А.А. Шестакова [178], Дж. Биркгофа [28], Л. Чезари [173], Н. Руша, П. Абетса и М. Лалуа [153] и других ученых.

Одним из эффективных методов исследования устойчивости и других качественных свойств динамических систем является классический и обобщенный методы функций Ляпунова [51, 64д, 76, 114в, 116а, 134, 127а,б, 178, 179, 220]. Метод функций Ляпунова получил значительное развитие в многочисленных работах [39, 51, 64д, 92, 134, 178]. В настоящее время обобщенный второй метод Ляпунова стал одним из важнейших методов качественного исследования устойчивости движения динамических управляемых систем [5, 41а, б, 64и, 70, 101, 116а, 178, 185].

При изучении управляемых динамических систем актуальной является проблема моделирования систем с неполной информацией. Указанные системы встречаются в случаях, когда управляемый объект (или процесс) достаточно сложен для получения его точного математического описания (математической модели), что обусловлено многообразием физических эффектов, нестационарностью объекта, наличием неконтролируемых постоянно изменяющихся внешних воздействий или дефицитом априорной информации о поведении системы. В связи с перечисленными обстоятельствами применение аналитических методов для моделирования систем с неполной информацией либо сопряжено с большими вычислительными трудностями, либо не представляется возможным.

Вопросы, связанные с алгоритмическим конструированием и изучением устойчивости систем с неполной информацией, рассмотрены в [13а-в, 14, 15, 34, 57, 108, 116а, 127в, 139, 147, 177, 191, 198, 201, 212] и в работах других исследователей.

Одним из актуальных подходов к построению управляемых динамических систем с неполной информацией является синтез моделей динамических систем с логическим регулятором [65а, 100, 195-198, 217, 226]. Знания о взаимодействии логического регулятора с объектом (процессом) управления представляются в форме правил вида: *если* (исходная ситуация), *то* (ответная реакция). Часть *если* (предпосылки или условия) означает сопряжение логических операций, а часть *то* (решение, вывод, заключение) представляет собой указание лингвистической величины для выходного воздействия (управляющего воздействия на объект управления) логического регулятора.

При решении задач управления системами на основе логических регуляторов возникает проблема исследования устойчивости этих систем. В ряде промышленных нормативов в России и за рубежом заложено требование обеспечения устойчивости системы управления. Это требование рассматривается как необходимое условие для использования системы управления. Имеется много прикладных задач, для которых проверка устойчивости управляемой системы оценивается как задача первой важности [113, 120]. К этим задачам относятся управляемые системы, влияющие на безопасность людей (стабилизация полета самолета, положения ракеты при запуске и т.п.), управляемые дорогостоящие объекты и сложные технические процессы, подверженные потере устойчивости. Подобного рода нормативы обеспечения устойчивости должны соблюдаться независимо от типа регулятора. Вопросам устойчивости динамических систем с логическими регуляторами посвящены работы [3, 8а,б, 25, 52, 71, 139, 145, 193, 227, 229, 233]. Методы и результаты настоящей работы основаны на идеях и методах теории управления и теории динамических систем [34, 47, 57, 96, 108, 139, 152]. Несмотря на то, что литература по теории динамических систем с логическими регуляторами весьма обширна, вопросы устойчивости и стабилизации указанных систем требуют дальнейшей разработки.

Современным подходом к изучению динамических систем с логическими регуляторами является «переход к интеллектному управлению» [34]. Использование интеллектуальных систем ведет к более высокой степени автоматизации для сложных, плохо структурированных процессов и в ряде случаев сокращает время разработки технических систем. Интеллектуальное управление оказывается полезным в случаях, когда технологические процессы являются слишком сложными для проведения моделирования и анализа с помощью общепринятых (классических) количественных методов [154] или когда доступные источники информации интерпретируются неточно или неопределенно [2, 8, 13а, 34, 47, 50, 57, 139, 199, 228].

Для исследования устойчивости и других качественных свойств динамических систем с логическими регуляторами имеет место использование таких альтернативных подходов, как:

- 1) подход, базирующийся на идентификации параметров (моделирование с помощью лингвистических правил) с использованием входных-выходных данных,
- 2) подход на основе дифференциальных моделей, описывающих нелинейные процессы.

Указанные подходы рассматривались в [1, 31, 57, 131, 139, 165] и в других работах.

Первый подход, базирующийся на знаниях экспертов, используется для моделирования управляемых систем, которые невозможно или очень затруднительно представить аналитическими и/или физическими моделями. Знания об исследуемом объекте, полученные от экспертов, записываются в форме правил вида *если ... то*. Указанный подход является частным случаем когнитивного подхода, направленного на разработку формальных моделей и методов исследования систем с неполной информацией, поддерживающих интеллектуальный процесс решения проблем с помощью учета в этих моделях и методах когнитивных возможностей (восприятия, представления, познания, понимания, объяснения) субъекта управления при решении управленческих задач.

Второй подход заключается в построении модели управляемой системы при наличии хотя бы приближенной математической модели, заданной в виде дифференциальных или разностных уравнений. С помощью универсальной аппроксимации исходная модель приводится к виду модели Такаги–Суджено (ТС-модели). Следует отметить, что широкий класс нелинейных систем представляется ТС-моделями [64м, 116б, 118, 121б, 131, 188, 213, 225, 231], которые строятся на основе представления правой части уравнения динамики системы в виде выпуклой комбинации уравнений. Коэффициенты, определяющие указанную выпуклую комбинацию, являются весовыми функциями фазовых переменных системы и принимают значения в интервале от 0 до 1, что позволяет установить соответствие исходной нелинейной системы набору правил, который и определяет ТС-модель.

Важной особенностью ТС-моделей является наличие “четкого” вывода из нечетких предпосылок. Поэтому представление систем при таком подходе является нечетким только по форме и анализ этих систем допускает использование методов классической теории устойчивости. Результаты об устойчивости ТС-моделей формулируются обычно в терминах линейных матричных неравенств (ЛМН), получаемых с применением прямого метода Ляпунова. В последние два десятилетия получено много результатов в направлении исследования ТС-моделей, что связано с расширением возможностей использования эффективных численных методов решения ЛМН и с возможностями реализации соответствующих алгоритмов с помощью прикладных вычислительных пакетов [22, 129]. Отметим, что в [129] приведены основные положения теории ЛМН, показан переход от теоремы Ляпунова к условию устойчивости в форме ЛМН, а также приведены примеры прикладных

задач, решения которых представлены в форме ЛМН. Для нахождения численного решения системы ЛМН использована вычислительная среда Matlab.

Обзор некоторых результатов по исследованию устойчивости ТС-моделей с запаздыванием приведен в [67]. В этой работе с учетом представления в виде ТС-модели исследована устойчивость нелинейных систем каскадной структуры с запаздыванием, а именно, получены условия глобальной асимптотической устойчивости в терминах ЛМН относительно конечного числа матриц, а также рассмотрена задача стабилизации управляемой нелинейной системы с запаздыванием, решение которой предложено на основе полученных условий устойчивости.

В [64о] рассмотрены современные методы анализа устойчивости динамических систем интеллектуального управления, выполнен качественный анализ специальных классов систем интеллектуального управления, а именно даны достаточные условия устойчивости в виде ЛМН для дескрипторных систем, относящихся к классу обобщенных ТС-систем. Предложен обзор основных направлений разработки интеллектуальных транспортных систем.

Отметим, что базирующиеся на правилах логического вывода и логических регуляторах ТС-модели находят приложения в промышленности, в естествознании, в инженерной практике. Указанные модели применяются в задачах управления механическими транспортными средствами, управления подъемными и мостовыми кранами, управления роботами-манипуляторами. К примеру, многие управляемые объекты управления в силу своей динамики представляют собой различные виды маятниковых установок (а в некоторых случаях и их комбинацию), соблюдение устойчивости для которых является обязательным требованием их эксплуатации. Динамические модели перевернутого маятника используется в задачах управления техническими средствами с гироскопическим устройством, в робототехнике, в ракетостроении. Многозвенные перевернутые маятники служат упрощенными примерами шагающих роботов, буксира, толкающего баржи. В настоящее время расширился класс реальных объектов управления, имеющих аналогичную математическую модель. К тому же, перевернутый маятник используется в теории управления в качестве экспериментальной площадки для тестирования разрабатываемых алгоритмов стабилизации и методов исследования устойчивости динамических управляемых систем.

В связи с многообразием задействованных физических эффектов, нестационарностью объекта и наличием неконтролируемых

возмущающих воздействий процессы, протекающие в маятниковых системах, в ряде случаев являются сложными для получения их адекватного математического описания с помощью классических методов моделирования [13а, 57]. В таких случаях, эффективным для моделирования указанных систем является применение современных подходов, базирующихся на правилах логического вывода и логическом регуляторе, синтезируемом для стабилизации системы.

Несмотря на интенсивные исследования применения перечисленных выше альтернативных подходов для моделирования управляемых маятниковых систем все еще остаются нерешенными многие проблемы, связанные с разработкой методологии синтеза моделей и анализа их устойчивости. Как показано в монографии, для изучения моделей управляемых маятниковых систем с логическими регуляторами целесообразным является применение алгоритма Лоусона решения линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений [12, 135, 216].

Монография представлена пятью главами и списком литературы.

В главе 1 **«Обзор методов моделирования и анализа устойчивости управляемых динамических систем»** приведена классификация систем управления и представлен обзор задач моделирования и методов теории систем интеллектуального управления. Дан краткий анализ методов изучения устойчивости указанных систем. Охарактеризованы комбинированные методы анализа устойчивости на основе развития методов Ляпунова: спектрально-бифуркационный метод, метод дивергентных функций Ляпунова, комбинированный метод функций Ляпунова с использованием свойств ЛНМ. Рассмотрен принцип сведения задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений нечетких дифференциальных уравнений. Представлена общая характеристика и структура моделей динамических систем с логическими регуляторами, определены методы анализа устойчивости указанных систем. Показано, что для изучения устойчивости моделей управляемых систем перспективным направлением является применение метода функций Ляпунова в сочетании с другими методами. Эффективность предложенных методов определяется ослаблением требований к функциям Ляпунова и расширением класса используемых вспомогательных функций. Для построения функций использован подход, основанный на свойствах ЛНМ.

В главе 2 **«Когнитивное моделирование и искусственный интеллект в исследовании динамических систем»** представлены уровни моделирования систем и показана их взаимосвязь. Рассмотрены понятия когнитивного подхода к моделированию систем, когнитивной модели (карты), дана краткая характеристика типов когнитивных карт. Приведен



обзор результатов по применению когнитивного моделирования и искусственного интеллекта для исследования динамических систем в различных областях науки и техники. В частности, приведены примеры внедрения методов искусственного интеллекта и когнитивных технологий в процесс 3D-прототипирования, а также изучены возможности их применения для создания автоматизированных интеллектуальных систем обучения.

В главе 3 **«Подход к изучению нелинейных динамических систем на основе построения моделей Такаги-Суджено»** рассмотрена формализация нелинейных динамических систем с логическими регуляторами с помощью ТС-моделей. Приведено описание процедуры построения ТС-моделей и аппроксимации с ее помощью нелинейной модели динамической системы (с управлением и без), пояснено, что ТС-модель является универсальным аппроксиматором в том смысле, что с ее помощью могут быть аппроксимированы гладкие нелинейные системы. Для построения стабилизирующего логического регулятора использована процедура параллельно распределенной компенсации и определены условия устойчивости ТС-модели, преобразованные к виду ЛМН. В этой же главе рассмотрен метод анализа асимптотической устойчивости нелинейных процессов, управляемых логическими регуляторами. Устойчивость этого типа управляемых систем изучена в терминах метода функций Ляпунова. Даны достаточные условия устойчивости и на их основе разработан алгоритм анализа устойчивости систем с логическими регуляторами. Кроме того, в главе предложен подход к синтезу управления динамической системы с переключением, базирующийся на представлении исходной системы моделью ТС-моделью. Получены условия устойчивости в виде модифицированных ЛМН.

В главе 4 **«Построение моделей и анализ устойчивости маятниковых систем интеллектуального управления»** охарактеризована изучаемая в работе модель управляемой маятниковой системы – модель перевернутого маятника, перечислены области практического ее применения, обозначены проблемы, возникающие при изучении систем маятникового типа, предложены альтернативные подходы к моделированию и изучению устойчивости модели перевернутого маятника. Синтезирована ТС-модель перевернутого маятника и приведены ее модификации, основанные на редукции числа правил ТС-модели, а также на проектировании управляемой системы с переключением. Редукция числа правил модели позволила представить условия устойчивости, представленные ЛМН, в более компактном виде для проведения вычислительных процедур с помощью прикладных пакетов. Выполнено построение алгоритма стабилизации перевернутого

маятника с помощью функции Ляпунова и логического регулятора. Проведен качественный анализ и получены условия асимптотической устойчивости и равномерной устойчивости на основе комбинированного метода, базирующегося на совместном использовании свойств дивергенции поля скоростей и функций Ляпунова. Разработаны алгоритмы исследования устойчивости модели перевернутого маятника с логическим регулятором.

В главе 5 «Компьютерное моделирование управляемых маятниковых систем» дано описание численного алгоритма Лоусона решения систем линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений, используемого для проведения качественного исследования синтезированных ТС-моделей перевернутого маятника (модифицированной ТС-модели перевернутого маятника, представленной двумя правилами, а также ТС-модели с переключением). На основе указанного алгоритма разработан комплекс компьютерных программ в пакете Matlab. С помощью данного пакета получены численные решения ЛМН, определяющих конкретное задание положительно определенной матрицы функции Ляпунова и матриц коэффициентов усиления, при которых для ТС-моделей перевернутого маятника можно построить стабилизирующий логический регулятор. Изучена динамика синтезированных моделей. Показана согласованность аналитических и численных результатов моделирования рассматриваемых систем маятникового типа. Представлены результаты программной реализации алгоритма стабилизации управляемой маятниковой системы в среде Visual Studio на языке C#. Проведено тестирование когнитивной модели перевернутого маятника с интеллектуальным управлением с помощью пакета Fuzzy Logic Toolbox компьютерной среды Matlab.

Таким образом, в монографии рассмотрены вопросы моделирования и анализа устойчивости динамических систем на основе методов интеллектуального управления и свойств ЛМН. Дано развитие метода функций Ляпунова исследования устойчивоподобных свойств систем с логическими регуляторами. Предложены условия стабилизации систем интеллектуального управления, представленных ТС-моделями, и приведены их модификации. Рассмотрены приложения к исследованию динамики управляемых маятниковых систем в условиях неполной информации на примере модификации модели перевернутого маятника. Изучено применение когнитивного подхода к моделированию управляемых систем. Приведен обзор результатов по применению когнитивного моделирования и искусственного интеллекта для исследования динамических систем в различных областях науки и техники.

Научные интересы авторов монографии существенно связаны с научными интересами и влиянием личности профессора Александра Андреевича Шестакова – крупного специалиста в области качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости движения и математического моделирования, талантливого ученого, в течение многих лет готовившего научно-педагогические кадры для университетов России [<http://e-heritage.ru/ras/view/person/history.html?id=47401527>]. В 2020 г. научная общественность России отметила 100-летие со дня рождения А.А. Шестакова конференциями и юбилейными публикациями, связанными с научным наследием ученого.

В частности, в своей монографии [178] А.А. Шестаков развил обобщенный прямой метод Ляпунова нечетких систем и систем с запаздыванием, а в ряде работ изучил свойства устойчивости моделей динамики транспорта на основе нечеткого управления. Анализ указанных систем предвосхитил по ряду направлений исследования по системам интеллектуального управления.

В настоящей монографии представлен ряд результатов, полученных авторским коллективом за предыдущее пятилетие, а также проведен обзор работ отечественных и зарубежных исследователей по моделированию и анализу устойчивости ряда классов динамических систем. Некоторые результаты опубликованы в работах авторов [58а-в, 60, 64а-п, 65а-е, 66, 68а-б, 77а-е, 78, 79а-б, 80, 114а-ж, 116а-в].

## Глава 1.

# ОБЗОР МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 1.1. Классификация систем управления и некоторые задачи их моделирования и анализа

Согласно определению, предложенному А.М. Лётовым, теория управления «есть совокупность методов, позволяющих выработать и обосновать решение, которое принимается для достижения заранее поставленной цели, в условиях как-либо определенной ситуации»[105]. В частности, теория автоматического управления «есть наука о методах определения законов управления какими-либо объектами, допускающих реализацию с помощью технических средств автоматики».

Под регулированием обычно понимается поддержание постоянства, или стабилизация, управляемой величины при заданном входном сигнале. Более широко задача о стабилизации понимается как задача о формировании регулирующего воздействия, которое на основе доступной информации обеспечивает устойчивое осуществление заданного движения. Термин же «управление» является более общим понятием, применяемым и для других разнообразных задач управления, но часто под задачей управления понимают задачу отыскания сил, которые переводят объект управления из одного заданного состояния в другое. В известном смысле дуальной к ней является задача наблюдения, т.е. задача определения текущих координат объекта по доступным наблюдениям величинам.

Знание одного лишь программного управления и даже его точная реализация обычно не обеспечивают достижения цели управления, так как систем автоматического управления (САУ) с программным управлением, как разомкнутая система, не обеспечивает компенсации действующих на объект возмущающих воздействий. Поэтому более полное решение задачи управления связывается с применением позиционного управления.

Основные проблемы создания САУ в начале XIX в. переместились в математические науки, которые по прошествии одного века оказали глубокое влияние на теорию и практику управления. Классические труды А. Пуанкаре [146], А.М. Ляпунова [109], Н.Е. Жуковского [73] и др. составили базу теории управления, в котором преобладающей является концепция дифференциальных уравнений. Преобразования Фурье и Лапласа, а также теория функций комплексного переменного Коши

составили базу частотных методов теории автоматического регулирования.

В обзоре С.Н.Васильева [34] выделены шесть уровней систем управления: 1) системы программного управления (разомкнутые системы); 2) системы с обратной связью (замкнутые системы); 3) системы идентификационного управления; 4) системы адаптивного управления (системы с самонастройкой); 5) системы интеллектуального управления (СИУ без целеполагания); 6) интеллектуальные системы управления (ИСУ с целеполаганием).

Каждый класс систем управления включает все предыдущие с точки зрения охвата их возможностей управления. К одному из уровней интеллектуального управления относится и нечеткое управление.

Различают объект управления (ОУ) и устройство управления (УУ). В ОУ реализуется некоторый процесс, нуждающийся в организованных воздействиях (решениях, управлениях) со стороны УУ для достижения целей управления. В теории автоматического управления ОУ и УУ в совокупности называются САУ, или управляемой системой.

Различают системы программного управления (разомкнутые системы) и системы управления по принципу обратной связи (замкнутые системы). Системы второго типа называют также системами позиционного управления. Построение законов позиционного управления называют синтезом управляемой (регулируемой) системы. При программном управлении управляющие воздействия являются функцией времени, а при позиционном – также функцией координаты, или текущего состояния системы.

Обзор задач и методов теории интеллектуальных и интеллектуальных систем управления и их разновидностей представлен в [34]. Как известно, терминология «интеллектуальное управление» является широко употребляемой. Однако отсутствует единодушие в вопросе определения этого понятия и в выборе типовой структуры соответствующих – интеллектуальных – систем управления. Интеллектуальное управление должно обладать свойствами: а) иметь способность воспринимать информацию о процессах, возмущениях и условиях функционирования, выводить заключения и обучаться; б) полнее использовать доступное знание об объекте и среде, чтобы обеспечить надежное управление с предопределенным критерием (например, использовать информацию о желаемой траектории, функционале качества управления, целевом множестве); в) управлять в творческой (интеллектуальной) манере (подобно человеку), прогнозируя изменения в объекте и среде, сохраняя, например, путем реконфигурации работоспособность даже при больших изменениях, согласовывая и, может быть, пересматривая цели и критерии

качества управления; г) улучшать с течением времени способность управлять объектом путем аккумуляции экспериментального знания, т.е. путем обучения на опыте.

Для оценки эффективности систем интеллектуального управления важное значение имеет умение измерять уровень интеллектуальности автоматических и человеко-машинных систем. Уровень интеллектуальности (уровень интеллекта) некоторого агента определяется а) способностью агента использовать старые знания в новых, может быть, заранее неизвестных проблемных ситуациях; б) широтой проблемных областей, где оцениваемый агент приемлем как активный решатель задач.

Свойства а) и б) могут включать способность планировать действия и самообучаться. Важность требования автономности функционирования агента или – в известной мере, противоположного свойства – умения взаимодействовать с другими агентами для совместного решения проблемы управления, равно как и требования нормального функционирования в условиях противодействия других агентов, зависит от проблемной области.

Различают два главных класса систем интеллектуального управления:

1) класс, в котором система прямо (без участия человека) осуществляет функционирование, т.е. полностью замещает традиционные алгоритмы управления (или использует в сочетании с интеллектуальными компонентами управления);

2) класс, в котором системой реализуется человеко-машинное управление, т.е. с участием человека. Системы интеллектуального управления указанных классов могут именоваться как автоматические и человеко-машинные системы интеллектуального управления.

Так как свойства а) и б) трудно оценить количественно, целесообразно дать качественную шкалу возрастания потенциала решения задач в системах автоматического (и автоматизированного) управления.

Д.А.Поспеловым [145] дана следующая классификация систем управления по объему необходимой информации о внешнем мире.

1. Простые системы управления (F-системы), состоящие из систем программного управления и систем с обратной связью.

2. Системы с адаптацией (F-A-системы), состоящие из систем идентификационного управления и систем адаптивного управления.

3. Модельные системы управления (F-M-системы), состоящие из систем интеллектуального управления.

4. Семиотические системы управления (S-системы), состоящие из интеллектуальных систем управления.

Н.Н.Моисеев [130] различает три уровня управления:

– ВУУ – верхний уровень управления: целеполагание;

– СУУ – средний уровень управления: поиск способа достижения поставленной на верхнем уровне цели;

– НУУ – нижний уровень управления: реализация выбранного на среднем уровне способа достижения поставленной цели.

В [34] отмечено, что в настоящее время системы интеллектуального управления с нетривиальным верхним уровнем управления существует только в виде человеко-машинных систем.

Соответствие классификаций С.Н. Васильева, Д.А. Поспелова и Н.Н. Моисеева представлено на рис. 1.1.

Как отмечено С.Н. Васильевым [34], проблема аппаратно-алгоритмического обеспечения СУУ и, в особенности, ВУУ является вызовом для специалистов в области интеллектуального управления.

На стыке современной теории управления и искусственного интеллекта интенсивно развивается интеллектуальное управление.

Возможно, рассматривать интеллектуальное управление (IV) не только как пограничную область теории управления (I) и искусственного интеллекта (II), но и как пограничную область теории управления (I), искусственного интеллекта (II) и исследования операций (III) (рис. 1.2). Взаимное влияние указанных трех базовых областей исследований и разработок детально рассмотрено в [34]. Отметим, что в монографии Б. Лю [108] показаны возможность и перспективы сочетания областей I, II, III.

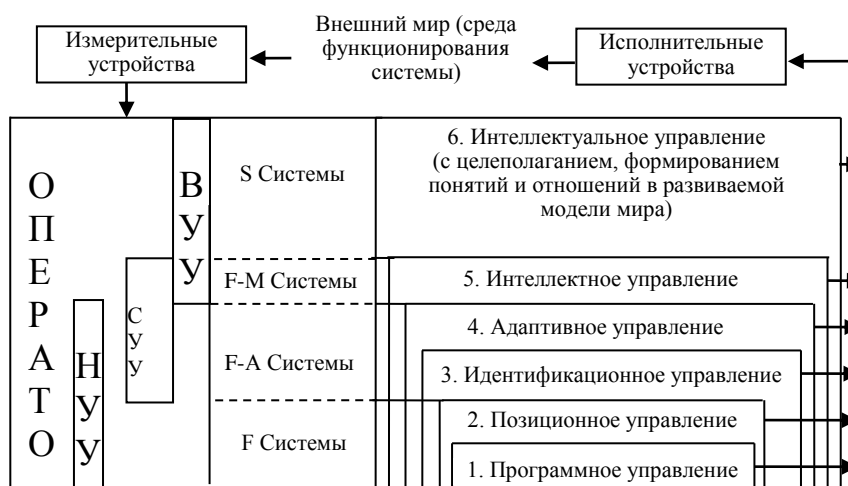


Рис. 1.1

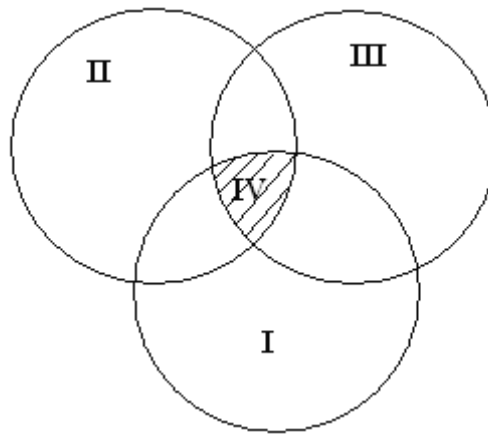


Рис. 1.2

В области интеллектуального управления сильно интенсивно развивается применение продукционных систем в форме нечетких и других правил, а также искусственных нейронных сетей.

Теория управления в своем развитии прошла ряд важных этапов:

а) от классических задач автоматического регулирования, исследовавшихся в основном с целью отыскания способов стабилизации стационарных движений на бесконечном интервале времени, – к задачам теории оптимального управления, уже не сводившихся к классическим вариационным задачам, и далее – к принципу максимума Понтрягина, методу динамического программирования Беллмана, теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов, использованию связи функций Ляпунова с природой оптимальных систем, построению теории оптимальной стабилизации и численных методов оптимального управления [55, 143];

б) от частотных методов анализа замкнутых систем – к методам пространства состояний и широкому использованию фундаментальных понятий и критериев управляемости и наблюдаемости;

в) от задач идентификационного управления неточно заданным объектом с одновременным поиском всей недостающей информации о нем, от методов идентификации и фильтрации, обеспечивающих получение недостающей информации в форме фильтров Калмана и Винера, от теории самонастраивающихся систем – к современным постановкам задач адаптивного управления;

г) от задач в виде обыкновенных дифференциальных уравнений к задачам управления системами с запаздыванием и распределенными системами;

д) от задач со скалярным критерием качества управления и систем с фиксированной, одноконтурной схемой управления – к многокритериальным задачам иерархического и децентрализованного управления, системам координатно-параметрического и структурного



управления, задачам управления сложными техническими системами в условиях неопределенности, фазовых и смешанных ограничений, стохастичности, кооперации или противодействия подсистем.

Если управляемая система функционирует в условиях априорной неопределенности, то при синтезе ее для достижения заданной цели управления следует снизить степень этой информационной неопределенности. Другими словами, необходимо объект управления соответственно адаптировать к условиям, при которых недетерминированные возмущения (начальные, внешние или параметрические) уже не смогут управляемой системе помешать обеспечить выполнение поставленной цели управления.

Задачи адаптивного синтеза в управляемых динамических системах возникли в разных постановках как естественная реакция на появление гибких автоматизированных комплексов и сложных технических устройств, для работы которых недостаточно применения одних только жестких программ управления. Главной особенностью адаптивной системы заключается в том, что по ходу работы объекты управления способны полностью идентифицировать себя (свои параметры и состояния) и ставить перед собой новые целевые условия, при этом контроль и вмешательство в управление сводятся к минимуму.

Начиная примерно с 80-х годов прошлого столетия, идеи, которые традиционно относились к области искусственного интеллекта, начинают использоваться в теории и практике управления. Соответствующие разработки, включаемые в состав систем управления, называются интеллектуальными компонентами систем управления.

В качестве первого типа интеллектуальных компонент для систем управления являются искусственные нейронные сети. Они применимы для решения класса задач, где используются не уравнения динамики и даже не столько правила, как в традиционных экспертных системах, сколько опыт. Нейронные сети на стыке с задачами управления используются в разных областях: в робототехнике, управлении технологическими процессами, телекоммуникациях, системах искусственного зрения, аэрокосмосе.

К другому типу интеллектуальных компонент систем управления относятся эволюционные алгоритмы, которые понимаются как генетические алгоритмы со специальными структурами данных.

Интеллектуальными компонентами систем управления для реализации высокоинтеллектуальных функций являются интеллектуальные компоненты третьего типа – системы, основанные на знаниях. Знания могут быть представлены в логическом языке, и их обработка с помощью логических

средств позволяет получать некоторые предпочтения на множестве допустимых управлений с целью выбора одного из них.

Важно отметить, что в общем случае системы, основанные на знаниях, оперируют с более широкой информацией – логическими, объектно-ориентированными и другими моделями, основанными на знаниях экспертов. Вместе с тем системы, основанные на знаниях, могут использовать и традиционные алгоритмы, базирующиеся на уравнениях динамики.

К системам, основанным на знаниях, относятся следующие классы систем: а) системы, основанные на правилах; б) системы, основанные на автоматическом доказательстве теорем; в) системы, основанные на автоматическом гипотезировании, т.е. на порождении гипотез; г) системы, основанные на рассуждениях по аналогии; д) объектно-ориентированные интеллектуальные системы.

Важно отметить, что использование интеллектуальных компонент приводит к новым технологиям, расширяющим потенциал управления динамическими системами [2, 16, 18, 34, 63а,б, 108].

На рис. 1.3 представлены соответствующие области исследований с учетом их пересечений [34]. Так, управление на основе знаний образует раздел интеллектуального управления и включает, например, управление на основе правил (в частности, нечетких правил) и управление на основе логических моделей.

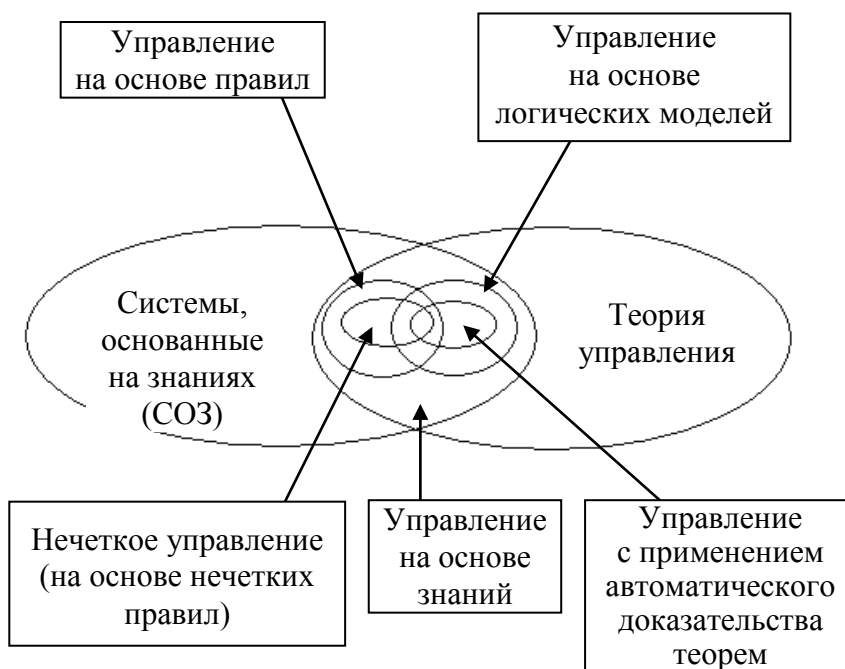


Рис. 1.3

Рассмотрим далее интеллектуальное управление на основе нечетких правил. Разработка систем интеллектуального управления, основанных на правилах, предполагает выбор переменных состояния и выхода, в терминах которых и формулируются правила. В простых случаях этот выбор можно реализовать в соответствии с позиционным управлением по положению и скорости объекта управления, а именно в соответствии с принципами пропорционального (П) и пропорционально-дифференциального (ПД) управления. Разумеется, могут использоваться аналоги и других типовых способов формирования управления, например, пропорционально-интегрального (ПИ) или пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) управления. Для нелинейных систем управления способы формирования управления могут получаться и более сложными.

На рис. 1.4 представлена структурная схема управляемой системы. Цель регулятора – удерживать для любого момента времени достаточно близким значение сигнала  $y$  (на выходе объекта управления) к значению входного сигнала  $u_{zv}$ . Различают Д-регуляторы, ПД-регуляторы, ИД-регуляторы и ПИД-регуляторы, причем эти регуляторы могут быть как четкими, так и нечеткими (логическими). Показатели ошибки  $e$ , используемые в посылках правил, аналогичных управлению с ПИД-регулятором, обычно выбираются из числа следующих трех показателей: ошибка  $e$ ; изменение ошибки, обозначаемое  $\Delta e$  или  $\dot{e}$ ; сумма ошибок  $\delta e$ .

Показатели управления  $u$  на выходе устройства управления, т.е. на входе в процесс, используемые в заключениях правил, обычно выбираются из числа следующих: изменение управления, обозначаемое  $\Delta u$  или  $\dot{u}$ ; управление  $u$ .

В некоторых случаях, когда доступны знания не только в форме показателей ошибки  $e$  ( $e, \Delta e, \delta e$ ), но и, например, показатели выхода  $y$  процесса, то в посылки правил могут включаться свойства переменной  $y$  и других показателей выхода.

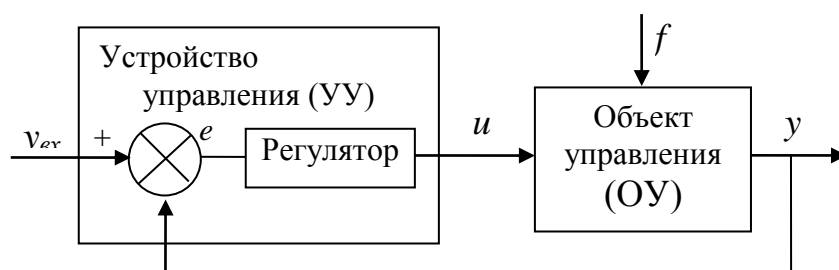


Рис. 1.4.

Если в правилах имена свойств рассматривать как предикатные символы, то возможна формализация этих правил в предикатной форме с выходом на методы обработки знаний в духе автоматического

доказательства теорем или логического программирования. Такое символическое представление правил является достаточным для анализа устойчивости системы управления [643]. Основными задачами, решаемыми при создании системы интеллектуального управления с нечеткой логикой, является сопоставление описаний состояний объекта управления с условиями истинности продукционных правил, а также определение стратегии (порядка) использования правил.

Исторически нечеткое управление использовалось вначале в контексте статических правил [34, 126]. Позднее были созданы адаптивные нечеткие регуляторы либо в неявной форме, в которых использовалась промежуточная модель процесса для «перепроектирования» (синтеза) регулятора в реальном времени (рис. 1.5), либо в более привычной форме прямой адаптации, когда по результатам наблюдения функционирования контура управления модифицируется прямо база правил (рис. 1.6). В общем случае, последние регуляторы именуются самоорганизующимися, основанными на нечеткой логике.

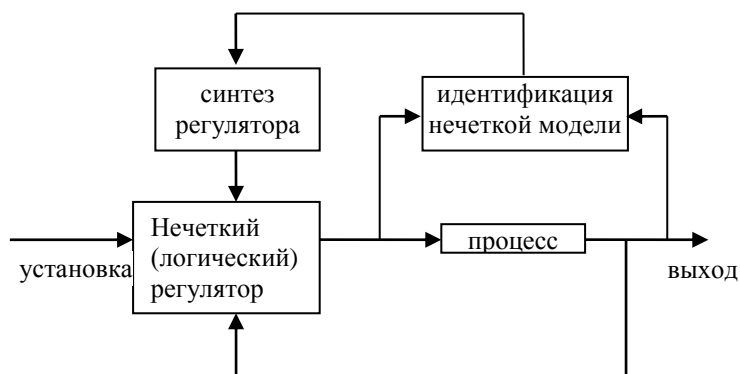


Рис. 1.5

Пример системы интеллектуального управления для проводки грузового судна между островами без вмешательства человека описан в [34]. Входами в процесс являются  $u$  (скорость) и  $\delta$  (угол поворота руля), выходами – курс судна  $\Psi$  (относительно осей фиксированной системы координат) и положение в плоскости  $(x, y)$ . Структура системы управления является двухуровневой.

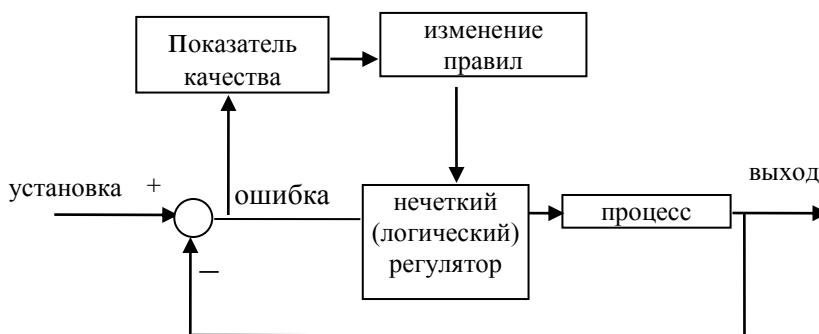


Рис. 1.6

Рассмотрим вопрос об эффективности применения нечеткого управления. Имеются многочисленные коммерческие приложения нечеткого управления в технике и промышленности. Вместе с тем, имеются две крайние позиции в оценке полезности нечеткого управления. С одной стороны, многие сторонники этой технологии провозглашают, что нечеткое управление будет революционизировать технику управления, обещает прорывы и будет способно решить сложные технические проблемы с помощью малых затрат. С другой стороны, многие представители управленцев все еще являются активными сторонниками того взгляда, что «все, что может быть сделано в нечетком управлении, может быть сделано также и традиционными средствами теории управления», и прогнозируют в ближайшем будущем спад нечеткого управления как направления теории и приложений.

Следует отметить, что нечеткие регуляторы являются более робастными, чем обычные. Разработаны приложения, где использование нечеткого управления – в чистом виде или в комбинации, например, с ПИД-управлением – обеспечило высокую робастность систем управления. Одной из важных задач является выяснение типов технических систем управления, для которых нечеткое управление ведет к улучшению робастности и устойчивости, и как проектные решения влияют на эти свойства. Для нечетких систем управления получен ряд критериев устойчивости. Такие критерии получены на основе прямого метода Ляпунова и свойств ЛМН.

В аналитическом обзоре [34] отмечены значимость и перспективы развития теории интеллектуального управления: «Ареал применения средств искусственного интеллекта к задачам всех уровней управления постоянно расширяется. Относительные неудачи побудили к более тонким и глубоким исследованиям и специализации логического и других подходов к тем или иным классам задач. На повестке дня создание полностью автоматических систем интеллектуального управления. Достижения в области автоматизации логического вывода, индуктивного логического программирования, порождения гипотез, распознавания образов и др. уже вызвали в жизнь ряд амбициозных проектов, в том числе, например, проект создания полностью автоматических пилотов. Вместе с тем, не должно быть неоправданного обобщения в оценке будущих перспектив использования интеллектуального управления, как это уже было в прошлом в искусственном интеллекте. Требуются новые идеи и решения, в том числе развивающие и интегрирующие перспективные и уже сегодня полезные методы. Приложения и экспериментальные исследования должны помочь сакцентировать и/или скорректировать направления прогресса в области интеллектуального управления».

Следует подчеркнуть, что важной и актуальной задачей в исследовании систем интеллектуального управления является задача устойчивости, решаемая с помощью обобщения известных и создания новых методов теории устойчивости. Эту важность и актуальность подтверждают работы отечественных и зарубежных исследователей, вышедшие в последнее десятилетие [57, 64а,и, 72, 114г, 116а, 127б, 139, 141, 143, 144, 218, 224].

Существуют следующие алгоритмы нечеткой логики, на базе которых происходит конструирование логических регуляторов: алгоритм Мамдани, алгоритм Цукамото, алгоритм Такаги–Суджено, алгоритм Ларсена, упрощенный алгоритм нечеткого вывода. Преимущества и недостатки указанных алгоритмов описаны в [96]. Общий логический вывод осуществляется следующими четырьмя этапами [96, 152].

1. *Нечеткость* (введение нечеткости, фазификация, fuzzification). Функции принадлежности, определенные на входных переменных, применяются к их фактическим значениям для определения степени истинности каждой предпосылки каждого правила.

2. *Логический вывод*. Найденное значение истинности для предпосылок каждого правила применяется к заключениям каждого правила. Это приводит к одному нечеткому подмножеству, которое будет назначено каждой переменной вывода для каждого правила. В качестве правил логического вывода обычно используются только операции  $\min$  (минимум) или  $\text{prod}$  (умножение). В логическом выводе минимума функция принадлежности вывода «отсекается» по высоте, соответствующей вычисленной степени истинности предпосылки правила. В логическом выводе умножения функция принадлежности вывода масштабируется при помощи найденной степени истинности предпосылки правила.

3. *Композиция*. Все нечеткие подмножества, назначенные к каждой переменной вывода (во всех правилах), объединяются вместе, чтобы формировать одно нечеткое подмножество для каждой переменной вывода. При подобном объединении обычно используются операции  $\max$  (максимум) или  $\text{sum}$  (сумма). При композиции максимума комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечный максимум по всем нечетким подмножествам. При композиции суммы комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечная сумма по всем нечетким подмножествам, назначенным переменной вывода правилами логического вывода.

4. *Приведение к четкости* (дефазификация, defuzzification). Этот этап используется для преобразования нечеткого набора выводов в четкое число. Существуют различные способы приведения к четкости.

## 1.2. Методы анализа устойчивости систем интеллектуального управления и их развитие

Одной из ключевых задач при проектировании систем управления с обратной связью является обеспечение устойчивости указанных систем. В широком смысле под устойчивостью замкнутой системы управления понимается свойство ограниченности вектора состояния системы при условии, что значения входных величин принадлежат заданному подмножеству всевозможных значений этих величин.

Для исполнения промышленных нормативов является обязательным требование обеспечения устойчивости замкнутой нечеткой системы управления. Это требование рассматривается как необходимое условие для использования нечеткой системы управления [222]. Для многих классов прикладных систем проверка устойчивости управляемой системы оценивается как задача первой важности. К этим системам относятся управляемые системы, влияющие на безопасность людей (стабилизация полета самолета и т.п.), управляющие дорогостоящие объекты и сложные технические процессы, подверженные потере устойчивости, с различными типами регуляторов. Операции, реализуемые логическими регуляторами, в общем случае можно рассматривать как сложные нелинейные преобразования входных сигналов в выходные сигналы.

Разработано достаточно много методов анализа устойчивости управляемых линейных систем. Однако исследование устойчивости нелинейных систем и в настоящее время остается важной и актуальной задачей. Трудности исследования устойчивости логических регуляторов сужают область их практических приложений. В этом направлении ведутся интенсивные исследования по преодолению ограничений области практических приложений.

В круг методов анализа устойчивости управляемых систем входят следующие методы.

1. Метод показателей Ляпунова (первый метод Ляпунова).
2. Метод функций Ляпунова (второй метод Ляпунова).
3. Метод бифуркаций (метод робастности системы).
4. Метод анализа устойчивости В.М. Попова (критерий В.М. Попова).
5. Круговой метод анализа устойчивости (критерий Я.З. Цыпкина).
6. Метод анализа устойчивости на основе свойств векторных полей состояний.
7. Метод конусности.
8. Методы, базирующиеся на понятии вход-выходной устойчивости.

9. Методы, базирующиеся на понятии гиперустойчивости в смысле В.М. Попова.

10. Эвристические методы анализа устойчивости системы.

11. Метод анализа устойчивости с использованием компьютерной модели системы.

12. Эвристический метод Ванга анализа устойчивости системы.

13. Метод Такаги–Суджено анализа устойчивости системы.

14. Метод нечетких функций Ляпунова анализа  $\sigma$ -устойчивости автономных дифференциальных систем (А.А. Шестаков, Ю.Н. Меренков).

15. Метод анализа устойчивости систем на основе нечетких неавтономных дифференциальных уравнений (А.А. Шестаков, Ю.Н. Меренков).

16. Методы, базирующиеся на понятиях индекса А. Пуанкаре и дивергенции векторного поля.

На основе оценки степени полезности метода исследования осуществляется выбор того или иного метода. Для оценки степени полезности методов исследования следует учитывать:

а) возможность получения строгого доказательства того или иного типа устойчивости системы;

б) характер трудностей, преодолеваемых при анализе того или иного типа устойчивости системы;

в) простоту понимания сущности метода анализа того или иного типа устойчивости;

г) степень общности метода анализа устойчивости;

д) возможность компьютерной поддержки операций, связанных с анализом устойчивости системы того или иного типа.

Приведем краткую характеристику каждого метода. Метод функций Ляпунова и метод показателей Ляпунова для исследования устойчивости нелинейных систем дают возможность обосновать строгое доказательство. Однако метод функций Ляпунова имеет следующие недостатки:

– для анализа устойчивости требуется найти саму функцию Ляпунова. Известно, что нет общего алгоритма нахождения функций Ляпунова. Разработка компьютерной программы для нахождения функции Ляпунова, также представляет определенные трудности;

– функция Ляпунова дает возможность оценить устойчивость системы для тех секторов области ее режимов, которые лежат вблизи состояния равновесия системы, но она не может эффективно использоваться вне сектора, примыкающего к точке равновесия системы. Функция Ляпунова должна быть непрерывно дифференцируема. По этой причине функция Ляпунова была выбрана в теории нечеткого управления квадратичной формой, чтобы отображать обобщенную энергию системы.



Устойчивость в этом случае будем называть квадратичной устойчивостью системы [203, 208, 234].

Разработан ряд вариантов метода функций Ляпунова для анализа устойчивости нечетких систем. Один из вариантов изложен в [139] и состоит в следующем: рассматривается упрощенная модель нечеткого регулятора, приведенная к полилинейному виду, и предполагается, что область рабочих режимов регулятора состоит из некоторого числа параллелепипедов, оси которых параллельны. Однако рассмотренные в методе упрощения сужают область его возможных приложений.

Другой вариант метода функций Ляпунова предложен для исследования  $\sigma$ -устойчивости нечетких динамических систем на основе редукции к абстрактным эволюционным уравнениям с применением нечетких функций Ляпунова (А.А. Шестаков и его последователи [176, 64а, 127а]).

Метод бифуркаций изучения устойчивости нечеткой системы определяет расстояние изучаемой нечеткой системы от состояния неустойчивости и анализирует условия потери устойчивости и способы стабилизации системы в окрестности точек неустойчивого равновесия. Стабилизация системы осуществляется при помощи подбора характеристик регулятора. Однако автоматизация использования метода бифуркаций очень трудна. В [139] разработан вариант метода бифуркаций, эффективный в случае, когда модель системы является достаточно простой. В случае двумерного пространства состояний этот метод особенно эффективен и его возможно использовать в инженерных расчетах.

Методы, базирующиеся на теории вход-выходной устойчивости, не гарантируют нулевого значения ошибки системы [139]. В этих методах использована следующая теорема о малых значениях коэффициента усиления: система управления с обратной связью устойчива, если произведение коэффициентов усиления элементов системы меньше единицы.

Аналитическое определение коэффициентов усиления элементов замкнутой системы в общем случае является трудной задачей. Эта задача относительно проста только для случаев линейных стационарных объектов, управляемых при помощи статических регуляторов без гистерезиса.

Основываясь на максимальных значениях коэффициентов усиления, теорема коэффициентов усиления дает консервативные результаты, обеспечивая для системы наличие некоторого запаса устойчивости, который не обязательно является большим. Коэффициенты усиления объекта и регулятора не обязаны быть совместно максимальными.

Поэтому в некоторых случаях применение рассматриваемого метода исследования не позволит оценить устойчивость системы (даже в случае ее несомненной устойчивости).

Эвристические методы не дают строгого обоснования устойчивости системы, а обеспечивают возможность проверки ее работоспособности для случая, когда точно известен вид возмущающих и входных воздействий на систему, вид начальных условий и т.д.

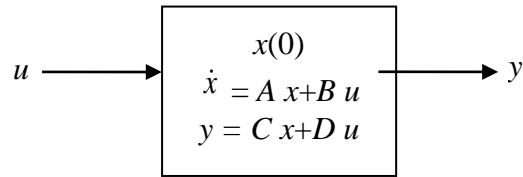
Очень важен метод анализа устойчивости с использованием компьютерной модели системы, так как при его помощи, возможно, изучать очень сложные многомерные системы, вне зависимости от числа сигналов. Однако этот метод имеет экспериментальный характер и подтверждает устойчивость системы применительно к конкретным условиям.

Метод конусности базируется на основе теоремы о малых значениях коэффициента усиления. Недостатки этого метода такие же, как и недостатки метода вход-выходной устойчивости системы.

Сопоставление методов изучения устойчивости управляемых нечетких систем приводит к выводу, что в случае SISO-систем (систем с одним входом и одним выходом) можно использовать метод В.М. Попова и круговой метод, а в случае ММО-систем (систем с несколькими входами и несколькими выходами) можно использовать теорию гиперустойчивости.

В.М. Поповым была создана теория гиперустойчивости, которая служила для анализа всех возможных систем, удовлетворяющих большому числу требований. Препятствия, создаваемые этими требованиями, были в дальнейшем устранены, и это позволило использовать теорию для анализа устойчивости широкого класса нейронечетких систем управления. Методы, созданные на базе теории гиперустойчивости, являются эффективными методами анализа устойчивости. Данный метод обеспечивает регулярную проверку устойчивости и поддается автоматизации с помощью компьютера. Гиперустойчивость представляет свойство системы, состоящее в том, что вектор состояния системы удовлетворяет условию ограниченности, если значения входных величин принадлежат некоторому заданному подмножеству всех возможных значений этих величин.

Наиболее простой задачей является формулировка условий гиперустойчивости для линейных систем. На рис. 1.7 представлена структурная схема нечеткой системы управления с диспетчерским управляющим регулятором для обеспечения устойчивости системы. Аналогичные схемы возможны и для некоторых классов нелинейных систем.



**Рис. 1.7**

Метод исследования гиперустойчивости позволяет проверять устойчивость систем со многими точками равновесия и оценивать устойчивость не только вблизи этих точек, но и глобально, включая секторы, не примыкающие к точкам равновесия. Эти свойства метода обеспечивают ему эффективность использования [120].

Круговой метод исследования устойчивости (называемый также признаком Цыпкина) применяется главным образом к тем системам SISO-типа, которые возможно редуцировать к стандартному виду, причем линейная часть системы является рациональной (порядок числителя выше порядка знаменателя) и является асимптотически устойчивой: все полюса расположены в левой полуплоскости и на мнимой оси полюса не размещаются) [116а]. Что касается нелинейной части системы, то ее характеристика состоит из прямолинейных сегментов и представляет собой статическое однозначное соотношение.

Круговой метод анализа устойчивости системы дает возможность сделать выводы относительно устойчивости системы путем анализа принадлежности нелинейной характеристики семейству характеристик ограниченными прямыми линиями, проходящими через начало координат.

Система управления стандартного вида с линейной и нелинейной частями, удовлетворяющая перечисленным ранее условиям, является глобально и асимптотически устойчивой, если круг с центром на действительной оси в точке  $a = -\frac{1}{2}(k_1^{-1} + k_2^{-1})$  и радиусом  $r = \frac{1}{2}(k_1^{-1} - k_2^{-1})$  принадлежит целиком области, примыкающей к левой части частотной характеристики (диаграмма Найквиста линейной части системы), не соприкасаясь с ней. Чтобы упростить круговой метод, принимается, что  $k_1 \geq 0$  и  $k_2 \geq 0$ .

Если размерность входного вектора  $u$  равна размерности выходного вектора  $y$ , а система является полностью управляемой и наблюдаемой, то изучаемая система будет абсолютно устойчивой, если для всех  $u(t)$ , удовлетворяющих неравенству

$$\int_0^t u^T(t) y(t) dt \leq \beta_0^2 \quad \forall t > 0, \beta_0 > 0, \quad (1.1)$$

выполнено неравенство

$$\|x(t)\| \leq \beta_0 + \beta_1 \|x(0)\|, \quad (1.2)$$

где  $\beta_0$  и  $\beta_1$  – положительные постоянные и  $\|\bullet\|$  – евклидова норма.

**Определение 1.1.** Система, удовлетворяющая (1.1) и (1.2), называется *абсолютно устойчивой*, если для всех выходных векторов со свойством (1.1) справедливо неравенство (1.2) и предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad (1.3)$$

то система называется *асимптотически абсолютно устойчивой*.

Очевидно, что увеличение значений переменных состояния ведет к увеличению энергии системы. Если это возрастание энергии зависит только от энергии, поступающей с входным сигналом, а в конечном итоге от потенциальной энергии системы, определяемой начальными условиями  $x(0)$ , то систему можно считать абсолютно устойчивой. Поэтому абсолютно устойчивая система не содержит внутренних источников энергии. Следовательно, возрастание амплитуды переменных состояния  $x$ , порождаемое входным сигналом  $u$ , зависит от энергии, поступающей с входным сигналом. Поэтому значения переменных состояния не могут стремиться к бесконечности при ограниченных уровнях входного сигнала. Если состояние системы удовлетворяет (1.3), то система асимптотически абсолютно устойчива. Ограничения на векторы  $x$  и  $u$  приводят к ограничениям на вектор  $y$ , в силу зависимости  $y = Cx + Du$ .

Отметим, что для систем ММО-типа имеются некоторые разновидности кругового метода, однако их использование не дает существенных результатов.

Рассмотрим условия (во временной области существования) абсолютной устойчивости непрерывной нелинейной системы управления, включающей стационарную нелинейную часть. Предположим, что уравнения для линейного блока системы в ее пространстве состояний имеют вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + D_0u(t). \quad (1.4)$$

Система управления стандартного вида (1.4) будет асимптотически абсолютно устойчивой, если выполнено следующее условие.

$A_1$ . Векторы  $u$  и  $y$  имеют одну и ту же размерность, и, кроме того, уравнения (1.5), называемые уравнениями Калмана–Якубовича, должны иметь решение, включающее положительно определенную матрицу  $P$ , некоторую регулярную матрицу  $L$  и некоторую матрицу  $V$ :

$$\begin{aligned} A^T P + PA = -LL^T, \quad C - B^T P = V^T L^T, \\ D_0^T + D_0 = V^T V. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Как правило, уравнения (1.5) для первичной системы решения не имеют, и требуется вводить фиктивные степени свободы в виде матриц  $K$ ,  $D$ ,  $(r_{ii})$ ,  $(1/r_{ii})$ .

Если линейная часть системы описывается уравнениями состояния

$$x_{k+1} = A\Phi_k + Hu_k, \quad y_k = Cx_k + D_0u_k, \quad (1.6)$$

то матрицу передаточных функций  $G(z)$  можно вычислить с помощью соотношения

$$G(z) = C(zI - \Phi)^{-1}H + D_0. \quad (1.7)$$

Перед исследованием абсолютной устойчивости системы необходимо проверить выполнение следующих требований.

А<sub>2</sub>. Матрица передаточных функций  $G(z)$  должна быть квадратной.

А<sub>3</sub>. Линейный блок должен быть полностью управляемым и наблюдаемым.

А<sub>4</sub>. Полюсы всех компонентных передаточных функций  $G_{ij}(z)$ , составляющих матрицу  $G(z)$ , должны находиться внутри единичного круга (компонентные передаточные функции должны быть устойчивыми).

А<sub>5</sub>. Для каждой из передаточных функций  $G_{ij}(z)$ , составляющих матрицу передаточных функций  $G(z)$ , порядок ее числителя должен быть не выше, чем порядок знаменателя.

А<sub>6</sub>. Преобразование  $v_k = F(y_k)$  должно осуществлять однозначное отображение  $y$  на  $v$ . Нелинейные элементы не удовлетворяют данному условию, так как они реализуют многозначное отображение.

А<sub>7</sub>. Преобразование  $v_k = F(y_k)$  должно быть таким, что  $F(0) = 0$ .

А<sub>8</sub>. Линейный блок  $G(z)$  рассматриваемой дискретной системы является строго положительным вещественным.

А<sub>9</sub>. Нелинейный блок  $F(y_k)$  удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=0}^{k_1} v_k^T y_k \geq -\beta_0^2 \quad \forall k_1 > 0. \quad (1.8)$$

*Пояснения к условиям А<sub>2</sub>–А<sub>9</sub>.*

1. Для проверки устойчивости совокупности полюсов в условии А<sub>4</sub> можно применить процедуру экспертных испытаний. В аналитическом виде условия, получаемые таким путем, выражаются относительно просто. Если знаменатель второй степени для рассматриваемой передаточной функции приравнять нулю:

$$f(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \quad (1.9)$$

где  $a_2 > 0$ , то выполнение условий (1.9) означает, что все нули функции  $f(z)$  принадлежат внутренности единичного круга:

$$f(1) > 0, \quad f(-1) > 0, \quad |a_0| < a_2. \quad (1.10)$$

Если знаменатель третьей степени для рассматриваемой передаточной функции приравнять нулю:

$$f(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \quad (1.11)$$

где  $a_3 > 0$ , то выполнение условий

$$f(1) > 0, \quad f(-1) > 0, \quad |a_0| < a_3, \quad |a_0^2 - a_3^2| > |a_0 a_2 - a_1 a_3| \quad (1.12)$$

означает, что все нули функции  $f(z)$  лежат внутри единичного круга. Анализ устойчивости корней  $f(z)$  можно также выполнить с помощью условия Гурвица. Подстановка  $z = 1 + w/1 - w$  преобразует внутренность единичного круга в комплексной плоскости в правую полуплоскость плоскости  $w$ . Тогда взаимосвязь между первичной и вторичной формами имеет вид:

$$G^*(z) = (I + G(z)K)^{-1}G(z); \quad F^*(y_k) := v_k^* = v - Ky_k = F(y_k) - Ky_k.$$

2. Если начальные требования  $A_1 - A_7$  для дискретного линейного блока выполнены, то следует переходить к проверке основных условий абсолютной устойчивости для линейной и нелинейной частей соответственно.

3. Условия  $A_8, A_9$  являются достаточными условиям абсолютной устойчивости, а именно: дискретная система управления стандартного вида, а также эквивалентная ей вторичная система будут асимптотически абсолютно устойчивыми при выполнении условий  $A_8, A_9$ .

4. Если применение условия  $A_8$  к линейному блоку  $G(z)$  позволяет классифицировать этот блок как положительный вещественный, то данная система стандартного вида является нормально устойчивой.

Отметим, что матрица  $G(z)$  будет строго положительной вещественной, если выполнены условия:

а) полюсы всех передаточных функций  $G_{ij}(z)$  лежат внутри единичного круга в комплексной плоскости переменной  $z$ ;

б) матрица

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \left( G(e^{j\omega}) + G^T(e^{-j\omega}) \right) \quad (1.13)$$

является положительно определенной и эрмитовой для всех значений  $\omega \geq 0$ .

Отметим также, что основное условие для нелинейного блока дискретной системы управления записывается в виде неравенства (1.8). С практической точки зрения неравенство (1.8) является малоприменимым

для исследования нелинейного блока. Поэтому для анализа этого блока применяется другое неравенство

$$v_k^T y_k \geq 0 \quad \forall k > 0. \quad (1.14)$$

Однако результаты, полученные с помощью (1.14), сужают получаемую область в сравнении с результатами, которые можно получить с помощью (1.8).

Стоит отметить, что вышеуказанный список методов изучения устойчивости нечетких систем интенсивно пополняется новыми методами, причем одними из наиболее эффективных являются методы, основанные на развитии методов Ляпунова. Так, в работах [58в, 64а,о, 117, 139, 174] развиты новые методы исследования устойчивости систем интеллектуального управления, а именно: спектрально-бифуркационный метод, метод дивергентных функций Ляпунова, комбинированный метод функций Ляпунова с использованием свойств ЛМН. Указанные методы основаны на развитии первого и второго методов Ляпунова.

Спектрально-бифуркационный метод заключается в совместном использовании критерия Ляпунова и бифуркационной картины поля состояний системы. На основе развитого в работах [64е, 114е, 116а] спектрально-бифуркационного метода найдены условия устойчивости состояний равновесия систем интеллектуального управления. Определено понятие «запас устойчивости» и разработан алгоритм нахождения запаса устойчивости для многомерных управляемых систем.

Метод дивергентных функций заключается в совместном использовании функций Ляпунова и дивергентных функций поля скоростей. В работах [58б,в, 64б,з, 116а, 194] на основе метода дивергентных функций Ляпунова даны условия равномерной устойчивости состояний равновесия многомерных систем интеллектуального управления.

Комбинированный метод функций Ляпунова с использованием свойств ЛНМ базируется на совместном использовании прямого метода Ляпунова и техники ЛНМ. В работах [64а,г,е,ж, 116б] на основе указанного метода получены условия устойчивости дискретных и непрерывных управляемых систем с синглтон-выходом.

В [64в] проведен анализ устойчивости управляемых систем с логическими регуляторами на основе свойств векторных полей состояния. Рассмотрены одномерный, двумерный и  $n$ -мерный случаи. Кроме того, с помощью понятий качественной теории введено и изучено понятие «запас устойчивости» для исследуемых систем. Разработан алгоритм нахождения запаса устойчивости  $n$ -мерных систем с логическими регуляторами для случая  $n > 2$ .

Методы, основанные на использовании свойств ЛМН, рассмотрены в [17, 59, 65в,г, 67, 70, 77д, 114д,е, 116а,б, 117, 121а, 124, 141, 192, 200, 221, 229].

В [114ж, 127а, 177, 209, 211, 212, 215] развит системный подход к исследованию устойчивости и управляемости систем, а именно описано понятие ключевой математической системы, позволяющее с единой точки зрения рассматривать свойства устойчивости и управляемости систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с запаздыванием, стохастическими дифференциальными уравнениями, дифференциальными включениями, нечеткими дифференциальными уравнениями. Все изучаемые в монографии системы являются частными случаями ключевой системы. Установлена связь между свойствами устойчивости стохастического уравнения и соответствующего ему нечеткого уравнения.

Обобщен принцип сведения Шестакова–Меренкова [178] задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений нечетких дифференциальных уравнений. Кроме того, с помощью метода функций Ляпунова получены условия устойчивости замкнутого множества в евклидовом пространстве для дифференциального включения, а также для неавтономного нечеткого дифференциального уравнения.

В заключение отметим, что рассмотренные методы демонстрируют эффективность применения первого и второго методов Ляпунова в сочетании с другими методами для анализа устойчивости управляемых систем, а также эффективность использования созданных на основе этих методов критериев устойчивости и конструктивных алгоритмов анализа устойчивости управляемых систем.

### **1.3. Принцип сведения задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений нечетких дифференциальных уравнений**

В настоящем разделе представлено обобщение принципа сведения Шестакова-Меренкова [64к] задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений нечетких дифференциальных уравнений на случай дифференциальных включений общего вида. Указанный принцип предполагает, что нечеткое уравнение для каждого  $\alpha$ -уровня,  $\alpha \in (0, 1]$ , задается соответствующим дифференциальным включением. Множество всех движений включения порождает многозначное отображение, соответствующее  $\alpha$ -уровню функции, являющейся решением нечеткого дифференциального



уравнения. Принцип сведения Шестакова-Меренкова позволяет переходить от свойств устойчивости дифференциального включения с помощью ключевой системы к свойствам устойчивости соответствующего нечеткого уравнения [178].

Рассмотрим неавтономное дифференциальное включение

$$dx/dt \in F(t, x) \quad (1.15)$$

с локально допустимой правой частью  $F: R \times D \rightarrow R^n$ , где  $D$  – открытое множество из евклидова пространства  $R^n$  и пусть  $B(M, r) = \{x \in D: e(x, M) \leq r\}$  –  $r$ -окрестность множества  $M$ ,  $e(x, M)$  – расстояние от точки  $x$  до множества  $M$ . Рассмотрим верхнюю  $D_+V_\alpha(t, x) ::= \sup DV_\alpha(t, x)$  и нижнюю  $D_-V_\alpha ::= \inf DV_\alpha(t, x)$  производные  $\alpha$ -уровня,  $\alpha \in (0, 1]$ , а также функции Ляпунова  $V: B(M, r) \rightarrow R$ .

**Предложение 1.1.** Если для неотрицательной непрерывной функции  $w_3: [0, r] \rightarrow R$  выполняется неравенство

$$D_+V(t, x) \leq -w_3(e(x, M)), \quad \forall (t, x) \in [s, \infty) \times B(M, r), \quad (1.16)$$

то для любого движения  $\varphi: [s, \omega] \rightarrow B(M, r) \setminus B(M, r_1)$ ,  $0 \leq r_1 < 1$  выполняется неравенство

$$V(t, \varphi(t)) - V(p, \varphi(p)) \leq -\gamma(t-p) \quad \forall t, p \in [s, \omega), \quad (1.17)$$

где  $\gamma ::= \inf \{w_3(\rho): r_1 < \rho < r\}$ . В частности, при выполнении неравенства

$$D_+V(t, x) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in [s, \infty) \times B(M, r) \quad (1.18)$$

функция  $V(t, \varphi(t))$  не возрастает при  $t \in [s, \omega)$ .

Доказательство. Пусть сначала выполняется неравенство (1.18). Пусть  $\varphi: [s, \omega) \rightarrow B(M, r)$  – непродолжаемое движение и  $q, t_0, p \in (s, \omega)$ ,  $q < t_0 < p$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Ввиду неравенства (1.18) для  $\tau \in [q, p]$  найдется интервал  $I_\tau ::= (\tau, b_\tau) \in [q, p+1]$  такой, что  $V(t, \varphi(t)) - V(\tau, \varphi(\tau)) \leq \varepsilon(t-\tau)$  для любого  $t \in I_\tau$ . Множество всех интервалов  $I_\tau, \tau \in [q, p]$  образует открытое покрытие отрезка  $[t_0, p]$ , из которого можно выделить конечное подпокрытие интервалами  $U = \{I_1, \dots, I_n\}$ , где  $t_0 \in I_1$  и каждый предыдущий интервал  $I_i$  содержит левый конец последующего. Выделим из интервала множества  $U$ , содержащего число  $t_0$ , отрезок  $[t_0, t_1]$ , из следующего интервала – отрезок  $[t_1, t_2]$  и, наконец, отрезок  $[t_k, p]$  из некоторого следующего интервала множества  $U$ . Тогда по построению отрезков получаем  $V(t_{i+1}, \varphi(t_{i+1})) - V(t_i, \varphi(t_i)) \leq \varepsilon(t_{i+1} - t_i)$  при  $0 \leq i \leq k$ ,  $t_{i+1} ::= p$ . Складывая эти неравенства, получим  $V(p, \varphi(p)) - V(t_0, \varphi(t_0)) \leq \varepsilon(p - t_0)$  и ввиду произвольности  $\varepsilon > 0$  и чисел  $t_0, p$  отсюда следует невозрастание функции  $V(t, \varphi(t))$ . Пусть теперь выполняется более общее неравенство (1.16) и пусть  $W(t) ::= \int_{t_0}^t w_3(e(\varphi(\tau), M)) d\tau$ . Так как  $w_3$  – неотрицательная непрерывная функция, то  $W$  – возрастающая дифференцируемая на отрезке

$[0, r]$  функция. Поэтому для функции  $v(t) ::= V(t, \varphi(t)) + W(t)$  ввиду (1.16) имеем

$$v_+(t) = DV_+(t, \varphi(t)) + w_3(\rho(\varphi(t), M)) \leq 0,$$

и по доказанному функция  $V(t, \varphi(t)) + W(t)$  не возрастает. Поэтому при ограничениях на  $\varphi$  из условий к неравенству (1.17) получаем

$$V(t, \varphi(t)) + W(t) - V(p, \varphi(p)) - W(p) \leq 0,$$

то есть

$$V(t, \varphi(t)) - V(p, \varphi(p)) \leq -\int_p^t w_3(e(\varphi(\tau), M)) d\tau \leq -\gamma(t-p)$$

и (1.17) также доказано. Предложение доказано.

Далее в этом разделе будут рассмотрены различные типы устойчивости для замкнутого множества  $M \subset D$  относительно включения (1.15) и замкнутого множества  $M \subset P(D)$  относительно уравнения (1.20).

**Определение 1.2.** Относительно включения (1.15) замкнутое множество  $M \subset D$  называется:

*устойчивым*, если

$$\forall t_0 \geq s, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta ::= \delta(\varepsilon, t_0) > 0, \quad \forall \psi \in \Phi, \quad e(\psi(t_0), M) < \delta \Rightarrow$$

$\text{Dom } \psi \supset [t_0, \infty), e(\psi(t), M) < \varepsilon \forall t \geq t_0;$

*Положительно притягивающим*, если

$$\forall t_0 \geq s, \forall h ::= h(t_0) > 0, \forall \eta > 0, \exists T ::= T(t_0, h, \eta) > s,$$

$\forall \psi \in \Phi, e(\psi(t_0), M) \leq h \Rightarrow \text{Dom } \psi \supset [t_0, \infty), e(\psi(t), M) < \eta$  при  $t > T;$

*асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и положительно притягивающее.

Если можно выбрать в условиях выше числа  $\delta, h, T$  не зависящими от  $t_0$ , то соответствующее свойство называется *равномерным*.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.1.** Если для замкнутого множества  $M \subset D$  существует функция Ляпунова  $V$  относительно включения (1.15), для которой верно неравенство (1.18), то множество  $M$  равномерно устойчиво в малом относительно этого включения. Если верно неравенство (1.16), где функция  $w_3: B(M, r) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и положительна вне  $M$ , то множество  $M$  равномерно асимптотически устойчиво в малом относительно включения (1.15).

Доказательство. Пусть  $t_0 \geq s$  и  $\varepsilon > 0$  заданы. Так как  $w_2(0) = 0$ , по непрерывности найдется  $\delta: \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $w_2(\delta) < w_1(\varepsilon)$ . Для любого движения  $\varphi \in \Phi(t_0, x)$  при  $e(\varphi(t_0), M) < \delta$  предположим существование  $t_1 > t_0$  такого, что  $e(\varphi(t), M) < \varepsilon$  при  $t_0 < t < t_1$  и  $e(\varphi(t_1), M) = \varepsilon$ . Ввиду неравенства (1.18) имеем

$$w_1(\varepsilon) = w_1(e(\varphi(t_1), M)) \leq V(t_1, \varphi(t_1)) \leq V(t_0, \varphi(t_0)) \leq w_2(e(\varphi(t_0), M)) < w_1(\varepsilon).$$

Получено противоречие, поэтому для всех  $t \in [t_0, \infty) \cap \text{Dom } \psi$ ,  $e(\varphi(t), M) < \varepsilon$  и по определению (1.16) множество  $M$  равномерно по  $t_0$  устойчиво в малом. Пусть выполнено неравенство (1.16). Для доказательства равномерной по  $t_0$  асимптотической устойчивости в малом достаточно показать, что при  $h=r$

$$\begin{aligned} \forall \eta > 0, \exists T(\eta) > 0, \forall t_0 \geq s, \forall \varphi \in \Phi, \varphi: [t_0, \omega) \rightarrow B(M, h), \\ \varphi(t) \in B(M, \eta), \forall t \geq t_0 + T(\eta). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Пусть  $\eta > 0$ ,  $t_0 > s$  уже выбраны. Так как из (1.16) следует (1.18), то множество  $M$  устойчиво в малом и поэтому  $\exists \delta ::= \delta(\varepsilon)$  при  $\varepsilon ::= \eta$ . Пусть  $\gamma ::= \min\{w_3(\rho) : \delta \leq \rho \leq r\}$  и пусть  $T(\eta) ::= [w_2(r) - w_1(\delta)]/\gamma$ . Пусть  $\varphi \in \Phi$  – произвольное непродолжаемое вправо движение, определенное на  $[t_0, \omega)$ , и  $t_0 + T(\eta) < \omega$ . Если для некоторого  $t_1 \leq t_0 + T(\eta)$  выполняется  $e(\varphi(t_1), M) < \delta$ , ввиду устойчивости в малом  $\varphi(t) \in B(M, \beta) \forall t \geq t_0 + T(\eta) \geq t_1$  и (1.19) доказано. В противном случае  $e(\varphi(t), M) \geq \delta$  при всех  $t \leq t_0 + T(\eta)$ , поэтому

$$\begin{aligned} V(t, \varphi(t)) - V(t_0, \varphi(t_0)) \leq -\gamma(t - t_0) \leq -\gamma T(\eta) = w_1(r) - w_2(\delta) \Rightarrow \\ V(t, \varphi(t)) \leq w_1(\delta), t ::= t_0 + T(\eta) \end{aligned}$$

и поэтому  $\varphi(t_0 + T(\eta)) \in B(M, \delta)$ , а значит, ввиду устойчивости в малом  $\varphi(t) \in B(M, \eta), \forall t \geq t_0 + T(\eta)$  и (1.19) доказано и в этом случае. Теорема доказана.

**Определение 1.3.** Пусть  $J$  – промежуток из  $R$  и  $F: J \rightarrow P(R^n)$  – нечеткая функция. Для функции  $F_\alpha$ -движением, где  $\alpha \in (0, 1]$ , называется абсолютно непрерывная функция  $\varphi: J \rightarrow B$ , для которой  $\varphi(t) \in F_\alpha(t) \forall t \in J$ . Через  $S_\alpha$  обозначим множество  $\alpha$ -движений и через  $S$  – объединение всех  $S_\alpha$  при  $\alpha \in (0, 1]$ . Множество движений  $S$  называется *порождающим функцию  $F: J \rightarrow P(B)$* , если  $\forall t \in J, \forall \alpha \in (0, 1], \{\varphi(t) | \varphi \in S_\alpha\} = F_\alpha(t)$ .

**Определение 1.4.** Функция  $X: J \rightarrow P(R^n)$  называется *решением нечеткого дифференциального уравнения*

$$dX/dt = F(t, X), \quad (1.20)$$

если при каждом  $t \in J$  выполняется равенство  $dX(t)/dt = F(t, X(t))$ .

Дифференциальное включение

$$d\varphi/dt \in F_\alpha(t, \varphi), \quad (1.21)$$

где  $\alpha \in (0, 1]$ , называется *соответствующим уравнению (1.20)*.

**Теорема 1.2.** Пусть  $Y$  – нечеткое множество,  $Y_\alpha$  –  $\alpha$ -уровень этого множества,  $P(R^n)$  – совокупность всех нечетких подмножеств из евклидова пространства  $R^n$ ,  $D$  – открытое множество из  $R^n$ . Нечеткая функция  $X: J \rightarrow P(R^n)$  при  $s \in J$  является решением задачи Коши  $X(s) = Y$  для неавтономного дифференциального уравнения  $dX/dt = F(t, X)$  тогда и только тогда, когда она определяется нечетким множеством решений  $S$  так, что  $Y_\alpha = \{\varphi(s) | \varphi \in S_\alpha\}$  и каждое движение  $\varphi \in S_\alpha$  является решением

дифференциального включения  $d\varphi/dt \in F_\alpha(t, \varphi)$ , где  $F_\alpha: R \times D \rightarrow 2^{R^n}$  определяются условием  $F_\alpha(t, \varphi) = F(t, \varphi)_\alpha$ .

Доказательство. Если  $X: J \rightarrow P(R^n)$  является решением задачи Коши для дифференциального уравнения (1.20), то по определению производной  $dX/dt$  каждое  $\alpha$ -движение  $\varphi: J \rightarrow R^n$  функции  $X$  удовлетворяет включению (2.21), определено при  $t = s$  и удовлетворяет условию  $\varphi(s) \in Y_\alpha$ . Обратно, если  $X: J \rightarrow P(R^n)$  определяется множеством движений  $S$ , удовлетворяющим включению (1.21) и имеющим начальные условия из  $Y_\alpha$  при каждом  $\alpha \in (0, 1]$ , то по определению производной нечеткой функции выполняется равенство  $dX(t)/dt = F(t, X(t))$  при каждом  $t \in J$  и выполняется условие  $X(s) = Y$ , поэтому  $X$  будет решением уравнения (1.20). Теорема 1.2 доказана.

**Определение 1.5.** Относительно уравнения (1.20) замкнутое множество  $M \subset P(D)$  называется:

*устойчивым*, если

$$\forall t_0 \geq s, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta ::= \delta(\varepsilon, t_0), \quad \forall B \in P(X), \quad e(B, M) < \delta \Rightarrow$$

$$\text{Dom } J(t_0, B) \supset [t_0, \infty), \quad e(J(t; t_0, B), M) < \varepsilon \forall t \geq t_0;$$

*положительно притягивающим*, если

$$\forall t_0 \geq s, \exists h ::= h(t_0) > 0, \forall \eta > 0, \exists T ::= T(t_0, h, \eta) > t_0, \forall B \in P(X), \quad e(B, M) < \delta \Rightarrow$$

$$\text{Dom } J(t_0, B) \supset [t_0, \infty), \quad e(J(t; t_0, B), M) < \eta \text{ при } t > T;$$

*асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и положительно притягивающее;

*устойчивым в малом*, если

$$\forall t_0 \geq s, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta ::= \delta(\varepsilon, t_0) > 0, \quad \forall B \in P(X), \quad e(B, M) < \delta \Rightarrow$$

$$e(J(t; t_0, B), M) < \varepsilon \forall t \in \text{Dom } J(t_0, B);$$

*положительно притягивающим в малом*, если

$$\forall t_0 \geq s, \quad \exists h ::= h(t_0) > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists T ::= T(t_0, h, \eta) > t_0, \quad \forall B \in P(X),$$

$$e(B, M) \leq h \Rightarrow e(J(t; t_0, B), M) < \eta \text{ при } t \in \text{Dom } J(w, B) \cap [T, \infty);$$

*асимптотически устойчивым в малом*, если оно устойчиво в малом и положительно притягивающее в малом.

Если в условиях выше числа  $\delta, h, T$  можно выбрать не зависящими от  $t_0$ , то соответствующее свойство называется равномерным.

**Определение 1.6.** Пусть  $\alpha \in (0, 1]$ . Относительно уравнения (1.20) замкнутое множество  $M \subset P(D)$  называется:

*$\alpha$ -устойчивым*, если

$$\forall t_0 \geq s, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta ::= \delta(\varepsilon, t_0, \alpha) > 0, \quad \forall B \subset X, \quad e(B, M_\alpha) < \delta \Rightarrow$$

$$\text{Dom } J_\alpha(t_0, B) \supset [t_0, \infty), \quad e(J_\alpha(t; t_0, B), M_\alpha) < \varepsilon \forall t \geq t_0;$$

*положительно  $\alpha$ -притягивающим*, если

$\forall t_0 \geq s, \exists h := h(w, \alpha) > 0, \forall \eta > 0, \exists T := T(t_0, h, \eta, \alpha) > t_0, \forall B \subset X, e(B, M_\alpha) \leq h \Rightarrow \text{Dom } J_\alpha(t_0, B) \supset [t_0, \infty), e(J_\alpha(t; t_0, B), M_\alpha) < \eta$  при  $t > T$ ;

$\alpha$ -асимптотически устойчивым, если оно  $\alpha$ -устойчиво и положительно  $\alpha$ -притягивающее;

$\alpha$ -устойчивым в малом, если

$\forall t_0 \geq s, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta := \delta(\varepsilon, t_0, \alpha) > 0, \forall B \subset X, e(B, M_\alpha) < \delta \Rightarrow e(J_\alpha(t; t_0, B), M_\alpha) < \varepsilon \forall t \in \text{Dom } J_\alpha(t_0, B)$ ;

положительно  $\alpha$ -притягивающим в малом, если

$\forall t_0 \geq s, \exists h := h(t_0, \alpha) > 0, \forall \eta > 0, \exists T := T(t_0, h, \eta, \alpha) > t_0, \forall B \subset X, e(B, M_\alpha) \leq h \Rightarrow e(J_\alpha(t; t_0, B), M_\alpha) < \eta$  при  $t \in \text{Dom } J_\alpha(t_0, B) \cap [T, \infty)$ ;

$\alpha$ -асимптотически устойчивым в малом, если оно  $\alpha$ -устойчиво в малом и положительно  $\alpha$ -притягивающее в малом.

Если в условиях выше числа  $\delta, h, T$  можно выбрать не зависящими от  $t_0$  и  $\alpha$ , то соответствующее свойство называется равномерным по  $t_0$  и  $\alpha$  соответственно.

**Предложение 1.2.** Пусть  $\alpha \in (0, 1]$ . Если для  $r := r(\alpha)$  и неотрицательной непрерывной функции  $w_{3\alpha}: [0, r] \rightarrow R$  выполняется неравенство

$$D_+ V_\alpha(t, x) \leq -w_{3\alpha}(\rho(x, M)), \quad \forall (t, x) \in [s, \infty) \times B(M, r), \quad (1.22)$$

то для любого  $\alpha$ -движения  $\varphi: [s, \omega] \rightarrow B(M, r) \setminus B(M, r_1)$ ,  $0 \leq r_1 < r$  уравнения (1.20) выполняется неравенство

$$V(t, \varphi(t)) - V(p, \varphi(p)) \leq \gamma(t-p), \quad \forall t, p \in [s, \omega)$$

при  $\gamma := \inf \{ w_{3\alpha}(\rho) : r_1 < \rho < r \}$ . В частности, при выполнении неравенства

$$D_+ V_\alpha(t, x) \leq 0, \quad \forall (t, x) \in [s, \infty) \times B(M, r) \quad (1.23)$$

функция  $V(t, \varphi(t))$  не возрастает при  $t \in [s, \omega)$ .

Доказательство. Так как речь идет о движениях дифференциального включения (1.15), то утверждения предложения 1.2 непосредственно следуют из предложения 1.1.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.3.** Если для замкнутого множества  $M \subset P(D)$  существует функция Ляпунова  $V$  относительно уравнения (1.20), для которой при  $\alpha \in (0, 1]$  верно (1.23), то множество  $M$  равномерно  $\alpha$ -устойчиво в малом относительно этого уравнения. Если верно (1.22), где функция  $w_{3\alpha}: (0, r) \rightarrow R$  непрерывна и положительна, то множество  $M$  равномерно  $\alpha$ -асимптотически устойчиво в малом относительно уравнения (1.20).

Доказательство. Зафиксируем  $\alpha \in (0, 1]$ . Тогда из условий теоремы 1.2 вытекает выполнение условий теоремы 1.1. В самом деле, из теоремы 1.1 следует относительно включения (1.21) равномерная по  $t_0$  устойчивость в малом множества  $M_\alpha$  (при выполнении условия (1.23)) и равномерная по  $t_0$  асимптотическая устойчивость в малом множества  $M_\alpha$  (при выполнении

условия (1.22)). Следовательно, ввиду произвольности  $\alpha \in (0, 1]$  имеет место соответственно равномерная по  $t_0$   $\alpha$ -устойчивость в малом и  $\alpha$ -асимптотическая устойчивость в малом множества  $M$ . Теорема 1.3 доказана.

Рассмотренный в настоящем разделе принцип сведения задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений нечетких дифференциальных уравнений основан на понятии ключевой системы и является обобщением принципа сведения Шестакова–Меренкова [178] на случай дифференциальных включений общего вида. Принцип сведения использован и развит в [64а,к,о,п, 114ж, 119].

#### 1.4. Линейные матричные неравенства и их связь с теорией устойчивости

В настоящем разделе рассмотрены основные положения теории линейных матричных неравенств (ЛМН). Приведены общая и стандартная формы ЛМН с учетом их взаимосвязи. Представлена взаимосвязь прямого метода Ляпунова (метода функций Ляпунова) с условиями устойчивости в виде набора ЛМН. В разделе использованы термины и обозначения, принятые в [129].

**Определение 1.7.** *Линейным матричным неравенством (ЛМН) в общей форме, относительно неизвестной матрицы  $X$  называется неравенство*

$$L(X) = D^T X + X^T D + \sum_{i=1}^l (E_i^T X F_i + F_i^T X E_i) + Q < 0, \quad (1.24)$$

где  $Q \in S^n$ ,  $D \in R^{n \times m}$ ,  $E_i \in R^{n \times m}$ ,  $F_i \in R^{m \times m}$ ,  $X \in R^{m \times m}$ ,  $X \in R^{n \times m}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . Предполагается, что матрица  $L(X)$  здесь отрицательно определена и симметрична.

**Определение 1.8.** *Линейным матричным неравенством в стандартной форме, относительно неизвестных скаляров  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется неравенство*

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n < 0,$$

где  $A_i \in S^n$ ,  $x_i \in R^1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Рассмотрим приведение ЛМН в общей форме к ЛМН в стандартной форме. Для этого положим в (1.24)  $l=1$ , введем  $R_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  – базис в  $R^{m \times n}$ . Для этого базиса существуют  $x_{ij}$  такие, что

$$X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} R_{ij},$$

$$D^T X + X^T D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} (D^T R_{ij} + R_{ij}^T D),$$

$$E^T X F + F^T X^T D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} (E^T R_{ij} F + F^T R_{ij}^T E).$$

Обозначим:

$$Q_{ij} = D^T R_{ij} + R_{ij}^T D + E^T R_{ij} F + F^T R_{ij}^T E,$$

Выполним подстановки и в результате сложения получим:

$$D^T X + X^T D + E^T X F + F^T X E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} Q_{ij}.$$

Далее, запишем ЛМН в стандартной форме:

$$L(x_{ij}) = Q + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} Q_{ij}.$$

С помощью метода ЛМН при решении конкретных задач часто получаются нелинейные, относительно неизвестных матриц, матричные неравенства. Чтобы применить аппарат выпуклой оптимизации для их решения, неравенства необходимо привести к линейному виду согласно определениям 1.7 и 1.8.

Рассмотрим сначала первый способ, сводящийся к замене переменной. Пусть задано матричное неравенство

$$A^T P + P A + K^T B^T P + P B K < 0, \quad (1.25)$$

где  $A \in R^{n \times n}$  и  $B \in R^{n \times m}$  – известные матрицы, а  $P \in S^{n \times n}$  и  $K \in R^{m \times n}$  – неизвестные матрицы. С целью приведения неравенства (1.25) к общей форме ЛМН вида (1.24) можно умножить его слева и справа на  $X = P^{-1}$ :

$$X A^T + A X + X K^T B^T + B K X < 0,$$

далее введем замену

$$W = K X,$$

и, наконец, получим неравенство

$$X A^T + A X + W^T B^T + B W < 0. \quad (1.26)$$

Нетрудно видеть, что неравенство (1.26) является линейным по отношению к новым неизвестным матрицам  $X$  и  $W$ .

Рассмотрим второй способ, состоящий в следующем. Пусть задано матричное неравенство:

$$A P + P A^T + P K^T B^T + B K P < 0, \quad (1.27)$$

где  $A \in R^{n \times n}$  и  $B \in R^{n \times m}$  – известные матрицы, а  $P \in S^{n \times n}$  и  $K \in R^{m \times n}$  – неизвестные матрицы. С целью приведения неравенства (1.27) к общей форме ЛМН вида (1.24) введем замену

$$K = -\frac{1}{2}B^T P^{-1},$$

в результате которой получим

$$AP + PA^T - BB^T < 0. \quad (1.28)$$

Нетрудно видеть, что неравенство (1.28) является линейным по отношению к неизвестной матрице  $P$ .

Лемма дополнения по Шуру[129] состоит в следующем. Пусть  $A$  – блочная симметричная матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Если  $A_{11}$  и  $A_{22}$  – несингулярные матрицы, то дополнением по Шуру для матриц  $A_{11}$  и  $A_{22}$  являются матрицы  $S_{ch}(A_{11})$  и  $S_{ch}(A_{22})$ , такие, что

$$S_{ch}(A_{11}) = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12},$$

$$S_{ch}(A_{22}) = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S_{ch}(A_{11}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{ch}(A_{22}) & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда  $A < 0 \Leftrightarrow S_{ch}(A_{11}) < 0, A_{11} < 0 \Leftrightarrow S_{ch}(A_{22}) < 0, A_{22} < 0$  или  $A > 0 \Leftrightarrow S_{ch}(A_{11}) > 0, A_{11} > 0 \Leftrightarrow S_{ch}(A_{22}) > 0, A_{22} > 0$ .

В лемме дополнения по Шуру символ  $\cong$  обозначает конгруэнтность [129] симметричных матриц:

$$x = Ty,$$

$$x^T Ax = y^T T^T ATy,$$

$$A \cong T^T AT,$$

где  $T$  – невырожденная матрица перехода к новому базису.

Рассмотрим далее специфику перехода от второго метода Ляпунова (метода функций Ляпунова) к условию устойчивости системы в виде набора ЛМН.

Строгое определение понятия устойчивости движения было впервые дано А. М. Ляпуновым в его знаменитой диссертации «Общая задача об устойчивости движения», опубликованной в 1892 г. [109]. Предложенные в этой работе методы исследования задач устойчивости оказались чрезвычайно плодотворными, идеи этой работы в значительной степени предопределили основные результаты современной теории управления [21, 50, 57, 94, 112, 113, 139, 155, 184, 185].



В основе метода ЛМН для решения задач стабилизации динамических систем лежит основная теорема метода функций Ляпунова. Приведем основные положения теории устойчивости Ляпунова и подробно покажем переход от теоремы Ляпунова к условию устойчивости в форме ЛМН.

Рассмотрим динамическую систему, определяемую семейством дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1.29)$$

Предполагается, что система (1.29) имеет нулевое положение равновесия  $x^* = 0$ .

Пусть в некоторой окрестности  $U$  начала координат задана непрерывно дифференцируемая функция:

$$V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

причем  $V(x) > 0$  для всех  $x \in U$ , а в начале координат  $V(0) = 0$ . Полная производная  $V(x)$  по времени  $t$  имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt},$$

или, в виде скалярного произведения двух векторов

$$\frac{dV}{dt} = (\text{grad } V, \frac{dx}{dt}) = (\text{grad } V, f(x)),$$

которое называется производной  $V(x)$  в силу системы (1.29).

Проиллюстрируем случай, когда

$$\frac{dV}{dt} < 0$$

в окрестности  $U$  для некоторого семейства функций (1.29),  $n=2$ . Согласно рис.1.8, для функции Ляпунова  $V(x_1, x_2)$  имеет место  $x_1(t) \rightarrow 0$  и  $x_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

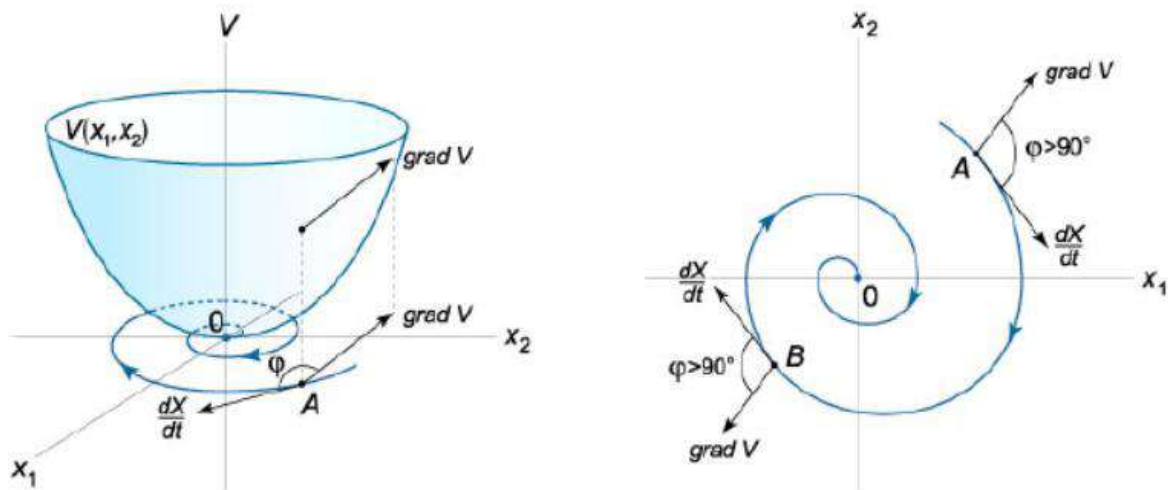


Рис. 1.8

**Определение 1.9.** Функция  $V(x)$ , являющаяся непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности  $U$  начала координат, называется *функцией Ляпунова* автономной системы  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , если выполнены условия:

- 1)  $V(x) > 0$ , для  $\forall x \in U \setminus \{0\}$ ;
- 2)  $V(0) = 0$ ;
- 3)  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ , для  $\forall x \in U$ .

Рассмотрим условия асимптотической устойчивости положения равновесия.

**Теорема 1.4.** Если в некоторой окрестности  $U$  нулевого решения  $x^*=0$  автономной системы (1.29) существует функция Ляпунова  $V(x)$  и  $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ , то положение равновесия  $x^*=0$  является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Рассмотрим линейную управляемую систему вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где  $t \in \mathbb{R}$  – непрерывное время,  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^m$  – вектор входа,  $y \in \mathbb{R}^p$  – вектор выхода,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матрица системы,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – матрица входа,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  – матрица выхода по состоянию. Напомним, что  $\lambda_i(A), i = 1, \dots, n$  – набор собственных значений матрицы  $A$ .

Сформулируем теорему об устойчивости линейной системы следующим образом:

**Теорема 1.5.** *Положение равновесия  $x^*=0$  системы (1.30) является: асимптотически устойчивым по Ляпунову, если  $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ ; нейтрально устойчивым по Ляпунову, если  $\text{Re}(\lambda_i(A)) \leq 0$ ; неустойчивым по Ляпунову, если  $\text{Re}(\lambda_i(A)) > 0$ .*

Будем считать, что система устойчива, равно как матрица системы  $A$  устойчива, если положение ее равновесия асимптотически устойчиво по Ляпунову. Сформулируем теорему метода функций Ляпунова (теорема 1.4) в более удобном виде:

**Теорема 1.6.** *Пусть  $V(x)$  – возможная функция Ляпунова. Система (1.30) устойчива тогда и только тогда, когда существует  $V(x)$  такая, что:*

$$\begin{aligned} V(x) &> 0, \\ \dot{V}(x) &< 0. \end{aligned}$$

Применительно к линейным системам функция Ляпунова часто задается в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T P x,$$

где  $P \in S^n$ . Система (1.30) устойчива тогда и только тогда, когда существует матрица  $P$  такая, что:

$$\begin{aligned} V(x) = x^T P x &> 0, \\ \dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} &< 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Подставив в (1.31) выражения из (1.30) при  $u(t)=0$ , получим

$$\begin{aligned} x^T P x &> 0, \\ x^T A^T P x + x^T P A x &< 0. \end{aligned}$$

С учетом того, что  $x^T P x > 0 \Leftrightarrow P > 0$  для всех  $x$ , получим систему ЛМН

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ A^T P + P A &< 0. \end{aligned}$$

Теорема Ляпунова в терминах ЛМН будет выглядеть следующим образом.

**Теорема 1.7.** *Матрица  $A$  системы (1.30) устойчива тогда и только тогда, когда  $\exists P \in S^n$  такая, что*

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ A^T P + P A &< 0. \end{aligned}$$

Условия асимптотической устойчивости с учетом критерия Гурвица для рассматриваемой системы (1.30) можно представить в виде следующих утверждений.

**Предложение 1.3.** *Система (1.30) является устойчивой тогда и только тогда, когда  $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0, i = 1, 2, \dots, n$ .*

**Предложение 1.4.** Матрица  $A \in R^{n \times n}$  является устойчивой тогда и только тогда, когда  $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

Следует отметить, что в [129] даны обобщения предложений 1.3, 1.4 и рассмотрена задача  $D$ -устойчивости (устойчивости по области), а также приведена обобщенная теорема Ляпунова в терминах ЛМН. В разделе 3.1 настоящей монографии показано применение условий теоремы 1.7 для исследования устойчивости нелинейных динамических систем, описываемых ТС-моделями.

### 1.5. Модели динамических систем с логическими регуляторами и методы анализа устойчивости

Построению и анализу моделей динамических систем с логическими регуляторами посвящены работы отечественных и зарубежных исследователей: А.Н. Аверкина и И.З. Батыршина [2], Р.А. Алиева, Э.Г. Захарова и С.В. Ульянова [8], В.А. Горюшкина [44а,б], В.И. Гостева [47], Н.П. Деменкова [50], Н.Д. Егупова и К.А. Пупкова [72], И. Кураваки и др. [99], В.В. Круглова, М.Н. Дли и Р.Ю. Голунова [96], Д.А. Поспелова [145], С.В. Ульянова, О.Ю. Тятюшкиной и Е.В. Колбенко [166], А.А. Ускова [167], А. Пегата [139], А.П. Ротштейна [151], Т. Такахи и М. Суджено [228], К. Танаки и Х.О. Ванга [231] и других исследователей. В [116а] рассмотрены вопросы моделирования и анализа устойчивости динамических систем интеллектуального управления.

Модели динамических систем с логическими регуляторами имеют свою специфику. На рис. 1.9 представлена структурная схема динамической системы с логическим регулятором.

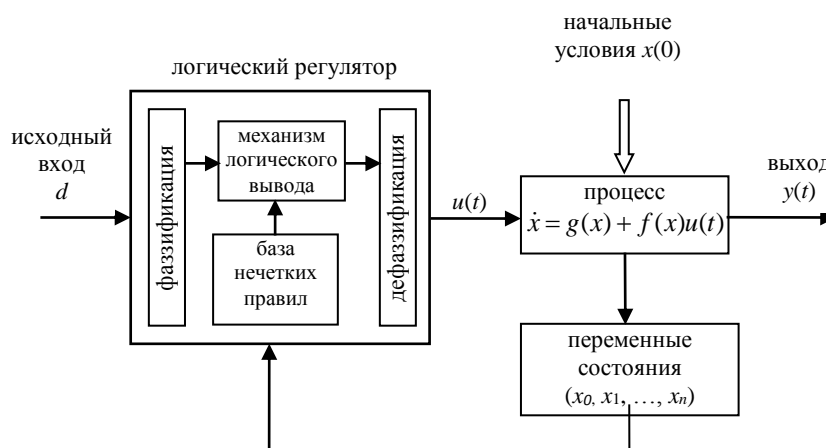


Рис. 1.9

Одним из способов построения логического регулятора является применение аппарата нечеткой логики [25, 74, 91, 136, 139, 196, 199, 240]. Логические регуляторы, рассматриваемые в настоящей работе, представлены следующими компонентами: база правил, фаззификация, процедура выработки решения, дефаззификация [139]. Процедуру перевода текущих (числовых) значений входных переменных логического регулятора в лингвистические величины называют *фаззификацией*. Получаемое экспертное знание об объекте выражается как совокупность лингвистических правил вида

*если* ( $x = A$ ) – исходная ситуация, *то* ( $y = B$ ) – ответная реакция,

где  $y$  – управляемый сигнал,  $x$  – набор сигналов, воспринимаемых экспертом, буквы  $A$  и  $B$  – лингвистические оценки, например «медленный», «быстрый».

Часть *если* (предпосылки или условия) означает сопряжение логических операций, а часть *то* (решение, вывод, заключение) представляет собой указание лингвистической величины для выходного воздействия логического регулятора. Процесс построения правила носит название *логического вывода* и подразделяется на два этапа: обобщение и заключение. После вычисления всех правил получается значение выходной переменной в виде степеней принадлежности ее термов. Переход от степеней принадлежности к значению выходной физической величины называется *дефаззификацией*, в результате которой логический вывод преобразуется в четкое число.

Отметим ряд конструктивных достоинств моделей динамических систем с логическими регуляторами [2, 116а, 231]:

1) естественность требований в том смысле, что описание условий и метода решения задачи осуществляется на языке, близком к естественному;

2) универсальность требований в том смысле, что нелинейные управляемые системы с учетом ряда ограничений может быть аппроксимирована ТС-моделью.

Вместе с тем для указанных моделей характерны и определенные недостатки, связанные с тем, что исходный набор постулируемых правил может оказаться неполным, а также с тем, что тип и параметры функций принадлежности, описывающих входные и выходные переменные модели, выбираются субъективно.

Как известно [156, 167, 231], используются два подхода к построению моделей динамических систем с логическими регуляторами:

1) подход, базирующийся на идентификации параметров с использованием входных-выходных данных (моделирование с помощью

лингвистических правил, основанных на знаниях экспертов, частный случай когнитивного подхода);

2) подход на основе известных дифференциальных моделей, описывающих нелинейные процессы, и их аппроксимации.

Указанные подходы рассматривались в [57, 131, 139, 165] и в других работах.

Первый подход, базирующийся на идентификации параметров и использующий когнитивную технологию, применяется для моделирования управляемых систем, которые невозможно или очень затруднительно представить аналитическими и/или физическими моделями. Знания об исследуемом объекте, полученные от экспертов, записываются в форме лингвистических высказываний вида *если ... то*.

Второй подход заключается в построении модели управляемой системы на основе известной дифференциальной модели. В последнее десятилетие для моделирования нелинейных управляемых систем используют ТС-модель. В ряде работ [44а, 155, 188, 190, 213, 225, 230, 231, 235–237] ТС-модель используется для аппроксимации гладкой нелинейной модели при ряде соответствующих ограничений. Одним из основных методов исследования устойчивости и стабилизации ТС-модели является метод функций Ляпунова, сводящийся к анализу свойств ЛНМ, к которым применимы методы численного решения.

Для описания ТС-модели используются правила  $\Pi_i$  следующего вида [230]:

$\Pi_i$ : *если*  $x_1$  *есть*  $M_{i1}$  *и ... и*  $x_n$  *есть*  $M_{in}$ , *то*  $\varphi(x) = a_i x$ ,

где  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор состояния,  $M_{ij}$  – значения термов,  $r$  – число правил,  $a_i \in R^{l \times n}$ ,  $i=1, 2, \dots, r$ .

Каждому правилу  $\Pi_i$  соответствует функция  $h_i(x)$  вида  $h_i(x) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j)$ . Предполагается, что  $h_i$  нормированы:  $\sum_{i=1}^r h_i(x) = 1$ .

В разделе 3.2 будет дано пошаговое описание процедуры аппроксимации нелинейных моделей ТС-моделями.

Важным требованием, предъявляемым к проектированию технических систем, является построение математических моделей с учетом устойчивости (в том или ином смысле) по отношению к внешним и структурным воздействиям. Разработка алгоритмов исследования устойчивости предоставляет возможность проведения анализа влияния различных проектных параметров на качество функционирования сложного технического объекта.

Наиболее эффективным и универсальным методом исследования устойчивости и других качественных свойств моделей динамических систем является классический и обобщенный методы функций Ляпунова

[44, 46, 51, 64а,з, 68а,б, 70, 72, 101, 105, 114б, 127а-в, 149, 153, 178, 234]. Метод функций Ляпунова получил развитие в многочисленных работах [39, 50, 65б, 76б, 112а,б, 115, 178]. В настоящее время метод функций Ляпунова стал одним из важнейших методов качественного исследования моделей управляемых динамических систем [61, 68а,б, 114а, 116а, 178]. В [178] с помощью обобщенных функций Ляпунова получены необходимые и достаточные условия устойчивости моделей динамических управляемых систем. В [64г, 116а, 205] развиты методы анализа устойчивости и управляемости динамических систем, задаваемых дифференциальными уравнениями различных типов. В [64а] дан обзор известных результатов по применению разрывных функций Ляпунова к изучению устойчивости управляемых систем.

Преимущество метода функций Ляпунова при моделировании управляемых динамических систем заключается в том, что указанный метод позволяет преобразовать условия устойчивости в задачу, решаемую с использованием ЛМН, которые могут быть численно реализованы с помощью пакетов прикладных программ [129]. Как известно [112а, 178], недостатком метода функций Ляпунова является отсутствие общего приема в построении функции Ляпунова.

Перспективным направлением в изучении устойчивости моделей динамических систем с логическими регуляторами является применение метода функций Ляпунова в сочетании с другими методами [64д, 122, 123, 188, 192, 224, 235, 236]. В работах [65г, 70, 141, 224, 228, 231] для моделей управляемых систем, базирующихся на правилах логического вывода и логическом регуляторе, разработан ряд методов и алгоритмов анализа устойчивости с помощью функций Ляпунова и техники ЛМН. Модификации метода функций Ляпунова также эффективно используются для анализа устойчивости моделей управляемых систем с переключением (гибридных систем), относящихся к классу непрерывно-дискретных систем [61, 184, 236]. Классификация подходов к анализу устойчивости моделей управляемых систем и синтезу логического регулятора на основе модификаций метода функций Ляпунова дана [70].

Для исследования качественных свойств моделей динамических систем с логическими регуляторами применяют индексно-дивергентный метод, которые позволяют судить о свойствах состояний равновесия, периодических движений и предельных циклов на основе анализа свойств целочисленного индекса Пуанкаре и дивергенции поля скоростей. Указанные методы получили развитие в работах отечественных ученых [58в, 68б, 180]. В работе [58в] разработан комбинированный метод на основе сочетания индексно-дивергентного метода с методом функций Ляпунова, что позволило изучить качественные свойства систем с

логическими регуляторами. Эффективность указанных методов определяется ослаблением требований к функциям Ляпунова и расширением класса изучаемых математических моделей.

Вопросы устойчивости моделей динамических систем с логическими регуляторами на основе развития метода функций Ляпунова рассматривались в работах И. Абдельмалека, Н. Голеа и М. Хаджили [188], Б. Коско [213], Т. Такаги и М. Суджено [228], К. Танака и О.Х. Ванга [231], К. Танака, Т. Хори и Н.О. Ванга [229], В.И. Афанасьевой [16], В.А. Горюшкина [44а,б], Ю.Н. Меренкова [127а-в], А.А. Шестакова [178] и других исследователей. В [64о] рассмотрены методы анализа устойчивости динамических систем интеллектуального управления.

В [44а, 116а, 188, 197, 230, 231] исследована устойчивость моделей управляемых динамических систем с помощью функций Ляпунова с учетом приведения изучаемых моделей к виду ТС-моделей. В [70] изложен обзор основных методов анализа устойчивости и стабилизации нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе использования непрерывных ТС-моделей и охарактеризованы возможные направления развития известных результатов. В работах [64м, 118, 223] синтез и стабилизация управляемых систем изучены с помощью полиномиальных ТС-моделей. В [162] разработана схема построения управляемой нечеткой ТС-модели, аппроксимирующей динамику семейства систем лоренцева типа. В [64п, 119] исследование устойчивости некоторых классов моделей проведено с использованием принципа редукции. В [65е] предложен подход к синтезу управления системы с переключением, базирующийся на использовании логического регулятора и представлении исходной системы ТС-моделью, получены условия устойчивости в виде модифицированных ЛМН. Обширная библиография англоязычных работ по устойчивости и стабилизации дискретных ТС-моделей, относящаяся к последним трем десятилетиям XX века, представлена в [202], а ссылки на работы российских авторов по исследованию динамических моделей с логическими регуляторами можно найти в [34, 47, 59, 96, 116а, 127в, 167, 206]. Общей идеей большинства исследований по устойчивости и стабилизации ТС-модели является использование метода функций Ляпунова и сведение решения вопроса об устойчивости к ЛМН.

Построение ЛМН, необходимых для анализа ТС-моделей проводится на основе достаточных условий устойчивости (асимптотической устойчивости). Вид ЛМН зависит как от структуры применяемой функции Ляпунова, так и от ограничений, накладываемых на эту функцию. Основной трудностью при применении метода функций Ляпунова к конкретным задачам устойчивости является построение



функции Ляпунова, удовлетворяющей тем или иным условиям. В этой ситуации имеют большое значение возможности ослабления требований к функциям Ляпунова.

Несмотря на большой интерес исследователей к данной области, развитие систематических методов анализа устойчивости динамических моделей с логическими регуляторами остается требующим дальнейшего изучения направлением в моделировании управляемых динамических систем.

## Глава 2.

# КОГНИТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 2.1. Уровни моделирования динамических систем и их взаимосвязь

При наблюдении за управляемым объектом-оригиналом или процессом исследователь формирует некий мысленный образ объекта, его идеальную модель, которую в научной литературе принято называть *когнитивной* (мысленной, способствующей познанию) [19]. В ходе формирования такой модели исследователь, как правило, стремится ответить на конкретные вопросы, поэтому от бесконечно сложного устройства объекта отсекается все ненужное с целью получения достаточно компактного описания.

Представление когнитивной модели на естественном языке называется *содержательной моделью*. Когнитивные модели субъективны, так как формируются умозрительно на основе всех его предыдущих знаний и опыта исследователя. Представление о когнитивной модели можно получить только с помощью описания ее в знаковой форме. Нельзя утверждать, что когнитивные и содержательные модели эквивалентны, поскольку первые могут содержать элементы, которые исследователь не сможет или не хочет сформулировать. В то же время, если содержательная модель сформулирована кем-то другим или является продуктом коллективного творчества, то ее интерпретация, уровень понимания, степень доверия могут существенно изменяться в зависимости от того или иного интерпретатора. В естественнонаучных исследованиях и в технике содержательную модель часто называют технической постановкой проблемы.

С учетом целей и функциональных признаков содержательные модели подразделяются на описательные, объяснительные и прогностические [93]. *Описательной модели* соответствует возможное описание объекта. *Объяснительная модель* позволяет ответить на вопрос, почему происходят какие-либо процессы. Согласно своему названию, *прогностическая модель* должна описывать будущее поведение объекта. Можно заметить, что прогностическая модель не обязательно включает в себя объяснительную.

*Концептуальной моделью* принято называть содержательную модель, при формулировке которой используются понятия и представления предметных областей знания, связанных с изучением объекта моделирования.

В более широком смысле под *концептуальной моделью* понимают содержательную модель, базирующуюся на определенной концепции или точке зрения. Выделяют три вида концептуальных моделей: логико-семантические, структурно-функциональные и причинно-следственные.

*Логико-семантическая (логико-лингвистическая) модель* является описанием объекта в терминах и определениях соответствующих предметных областей знаний, включающим все известные логически непротиворечивые утверждения и факты. Анализ таких моделей осуществляется средствами логики с привлечением знаний, накопленных в соответствующих предметных областях.

При построении *структурно-функциональной модели* объект обычно рассматривается как целостная система, которую расчленяют на отдельные элементы или подсистемы. Части системы связываются структурными отношениями, описывающими подчиненность, логическую и временную последовательность решения отдельных задач. Для представления подобных моделей удобны различного рода схемы, карты и диаграммы.

*Причинно-следственная модель* часто используется для объяснения и прогнозирования поведения объекта. Данные модели ориентированы в основном на следующее: 1) выявление главных взаимосвязей между составными элементами изучаемого объекта; 2) определение того, как изменение одних факторов влияет на состояние компонентов модели; 3) понимание того, как в целом будет функционировать модель, и будет ли она адекватно описывать динамику интересующих исследователя параметров.

*Формальная модель* является представлением концептуальной модели с помощью одного или нескольких формальных языков (например, языков математических теорий, универсального языка моделирования (UML) или алгоритмических языков).

В гуманитарных науках процесс моделирования во многих случаях заканчивается созданием концептуальной модели объекта.

В естественнонаучных исследованиях, как правило, удается построить формальную модель. Таким образом, когнитивные, содержательные и формальные модели составляют три взаимосвязанных уровня моделирования. Перечисленные выше разновидности моделей нельзя рассматривать изолированно одну от другой. «Взаимоотношения» моделей между собой показаны на рис. 2.1.

Взаимовлияние уровней моделирования связано со свойством потенциальности моделей. Создание любой модели сопряжено с появлением новых знаний об исследуемом объекте, что ведет к переоценке и уточнению концепций и взглядов на объект моделирования. Данное обстоятельство приводит, в свою очередь, к пересмотру

соответствующих содержательных и когнитивных моделей, обеспечивая спиральное развитие всех уровней моделирования исследуемого объекта.



Рис. 2.1

Значение содержательных и формальных моделей для процесса познания более или менее осознается исследователями, в то время как роль когнитивных моделей часто недооценивается. Это связано с субъективностью таких моделей и скрытостью процесса мышления. Однако существуют объекты и процессы, для которых роль когнитивных моделей особенно велика. Например, оператор или лицо, принимающее решения, осуществляет управление объектом или процессом главным образом на основании собственных когнитивных моделей. Велика роль данного типа моделей и в социальных науках. В настоящее время изучением свойств и особенностей когнитивных моделей занимается *когнитология*.

В последнее время в России и за рубежом наметилась тенденция активного применения когнитивного подхода к исследованию и моделированию сложных управляемых систем, в частности, систем с неполной информацией. *Когнитивный подход* к моделированию – подход, направленный на разработку формальных моделей и методов исследования систем с неполной информацией, поддерживающих интеллектуальный процесс решения проблем с помощью учета в этих

моделях и методах когнитивных возможностей (восприятия, представления, познания, понимания, объяснения) субъекта управления при решении управленческих задач [1].

Сложные управляемые системы встречаются в случаях, когда объект управления (или процесс) достаточно сложен для получения его точного математического описания ввиду многообразия задействованных физических эффектов, нестационарности объекта, наличия неконтролируемых возмущающих воздействий [136]. Отметим, что отсутствие достаточных знаний о системе не является единственной неопределенностью, обусловленной субъективными причинами. Неполнота информации выражается также в неопределенности целей развития системы и критериев выбора управленческого решения. Как правило, неудовлетворенность текущим состоянием системы осознается субъектом управления, его представления о причинах и возможных способах изменения ситуации в системе размыты, нечетки и противоречивы. Формализация нечетких представлений – одна из основных задач, которую необходимо решить при разработке и исследовании моделей систем с неполной информацией [2, 31]. Отметим, что субъекту управления приходится манипулировать только качественной информацией в виде интуитивных понятий, предположений, мыслить и принимать решения в количественных характеристиках ему не свойственно. Структуры знания в мышлении субъекта управления, оказываются важнейшими элементами ситуации, неустранимыми из модели принятия решений. Таким образом, моделирование изучаемой системы и принятие управленческих решений, зависящих от полученной модели, следует рассматривать как сложный интеллектуальный процесс разрешения проблем, несводимый исключительно к рациональному выбору [107]. Для поддержки этого процесса требуются новые подходы к разработке формальных моделей, методов решения проблем и формирования целей развития систем с неполной информацией, особенно на ранних этапах подготовки управленческих решений.

Получение достоверной информации и ее быстрый анализ являются важнейшими предпосылками эффективного моделирования исследуемой системы. Впервые когнитивный подход для проведения анализа, моделирования систем с неполной информацией и принятия решения субъектом управления, был предложен американским исследователем Р. Аксельродом, термин когнитивное моделирование был введен психологом Э.Толменом в 1948 г. от лат. *cognitio* – знание, познание; структуризация, состоящая в формировании и уточнении гипотезы о функционировании объекта. Заметим, что когнитивный анализ изначально сформировался в рамках социальной психологии, а именно – когнитивизма, занимающегося изучением процессов восприятия и познания. Применение разработок

социальной психологии в теории управления привело к формированию особой отрасли знаний – когнитологии, концентрирующей на исследовании проблем управления и принятия решений. Сегодня когнитивный подход развивается в направлении совершенствования аппарата анализа и моделирования слабоструктурированных динамических систем. Теоретические достижения когнитивного подхода являются основой для создания компьютерных сред, ориентированных на решение прикладных задач в теории моделирования управляемых систем, в частности систем с неполной информацией [98, 111].

В рамках когнитивного подхода к моделированию систем основное внимание уделяется процессам представления, хранения, обработки, интерпретации и создания новых знаний. Целью когнитивного подхода является понимание того, каким образом расшифровывается информация о действительности и организуется для проведения сравнения, принятия решения и многих задач целенаправленного поведения. Важными вопросами когнитивного подхода являются: понимание естественного языка и использование этих знаний для компьютерного перевода; современные проблемы компьютеризации общества; развитие и использование теории искусственного интеллекта; реализация компьютерной парадигмы: символичные представления информации и их обработка с помощью алгоритмических логикокомбинаторных процедур.

Важной задачей в рамках когнитивного подхода является изучение и использование механизмов, которые применяет человек при решении простых для него задач (узнавание, принятие быстрых решений, воспроизведение и т.д.), посредством моделей мыслительных процессов и понятийной системы человека. В качестве механизмов решения задачи можно выделить следующие направления:

- 1) создание «упрощенных моделей»;
- 2) возможность применения анализа «упрощенных моделей» в интеллектуальных технологиях (С.Н. Васильев [34], В.К. Финн [171] и др.).

Под *когнитивным моделированием* понимают исследование функционирования и развития систем с неполной информацией посредством построения их модели на основе когнитивной модели [1]. В общем случае «когнитивная модель основана на формализации причинно-следственных связей, которые имеют место между факторами, характеризующими исследуемую систему» [83]. Результатом формализации является представление системы в виде причинно-следственной сети, называемой когнитивной картой (КК) и имеющей вид:

$$G = \langle E, W \rangle,$$

где  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  – множество факторов (называемых также концептами),  $W$  – бинарное отношение на множестве  $E$ , которое задает набор связей между его элементами. Элементы  $e_i$  и  $e_j$  считаются связанными отношением  $W$  (обозначается,  $(e_i, e_j) \in W$  или  $e_i W e_j$ ), если изменение значения концепта  $e_i$  (причины) приводит к изменению значения концепта  $e_j$  (следствия). В соответствии с терминологией когнитивного моделирования, в этом случае говорят, что концепт  $e_i$  оказывает влияние на концепт  $e_j$ . При этом если увеличение значения переменной состояния концепта-причины приводит к увеличению значения переменной состояния концепта-следствия, то влияние считается положительным («усиление»), если же значение уменьшается – отрицательным («торможение»). Тем самым, отношение  $W$  можно представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств множества положительных и множества отрицательных связей. Сами концепты при этом могут задавать как относительные (качественные) показатели, такие как популярность, социальная напряженность, так и абсолютные, измеримые величины – численность населения, стоимость и т.п. [99].

Когнитивная карта отражает субъективные представления (индивидуальные или коллективные) исследуемой проблемы, ситуации, связанной с функционированием и развитием систем с неполной информацией. Важными компонентами КК являются базисные факторы, между которыми и устанавливаются причинно-следственные связи. *Базисные факторы* – это факторы, определяющие и ограничивающие наблюдаемые явления, и процессы в системе и окружающей ее среде, и интерпретированные субъектом управления как существенные, ключевые параметры, признаки этих явлений и процессов. Изначально, при становлении когнитивного подхода имело место формальное представление КК в виде ориентированного графа (знакового графа), вершинам которого сопоставлены факторы, а ребрам – знаки (+ или –). В последнее время все чаще КК представляется в виде *взвешенного графа*, в котором вершинам сопоставляются факторы, а ребрам – веса в той или иной шкале. Ориентированный граф, у которого определены веса его дуг, называется функциональным.

В зависимости от значений, которые может принимать ребро ориентированного графа, КК подразделяют на традиционные (простые) и на нечеткие когнитивные карты (НКК). НКК или иначе нечеткая когнитивная модель (Fuzzy Cognitive Maps – FCM) является результатом объединения двух научных направлений – нечеткой логики (“fuzzy logic”), созданной в 60-х годах профессором Лотфи Заде [74, 240], и системной динамики (“system dynamics”) [204]. Понятие FCM для моделирования причинных взаимосвязей, выявленных между концептами некоторой

области, было введено в 1986 г. Б. Коско [213]. Анализ когнитивной модели позволяет быстро получить информацию о поведении системы без наличия ее математической модели, а в некоторых случаях провести численные эксперименты. В отличие от простых когнитивных карт, FCM представляют собой нечеткий ориентированный граф с обратной связью, узлы которого являются нечеткими множествами. Направленные ребра графа не только отражают причинно-следственные связи между концептами, но и определяют степень влияния (вес) связываемых концептов. Простые FCM, или традиционные когнитивные карты, содержат связи, которые могут принимать одно из трех значений из множества  $\{-1, 0, 1\}$ .

Отечественными исследователями предложен новый тип когнитивных карт – *обобщенные нечеткие когнитивные карты* (ОНКК) [169]. Они представляют собой нечеткую причинно-следственную сеть вида  $G = (E, W)$ , где  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  – множество концептов,  $\{w(e_i, e_j)\}$  – множество связей между ними. Каждый концепт  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, P$  характеризуется терм-множеством лингвистической переменной  $T_i = \{T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{m_j}^i\}$ , где  $m_j$  – число типовых состояний концепта. Для описания каждого термина  $T_{ik}$  строится терм-множество с функцией принадлежности  $\mu_{T_{ik}}(x)$ . Связи между типовыми состояниями каждой пары концептов в ОНКК задаются нечеткими переменными, описываемыми соответствующими нечеткими множествами.

Разновидность ОНКК определяется выбранной формой функций принадлежности (треугольная, трапециидальная, гауссова и др.), способом нечеткого логического вывода (по Мамдами, Цукамото, Ларсену), процедуры дефазификации и некоторыми другими параметрами и свойствами. Отметим, что в [131] проведено исследование и дан сравнительный анализ различных типов нечетких логических выводов (алгоритмов), аппроксимирующих заданную систему.

## **2.2. Проектирование и исследование когнитивных моделей на основе искусственного интеллекта**

Актуальность создания и использования искусственного интеллекта связана со сложностью проблем, которые приходится решать в настоящее время. К таким проблемам можно отнести освоение космоса, прогнозирование природных катаклизмов и антропогенного воздействия на окружающую среду, создание сложнейших инженерных проектов, использование современной техники в кораблестроении, ракетостроении, робототехнике [63а,б, 158-161].



На современном этапе развития общества важными являются проблемы эффективного информационного обеспечения процессов управления и принятия решений в различных сферах человеческой деятельности (технической, экономической, социальной, экологической, образовательной и других). Используемые информационные технологии во многом определяют степень информатизации общества, а также уровень интеллектуальности базирующихся на них информационных систем.

В настоящее время создаются усовершенствованные программы, максимально напоминающие по своему действию мыслительные процессы человека. Они значительно упростили работу человека и играют большую роль в современной науке и технике.

Термин *интеллект* (intelligence) происходит от латинского *intellectus*, что означает ум, рассудок, разум; мыслительные способности человека. Искусственный интеллект (ИИ) – это раздел информатики, занимающийся вопросами имитации мышления человека с помощью компьютера.

Самыми первыми интеллектуальными задачами, которые стали решаться при помощи ЭВМ, были логические игры (шашки, шахматы), доказательство теорем, а также кибернетические игрушки типа «электронной мыши» Клода Шеннона, которая управлялась сложной релейной схемой.

В [158б] представлены подходы к разработке ИИ. В рамках первого подхода объектом исследований являются структура и механизмы работы мозга человека, а конечная цель заключается в раскрытии тайн мышления. Необходимыми этапами исследований в этом направлении являются построение моделей на основе психофизиологических данных, проведение экспериментов с ними, выдвижение новых гипотез относительно механизмов интеллектуальной деятельности, совершенствование моделей и т. д.

Второй подход в качестве объекта исследования рассматривает искусственный интеллект, т.е. изучается моделирование интеллектуальной деятельности с помощью вычислительных машин. Целью работ в этом направлении является создание алгоритмического и программного обеспечения вычислительных машин, позволяющего решать интеллектуальные задачи не хуже человека.

Третий подход ориентирован на создание смешанных человеко-машинных интеллектуальных систем и на симбиоз возможностей естественного и искусственного интеллекта. Важнейшими проблемами в этих исследованиях является оптимальное распределение функций между естественным и искусственным интеллектом и организация диалога между человеком и машиной.

Интеллектуальные пакеты прикладных программ позволяют аналогично экспертным системам предварительно создавать базу знаний, включающую совокупность знаний из той или иной области деятельности человека, а затем решать практические задачи с привлечением этих знаний. Интеллектуальные пакеты прикладных программ в отличие от экспертных систем позволяют интегрировать знания из слабо формализуемых предметных областей, в которых сложно определить входные и выходные параметры задачи, а также невозможно сформировать четкий алгоритм ее решения. Кроме того, экспертные системы не формируют алгоритм решения задачи как в случае с интеллектуальными пакетами прикладных программ, а дают рекомендации пользователю на основании его запроса [158а].

Интеллектуальные пакеты прикладных программ применяются также при распознавании образов, адаптивном программировании, обработке данных на естественном языке, в обучающихся сетях (нейросетях) [158б].

Искусственный интеллект тесно связан с теоретической информатикой, откуда заимствованы многие модели и методы ИИ, например, использование логических средств для преобразования знаний. Кроме того, ИИ тесно связан с кибернетикой. Математическая и прикладная лингвистика, нейрокибернетика и гомеостатика теснейшим образом связаны с развитием искусственного интеллекта. Работы в этой области связаны с развитием систем программирования. Основная цель работ в области ИИ состоит в стремлении исследователя проникнуть в тайны творческой деятельности людей и в раскрытии их способностей к овладению знаниями, навыками и умениями. Для этого необходимо раскрыть такие глубинные механизмы, с помощью которых человек способен научиться практически любому виду деятельности.

В [233] приведены инструменты ИИ (AI Tools), которые целесообразно применять при проведении когнитивного моделирования. К ним относятся: нейронные сети, эволюционные алгоритмы, продуцирование знаний, объектно-ориентированные языки программирования, логические модели ИИ, объектно-логические модели, многоагентные архитектуры. В табл. 2.1 представлены характеристики вышеперечисленных инструментов с указанием типичных преимуществ и недостатков, которые необходимо учитывать при разработке интеллектуальных пакетов прикладных программ.

Важно отметить [158а], что разработка интеллектуальных пакетов прикладных программ привела к возникновению нового междисциплинарного направления в искусственном интеллекте – компьютерного когнитивного моделирования, которое направлено на создание самообучающихся программ (программ приобретающих знания).

Указанный вид программ используется в задачах моделирования робототехнических систем.

**Табл. 2.1. Инструменты искусственного интеллекта (AI Tools)**

	AI Tools	Типичные преимущества	Типичные недостатки
I	Нейронные сети	1. Применимость в многофакторных проблемах с недостаточной формализуемостью структур 2. Высокий уровень параллелизма и скорости 3. Возможность обучения	1. Требуется информация для обучения: репрезентативный набор примеров «вход–выход» («скорее глаз, чем мозг») 2. Медленное обучение
II	Эволюционные алгоритмы	1. Высокий уровень параллелизма и скорости	1. Прикладная эффективность заранее неизвестна 2. В большей степени самоорганизация элементов, чем конструктивный процесс
III	Продуцирование знаний	1. Способность к представлению описательно-конструктивных знаний и к пересмотру 2. Естественность правил <i>если ..., то ...</i>	1. Трудности в реализации больших баз знаний, недостаточная структуризация 2. Трудности проверки корректности
IV	Объектно-ориентированные (семантические цепи, фреймы и т.д.)	1. Хорошая структуризация 2. Высокая скорость	1. Сложность программирования (отказ от идеалов AI) 2. Недостаточная мощность представления
V	Логические модели ИИ	1. Высокая мощность представления 2. Корректность 3. Высокая сложность автономных задач	1. Недостаточная скорость, традиционные приложения age автономные 2. Традиционно плохая совместимость с эвристикой 3. Неразрешимость «богатой» логики (rich logic) 4. Недостаточность «единичной» логики (single logic)
VI	Объектно-логические модели ИИ	1. Сочетание преимуществ объектно-ориентированных и логических моделей	1. Недостатки логических моделей 2. Сложность программирования
VII	Многоагентные архитектуры	1. Допускают самоорганизацию и пересмотр	1. Корректность и эффективность действия (процесса) требуют разработки подходящей теории

Приведем краткий обзор результатов исследования по применению когнитивного моделирования и искусственного интеллекта к исследованию динамических систем в различных областях науки и техники.

В [148] рассмотрено когнитивное моделирование на примере модели социума. Когнитивная структуризация начинается с определения объектов (характеризуемых как количественно, так и качественно, вербально) изучаемой с определенной целью системы и установление связей между ними. Эти действия осуществляются с помощью экспертов путем сбора и обработки статистической информации, на основании изучения литературных данных. Они базируются на теоретических знаниях в соответствующей предметной области.

В результате когнитивной структуризации происходит разработка формального описания знаний, которое можно наглядно изобразить когнитивной моделью (в виде схемы, графа, матрицы, таблицы или текста). Разработка когнитивной модели – наиболее творческий и слабоформализуемый этап в деятельности исследователя (группы экспертов) большой системы. Частично формализация возможна при обработке численных данных в виде статистической информации путем использования средств интеллектуального анализа данных.

Источниками информации для определения «качественных» вершин могут служить теоретические сведения в изучаемой предметной области и согласованные решения группы экспертов. В последнем случае разрабатывается «коллективная когнитивная карта».

Следует обратить внимание на необходимость «правильного» названия вершины КК, так как неудачно подобранные названия (концепты) искажают результаты исследования и могут давать ответы не на те вопросы, на которые желательно было бы получить ответы.

Итогом процесса идентификации сложной системы на первом этапе исследования является КК, которая может рассматриваться как «начальная» или «стартовая». Стартовая КМ может остаться неизменной, а может быть изменена в результате деятельности эксперта, осуществляющего когнитивное моделирование с учетом того или иного этапа когнитивного моделирования. На рис. 2.2 представлены этапы когнитивного моделирования.

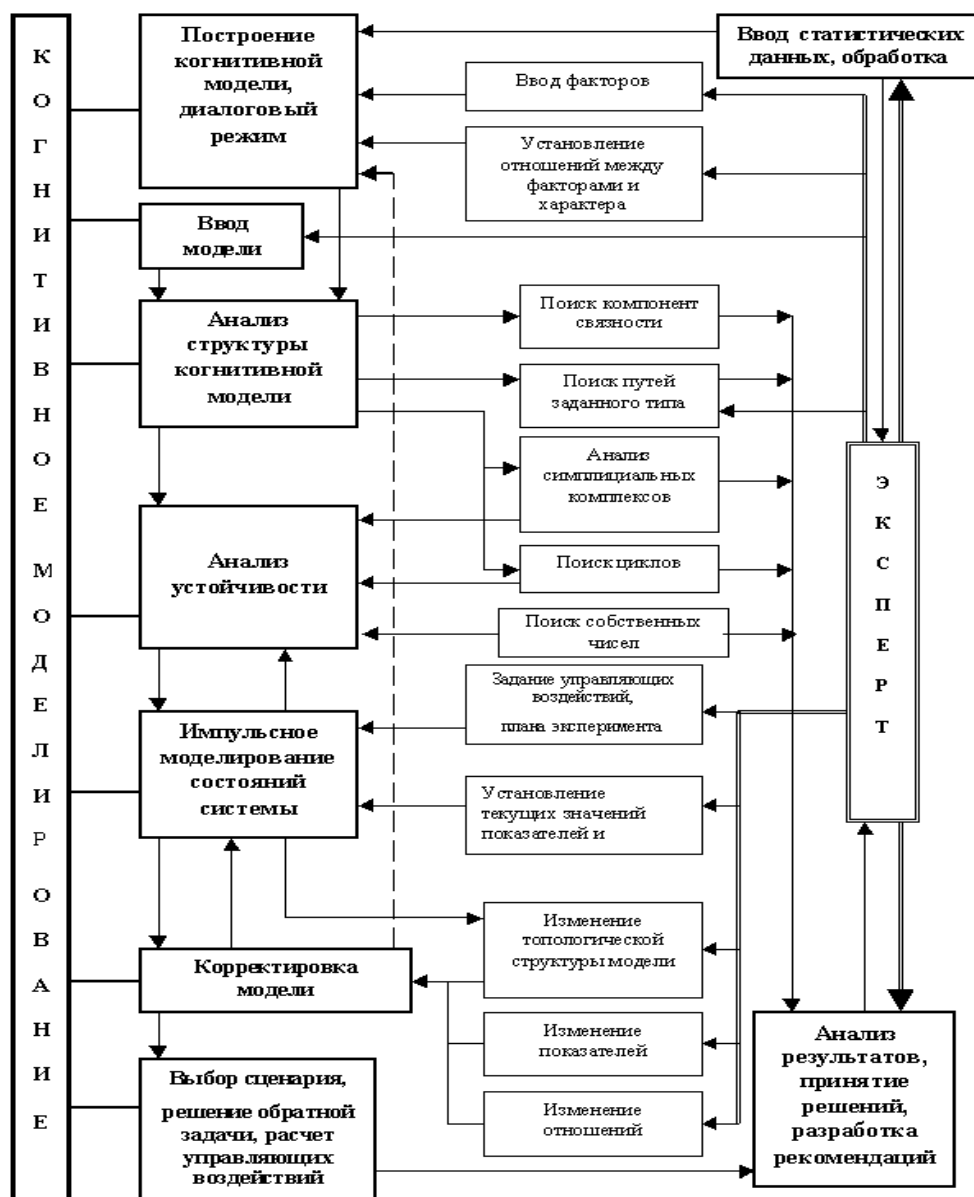


Рис. 2.2

В [37] рассмотрен вариант когнитивной реализации экспертной системы, предназначенной для параметрического синтеза законов управления подвижными объектами на базе оптимизационного подхода. Центральное внимание уделяется вопросам распределения функций между вычислительной частью системы и экспертом, а также двум вариантам алгоритма обработки информации, получаемой от эксперта в соответствии с его системой предпочтений.

Динамика подвижных объектов достаточно часто представляется нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений [37]:

$$x = F_{in}(t, V, \omega) + F_{nd}(t, V, \omega, x_p, \delta) + f_w(t),$$

где векторы

$$x = \{V, \omega, x_p\} \in E^{12}, V = \{V_x, V_y, V_z\} \in E^3, \omega = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\} \in E^3,$$

представленные своими проекциями в связанной системе координат, соответственно определяют состояние, линейные и угловые скорости объекта, а вектор  $x_p \in E^6$  – его перемещения и углы поворота. Вектор  $\delta \in E^m$  представляет управляющие воздействия на объект, движение которого происходит под влиянием сил и моментов  $F_{in}, F_{nd}$ , имеющих инерционную природу и определяемых взаимодействием корпуса с внешней средой соответственно, а также особо выделенных внешних возмущающих воздействий  $f_\omega(t)$ .

В [37] рассмотрена математическая модель движения судна в горизонтальной плоскости, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = F(t, x, \delta),$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  – вектор состояния,  $x_1$  – линейная скорость бокового движения,  $x_2$  – угловая скорость движения по курсу,  $x_3$  – угол курса,  $x_4$  – боковое смещение судна. Вектор  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)^T$  определяет управляющие воздействия. Система задана на отрезке  $t \in [t_1, t_2]$ , где  $t_1$  и  $t_2$  – моменты начала и окончания маневра соответственно.

В [37] также рассмотрены вопросы практического применения оптимизационного подхода к формированию компьютерной поддержки научно-исследовательских и проектно-конструкторских работ, связанных с системами управления подвижными объектами. Так как современные системы управления представляют собой многоцелевые аппаратно-программные комплексы, то к динамическому качеству этих систем предъявляются разнообразные требования, определяемые условиями устойчивости и безопасности эксплуатации.

Одним из наиболее эффективных путей удовлетворения указанных требований служит применение оптимизационного подхода на всех этапах моделирования, исследования и практической реализации систем управления движением. В ситуации, когда формализация требований к динамическому качеству затруднена, возникает потребность в использовании мнений эксперта с оценкой качества на базе его системы предпочтений. В [37] даны предложения по построению соответствующих экспертных систем, базирующихся на специально организованном взаимодействии входящих в них вычислительных средств с экспертом в ходе диалога. Целью такого взаимодействия служит эффективное решение неявно поставленной оптимизационной задачи, служащей обеспечению желаемых свойств формируемого решения. В основе схем, реализуемых предлагаемыми системами, лежат идеи когнитивных технологий,

определяющих эффективное сочетание особенностей человеческого познания и возможностей вычислительных средств.

В [90а] предложена система инвариантов и принципов построения сложных знаний, относящихся к решению различных профессиональных задач моделируемой предметной области. Интеграция знаний реализована на основе иерархических структур формализма абстрактного пространства знаний в соответствии с представлениями о структурах знаний, обеспечивающих реализацию когнитивных целей. Для описания процессов конструирования сложных знаний предложены правила синтеза.

*Когнитивную структуру области знаний* можно рассматривать как компонент связного семантического представления формализованной модели, согласованной с содержанием этой области. Он используется для реализации процессов решения профессиональных задач. Частями такой структуры являются сложные знания, синтезируемые по определенным правилам из элементарных и простых знаний, извлекаемых из разнообразных источников знаний в рассматриваемой области. Последние составляют базу знаний, составляемых из эмпирических и формализованных данных с помощью операций, моделирующих процесс анализа содержания отдельных областей. Постановки задач также задаются с помощью иерархических семантических структур, включающих неопределенные элементы, значение которых требуется найти. Для составления сложных знаний применяется формат конфигураций формализма абстрактного пространства знаний, представляемых нагруженными бинарными деревьями. Конструирование сложных знаний осуществляется с использованием правил синтеза, формализующих схемы последовательного составления из простых и элементарных знаний. Система жизненных циклов интеллектуальных систем, связанных с синтезом когнитивных структур, включает процессы, моделирующие анализ содержания области знания, представляемого системой простых соотношений, постановку когнитивных целей, конструирование когнитивных структур, а также применение таких структур, обеспечивающее достижение целей.

Применение методов и алгоритмов ИИ расширяет возможности систем планирования в контексте формализации экспертных правил, позволяющих учитывать специфику технологических и производственных процессов. Искусственный интеллект позволил существенно улучшить систему оперативного планирования, тем самым сократив время получения оптимальных или приемлемых производственных расписаний. При появлении случайных событий, влияющих на процесс производства, позволил быстро реагировать на изменение и внесение корректив в исходные данные. Возможно также комбинирование методов и

алгоритмов искусственного планирования при реализации функций планирования в системах управления производством.

В [90а] рассмотрены вопросы создания формальных основ, связанных с построением и использованием интеллектуальных систем. Охарактеризованы унифицированные инструменты, интегрирующие опыт реализации порождающих принципов, основанных на знаниях прикладных систем с использованием абстрактных инвариантов и конструкторов современной математики. Конструирование сложных знаний представлено как часть процессов в интеллектуальных системах, моделируемых специальными типами теоретико-множественных, топологических, структурирующих и адаптирующих отображений. Рассмотренная в [90а] классификация основана на слабо формализованных инвариантах когнитивной цели и фундаментальных конструкторах формализма абстрактного пространства знаний, моделях процессов мышления в когнитивных задачах искусственного интеллекта. Синтез сложных знаний реализуется построением связных семантических представлений, являющихся решениями профессиональных задач. Основу процесса синтеза составляют операции формирования и преобразования серий однородных фрагментов знаний.

Понятие когнитивной цели в [90б] связано с формализацией объектов, рассматриваемых как представления отдельных задач в произвольных областях профессиональной деятельности. *Когнитивными целями* называются сущности, представляемые унифицированными описаниями структурных и семантических свойств представлений сложных знаний в таких областях. Их составляют конкретные и неопределённые структурные объекты, обозначаемые именами сущностей модели области знаний и символами неизвестных. Комбинациями сущностей конкретизируются исходные данные когнитивных целей, а неизвестные обозначают структуры, составляющие реализации целей, получаемые с помощью специальных процедур обработки содержимого моделей областей знаний. Процессы построения фрагментов сложных знаний для когнитивных целей и сами такие фрагменты называются реализациями целей. Содержательная классификация когнитивных целей связана с идентификацией практически значимых типов таких целей. Построение универсальной классификации целей связано с моделированием процессов мышления.

Конструирование сложных знаний является частью процессов в интеллектуальных системах, моделируемых специальными типами теоретико-множественных, топологических, структурирующих и адаптирующих отображений. В [90б] рассмотрена классификация формализованных операций, моделирующих различные операции над знаниями. Такая классификация основана на слабо формализованных



инвариантах когнитивной цели и фундаментальных конструктах формализма абстрактного пространства знаний, моделях процессов мышления в когнитивных задачах искусственного интеллекта. Синтез сложных знаний реализуется построением связанных семантических представлений, являющихся решениями профессиональных задач. Основу процесса синтеза составляют операции формирования и преобразования серий однородных фрагментов знаний. Классификация когнитивных целей позволяет определить классы морфизмов формализмов представления знаний, композициями которых моделируются операции достижения целей. Пример системы классов когнитивных целей и реализующих такие цели когнитивных морфизмов приведен [90б] на рис. 2.3.

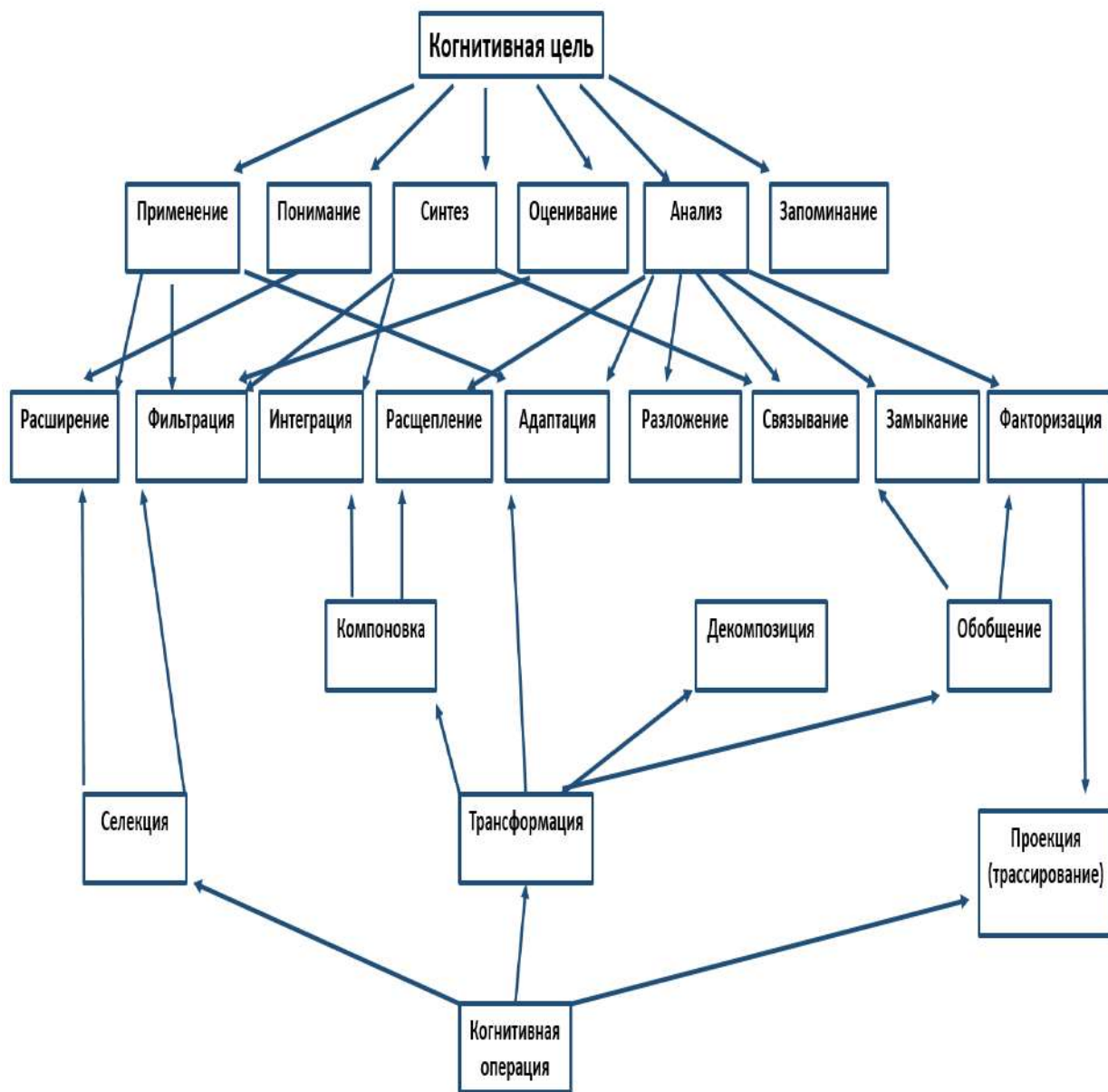


Рис. 2.3

Приведенная на рис. 2.3 система является развитием системы классов операций для общего случая формализма абстрактного пространства знаний [90б]. Система классов операций дополнена связями классов операций и целей. Эту структуру образуют верхняя иерархия когнитивных целей, основанная на отношении агрегирования целей, а также нижняя иерархия классов операций, основанная на отношении вложения классов. Висячие элементы верхней иерархии соответствуют классам элементарных когнитивных целей, из которых конструируются сложные цели. Висячие элементы нижней иерархии соответствуют классам элементарных операций, комбинациями элементов которых реализуются элементарные цели. Связи классов, принадлежащих разным иерархиям, уточняют семейства классов операций, комбинации которых определяют процессы реализации отдельных когнитивных целей.

Практическое применение рассмотренных иерархий операций и целей связано с созданием системы конструирования фрагментов знаний в формате конфигураций абстрактных пространств знаний, являющихся реализациями когнитивных целей разных типов. Такая система основана на развиваемых системах классов слабо формализованных целей и многообразий точных операций разных типов, реализующих существенные этапы процессов синтеза представлений знаний, составляющих реализации когнитивных целей. Она позволяет моделировать процессы решения профессиональных задач с помощью управляемого процесса конструирования подходящих комбинаций морфизмов. При этом возможны несколько вариантов взаимодействия операций: последовательное (композиция), независимое (параллельное), конвейерное, когда обе операции исполняются одновременно, так что начальным данным одной операции является постепенно формируемое значение результата выполнения другой операции.

В [138] приведено описание системы управления производством (MES-системы), рассмотрены основные функции и определено, что организация любого производства начинается с его планирования (оперативного, календарного). В основе функций планирования производства лежат различного рода методы и алгоритмы искусственного интеллекта. Рассмотрены наиболее распространенные методы и алгоритмы ИИ для осуществления планирования производства: метод табуированного поиска, алгоритм муравьиных колоний, эволюционные алгоритмы, нейронные сети.

Приведенные результаты позволяют заключить, что направление, связанное с построением и исследованием когнитивных моделей в рамках разработки ИИ, находит широкое применение в робототехнике, кораблестроении, промышленном производстве и других областях.

Подробное описание программной реализации когнитивного подхода к моделированию управляемой системы будет дано в разделе 5.4 главы 5.

### **2.3. Области применения искусственного интеллекта и когнитивных технологий в задачах моделирования динамических систем**

В разделе рассматриваются основные направления теории интеллектуального управления и когнитивных технологий, а также некоторые математические методы исследования и анализ устойчивости динамических систем интеллектуального управления (ДСИУ), приведены некоторые прикладные задачи, связанные с когнитивными моделями, обозначены перспективы применения когнитивных технологий.

Теория ИИ и когнитивные технологии в настоящее время связаны с такими ключевыми направлениями, как:

- 1) интеллектуальное управление (Intellectual control);
- 2) интеллектуальное управление (Intelligent control);
- 3) когнитивное моделирование;
- 4) управление сетью (Network control);
- 5) основанное на моделях прогнозирующее управление (Model-based predictive control);
- 6) модели, основанные на знаниях (Knowledge-based models);
- 7) сбор и анализ данных (Data mining);
- 8) когнитивные вычисления;
- 9) многоагентные архитектуры;
- 10) технологии когнитивного правительства.

Теория управления и ее методы демонстрируют четкие тенденции к дальнейшей конвергенции (сближению) с технологиями искусственного интеллекта (AI techniques) [137, 171, 232]. Следует также отметить, что в настоящее время в РФ реализуются этапы государственной стратегии развития цифровой экономики. К ключевым позициям отнесены фундаментальная наука, исследовательская инфраструктура, IT-индустрия, отечественные передовые разработки, цифровые технологии [75]. Искусственный интеллект, технологии управления интеллектуальными устройствами, суперкомпьютерные и аддитивные технологии многими исследователями выделяются в качестве основных с учетом уровня развития сквозных цифровых технологий. Создание технологий сопровождается построением и анализом адекватных математических моделей, которые обеспечивают теоретические исследования изучаемого объекта. Инновационные отечественные разработки программно-аппаратных средств с применением методов ИИ и когнитивных технологий обеспечивают среду для моделирования.

Алгоритмы управления, идентификации и моделирования должны опираться на знания, созданные и обновляемые на основе процесса анализа данных в форме выявленных закономерностей [36]. Алгоритмизация перехода от наблюдения к прогнозированию должна осуществляться в направлениях, указанных на рис. 2.4.



Рис. 2.4

Когнитивные технологии актуальны для развития систем целенаправленного поведения, учитывающих особенности управления объектом в быстроменяющейся внешней среде. Примером таких систем являются:

- интеллектуальные обучающие системы;
- интеллектуальные модули организационно-технических систем;
- веб-системы третьего и четвертого поколений;
- автономные объекты различного назначения.

Особенность когнитивных моделей состоит в возможности решать задачи на основе интеллектуальных технологий. Привлечение ИИ на базе когнитивных технологий позволяет организовать эффективную работу с огромными массивами неструктурированной информации (см. рис.2.5).

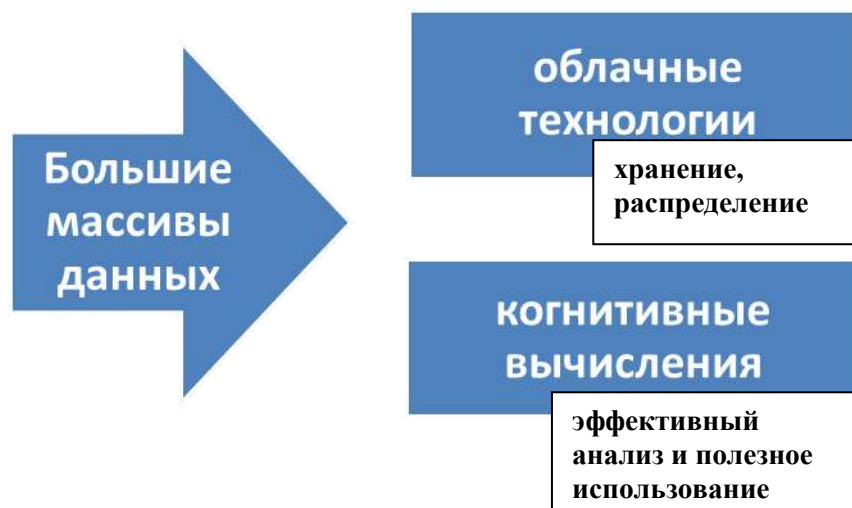


Рис. 2.5

Когнитивные вычисления лишь частично повторяют особенности работы человеческого мозга – главным образом в области обработки и структуризации поступающей информации. Помимо этого когнитивные технологии используют принципы глубокого машинного обучения, сопоставления различных данных и правил, применения собственного и стороннего опыта, разработки новых правил и алгоритмов работы с данными непосредственно в процессе проведения вычислений.

Компонентами когнитивной ИТ-инфраструктуры являются модули ИИ; системы хранения; программное обеспечение; API (интерфейс прикладного программирования); сервисы; гибридные облачные платформы с когнитивными рабочими нагрузками [189].

Когнитивная вычислительная система должна обладать чрезвычайно высокой производительностью. Чтобы такие вычисления имели действительную практическую ценность, результаты должны появляться молниеносно. Именно по этой причине все компоненты когнитивной ИТ-инфраструктуры должны быть максимально быстрыми и гарантировать минимальные задержки при передаче данных между собой.

ИТ-инфраструктура для когнитивных вычислений строится на серверах транзакционной аналитики, с привлечением аппаратных ускорителей и самых современных систем хранения данных на флеш-технологиях.

Использование открытых архитектур и открытых экосистем для когнитивных вычислений обеспечивает возможность быстрого обновления при постоянно высоком уровне конкурентоспособности. Список приемлемых открытых экосистем, в зависимости от потребностей предприятия, может включать Blockchain, Docker, Linux, OpenPower и другие.

Примером внедрения когнитивных технологий в цифровую экономику является универсальная когнитивная система – IBM Watson, которая разработана для масштабирования под любой формат и размер современного бизнеса, адаптирована к облачным технологиям, интегрируется с открытыми экосистемами и флеш-системами хранения данных. Пакет сервисов позволяет быстро создавать собственную когнитивную облачно-ориентированную систему Watson на предприятиях, работающих в различных областях. Например, анализ неструктурированных медицинских данных пациента с предоставлением рекомендаций.

В качестве перспективных направлений следует отметить, что когнитивные вычисления в будущем позволят принимать мгновенные решения в реальном времени с учетом многоплановой информации о дорожной обстановке и особенностях поведения водителей, получаемой одновременно из множества источников. Применение когнитивных технологий станет актуальным в сейсмологии. Сейсмология будущего будет полностью завязана на обработку огромных массивов неструктурированной информации. Появится возможность прогнозировать потенциальный ущерб от бурения очередных скважин и сделать шаг вперед в задаче прогнозирования землетрясений.

Нельзя не отметить также, что на сегодняшний день когнитивные системы востребованы на разных уровнях образовательного процесса (дошкольный, начальный, средний, высший). В разделе 2.4 настоящей монографии будут рассмотрены примеры внедрения методов искусственного интеллекта и когнитивных технологий в процесс 3D-прототипирования, а также изучены возможности их применения для создания автоматизированных интеллектуальных систем обучения.

Следует особо выделить эффективность применения когнитивных технологий в исследованиях динамических систем интеллектуального управления (ДСИУ). К классу ДСИУ относятся управляемые системы, основанные на знаниях и логических регуляторах, а также использующие уравнения динамики на базе обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения динамики с учетом шумов на базе стохастических дифференциальных уравнений.

Перечислим некоторые математические методы исследования и анализа устойчивости ДСИУ:

1. Методы учета статистических неопределенностей и неопределенностей «Заде» при задании когнитивных моделей, включающих в свое описание стохастические и нечеткие дифференциальные уравнения.

2. Методы анализа устойчивости на основе обобщенных функций Ляпунова и на основе свойств векторных полей состояний.

3. Методы Такаги-Суджено построения и стабилизации моделей интеллектуального управления, универсальная аппроксимация нелинейной модели набором линейных уравнений с логическими регуляторами.

4. Методы, базирующиеся на понятиях индекса состояния равновесия и дивергенции векторного поля.

5. Методы анализа импульсных моделей и моделей с запаздыванием.

6. Методы построения и анализа маятниковых интеллектуальных динамических систем.

7. Эвристические методы глобальной параметрической оптимизации.

8. Методы интеллектуального управления технических систем с переключениями.

9. Методы нейронных сетей, эволюционного моделирования, алгоритм муравьиных колоний и другие методы при решении задач оптимизации.

Развитие первых семи методов дано в [64н,о, 159, 178]. В [157] дано развитие метода интеллектуального управления технических систем с переключениями. Выполнен анализ технических возможностей отечественного программно-аппаратной платформы «Эльбрус 801-РС» для решения научно-исследовательских задач, связанных с математическим моделированием нелинейных управляемых систем с переключениями. Представлены особенности разработки и результаты внедрения рабочих модулей программного комплекса в рамках указанной платформы. Разработано алгоритмическое обеспечение на основе искусственных нейронных сетей с обучением. С помощью разработанного программного обеспечения решены задачи машинного обучения нейросетей для поиска параметров динамических моделей с учетом требований высокопараллельного обучения. Сформулированы требования к расширению и совершенствованию возможностей программной инфраструктуры платформы «Эльбрус 801-РС» применительно к ряду научно-исследовательских задач и к наукоемким технологиям, связанным с применением когнитивного моделирования.

В [66] рассмотрены некоторые аспекты разработки и реализации высокопараллельных алгоритмов обучения для нейронных сетей в задачах построения оптимальных траекторий технических систем с переключениями. В [140] разработан алгоритм с использованием искусственных нейронных сетей и логических регуляторов, позволяющий выполнить поиск оптимальных параметров движения динамических систем, моделируемых дифференциальными включениями.

В [163] предложена модификации метода муравьиных колоний для разработки программного обеспечения решения задач многокритериального управления поставками.

## 2.4. Приложения к системам 3D-прототипирования и к автоматизированным интеллектуальным системам обучения

В настоящем разделе приведены примеры внедрения методов искусственного интеллекта и когнитивных технологий в процесс 3D-прототипирования, а также изучены возможности их применения для создания автоматизированных интеллектуальных систем обучения.

Искусственный интеллект, технологии управления интеллектуальными устройствами, суперкомпьютерные и аддитивные технологии (АТ) многими исследователями выделяются в качестве основных с учетом уровня развития сквозных цифровых технологий. Важно отметить, что разработка технологий должна быть подкреплена адекватными математическими моделями, которые обеспечивают теоретические исследования объекта, при которых непосредственно изучается не сам объект, а его модель, представляющая в результате исследования информацию о самом моделируемом объекте. Среда для моделирования обеспечивается передовыми разработками программно-аппаратных средств моделирования систем с применением методов искусственного интеллекта и когнитивных технологий. В частности, применение методов теории нечетких множеств, теории адаптивного управления и подхода к описанию динамических систем на основе ТС-моделей рассмотрено в работах [230, 231, 64н,о].

Следует отметить значимость применения когнитивных технологий при проектировании сложных систем с неполной информацией [156]. Как уже было отмечено в разделе 2.1, КК являются основным комплексным инструментарием когнитивного подхода. Они позволяют моделировать знания эксперта и представлять их в виде машинных выводов, зачастую в форме логических правил вида *если... то*. Использование аппарата взвешенных знаковых и функциональных знаковых графов для такой технологии моделирования позволяет обрабатывать данные как качественного, так и количественного типа. Отметим, что при когнитивном моделировании создаются концепты и отношения, характеризующие предметную область и связывающиеся между собой, а также определяются и выделяются стратегические цели и синтезируются стратегии по их достижению. Имеет место понятие управляемого когнитивного процесса для использования его при поддержке и принятии стратегических управленческих решений. Технология когнитивного моделирования заключается в исследовании проблемы с нечеткими факторами и взаимосвязями, предвидении изменений внешней среды, а также использовании объективно сложившиеся тенденции развития ситуации в своих интересах. Примеры использования когнитивной



технологии для исследования систем с неполной информацией приведены в работах [128, 77e].

Подход к разработке АТ с учетом внедрения искусственного интеллекта и когнитивных технологий в процесс 3D-прототипирования в настоящее время обусловлен использованием и развитием технологий быстрого прототипирования в различных областях применения [78]. В частности, такой подход важен при разработке АТ, связанных с формированием и созданием изделия при необходимости программируемого управления расходным (строительным) материалом в среде 3D-инструмента. Такого вида технологии также называют технологиями быстрого прототипирования или RP-технологиями (Rapid Prototyping).

Структурные компоненты цифровой 3D-технологии когнитивного программирования пространственных объектов приведены на рис. 2.6. Подробное описание компонентов цифровой 3D-технологии когнитивного программирования представлено в [7].

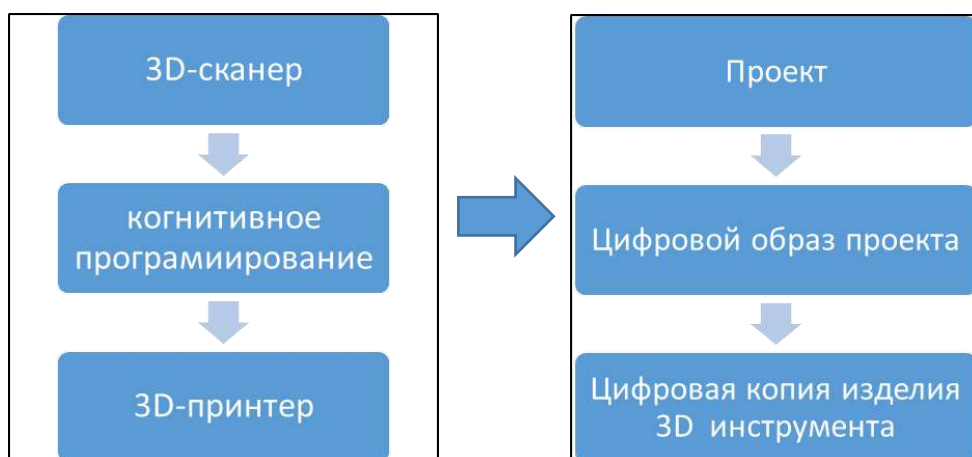


Рис. 2.6

Каждый компонент имеет собственную технологическую специфику инструмента, оборудования и программного решения. Проблема использования когнитивного программирования состоит в профессиональной специфике системного интегрированного взаимодействия совместимости программных продуктов для 3D-сканирования, объектного когнитивного программирования (творческий процесс) и реализации сложных пространственных форм на 3D-принтере, учитывающей особенности технологии прототипирования. Качество и скорость создания цифрового образа проекта (ЦОП), требует знания не только приложений и возможностей 3D-сканера, программ 3D-моделирования, возможностей 3D-принтеров, но и творческой специфики областей знаний проектируемого объекта. Именно этим и определяется

сущность когнитивной программируемой технологии [6]. Актуальность когнитивных программируемых технологий связана с эффективным тиражированием и распространением цифровых копий изделий по телекоммуникационным сетям. Появление сложной пространственной формы цифровой копии изделия (ЦКИ) основано на когнитивном проектировании макета и создании цифрового образа проекта. Заключительные этапы 3D-технологии: когнитивное программирование, адаптация ЦОП (цифровая обработка объекта) для передачи, трансляции, эмуляции ЦКИ под требуемую технологию 3D-принтера.

Отметим, что важной составляющей ЦОП являются программные пакеты, позволяющие моделировать цифровые образы проектов и создавать пространственные объекты, которые на сегодняшний день достаточно разнообразны. К наиболее популярным следует отнести: Rhinoceros 3D, Nevercenter Silo, ZBrush, Lightwave 3D, 3ds Max, CATIA и SolidWorks (Dassault Systèmes), КОМПАС, Maxon Cinema 4D. Из доступных бесплатных программных обеспечений следует назвать: Blender (создание 3D-модели с последующей компьютерной визуализацией), SALOME, FreeCAD. Для проведения 3D-моделирования используют также и коммерческие пакеты компании Autodesk (например, 3D-Studio Max, Maya). Таким образом, основной проблемой 3D-технологии когнитивного программирования является проблема совместимости разрешающей способности ЦОП, ЦКИ и технологии 3D-прототипирования.

Примером внедрения методов искусственного интеллекта и когнитивных технологий в процесс 3D-прототипирования является промышленная система 3D-печати – 3D Systems Sinterstation HiQ+HS. Класс используемых материалов относится к гранулированному классу (термопластик, эластомеры, металлы, композиты) и приспособлен к технологиям быстрого производства. 3D Systems Sinterstation HiQ+HS базируется на SLS-технологии и предназначена для производства долговечных пластиковых и металлических запчастей, многогранных инструментов, литейных моделей на основе файлов в формате 3D CAD. Преимуществом системы является то, что исключаются процессы обработки, шлифовки, литья или другие вторичные процессы с экономией средств и времени. Она автоматически производит функциональные части, литейные модели и многогранные инструменты из 3D CAD файлов. В системе используются упрощенные настройки подготовки печати и самого процесса печати, она удобна и понятна для начинающих пользователей. Кроме того, системе присуща повышенная автоматизация процессов, при этом нет необходимости в длительном обучении. К преимуществам системы относятся также: сниженная стоимость эксплуатации; уменьшение отходов и возможность повторного

использования отработанных материалов; сложные запчасти и прототипы из полиамида, стекловолоконистого нейлона; возможность производства сложных инструментов, запчастей и прототипов; возможность воспроизводить сложные узоры на литейных моделях.

В системе 3D Systems Sinterstation HiQ+HS максимальным физическим объемом печати является следующий объем: ширина 381 мм (ширина), длина 330 мм, высота 457 мм (XYZ). В используемой SLS-технологии выполняется автоматическая калибровка на основе «слой за слоем». Благодаря ей обеспечивается получение высококачественных деталей с правильными и точными механическими свойствами. Процесс управления печатью является простым в применении, с высокой повторяемостью операций от детали к детали, от процесса к процессу, при этом нет необходимости в длительном специальном обучении, при этом производятся запчасти, которые не нужно повторно обрабатывать. Фирменная SLS-система управления связана с интеллектуальной системой терморегулирования для поддержания рабочего состояния и качества запчастей. Диапазон температур во время работы 16-27°C, диапазон температур при установке 18-24°C, термоустойчивость  $\pm 2^\circ\text{C}$ . Интеллектуальная технология терморегулирования для поддержания рабочего состояния и качества запчастей в систему HiQ SLS точно контролирует уровень температуры во время всего процесса печати. Интеллектуальная система терморегулирования обеспечивает улучшение переработки материалов отходных материалов, которые подходят для использования системой Sinterstation HiQ (в частности, материалы DuraForm® PA, DuraForm GF и LaserForm™ A6), что приводит к снижению операционных затрат.

Цифровые 3D-технологии и когнитивное программирование открывают уникальные возможности воспроизведения сложнейших пространственных форм, объектов и инженерных конструкций, механизмов. Реализация этих возможностей связана с цифровой технологией управления материальными частицами в объемной среде инструментов 3D-технологии. В объемной среде инструментов осуществляется технологический процесс, определяющий свойства воспроизводимого объекта. Технология когнитивного программирования является инновационным процессом цифрового творчества, промышленного и художественного производства в рамках цифровой программируемой технологии. С учетом этого, в перспективе системы 3D-печати могут рассматриваться как элемент крупномасштабной управляемой системы (например, в промышленности или технике, с применением технологий машинного обучения для оптимизации параметров и др.). Интеллектуализация позволит оптимизировать работу за счет контроля всех этапов аддитивного производства: выявление

неисправной детали (элемента) в ходе компьютерной диагностики, 3D-сканирование, выбор аддитивной технологии (материала), предварительные расчеты для создания модели; итоговая настройка 3D-принтера, получение новой детали (элемента). Создание интеллектуальных компонент крупномасштабных систем связано с разработкой программных интеллектуальных платформ нового поколения.

В настоящее время актуальным направлением, связанным с применением когнитивных технологий и ИИ в решении сложных задач управления познавательной деятельностью обучаемых, является создание автоматизированных интеллектуальных систем обучения (АИСО) [60]. Указанные системы направлены на повышение уровня самоорганизации и самообучения обучающихся при непрерывном снижении степени участия преподавателя. Потенциал применения ИИ к сфере передачи массива знаний поколению школьников и студентов представляется необычайно широким. Максимальные ожидания от эффекта применения ИИ в образовательном процессе связаны с созданием и внедрением:

- инновационных методов обучения;
- новых форм генерации знаний (интеллектуальные экспертные системы на основе BigData);
- новых каналов коммуникации знаний на основе программ с ИИ в диалоговых системах;
- новых форм подачи информации с акцентом на визуализацию;
- новых форм контроля усвоения учебных материалов с учетом индивидуальных особенностей субъектов образовательного процесса (школьников и студентов).

В качестве примера использования принципиально нового подхода в обучении можно привести внедрение британской ИИ-платформы Century Tech в образовательных организациях Фламандского региона Бельгии. Данная платформа использует обучающие методики и решения, а также применяет базовые принципы нейрофизиологии для определения склонностей, уровня знаний и выносливости школьников и студентов, темпа и подходящего времени для обучения, скорости перемещения информации из кратковременной в долговременную память. Перечисленная аналитика впоследствии включается в алгоритмы машинного обучения. Предполагается, что ИИ поможет адаптировать занятия под индивидуальные особенности каждого ученика.

В настоящее время в России подходит к завершению первый этап реализации национального проекта «Образование», глобальная цель которого – создание единой образовательной платформы, дающей возможность каждому школьнику получать качественное образование, в том числе с использованием адаптивного обучения и индивидуальных

образовательных траекторий. В качестве примера по использованию ИИ в образовании можно привести российский стартап Parla, использующий приложение для изучения английского языка. В основе приложения находится программа, которая обучается вместе с учеником и адаптируется под его задачи и прогресс. Уже на этапе регистрации в приложении программа может анализировать данные из соцсетей и предлагать индивидуальную программу обучения, основанную на интересах конкретного человека. Параллельно внедрению ИИ в образование ведется разработка модели единой цифровой образовательной среды. Примером автоматизации образовательного процесса можно назвать работу МЭШ (Московская Электронная Школа). В школах ряда российских регионов применяется такая современная образовательная среда, как «Мобильная электронная школа».

В российской системе образования еще имеет место недостаточный опыт внедрения интеллектуальных цифровых технологий в систему обучения предметным областям знаний, а также недостаточный уровень сформированности базовых компетенций в соответствии с требованиями цифровой экономики в условиях общего образования. Особое внимание следует уделить использованию инновационных ИКТ-инструментов при создании и реализации открытой и гибкой АИСО на основе гибридности методов ИИ [24, 160]. Методы интеллектуального управления, представляющие собой интеграцию методов ИИ и теории управления [34], эффективны при решении задач управления процессом обучения в триаде «педагог – компьютер – обучающийся». Задачи интеллектуального управления образовательными процессами требуют гибридного подхода с применением математического и компьютерного моделирования. Математические методы должны применяться для разработки содержания и иерархий знаний и процедур, инструментально-методического обеспечения интерактивной интеллектуальной обучающей и оценочной деятельности в информационных средах, в которых могут быть интегрированы функции экспертных систем, нечеткой логики, искусственных нейронных сетей и генетических алгоритмов. Следует отметить, что при проектировании гибридных интеллектуальных сред и платформ цифровой трансформации образования существенное значение имеет не только знание о приоритетных стратегиях и методах их изучения, но и знание эвристически применяемых принципов и подходов, обеспечивающих более конкретные и уточняющие технологические решения.

Как уже было отмечено во введении настоящей монографии, во многих задачах моделирования структура динамических систем и ее параметры известны с некоторой погрешностью. Поэтому, необходимым требованием к динамическим системам является их устойчивость (в том

или ином смысле) по отношению к структурным и внешним возмущениям. В частности, построение алгоритмов исследования устойчивости позволяет проводить анализ влияния различных параметров на режимы функционирования сложных систем. Отметим, что теории устойчивости и стабилизации динамических систем посвящены работы [29–32] и других отечественных и зарубежных ученых. Вопросы устойчивости систем интеллектуального управления рассмотрены в [64н, 116а] и в других работах.

Одним из эффективных подходов к моделированию сложных систем интеллектуального управления является подход, базирующийся на аппроксимации исходной модели соответствующей ТС-моделью. Построение прогнозирующих и управляющих логических компонентов динамических систем связано с разработкой алгоритмов искусственного интеллекта. В данном направлении эффективным является использование искусственных нейронных сетей и методов машинного обучения. В [110] дана строгая формализация основных терминов. Изучению нейронных сетей посвящены работы [43, 66, 96] и другие работы.

В последнее десятилетие интерес к аппарату искусственных нейронных сетей в контексте количественного и качественного увеличения практики его применения в сфере образования значительно усилился. В англоязычных странах вопросы персонализации и автоматизации обучения с применением технических и программных средств, работа которых основана на нейросетевых алгоритмах, уже давно успешно решаются. К числу таких программных продуктов относятся: GeekieLab, CTI – Content Technologies Inc, Mika, Microsoft Presentation Translator, Thinkster Math, Brainly, Cram101 и др. Многие отечественные исследователи занимались вопросом применения интеллектуальных компьютерных систем в образовании, основанных на нейросетевых технологиях. Применение нейросетевых технологий в адаптивном тестировании по информатике рассмотрено в [45]. В [49] представлено проектирование нейросетевой компьютерной обучающей системы. В [56] компьютерные нейросетевые технологии рассмотрены в качестве средства индивидуализированного обучения. Перспективным направлением является использование аппарата искусственных нейронных сетей для инструментально-методического обеспечения образовательного процесса.

## Глава 3.

# ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ТАКАГИ–СУДЖЕНО

### 3.1. Динамические ТС-модели и их стабилизация

В ряде задач управления изучаемые нелинейные явления описываются с помощью ТС-моделей, базирующихся на правилах логического вывода и нечетких регуляторах. Указанные модели находят многочисленные приложения в промышленности, в естествознании и в инженерной практике. ТС-модели эффективно применяются в задачах управления механическими транспортными средствами, в задачах управления подъемными и мостовыми кранами, а также роботами-манипуляторами [34, 47, 48, 59, 116а, 228, 230, 231].

Отметим, что в [131] проведено исследование и дан сравнительный анализ различных типов моделей: модель Мамдани, модель Цукамото, ТС-модель, модель Ларсена, аппроксимирующих заданную нелинейную систему. Показано, что наиболее эффективным, с точки зрения решения задач оценивания нелинейной динамической модели, является ТС-модель. В [155, 188, 213] рассмотрены вопросы о методах приближения и наилучшем и оптимальном соотношении между точностью аппроксимации и количеством правил ТС-модели. Использование ТС-моделей приводит к альтернативному подходу в описании нелинейных систем, который находит приложения в инженерной практике [3, 186, 187, 210].

Как известно [228, 23], ТС-модель задается следующими правилами двух видов для динамической части и выхода соответственно:

$$\begin{aligned} \text{П}_i: & \text{если } z_1(t) \text{ есть } M_1^i \text{ и } \dots \text{ и } z_l(t) \text{ есть } M_l^i, \\ & \text{то } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, r; \\ \text{П}_i: & \text{если } z_1(t) \text{ есть } M_1^i \text{ и } \dots \text{ и } z_l(t) \text{ есть } M_l^i, \\ & \text{то } y(t) = C_i x(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  – фазовый, входной, выходной векторы и вектор параметров соответственно. Через  $M_j^i$  обозначается нечеткая функция, отвечающая  $i$ -му правилу и  $j$ -му параметру. В общем случае функции  $z_j$  могут быть функциями фазовых переменных, внешних возмущений и времени.

В ТС-модели применяемые правила являются нечеткими только в части *если*, тогда как в части *то* содержатся функциональные

зависимости. Каждому  $i$ -му правилу  $\Pi_i$  соответствуют функции  $w_i(z(t))$  и  $h_i(z(t))$  вида

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^l M_j^i(z_j(t)), \quad h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))},$$

где  $r$  – число правил. Предполагается, что  $w_i \geq 0$ , а  $h_i$  нормированы.

Обозначим через  $z(t)$  вектор с компонентами  $z_1(t), \dots, z_p(t)$ . Предполагается, что исходные переменные не являются функциями от входящих переменных  $u(t)$ . Каждое последующее линейное уравнение, представленное в виде  $A_i x(t) + B_i u(t)$ , называется подсистемой. Векторы  $\dot{x}(t)$  и  $y(t)$  представимы в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \\ y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Так как  $\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$ , где  $w_i(z(t)) \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , то  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) > 0$ ,

где  $h_i(z(t)) \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Как известно [231], для построения логических регуляторов, стабилизирующих систему (3.1), используется процедура параллельно распределенной компенсации (ПРК). Процедура ПРК заключается в том, что каждое правило регулятора строится из соответствующего правила TS-модели. При этом логический регулятор использует те же нечеткие множества, что и модель в исходных частях, и в расчет берется только локальная эффективность каждого правила.

Регулятор задается равенством вида

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t), \quad (3.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, r.$$

где  $F_i$  – коэффициенты усиления.

При отсутствии  $u(t)$  система (3.2) имеет вид

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t). \quad (3.4)$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости в целом системы (2.4) даются следующей теоремой.



**Теорема 3.1** [231]. *Состояние равновесия системы (3.4) асимптотически устойчиво в целом, если существует общая положительно определенная матрица  $P$  такая, что выполняются неравенства*

$$A_i^T P A_i - P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

*то есть общая матрица  $P$  должна существовать для всех подсистем.*

Подставляя (3.3) в (3.2), получим систему вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t). \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_i(z(t)) G_{ii} x(t) + \\ & + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ .

Достаточные условия асимптотической устойчивости в целом системы (3.6) даются следующей теоремой.

**Теорема 3.2** [231]. *Состояние равновесия системы (3.6) асимптотически устойчиво в целом, если существует общая положительно определенная матрица  $P$  такая, что выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0, \\ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P \leq 0, \quad i < j, \quad h_i \cap h_j \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Если число  $r$  правил *если...то* велико, то нахождение общей матрицы  $P$ , удовлетворяющей условиям теоремы 3.2, является затруднительным. В работе [231] приведены условия устойчивости, ослабляющие условия теоремы 3.2. Ослабленные условия устойчивости даются следующей теоремой.

**Теорема 3.3** [231]. *Пусть число правил, выполнимых для всех  $t$ , меньше или равно  $s$ , где  $1 < s < r$ . Состояние равновесия системы управления (3.6) асимптотически устойчиво в целом, если существует общая положительно определенная матрица  $P$  и общая положительно полуопределенная матрица  $Q$  такие, что выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P G_{ii} - P + (s-1)Q < 0, \\ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P - Q \leq 0, \quad i < j, \quad h_i \cap h_j \neq \emptyset, \end{aligned}$$

где  $s > 1$ .

Задача построения управления заключается в том, чтобы определить коэффициенты  $F_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ), удовлетворяющие условиям теорем 3.1 и 3.2, с общей для подсистем положительно определенной матрицей  $P$ . Если такие коэффициенты  $F_j$  существуют, то система (3.2) называется стабилизируемой. Поиск положительно определенной матрицы  $P$  долгое время считался сложным процессом. В [231] приводится процедура построения общей матрицы  $P$  для нечетких систем второго порядка. Показано, что задачу нахождения общей матрицы  $P$  можно решить численно, т.е. условия устойчивости в теоремах 3.1 и 3.2 можно выразить в виде ЛМН.

Как известно [129], ЛМН можно представить в следующем виде:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0,$$

где  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  и симметрические матрицы  $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$  заданы.

Нетрудно показать, что условия устойчивости в теореме 3.1 можно сопоставить со свойствами соответствующих ЛМН: для заданных матриц  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , необходимо найти матрицу  $P$ , удовлетворяющую ЛМН

$$P > 0, A_i^T P A_i - P < 0, i = 1, 2, \dots, r,$$

или установить, что такой матрицы  $P$  не существует.

Задача построения логического регулятора, стабилизирующего систему управления, формулируется с учетом теоремы 3.2 следующим образом:

$$\begin{aligned} & X(A_i - B_i F_i)^T X^{-1}(A_i - B_i F_i)X - X < 0, \\ & X \left( \frac{A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i}{2} \right)^T \times \\ & \times X^{-1} \left( \frac{A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i}{2} \right) X - X \leq 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

При  $M_i = F_i X$ ,  $X > 0$  имеем  $F_i = M_i X^{-1}$ . Подставляя последнее выражение в неравенства (3.7), получим

$$\begin{aligned} & X - (A_i - B_i M_i)^T X^{-1}(A_i - B_i M_i) > 0, \\ & X - X \left( \frac{A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i}{2} \right)^T \times \\ & \times X^{-1} \left( \frac{A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i}{2} \right) X \geq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Условия (3.8) представимы в виде ЛМН

$$\begin{pmatrix} X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{pmatrix} > 0, \\ \left( \begin{array}{cc} X & \left( \frac{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i}{2} \right)^T \\ \left( \frac{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i}{2} \right)^T & X \end{array} \right) \geq 0,$$

Задача построения логического регулятора, стабилизирующего систему управления (3.2), сводится к следующей задаче: найти  $X > 0$  и  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{pmatrix} X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{pmatrix} > 0, \\ \left( \begin{array}{cc} X & \frac{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i}{2} \\ \frac{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i}{2} & X \end{array} \right) \geq 0,$$

$$i < j, h_i \cap h_j \neq \emptyset,$$

где  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$ . Соответственно матрица  $P$  и стабилизирующая обратная связь задаются следующим образом:

$$P = X^{-1}, F_i = M_i X^{-1}.$$

Построение устойчивых логических регуляторов с помощью модифицированных ЛМН в случае ограничений по входам и выходам управления, а также при выполнении условия независимого начального состояния рассмотрено в [231] и в других работах.

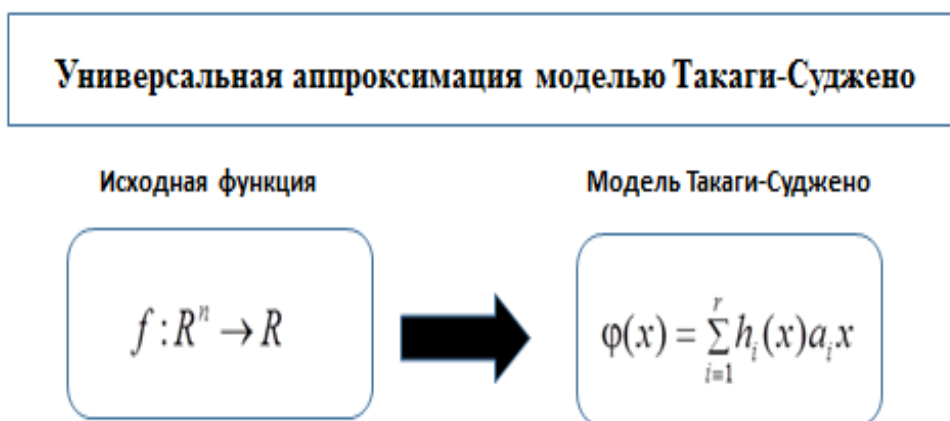
### 3.2. Универсальная аппроксимация управляемых систем ТС-моделями

Как известно, большинство разработанных методов и алгоритмов построения управлений рассчитаны на линейные системы, однако эти методы в ряде случаев могут быть модифицированы для изучения нелинейных систем, что оказывается удобным при решении практических задач ввиду трудноприменимости или недостаточности нелинейной теории. Именно поэтому различные методы сведения нелинейной задачи к линейной получают широкое распространение в современной теории управления.

В ряде задач управления изучаемые нелинейные системы удобно описывать с помощью ТС-моделей, причем нечеткие множества и правила нечеткого вывода здесь используются для описания глобальной

нелинейной системы в терминах множества локальных линейных систем, гладко связанных между собой посредством функций нечеткой принадлежности [225, 231]. Таким образом, в результате редукции к ТС-модели исходная нелинейная модель представляется (возможно, лишь в некоторой области) в виде выпуклой комбинации нескольких линейных систем. Универсальность подхода на основе ТС-моделей заключается в том, что любая гладкая функция (представляющая, например, правую часть дифференциального уравнения) может быть на выпуклом множестве с любой степенью точности приближена указанной комбинацией [228, 231]. Таким образом, использование ТС-моделей приводит к альтернативному подходу в описании нелинейных систем, который находит многочисленные приложения в промышленности, в естествознании, в инженерной практике.

ТС-модель является универсальным аппроксиматором в том смысле, что любая гладкая нелинейная управляемая модель при ряде принятых ограничений может быть аппроксимирована с помощью ТС-модели. Схема универсальной аппроксимации представлена на рис. 3.1.



**Рис. 3.1**

Как известно [231], правила ТС-модели можно представить в следующем виде:

$P_i$ : если  $x_1$  есть  $M_1^i$  и ... и  $x_n$  есть  $M_n^i$ ,  
 то  $y = a_i x$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,

где  $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор состояния,  $M_j^i$  – нечеткое множество,  $r$  – число правил,  $y = a_i x$  – линейная функция,  $a_i \in R^{1 \times n}$ .

Каждому  $i$ -му правилу  $\Pi_i$  соответствует функция  $h_i(x)$  вида  $h_i(x) = \prod_{j=1}^n M_j^i(x_j)$ . Предполагается, что  $h_i$  нормированы, т.е.  $h_i(x) = 1$  и  $\sum_{i=1}^r h_i(x) = 1$ . С помощью центроидного метода, используемого в процедуре дефазификации, можно представить модель в виде

$$y = \varphi(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) a_i x.$$

Введем ряд обозначений:  $R^n$  – действительное  $n$ -мерное векторное пространство;  $C_n^m$  – множество  $n$ -мерных функций с непрерывными  $m$ -ми производными в заданной области; запись  $x_i$  обозначает  $i$ -ю координату вектора  $x$ ;  $\| \cdot \|$  – стандартная векторная или матричная норма; запись  $\sum_{j_1 j_2 \dots j_n}$  обозначает суммирование по всем возможным комбинациям  $j_1 j_2 \dots j_n$ .

Пусть нелинейная функция  $f(x): R^n \rightarrow R$ , определенная в компактной области  $D \subset R^n$ , удовлетворяет следующим условиям:

1)  $f(0) = 0$ ;

2)  $f \in C_1^2$ , т.е. функция  $f$  производные  $\partial f / \partial x$  и  $\partial^2 f / \partial x^2$  непрерывны, а следовательно, ограничены в области  $D$ .

Для аппроксимации функции  $f(x)$  необходимо построить ТС-модель в  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) a_i x$  и сделать ошибку аппроксимации  $e(x) = f(x) - \varphi(x)$  и ее производную  $\partial e / \partial x$  достаточно малой для всех  $x \in D$ .

Процедуры построения ТС-модели и аппроксимации с ее помощью можно описать с помощью следующих шагов.

*Шаг 1.* В области  $D_0 = \{x: |x_i| < \varepsilon_0\}$ , где  $\varepsilon_0$  – заданное положительное число, выбрать  $a_0 = \partial f / \partial x|_{x=0}$ .

*Шаг 2.* Определить проективный оператор  $P|_x$ , действующий из  $R^n$  в подпространство  $R^n / x$  размерности  $n-1$ , по правилу:

$$P|_x y = y - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x.$$

В области  $D \setminus D_0$  выбрать  $x_{j_1 j_2 \dots j_n}$  равными  $(j_1 \varepsilon, j_2 \varepsilon, \dots, j_n \varepsilon)^*$ , где  $\varepsilon$  – положительное число, а  $j_i$  – целые числа. Построить линейную модель  $a_{j_1 j_2 \dots j_n}$  как решение линейных уравнений вида

$$a_{j_1 j_2 \dots j_n} x_{j_1 j_2 \dots j_n} = f(x_{j_1 j_2 \dots j_n}),$$

$$a_{j_1 j_2 \dots j_n} P|_{x_{j_1 j_2 \dots j_n}} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{j_1 j_2 \dots j_n}} P|_{x_{j_1 j_2 \dots j_n}}.$$

Для фиксированных значений  $x_{j_1 j_2 \dots j_n}$  приведенные выше уравнения представляют собой  $n$  линейных уравнений с элементами  $a_{j_1 j_2 \dots j_n}$  в качестве переменных. Первое уравнение означает, что  $f$  и  $\varphi$  имеют одинаковые значения в точке  $x_{j_1 j_2 \dots j_n}$ . Второе уравнение означает, что  $a_{j_1 j_2 \dots j_n}$  совпадает с  $\partial f / \partial x$  в подпространстве  $R^n / x_{j_1 j_2 \dots j_n}$  размерности  $n-1$ . Эти уравнения всегда разрешимы, поскольку  $x$  и  $P$  не зависят друг от друга, т.е. матрицы  $(x_{j_1 j_2 \dots j_n} \quad P|_{x_{j_1 j_2 \dots j_n}})$  всегда обратимы.

*Шаг 3.* Выбрать правила вида

$\Pi_1$ : если  $x_1$  примерно равно 0 ... и  $x_n$  примерно равно 0,  
то  $\varphi(x) = a_0 x$ ;

$\Pi_{j_1 j_2 \dots j_n}$ : если  $x_1$  примерно равно  $j_1 \varepsilon$  ... и  $x_n$  примерно равно  $j_n \varepsilon$ ,  
то  $\varphi(x) = a_{j_1 j_2 \dots j_n} x$ .

*Шаг 4.* Записать  $\varphi(x)$  в виде  $\varphi(x) = h_0 a_0 x + \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} h_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{j_1 j_2 \dots j_n}$ .

*Шаг 5.* Разделить область  $D \setminus D_0$  на области

$$D_{j_1 j_2 \dots j_n} = \{x \mid x \in D, j_i \varepsilon \leq x_i < (j_i + 1) \varepsilon \forall i\}.$$

*Шаг 6.* Представить ошибку аппроксимации  $e(x)$  между  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ .

*Шаг 7.* Оценить разность  $\partial e / \partial x$  между производными  $\partial f / \partial x$  и  $\partial \varphi / \partial x$ .

*Шаг 8.* В области  $D_0$  с использованием свойств рядов Тейлора получим, что ошибки  $e(x)$  и  $\partial e / \partial x$  могут быть сколь угодно малыми за счет уменьшения  $\varepsilon_0$ .

Справедливо следующее утверждение [231]: любая гладкая нелинейная функция  $f(x) : R^n \rightarrow R$ , определенная в компактной области и удовлетворяющая условиям  $f(0) = 0$  и  $f \in C_n^2$ , может быть аппроксимирована с любой степенью точности вместе со своей производной посредством линейных ТС-моделей. На основании этого утверждения можно показать, что гладкая нелинейная управляемая модель  $\dot{x} = f(x) + b(x)u$  может быть аппроксимирована с помощью перехода к ТС-модели, содержащей  $\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x)(A_i(x) + B_i u(t))$ . Схема аппроксимации модели управляемой динамической системы приведена на рис. 3.2.



Рис. 3.2

В этом случае  $i$ -е правило имеет следующий вид:

$\Pi_i$ : если  $x_1(t)$  есть  $M_1^i$ , ...,  $x_n(t)$  есть  $M_n^i$ ,  $u_1(t)$  есть  $N_1^i$ , ...,  $u_m(t)$  есть  $N_m^i$ ,

$$\text{то } \dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x)(A_i(x) + B_i u(t)), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (3.9)$$

где  $M_j^i$ ,  $N_k^i$  – нечеткие множества,  $x(t)^* = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  – вектор состояния,  $u(t)^* = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$  – входящий вектор,  $r$  – число правил, и каждому  $i$ -му правилу  $\Pi_i$  соответствует функция  $h_i(x, u) = \prod_{j=1}^n M_j^i(x_j(t)) \prod_{k=1}^m N_k^i(u_k(t))$ .

Преимущества подхода, основанного на применении ТС-моделей для аппроксимации нелинейных систем, заключаются в следующем:

- 1) возможен анализ качественных свойств изучаемых моделей не только в локальном, но и в глобальном смысле;
- 2) возможна редукция базы правил без потери информации о модели;
- 3) условия устойчивости представляются в достаточно компактном виде, удобном для вычислительных процедур.

Отметим, что подробное описание примера реализации подхода к построению модели перевернутого маятника, связанного с аппроксимацией исходной дифференциальной модели с помощью ТС-модели, будет дано в разделе 4.2 главы 4.

### 3.3. Анализ асимптотической устойчивости на основе прямого метода Ляпунова с применением функций Немыцкого-ЛаСалля

В настоящем разделе асимптотическая устойчивость ТС-моделей изучена с помощью прямого метода Ляпунова с применением функций Немыцкого–ЛаСалля [134, 178]. Даны достаточные условия

асимптотической устойчивости и на основе этих условий предложен алгоритм анализа устойчивости.

Условия асимптотической устойчивости, рассмотренные в настоящем разделе, применимы к управляемым процессам, для которых производная функции Ляпунова типа Немыцкого–ЛаСалля является неотрицательно определенной. Поэтому метод функций Ляпунова можно применять к управлению для широкого класса нелинейных динамических систем. Кроме того, асимптотическая устойчивость замкнутой системы определяется устойчивостью в каждой действующей области правил. Использование описанного подхода к анализу асимптотической устойчивости делает добавление новых правил несложной процедурой, поскольку для анализа теоремы об асимптотической устойчивости необходимо выполнение только одного условия.

Пусть  $E$  – универсальное множество. Рассмотрим нелинейную систему  $n$ -го порядка с одним входом, описываемую уравнениями пространства состояний управляемого процесса следующего вида

$$\dot{x} = f(x) + b(x)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.10)$$

где  $x \in E$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$  – вектор состояния;  $b(x) = (b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x))^*$ ,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^*$  – функции, описывающие динамику процесса,  $f, b: D \rightarrow R^n$  – локально липшицевы отображения из области  $D \subset R^n$  в  $R^n$ ;  $u$  – управляющий сигнал применительно к входу процесса;  $t$  – переменная времени;  $x(t_0)$  – начальное состояние в момент времени  $t_0$ .

Для описываемой системы (3.9)  $i$ -е правило базы правил имеет вид:

$$\Pi_i: \text{если } x_1 \text{ есть } E^i_1 \text{ и если } x_2 \text{ есть } E^i_2 \text{ и } \dots \text{ и } x_n \text{ есть } E^i_n, \\ \text{то } u = u_i(x), \quad i = 1, \dots, d, \quad (3.11)$$

где  $d$  – число правил,  $E^i_1, E^i_2, \dots, E^i_n$  – нечеткие множества, описывающие лингвистические термы входных переменных  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $u = u_i(x)$  – управляющий сигнал правила  $i$ .  $u_i$  может рассматриваться как функция вектора состояния  $x$ .

Для каждого правила  $\Pi_i$  рассмотрим функцию вида:

$$\alpha_i(x) = \wedge (\mu^i_1(x_1), \mu^i_2(x_2) \dots \mu^i_n(x_n)) \in [0, 1] \\ \forall x \in E, \quad i = 1, \dots, d. \quad (3.12)$$

Будем предполагать, что для любого  $x \in E$  существует среди всех правил, по крайней мере, одно  $\alpha_i \in (0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Управление  $u$  является функцией от  $\alpha_i$  и  $u_i$ . Используя взвешенную сумму метода дефазификации, получим

$$u = \frac{\sum_{i=1}^d \alpha_i u_i}{\sum_{i=1}^d \alpha_i}. \quad (3.13)$$



Если для любого входа  $x_0 \in E$  функция  $\alpha_i(x_0)$ , соответствующая правилу  $\Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , равна нулю, то нечеткое  $i$  называется неактивным правилом для входа  $x_0$ , в противном случае называется активным правилом. Отметим, что для  $x = x_0$  неактивное правило не будет оказывать влияния на выход регулятора  $u(x_0)$ . Следовательно, формулу (3.13) с учетом рассмотрения только активных правил можно записать в следующем виде:

$$u(x_0) = \frac{\sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^d \alpha_i(x_0) u_i(x_0)}{\sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^d \alpha_i(x_0)}. \quad (3.14)$$

Активная область правила  $\Pi_i$  определяется в виде множества

$$A_i = \{x \in E : \alpha_i(x) \neq 0\}, i = 1, \dots, d. \quad (3.15)$$

В дальнейшем для исследования устойчивости ТС-систем будем использовать теоремы Немыцкого–ЛаСалля об асимптотической устойчивости в целом [134, 178].

Предварительно приведем понятие устойчивости и теорему Немыцкого–ЛаСалля для многомерной управляемой системы.

Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой описывается нелинейным уравнением

$$\dot{z} = F(z, v, t), z(t_0) = z_0, t \geq t_0, \quad (3.16)$$

где  $z \in R^n$  – вектор состояния,  $v \in R^n$  – вектор управления,  $F(\cdot) \in R^n$  – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, определенная вместе со своими частными производными  $F_z, F_v, F_t$  в некоторой области  $G \subset R^{n+k+1}$ . Считается, что область  $G$  содержит начало координат и в ней вектор-функция  $F(\cdot)$  удовлетворяет условиям существования и единственности решений.

Обозначим через

$$z_p(t) = z_p(v_p, z_{p0}, t, t_0) \quad (3.17)$$

одно из решений системы (3.10), порождаемое заданным программным управлением  $v_p \in U$ , с начальными данными  $z_{p0} = z_p(t_0)$ ,  $t_0$ . Это решение описывает невозмущенное программное движение системы:  $\dot{z}_p(t) = F(z_p(t), v_p(t), t)$ . Все другие движения системы (3.16) называются возмущенными движениями; они соответствуют различным отклонениям  $x(t) = z(t) - z_p(t)$ ,  $u(t) = v(t) - v_p(t)$  и удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t) = F(x + z_p(t), \\ u + v_p(t), t) - F(z_p(t), v_p(t), t), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $x(t_0) = x_0 = z_0 - z_{p0}$ . Уравнение (3.18) носит название уравнения возмущенного движения.

Область определения вектор-функции  $f(\cdot) \in R^n$  зададим произведением трех множеств

$$S_r \times U \times I_t = \{(x, u, t): \|x\| < r, u \in U, t \in I_t\}, \quad (3.19)$$

где  $S_r$  –  $n$ -мерный открытый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x = 0$ ,  $I_t = [t_0, \infty)$ ,  $U$  – множество допустимых управлений,  $\|x\|$  – евклидова норма вектора  $x \in R^n$ . Отметим, что замена переменной  $z$  на переменную  $x$  соответствует замене задачи исследования невозмущенного движения (3.17) системы (3.16) на задачу исследования свойств решения  $x = 0$  уравнения возмущенного движения (3.18), так как имеет место равенство  $f(0, 0, t) = 0$ .

Невозмущенное движение (3.17) системы (3.16) (или решение  $x = 0$  системы (3.18)) называется устойчивым по Ляпунову относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  и  $\forall t_0 \in I_t$  существует число  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что для всех возмущенных движений системы (3.18), удовлетворяющих условию  $\|x_0\| < \delta$  (исходящих из шара  $x_0 \in S_\delta$ ), выполняется неравенство  $\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon$  ( $x \in S_\delta$ ),  $\forall t \in I_t$ . В противном случае невозмущенное движение называется неустойчивым.

Невозмущенное движение (3.18) системы (3.16) называется асимптотически устойчивым, если: 1) оно устойчиво по Ляпунову и 2)  $\forall t_0 \in I_t$  существует  $\Delta(t_0) \leq \delta(\varepsilon, t_0)$  такое, что для всех возмущенных движений (3.18), удовлетворяющих условию  $\|x_0\| < \Delta(t_0)$  выполняется предельное равенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0$ . В этом случае открытый шар  $S_{\Delta(t_0)}$  называется областью притяжения.

Если выбор числа  $\delta > 0$  в определении устойчивости не зависит от  $t_0$ , то невозмущенное движение системы (3.16) называется устойчивым равномерно по времени  $t_0$ .

Невозмущенное движение системы (3.16) называется асимптотически устойчивым равномерно по времени  $t_0$  и начальным возмущениям  $x_0$ , если оно асимптотически устойчиво и  $\forall \sigma > 0$  ( $\sigma < \Delta$ ) существует  $t_*(\sigma)$  такое, что для всех возмущенных движений (3.16), начинающихся в области притяжения  $\|x_0\| < \Delta$ , и  $\forall t_0 \in I_t$  по истечении времени  $t \geq t_0 + t_*(\sigma)$  выполняется неравенство  $\|x(t, x_0, t_0)\| < \sigma$ .

Невозмущенное движение системы (3.16), удовлетворяющее одному из приведенных выше определений, называется асимптотически устойчивым в целом (в том числе равномерно по  $x_0, t_0$ ), если областью притяжения является все пространство  $R^n$  ( $S_\infty = R^n$ ).

Теорема Немыцкого–ЛаСалля применительно к системе (3.16) формулируется следующим образом [134, 178].

**Теорема 3.4.** *Невозмущенное движение  $x = 0$  автономной системы  $\dot{x} = f(x)$  асимптотически устойчиво в целом, если в области (3.19) при*

$r = \infty$  существует положительно определенная функция  $V(x) > 0$ , производная которой по времени в силу уравнения системы является знакоотрицательной функцией  $\dot{V}(x) \leq 0$ , и множество, на котором  $\dot{V}(x) = 0$ , не содержит целых возмущенных движений системы, кроме  $x = 0$ .

Более общие необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в целом, равномерной по начальным данным, формулируются следующим образом.

**Теорема 3.5.** *Невозмущенное движение (3.17) системы (3.16) асимптотически устойчиво в целом равномерно по  $x_0, t_0$  тогда и только тогда, когда в области  $S_\infty, I_t$  существует функция  $V(x, t)$  со следующими свойствами в этой области: 1) функция  $V(x, t)$  является положительно определенной; 2) функция  $V(x, t)$  допускает бесконечно малый высший предел; 3) функция  $V(x, t)$  допускает бесконечно большой низший предел; 4) частные производные  $\partial V(x, t)/\partial x_i, i = 1, \dots, n, \partial V(x, t)/\partial t$  непрерывны и равномерно ограничены по времени  $t$  в любой замкнутой области  $S_r(r < \infty), I_i$ ; 5) производная  $\dot{V}(x, t)$ , вычисленная в силу уравнения системы (2.16), является отрицательно определенной функцией.*

Перейдем к изучению устойчивости систем вида (3.18) с нечеткими регуляторами. Рассмотрим функцию Ляпунова  $V: R^n \rightarrow R, V(x) = x^*Px$ , где  $P \in R^{n \times n}$  – положительно определенная матрица. Рассматривая траектории, соответствующие уравнению (3.18), получим, что  $V$  имеет непрерывные частные производные, причем

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^*Px + x^*P\dot{x} = (f(x) + b(x)u(x))^*Px + \\ &+ x^*P(f(x) + b(x)u(x)) = G_1(x) + G_2(x)u(x), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$G_1(x) = f(x)^*Px + x^*Pf(x), \quad G_2(x) = b(x)^*Px + x^*Pb(x). \quad (3.21)$$

В дальнейшем будем использовать свойства следующих множеств:

$$\begin{aligned} G_2^0 &= \{x \in E \mid G_2(x) = 0\}, \quad G_2^+ = \{x \in E \mid G_2(x) > 0\}, \\ G_2^- &= \{x \in E \mid G_2(x) < 0\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Справедлива следующая

**Теорема 3.6.** *Пусть задана система (3.18), для которой  $x = 0 \in R^n$  является состоянием равновесия. Пусть существует положительно определенная неограниченная функция  $V: R^n \rightarrow R, V(x) = x^*Px, P \in R^{n \times n}$ , удовлетворяющая свойствам:*

- 1)  $G_1(x) < 0 \quad \forall x \in G_2^0$ ,
- 2)  $u_i(x) \leq -G_1(x)/G_2(x)$  для  $x \in A_i \cap G_2^+$  и  $u_i(x) \geq -G_1(x)/G_2(x)$  для  $x \in A_i \cap G_2^-, i = 1, \dots, d$ ,
- 3) множество  $\{x \in E \mid \dot{V}(x) = 0\}$  не содержит решений, кроме тривиального,  $x(t) = 0$  для  $t > 0$ .

Тогда замкнутая система (3.18) асимптотически устойчива в целом в начале координат.

Доказательство. Из определения  $V$  следует, что  $V(0) = 0$ ,  $V(x) > 0$   $\forall x \neq 0$  и  $V(x) = x^*Px \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Далее с помощью (3.16) докажем, что производная по времени  $\dot{V}$  является отрицательно полуопределенной. Пусть  $x_0 \in E$  – произвольный вектор начального состояния. Тогда возможны следующие три случая.

*Случай 1:*  $G_1(x_0)$  строго положительно. Из условия 2) теоремы 3.6 следует, что  $u_i(x_0) \leq -\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}$ . Тогда

$$u(x_0) = \frac{\sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^d \alpha_i(x_0) u_i(x_0)}{\sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^d \alpha_i(x_0)} \leq \frac{\left(-\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}\right) \cdot \sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^d \alpha_i(x_0) u_i(x_0)}{\sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^d \alpha_i(x_0)} = -\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}.$$

Следовательно,

$$\dot{V}(x_0) = G_1(x_0) + G_2(x_0)u(x_0) \leq G_1(x_0) + G_2(x_0)\left(-\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}\right) = 0.$$

Таким образом,  $u_i(x_0) \leq -\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}$  и  $\dot{V}(x_0) \leq 0$ .

*Случай 2:*  $G_1(x_0)$  строго отрицательно. Из условия 2) теоремы 3.6 следует, что  $u_i(x_0) \geq -\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}$ . Тогда

$$u(x_0) = \frac{\sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^d \alpha_i(x_0) u_i(x_0)}{\sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^d \alpha_i(x_0)} \geq \frac{\left(-\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}\right) \cdot \sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^d \alpha_i(x_0) u_i(x_0)}{\sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^d \alpha_i(x_0)} = -\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}.$$

Следовательно,

$$\dot{V}(x_0) = G_1(x_0) + G_2(x_0)u(x_0) \leq G_1(x_0) + G_2(x_0)\left(-\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}\right) = 0.$$

Таким образом,  $u_i(x_0) \geq -\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}$  и  $\dot{V}(x_0) \leq 0$ .

*Случай 3:*  $x_0 \in G_2^0$ . В этом случае с помощью условия 1) теоремы 3.6 результат примет вид  $G_1(x_0) \leq 0$ . Следовательно,

$$\dot{V}(x_0) = G_1(x_0) + G_2(x_0)u(x_0) = G_1(x_0) \leq 0.$$

Согласно рассмотренным выше трем случаям, получим

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in E.$$

Таким образом, производная по времени функции Ляпунова  $\dot{V}$  является отрицательно полуопределенной.

По теореме Немыцкого–ЛаСалля, состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво. Теорема 3.6 доказана.

Условия 1) и 2) теоремы 3.6 означают, что функция  $V$  является отрицательно полуопределенной в активной области каждого правила. Согласно условию 3) множество  $\{0\}$  является наибольшим инвариантным множеством в  $\{x \in E: \dot{V}(x) = 0\}$ . С помощью теоремы Немыцкого–ЛаСалля гарантируется, что нечеткая логическая система управления, описываемая (3.18)–(3.21), глобально асимптотически устойчива в целом в начале координат.

Алгоритм анализа устойчивости, базирующийся на теореме 3.6 и обеспечивающий устойчивость класса систем с логическими регуляторами, состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Определить возможные функции Ляпунова типа Немыцкого–ЛаСалля  $V$  (т. е. определить положительно определенную матрицу  $P$ ).

*Шаг 2.* Проверить, что множество  $\{x \in E: \dot{V}(x) = 0\}$  не содержит траекторий состояния, кроме тривиального.

*Шаг 3.* Определить множества  $G_1(x)$ ,  $G_2(x)$ ,  $G_2^0$ ,  $G_2^-$ ,  $G_2^+$ .

*Шаг 4.* Если  $G_1(x) < 0 \forall x \in G_2^0$ , то перейти к шагу 5, в противном случае перейти к шагу 1.

*Шаг 5.* Для каждого правила управления  $\Pi_i$  определить такое  $u_i$ , что  $u_i(x) \leq -\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}$  для  $x \in A_i \cap G_2^+$  и  $u_i \geq -\frac{G_1(x_0)}{G_2(x_0)}$  для  $x \in A_i \cap G_2^-$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

Рассмотренный способ исследования асимптотической устойчивости ТС-систем с помощью прямого метода Ляпунова с применением функций Немыцкого–ЛаСалля может быть использован для изучения устойчивости ряда классов управляемых технических систем.

Отметим, что применение вышеприведенного алгоритма для построения алгоритма стабилизации модели перевернутого маятника будет рассмотрено в разделе 4.3 главы 4.

### 3.4. Моделирование управляемой системы с переключением

Как известно [61], многие технологические процессы наиболее точно описываются математическими моделями, сочетающими непрерывное и дискретное время, так называемыми, непрерывно-дискретными системами. Указанные системы представляют собой сложные многосвязные системы, состоящие из отдельных управляемых подсистем, объединенных в единую систему посредством внутрисистемных связей. Их существенным преимуществом является одновременное решение ряда

локальных задач и снижение их сложности, повышение надежности работ в целом. Проблема разработки управляющих воздействий, обеспечивающих стабилизацию движений непрерывно-дискретных систем, является предметом многочисленных исследований [26, 35, 61, 239].

Одним из современных подходов к решению задачи синтеза управления объектами в условиях неопределенности является применение систем управления с переключением (гибридных систем), относящихся к классу непрерывно-дискретных систем [35]. Математические модели систем управления с переключением представляют собой модели, в которых непрерывная динамика, порождаемая в каждый момент времени одной из априорно заданного набора непрерывных систем, перемежается с дискретными операциями, подающими команды либо на мгновенное переключение с одной системы на другую, либо на мгновенную перестройку с заданных текущих координат на другие координаты, либо на то и другое одновременно [164]. Отметим, что указанные системы часто встречаются в прикладных задачах авиастроения, автомобилестроения, электроэнергетики, обеспечения безопасности движения. Исследование систем с переключением и решение различных задач управления для них позволяет значительно расширять область их практического применения. В [164] рассматриваются задачи достижимости, верификации и синтеза управлений для гибридных систем. Системы с переключением могут быть представлены с помощью кусочно-линейной аппроксимации сложной нелинейной системы дифференциальных уравнений. В [69] предложены качественно новые алгоритмы и системы адаптивного управления с переменной структурой с использованием парных и нелинейно деформируемых поверхностей переключения.

При проектировании управляемых систем управления с переключением важной составляющей является соблюдение условия устойчивого их функционирования. Эффективным средством анализа устойчивости и синтеза управлений для гибридных систем являются различные модификации метода функций Ляпунова, представленные в работах [4, 10]. В [106] доказательство стабилизации многосвязной управляемой системы с помощью кусочно-постоянного управления проведено на основе метода векторных функций Ляпунова. Вопросы устойчивости решений и существования общей функций Ляпунова для отдельных классов непрерывно дискретных систем рассмотрены в [238]. В [65г] для непрерывных и дискретных систем управления с синглтон-выходом рассмотрены условия устойчивости и разработаны алгоритмы

стабилизации, базирующиеся на использовании функций Ляпунова и свойств ЛМН.

В многосвязных системах для управления непрерывным объектом часто используется цифровой регулятор. Для формирования управления и стабилизации динамических систем в условиях неопределенности целесообразно применять логический регулятор. В [59] охарактеризована область использования логических регуляторов, рассмотрены вопросы моделирования и стабилизации динамических систем с логическими регуляторами, дано развитие методов Ляпунова исследования устойчивоподобных свойств указанных систем.

Рассмотрим подход к моделированию управляемой системы с переключением, базирующийся на использовании логического регулятора и представлении исходной системы ТС-моделью.

Переключательная система представляет собой многосвязную управляемую систему, описываемую дифференциальными уравнениями вида [106]

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^r A_{ij}, \quad i = \overline{1, r}, \quad (3.22)$$

где  $x_i \in R^{n_i}$  – вектор состояния,  $A_i, A_{ij}$  – постоянные матрицы размерности соответственно  $n_i \times n_i$  и  $n_i \times n_j$ ,  $B_i$  – матрица-столбец размерности  $n_i$ ,  $r$  – число подсистем модели. Управление  $u_i$  зависит от дискретных моментов времени и представляет собой кусочно-постоянную функцию на каждом промежутке времени. В случае, когда управление воздействует только на подсистемы

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + b_i u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (3.23)$$

исходной системы (3.22), т.е. зависит только от ее состояния в определенный момент времени, то оно выбирается как  $u_i = k_i x_i$ , где  $k_i$  – коэффициенты усиления регулятора.

Будем считать, что рассматриваемая система (3.22) имеет положение равновесия, и система отсчета выбрана так, что оно соответствует нулевому решению уравнения (3.22). Кроме того, считаем, что система (3.22) рассматривается в некоторой области  $D \subseteq R^n$ , содержащей начало координат (задание указанной области может быть обусловлено, например, физическим смыслом переменных состояния). Пусть  $z(t) = (z_1(t), \dots, z_l(t))$  – векторная величина, значения которой в текущий момент времени зависят от  $x(t)$  и описываются нечетким множеством  $M_{ij}$ . На множестве  $M_{ij}$  определим непрерывные функции

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^l M_{ij}(z_j(t)), \quad h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))},$$

где  $M_{ij}(z_j(t))$  – степень принадлежности элемента  $z_j(t)$  к множеству  $M_{ij}$ .

Предположим, что  $w_i(t) \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , и  $\sum_{i=1}^r w_i(t) > 0 \forall t$ . Из предположений следует, что  $h_i(t) \geq 0$ , где  $i = 1, 2, \dots, r$ , и  $\sum_{i=1}^r h_i(t) = 1 \forall t$ .

Рассмотрим уравнение (3.9), которое определяет TS-модель управляемой системы. На основе принципа универсальной аппроксимации, описанного в разделе 3.2 настоящей главы, и с учетом существования функций принадлежности  $h_i(t)$ , модель (3.23) может быть представлена моделью (3.9), т.е. уравнения (3.23) и (3.9) эквивалентны. Для TS-модели (3.23)  $i$ -е правило, соответствующее функции  $h_i(t)$ , имеет вид (3.1).

Правила управления для модели (3.23) с учетом (3.3) запишутся в виде

$$\text{П}i: \text{если } z_1(t) \text{ есть } M_{i1} \text{ и } \dots \text{ и } z_l(t) \text{ есть } M_{il}, \\ \text{то } u(t) = F_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

где  $F_i$  – матрица коэффициентов усиления локальной обратной связи.

Общий ПРК-регулятор представляет собой сочетание отдельных линейных регуляторов и задается в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i F_i x. \quad (3.24)$$

На основе вышеприведенных рассуждений и использования функций Ляпунова изучим вопрос о стабилизации переключательной системы. В качестве функции Ляпунова рассмотрим функцию вида  $V(x) = x'Px$ , где  $P$  – положительно определенная матрица.

**Терема 3.7 [231].** TS-модель (3.23) стабилизируема посредством состояния ПРК-регулятора (3.24), если существуют матрицы  $Q > 0$ ,  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , и  $\hat{T}_{ij}$  такие, что выполняются неравенства

$$\Lambda(A_i^T + A_j^T, Q) + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i < \hat{T}_{ij}, \\ i \leq j, \quad h_i \cap h_j \neq \emptyset \quad (3.25)$$

и для каждого  $1 \leq i \leq j \leq r$  существует симметричная  $n \times n$  матрица  $T_{ij} = T_{ij}^T$  такая, что

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{T}_{11} & \dots & \hat{T}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{T}_{1r} & \dots & \hat{T}_{rr} \end{pmatrix} < 0, \quad (3.26)$$

где  $\hat{T}_{ij} = QT_{ij}Q$ ,  $Q = P^{-1}$ ,  $M_i = K_i Q$  и  $\Lambda(A_i^T + A_j^T, Q) = (A_i + A_j)Q^T + Q(A_i^T + A_j^T)$ .



С учетом условий теоремы 3.7 матрица коэффициентов усиления регулятора (3.24) будет задаваться соотношением  $K_i = M_i Q^{-1}$ , а функция Ляпунова имеет вид  $V = x^T Q^{-1} x$ .

Для определения условий синтеза управления в виде ЛМН, предварительно рассмотрим линейную модель, зависящую от параметра  $p$ , и описываемую уравнениями вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B(p)u(t), \\ y(t) &= C(p)x(t), \end{aligned} \quad (3.27)$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $u(t)$  обозначают вектор состояния, размер системы и вектор входа соответственно. Параметром  $p$  можно интерпретировать как измеримое внешнее возмущение или значение некоторой константы.

Заметим, что часть *то* ТС-модели (3.9) имеет вид (3.27). Зависящий от параметра динамический регулятор представляет собой зависящую от параметра линейную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B(p)y(t), \\ u(t) &= C(p)x(t) + D y(t). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Определяя расширенную матрицу системы (3.28)

$$\bar{A}(p) = \begin{pmatrix} A(p) + B(p)D(p)C(p) & B(p)C(p) \\ B(p)C(p) & A(p) \end{pmatrix},$$

получим, что динамические уравнения замкнутой системы, описываются уравнением

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(p)x(t).$$

Система (3.27) квадратично стабилизируема [22] посредством зависящего от параметра линейного регулятора размерности  $s$  тогда и только тогда, когда существуют зависящий от параметра регулятор размерности  $s$  и положительно определенная матрица  $P > 0$  такие, что

$$P\bar{A}(p) + \bar{A}^T(p)P < 0. \quad (3.29)$$

Если зафиксировать значение  $p$ , то условие (3.29) будет представлять собой достаточное условие для существования множества линейных, не зависящих от времени регуляторных матриц  $A(p)$ ,  $B(p)$ ,  $C(p)$  и  $D(p)$ , которые стабилизируют систему (3.28) при конкретном значении  $p$ .

Искомый регулятор не входит линейно в условие (3.29), поэтому матричные неравенства необходимо модифицировать. В [231] описан способ преобразования, который приводит к множеству модифицированных неравенств, являющихся линейными относительно неизвестных данных, причем указанная модификация позволяет преобразование по  $p$  выполнить поточечно.

Сначала разобьем постоянные матрицы  $P$  и  $P^{-1}$  на две составляющие  $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix}$  и  $P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix}$ , а также определим

матрицы  $\Pi_1 = \begin{pmatrix} Q_{11} & I \\ Q_{12}^T & 0 \end{pmatrix}$  и  $\Pi_2 = P\Pi_1 = \begin{pmatrix} I & P_{11} \\ 0 & P_{12}^T \end{pmatrix}$ , где  $I$  – единичная матрица.

Условие (3.29) будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\Pi_1^T P \bar{A}(p) \Pi_1 + \Pi_1^T \bar{A}^T(p) P \Pi_1 < 0.$$

Полученное неравенство перепишем в виде

$$\Pi_2 \bar{A}(p) \Pi_1 + \Pi_1^T \bar{A}^T(p) \Pi_2 < 0.$$

Запишем в наших обозначениях левую часть последнего неравенства, получим

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ P_{11} & P_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(p) + B(p)D(p)C(p) & B(p)C(p) \\ B(p)C(p) & A(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & I \\ Q_{12}^T & 0 \end{pmatrix} = E(p).$$

Определим новые переменные

$$A^* = P_{11}(A(p) + B(p)D(p)C(p))Q_{11} + P_{12}B(p)C(p)Q_{11} + \\ + P_{11}B(p)C(p)Q_{12}^T + P_{12}A(p)Q_{12}^T,$$

$$B^* = P_{11}B(p)D(p) + P_{12}B(p),$$

$$C^* = D(p)C(p)Q_{11} + C(p)Q_{12}^T,$$

$$D^* = D(p).$$

Матрица  $E(p)$  с учетом введенных обозначений запишется в виде

$$E(p) = \begin{pmatrix} A(p)Q_{11} + B(p)C^*(p) & A(p) + B(p)D^*(p)C(p) \\ A^*(p) & P_{11}A(p) + B^*(p)C(p) \end{pmatrix},$$

и тогда условие устойчивости может быть записано как

$$E(p) + E^T(p) < 0 \quad (3.30)$$

вместе с ограничением  $P > 0$ . Это последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда  $\Pi_1^T P \Pi_1 > 0$  или

$$\Pi_2^T \Pi_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ P_{11} & P_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & I \\ Q_{12}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & I \\ I & P_{11} \end{pmatrix} > 0,$$

где  $P_{11}Q_{11} + P_{12}Q_{12}^T = I$ .

Предположим теперь, что система, зависящая от параметра  $p$ , описана TS-моделью с использованием  $r$  модельных правил:

$$\begin{pmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(p) \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & 0 \end{pmatrix},$$

где  $h(p)$  удовлетворяет условию  $h_i(p) \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^r h_i(p) = 1$ .

Матрицу  $E(p)$  перепишем в виде

$$E(p) = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$E_{11} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(p) h_j(p) ((A_i + B_i D(p) C_j) Q_{11} + B_i C(p) Q_{12}^T),$$

$$E_{12} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(p) h_j(p) (A_i + B_i D(p) C_j),$$

$$E_{21} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(p) h_j(p) (P_{11} (A_i + B_i D(p) C_j) Q_{11} + P_{12} B(p) C_i Q_{11} + P_{11} B_i C(p) Q_{12}^T + P_{12} A(p) Q_{12}^T),$$

$$E_{22} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(p) h_j(p) (P_{11} (A_i + B_i D(p) C_j) + P_{12} B(p) C_i).$$

С учетом того, что динамическая параллельно распределенная компенсация допускает квадратичную параметризацию [231], ТС-модель (3.23) представим в виде

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(p) h_j(p) A^{ij} x + \sum_{i=1}^r h_i B^i y. \quad (3.31)$$

Для ПРК-регулятора (3.24) выберем следующую форму

$$u = \sum_{i=1}^r h_i C^i x + D y. \quad (3.32)$$

С учетом (3.31), (3.32) используем следующие обозначения

$$\hat{A}(p) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(p) h_j(p) \tilde{A}^{ij}, \quad (3.33)$$

$$\hat{B}(p) = \sum_{i=1}^r h_i \tilde{B}^i, \quad (3.34)$$

$$\hat{C}(p) = \sum_{i=1}^r h_i \tilde{C}^i, \quad (3.35)$$

$$D(p) = D, \quad (3.36)$$

где  $\tilde{A}^{ij} = \frac{1}{2}(A^{ij} + A^{ji})$ ,  $\tilde{B}^i = B^i$ ,  $\tilde{C}^i = C^i$ ,  $\tilde{D}^i = D$ . Введем также обозначения

$\bar{A}_{ij}^* = \frac{1}{2}(A_{ij}^* + A_{ji}^*)$ ,  $\bar{B}_i^* = B_i^*$ ,  $\bar{C}_i^* = C_i$ ,  $\bar{D}_i^* = D$ . Условие устойчивости (3.11)

перепишется в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(p) h_j(p) ((E_{ij} + E_{ij}^T) + (E_{ji} + E_{ji}^T)) < 0.$$

**Теорема 3.8.** Система управления, описываемая ТС-моделью (3.23), стабилизируема посредством ПРК-регулятора, определяемого равенствами (3.33)–(3.36), если выполняются условия

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{1r} & \dots & T_{rr} \end{pmatrix} < 0, \quad (3.37)$$

$$\begin{pmatrix} E_{11}^{ij} + (E_{11}^{ij})^T + E_{11}^{ji} + (E_{11}^{ji})^T & E_{12}^{ij} + (E_{21}^{ij})^T + E_{12}^{ji} + (E_{21}^{ji})^T \\ (E_{12}^{ij})^T + E_{21}^{ij} + (E_{12}^{ji})^T + E_{21}^{ji} & E_{22}^{ij} + (E_{22}^{ij})^T + E_{22}^{ji} + (E_{22}^{ji})^T \end{pmatrix} < T_{ij} \quad \forall i \leq j, \quad (3.38)$$

где

$$\begin{aligned} E_{11}^{ij} + (E_{11}^{ij})^T + E_{11}^{ji} + (E_{11}^{ji})^T &= A_i^T Q_{11}^T + Q_{11} A_i + A_j^T Q_{11}^T + Q_{11} A_j + \\ &+ B_i \bar{C}_j^* + (B_i \bar{C}_j^*)^T + B_j \bar{C}_i^* + (B_j \bar{C}_i^*)^T \\ E_{12}^{ij} + (E_{21}^{ij})^T + E_{12}^{ji} + (E_{21}^{ji})^T &= A_i + A_j + B_i \bar{D}^* C_j + B_j \bar{D}^* C_i + 2(\bar{A}_{ij}^*)^T \\ E_{22}^{ij} + (E_{22}^{ij})^T + E_{22}^{ji} + (E_{22}^{ji})^T &= A_i P_{11}^T + P_{11} A_i^T + A_j P_{11}^T + P_{11} A_j^T + \\ &+ \bar{B}_i^* C_j + \bar{B}_j^* C_i + (\bar{B}_i^* C_j)^T + (\bar{B}_j^* C_i)^T. \end{aligned}$$

На основании теоремы 3.8 параметры (3.33)–(3.36) ПРК-регулятора переписуются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{ij} &= \frac{1}{2} P_{12}^{-1} (2\bar{A}_{ij}^* - P_{12} \tilde{B}^i C_j Q_{11} - P_{12} \bar{B}^{j*} C_i Q_{11} - P_{11} B_i \tilde{C}_j Q_{12}^T - \\ &- P_{11} B_j \tilde{C}_i Q_{12}^T - P_{11} (A_i + B_i \tilde{D} C_j) Q_{11} - P_{11} (A_j + B_j \tilde{D} C_i) Q_{11}) Q_{12}^{-1}, \\ \tilde{B}^i &= P_{12}^{-1} (\bar{B}_i^* - P_{11} B_i \tilde{D}), \\ \tilde{C}^i &= (\bar{C}_i^* - \tilde{D} C_i Q_{11}) Q_{12}^{-T}, \\ D &= \bar{D}^*, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $Q_{11}$  и  $Q_{12}$  удовлетворяют матричному равенству  $P_{11} Q_{11} + P_{12} Q_{12}^T = I$ .

Применение предложенного в настоящем разделе подхода к моделированию управляемой системы с переключением на примере маятниковой системы будет дано в разделе 4.2 главы 4.

## Глава 4.

# ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ СИСТЕМ ИНТЕЛЛЕКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 4.1. Основные аспекты исследования маятниковых систем

Изучение моделей управляемых маятниковых систем является актуальным направлением в теории динамических систем. Различные типы моделей маятниковых систем (модель простого маятника, модель перевернутого маятника, модель связанных маятников и др.) изучены в работах [20, 46, 57, 77а,д, 99, 147, 168, 172, 176, 207, 236]. Изучение динамической устойчивости физического маятника при гармонической вибрации точки его подвеса изложено в работе академика П.Л. Капицы [85]. В [175] академик В.Н. Челомей описал влияние динамических факторов, объясняющих «парадоксы механики, вызываемые вибрациями». В [42] рассмотрены динамические факторы, обеспечивающие устойчивость маятниковых систем, на примере маятника Капицы и маятника Челомея. В работе [181] рассмотрены вопросы динамической устойчивости неустойчивых состояний различных типов маятниковых систем, отмечены проблемы и пути их решения.

При изучении моделей управляемых маятниковых систем особое внимание уделяется изучению динамической модели перевернутого маятника. При исследовании устойчивости состояния равновесия перевернутого маятника возникает ряд проблем, на которые впервые указал в 1925 г. Б. Ван-дер-Поль [181]. В 1950 г. П.Л. Капица с помощью метода приближенного решения дал описание и экспериментально продемонстрировал эффект перевернутого маятника (маятника Капицы) [85].

В настоящее время возрастающий интерес к проблеме устойчивости модели перевернутого маятника объясняется значительным расширением класса реальных управляемых объектов и процессов, имеющих аналогичную математическую модель. В космической отрасли с позиции перевернутого маятника можно рассматривать модель ракеты на старте (рис. 4.1) или солнечные батареи искусственных спутников. Своеобразной интерпретацией объекта «каретка-перевернутый маятник» в энергетике служить модель управления скоростью реакции в ядерном реакторе.

С помощью модели перевернутого маятника можно описать динамику составных частей сложных управляемых технических систем, например, подсистемы звеньев роботов-манипуляторов, шагающих роботов (рис. 4.2) и других многосвязных управляемых систем (буксира,

толкающего баржи, локомотива-толкача, автопоезда с несколькими прицепами). Модель перевернутого маятника используют в биомеханике при изучении двигательных действий человека.



Рис. 4.1

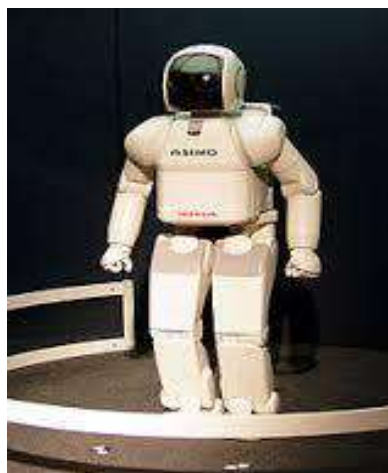


Рис. 4.2

Перевернутый маятник является упрощенным примером неустойчивых технических объектов с гироскопическим устройством: электрических самобалансирующихся самокатов – Segway и Epicycle (рис. 4.3), которые, являются компактным транспортным средством, позволяющим решить проблему пробок и экологической обстановки в городе.

Отметим, что перевернутый маятник являлся центральным элементом в конструкции ранних сейсмографов из-за их природной неустойчивости в результате реакции на любое нарушение [182].



Рис. 4.3

В работах [20, 40, 87, 150, 172, 182, 201, 236] модель перевернутого маятника используется в качестве эталона для тестирования алгоритмов

стабилизации и исследования устойчивости моделей управляемых динамических систем.

В работах Б.Р. Андриевских, П.Ю. Гузенко и А.Л. Фрадкова [11], Ю.Н. Бакаева [20], Д.В. Баландина и С.Ю. Городецкого [21], А.А. Колесникова [87], С.Ф. Николаева и Е.Л. Тонкова [135], Б.Т. Федосова [168], А.М. Формальского [172], С.А. Решмина и Ф.Л. Черноусько [150], Ф. Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколова [176], Р. Дорфа и Р. Бишопа [57] и других исследователей получен ряд теоретических и практических результатов по моделированию и изучению устойчивости перевернутого маятника на основе использования ПИД-регулятора. Однако остаются вопросы, которые мало изучены и требуют дополнительных исследований.

В большинстве случаев изучение устойчивости и разработка алгоритмов стабилизации моделей управляемых маятниковых систем базируется на линейных моделях перевернутого маятника, полученных на основе известных нелинейных моделей с помощью метода линеаризации. Указанный классический подход в реальной ситуации не всегда позволяет получить желаемые свойства модели. Компенсация нелинейностей и идеализация модели часто приводят к возникновению неустойчивой внутренней динамики, вследствие чего управляемый объект или процесс оказывается неустойчивым в реальных условиях. В [207] на основе линеаризованной модели перевернутого маятника получен линейный по координатам состояния алгоритм управления, обеспечивающий устойчивость маятникового механизма только при малых углах отклонения от положения равновесия. В [40] показано, что использование методов оптимального управления и кусочно-линейной аппроксимации нелинейной модели маятника позволяют найти решение задачи для больших начальных возмущений. Однако в этом случае сложно обеспечить устойчивость решения системы в связи с большим объемом вычислений. В [11] изучена задача стабилизации перевернутого маятника с одновременной стабилизацией подвижной платформы, к которой прикреплена ось маятника. Описание работы регулятора получено на основе дифференциальной модели и алгоритма скоростного градиента.

В [181] рассмотрен вопрос об устойчивости модели перевернутого маятника с подвижной точкой опоры с помощью комбинации метода вектора скорости и метода функций Ляпунова на основе нелинейной модели вида:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) - \frac{g}{L'} \sin \phi(t) + \frac{1}{L'} \ddot{s}(t) \cos \phi(t) + m_2(t) &= 0, \\ m_1 \ddot{d}(t) + k_T \dot{d}(t) &= k_b u, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $L'$  – эффективная длина маятника,  $L' = \frac{J + m_2 L^2}{m_2 L}$ ,  $J$  – момент инерции

относительно центра тяжести,  $L$  – расстояние между осью и центром тяжести,  $k_T$  – коэффициент трения,  $k_b$  – коэффициент передачи,  $u$  – управляющий крутящий момент. Присутствие в системе малоинерционных фильтров оценки производных и «быстрого» адаптера, реализующего сигнальную настройку, привело к возникновению разнотемповых процессов и позволило стабилизировать положение маятника при углах отклонения от вертикального положения только в диапазоне  $\pm \pi/3$ . Кроме того, возникли трудности в согласовании регулятора, адаптера и фильтров оценки производных.

В [166] исследование устойчивости модели перевернутого маятника проводится с помощью линеаризации модели, которая компенсируется внедрением в управляемую систему логического регулятора. Рассматривается комбинированное использование логического регулятора и ПИ-регулятора. Приведем краткое описание результатов данного подхода.

Уравнение движения перевернутого маятника (4.1) под действием управляющей силы  $u$  записано в эквивалентной форме [166]

$$(M + m)\ddot{d} + ml \cos \varphi \ddot{\varphi} = -D\dot{d} + ml \varphi^2 \sin \varphi - Gu. \quad (4.2)$$

В модели (4.2) принято допустимое ограничение на амплитуду управляющей силы  $|u| \leq 0,12$ .

Анализ условий устойчивости движения перевернутого маятника получен с помощью линеаризации уравнений модели (4.2) с использованием вектора состояний  $x = (d, \varphi, \dot{d}, \dot{\varphi})^T$ , где  $d$  – перемещение тележки,  $\varphi$  – угол отклонения маятника от вертикали. Получено уравнение вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix},$$

$$a_{32} = -m^2 l^2 g \beta^{-1}; \quad a_{33} = -D(\sigma + ml^2) \beta^{-1},$$

$$a_{34} = cml \beta^{-1}; \quad a_{42} = (M + m)ml g \beta^{-1},$$

$$a_{43} = Dml \beta^{-1}; \quad a_{44} = -(M + m)c \beta^{-1}, \quad b_4 = vlG \beta^{-1}; \quad b_3 = -(\sigma + ml^2) \beta^{-1},$$

$$\beta = \sigma(M + m) + Mml^2.$$



Исследование устойчивости линеаризованной модели (4.3) с логическим регулятором, описываемым линейным коэффициентом усиления в цепи обратной связи  $H = [0h_1, 0h_2]$ , сводится к исследованию полинома вида:

$$d[d^3(Q_{11} + Q_{12}h_2)d^2 + (Q_{21} + Q_{22}h_1)d + Q_{31}] = 0, \quad (4.4)$$

где  $Q_{11} = -a_{33} - a_{44}$ ,  $Q_{12} = b_4$ ,  $Q_{21} = a_{33}a_{44} - a_{42} - a_{34}a_{43}$ ,  $Q_{22} = b_4$ ,  $Q_{31} = -a_{43}a_{32} + a_{33}a_{42}$ .

Из (4.4) следует, что необходимым условием устойчивости является наличие отрицательного значения свободного члена

$$Q_{31} = \frac{Dm^3l^3g - D(\sigma + ml^2)(M + m)mlg}{\beta^2} < 0, \quad D \neq 0,$$

что означает наличие узких границ области устойчивости логического регулятора в данной ситуации. Для модели комбинированной управляемой маятниковой системы аналогичный полином имеет вид

$$d^2\left[d^3(Q_{11} + Q_{12}h_2)d^2 + (Q_{21} + kb_4h_1)d + Q_{31} + \frac{Kb_4h_1}{T}\right] = 0, \quad (4.5)$$

в который, помимо параметров логического регулятора, входят параметры ПИ-регулятора. Границы устойчивости модели комбинированной системы в области параметров  $(h_2, h_1)$  для полинома (4.5) являются более широкими по сравнению с границами устойчивости модели управляемой системы с логическим регулятором.

Аналогичный результат о комбинированном использовании логического регулятора и линейной обратной связи можно получить при исследовании устойчивости перевернутого маятника, который переводится в вертикальное состояние из устойчивого положения при ограничении на допустимый ход каретки. При этом перевод из устойчивого положения в вертикальное неустойчивое положение осуществляется логическим регулятором, а удержание в устойчивом вертикальном положении маятника осуществляется организацией линейной обратной связи на традиционных моделях регулятора.

В [139, 145] рассмотрен подход к построению моделей управляемых систем, базирующийся на логико-лингвистическом описании их поведения. Для моделирования управляемой системы достаточно иметь только качественное описание ее поведения в виде правил, заданных лингвистическими переменными. На практике описанный подход ограничивается случаями несложных объектов, для которых число управляющих величин не превышает двух. Применение указанного подхода к моделированию перевернутого маятника дано в работах Г.Н. Лебедева [102], А.П. Ротштейна и Д.И. Кательникова [151]. В [151] проектирование основано на построении зависимости управляющего

воздействия  $u$ , вырабатываемого логическим регулятором, от угла отклонения  $x_1$  перевернутого маятника и от его угловой скорости  $x_2$ . База правил логического регулятора представлена 25 правилами вида:

$\Pi_1$ : *если*  $x_1 = \text{ОБ}$  и  $x_2 = \text{ОБ}$ , *то*  $u = \text{оБО}$ ,

где ОБ, оБО – отрицательная большая и очень большая отрицательная – значения (термы) лингвистических переменных.

В [102] для моделирования управляемого перевернутого маятника использовано четыре лингвистических переменных: угол отклонения, скорость вращения, ошибка положения и управляющее воздействие. Для первой и четвертой переменных введено по семь термов, а для остальных по пять. База правил логического регулятора представлена 15 правилами вида *если ... то*.

Отметим, что в [99] рассмотрено применение логического регулятора для моделирования математического маятника переменной длины. Предложен критерий качества управления, базирующийся на принципах термодинамики необратимых процессов. С помощью указанного критерия разработаны различные варианты баз знаний, позволяющих качественно осуществлять управление неустойчивым объектом в условиях неопределенности. Построение устойчивой модели маятника переменной длины выполнено на основе известных дифференциальных уравнений, описывающих его движение под действием управляющих сил.

Построение модели перевернутого маятника с логическим регулятором на основе известной модели, заданной в виде нелинейных дифференциальных уравнений, дано в [57, 231, 236]. Рассматривается математическая модель вида [231]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g \sin(x_1(t)) - amlx_2^2(t) \sin(2x_1(t)) / 2 - a \cos(x_1(t))u(t)}{4l / 3 - aml \cos^2(x_1(t))}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $x_1(t)$  – угол отклонения маятника от вертикали,  $x_2(t)$  – угловая скорость,  $t$  – время;  $u(t)$  – управляющая сила, приложенная к каретке;  $l$  – длина стержня маятника;  $m$  – масса маятника,  $M$  – масса каретки.  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup> – гравитационная постоянная,  $a = 1/(m + M)$ .

С помощью аппроксимации, описанной в разделе 3.2, исходная модель (4.6) приводится к ТС-модели вида (3.9). Анализ устойчивости может быть выполнен с помощью функций Ляпунова и свойств ЛМН. В [57] модель (4.6) дополнена 16 правилами вида *если ... то*. В [231] модель с 16 правилами редуцирована к виду ТС-модели, представленной четырьмя правилами вида:

$\Pi_1$ : *если*  $x_1(t)$  в окрестности 0, *то*  $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$ .

$$\text{П}_2: \text{если } x_1(t) \text{ в окрестности } \pm \pi/2 (|x_1| < \pi/2), \\ \text{то } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t). \quad (4.7)$$

$$\text{П}_3: \text{если } x_1(t) \text{ в окрестности } \pm \pi/2 (|x_1| > \pi/2), \\ \text{то } \dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t).$$

$$\text{П}_4: \text{если } x_1(t) \text{ в окрестности } \pi, \text{ то } \dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t),$$

где  $A_i, B_i$  – матрицы параметров маятника,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Результаты численного анализа модели (4.7) работы [231] показали эффективность синтезированной модели по сравнению с классической моделью, а также с моделью работы [57], представленной 16 правилами. В [231] показано также, что устойчивость модели (4.7) и функционирование логического регулятора  $u(t)$  не имеет место при  $\frac{\pi}{2} \leq |x_1(t)| \leq \pi$ . Также в работе [231] условия устойчивости модели (4.7) представлены в виде громоздкого набора ЛМН, что на практике затрудняет построение регулятора.

Отметим, что в [213] рассмотрена аппроксимация нелинейной модели, описывающей динамику перевернутого маятника, с помощью многочлена Тейлора четвертого порядка. Показано преимущество указанного подхода по сравнению с методом линеаризации дифференциальных уравнений перевернутого маятника в окрестности положения равновесия.

Изучение моделей управляемых маятниковых систем является актуальным при моделировании подъемно-транспортных механизмов. В частности, порталный кран – это пример двухмассовой системы маятникового типа, состоящей из тележки и гибкой подвески с грузом [32, 77г, 80, 97]. Портальный кран используется при розливе жидкого металла на металлургических комбинатах, при перемещении грузов (контейнеров) в ходе загрузки/разгрузки судов на открытых портовых участках, при выполнении внутрицеховых работ по перемещению габаритного груза в стесненных условиях, при загрузке-разгрузке опасных материалов на ядерных установках [32, 97, 142]. Вопросы моделирования порталного крана и изучения устойчивости с помощью ПИД-регуляторов изучались в работах Д.В. Баландина и С.Ю. Городецкого [22], Д.Е. Бортякова и А.Н. Орлова [32], А.П. Кузнецова и А.В. Маркова [97], М.Д. Полосина [142] и других исследователей.

Анализ работ по моделированию и изучению устойчивости управляемых маятниковых систем отечественных и зарубежных исследователей, проведенный в настоящем разделе, показывает преимущество подходов, базирующихся на правилах логического вывода и логических регуляторах, над классическими методами моделирования.

Неклассическая обобщающая формализация маятниковой системы, описываемой уравнениями (4.6), связана с построением ТС-модели. Переход от описания модели маятниковой системы, задаваемого с помощью (4.6), к построению соответствующей ТС-модели, базируется на представлении условий устойчивости в виде ЛМН. Увеличение количества числа правил в ТС-модели, с одной стороны, позволяет более точно описать процессы, происходящие в маятниковой системе, с учетом постоянно изменяющихся внешних воздействий. С другой стороны, большое количество числа правил затрудняет процедуру получения условий устойчивости и проведения численного анализа синтезированной модели даже с помощью вычислительных пакетов. ТС-модель перевернутого маятника (4.7) требует дальнейшей доработки, связанной не только с уменьшением числа правил, но и с расширением интервала устойчивости перевернутого маятника.

Несмотря на то, что существуют методы анализа устойчивости моделей динамических систем с логическими регуляторами, которые могут быть применимы к исследованию моделей маятниковых систем, изучение их устойчивости остается малоизученным направлением. Одним из перспективных направлений в решении этой задачи является применение метода функций Ляпунова в сочетании с другими методами. Особый интерес представляет дивергентный метод [58в, 116а], применение которого к исследованию моделей маятниковых систем с логическими регуляторами еще не было изучено. Дивергентные условия могут послужить основой для разработки алгоритмов исследования устойчивости указанных моделей и использоваться в дальнейшем для создания компьютерных программ.

При компьютерном моделировании управляемых маятниковых систем возникает ряд трудностей, связанных с наличием квазилинейных дифференциальных уравнений [170, 173]. Ряд известных численных методов (метод Рунге–Кутты, метод Адамса и др.) не позволяет выполнить для указанных моделей адекватные численные эксперименты [38, 53–55, 89]. Это обусловлено ограниченной областью устойчивости решений, полученных традиционными численными методами, и быстротой протекания процессов в управляемых системах [20]. В работе В.В. Дикусара, М. Кошки, А. Фигуры [54] изложены основные аспекты применения численных методов для нахождения решений жестких дифференциальных уравнений. В [53] показано применение методов теории управления при численном решении жестких стохастических уравнений. Для решения систем линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений целесообразным является применение алгоритма Лоусона [216], преобразующего исходную систему

дифференциальных уравнений в систему, для нахождения решений которой можно будет использовать численный метод Рунге–Кутты. Указанный алгоритм использовался ранее С.Ф. Николаевым и Е.Л. Тонковым для исследования моделей управляемых маятниковых систем с ПИД-регуляторами [135]. Для исследования моделей маятниковых систем с логическими регуляторами алгоритм Лоусона ранее не применялся.

## 4.2. ТС-модель перевернутого маятника и ее модификации

В настоящем разделе рассмотрен альтернативный подход к построению модели перевернутого маятника, связанный с аппроксимацией с помощью ТС-модели вида (3.9). Выполнена модификация синтезированной ТС-модели перевернутого маятника (число правил в модели уменьшено с шестнадцати до двух). Построен стабилизирующий логический регулятор и определена функция Ляпунова. Осуществлен синтез ТС-модели маятниковой системы с переключением.

Как отмечалось в разделе 3.2 главы 3, ТС-модель является универсальным аппроксиматором в том смысле, что гладкая нелинейная управляемая модель при ряде принятых ограничений может быть аппроксимирована с помощью ТС-модели. ТС-модель описывается нечеткими правилами импликации, которые представляют собой локальные линейные отношения «вход-выход» нелинейной системы. Применяемые правила являются нечеткими в части если, в части то содержатся дифференциальные уравнения, описывающие динамику процесса.

Динамическая ТС-модель управляемой системы имеет вид [230]:

$P_i$ : если  $z_1(t)$  есть  $M_{i1}$  и ... и  $z_p(t)$  есть  $M_{ip}$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ \text{то} \quad y(t) &= C_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния,  $u(t) \in R^m$  – вектор входа,  $y(t) \in R^q$  – вектор выхода,  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $C_i \in R^{q \times n}$ ,  $r$  – число правил модели,  $z(t) = (z_1(t), \dots, z_p(t))$  – вектор известных переменных посылок, которые могут быть функциями внешних возмущений или времени, фазовых переменных, и которые характеризуются лингвистической переменной «величина»,  $M_{ij}$  – значение переменной «величина», выбираемое из множества терминов  $T_j$ . Соответствие между множеством терминов  $T_j$  и значениями  $z_j(t)$  характеризуется степенью  $M_{ij}(z_j(t))$  применимости  $M_{ij}$  к  $z_j(t)$ . Предполагается, что исходные переменные не являются функциями от входящих переменных  $u(t)$ .

Каждое последующее линейное уравнение, представленное в виде  $\dot{x} = A_i x(t) + B_i u(t)$ , в консеквентной части правила  $\Pi_i$  называется подсистемой. Каждому правилу  $\Pi_i$  соответствует уровень истинности  $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$ . Векторы  $\dot{x}(t)$  и  $y(t)$  уравнений (4.8) представимы в виде

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \quad (4.9)$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t), \quad (4.10)$$

где  $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$ .

Так как  $\begin{cases} \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0, \\ w_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{cases}$  то  $\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \\ h_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{cases}$

Воспользуемся вышеизложенным для синтеза ТС-модели перевернутого маятника на основе известной дифференциальной модели.

Перевернутый маятник на каретке представлен на рис. 4.4.

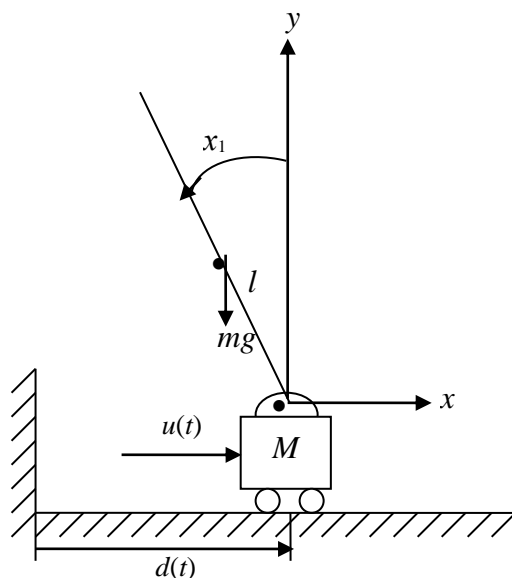


Рис. 4.4

Приняты следующие обозначения:  $x_1$  – угол отклонения маятника от вертикали,  $u(t)$  – сила, приложенная к тележке,  $l$  – длина стержня, удерживающего маятник,  $m$  – масса маятника,  $M$  – масса каретки,  $d(t)$  – перемещение каретки  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – гравитационная постоянная,  $t$  – время.

Каретка должна двигаться таким образом, чтобы маятник всегда занимал вертикальное положение.

Уравнения, описывающие поведение перевернутого маятника под действием управляющей силы, имеют вид [231]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g \sin(x_1(t)) - amlx_2^2(t) \sin(2x_1(t)) / 2 - a \cos(x_1(t))u(t)}{4l/3 - aml \cos^2(x_1(t))}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $x_2$  – угловая скорость,  $a = 1/(m + M)$ .

Уравнение (4.11) можно представить в виде

$$\dot{x}_2(t) = z_1(t) \left( gz_2(t) - \frac{aml}{2} z_3(t)x_2(t) - az_4(t)u(t) \right),$$

где  $z_1(t) = \frac{1}{4l/3 - aml \cos^2(x_1(t))}$ ,  $z_2(t) = \sin(x_1(t))$ ,  $z_3(t) = x_2(t)\sin(2x_1(t))$ ,

$z_4(t) = \cos(x_1(t))$ .

Заметим, что при  $x_1(t)$  равном,  $-\pi/2$  или  $\pi/2$ , маятник не стабилизируем. Предположим, что  $x_1(t) \in [-\pi/2 + \varepsilon, \pi/2 - \varepsilon]$ , где  $\varepsilon$  – малое положительное число такое, что значение  $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$  близко к  $-\frac{\pi}{2}$  и

значение  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$  близко к  $\frac{\pi}{2}$ . Синтезировать ТС-модель перевернутого

маятника можно с помощью соответствующих замен величин  $z_1(t)$ – $z_4(t)$ . Применяя метод секторной нелинейности [229], получим

$$\max_{x_1(t)} z_1(t) = \frac{1}{4l/3 - aml\beta^2} = q_1, \quad \min_{x_1(t)} z_1(t) = \frac{1}{4l/3 - aml} = q_2, \quad \text{где}$$

$\beta = \cos(\pi/2 - \varepsilon)$ . Тогда  $z_1(t)$  можно записать в виде

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^2 E_i(z_1(t))q_i, \quad (4.12)$$

где  $E_1(z_1(t)) = \frac{z_1(t) - q_2}{q_1 - q_2}$ ,  $E_2(z_1(t)) = \frac{q_1 - z_1(t)}{q_1 - q_2}$  – функции принадлежности,

обладающие свойством  $E_1(z_1(t)) + E_2(z_1(t)) = 1$ .

Величины  $z_2(t)$ ,  $z_3(t)$ ,  $z_4(t)$  с функциями принадлежности  $L_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$  соответственно представим в аналогичном виде:

$$z_2(t) = \sin(x_1(t)) = \left( \sum_{i=1}^2 L_i(z_2(t))b_i \right) x_1(t), \quad (4.13)$$

$$z_3(t) = x_2(t)\sin(2x_1(t)) = \sum_{i=1}^2 G_i(z_3(t))c_i, \quad (4.14)$$

$$z_4(t) = \cos(x_1(t)) = \sum_{i=1}^2 H_i(z_4(t))d_i, \quad (4.15)$$

где функции принадлежности  $L_i, G_i, H_i$  определены соответствующим образом.

Исходя из общего вида модели (4.8), базовых уравнений (4.11) и соотношений (4.12)–(4.15), ТС-модель перевернутого маятника можно записать в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 E_i(z_1(t)) L_j(z_2(t)) G_k(z_3(t)) H_l(z_4(t)) \times \\ &\times \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g \cdot q_i b_j & -\frac{aml}{2} q_i c_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \cdot q_i d_l \end{pmatrix} u(t) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 E_i(z_1(t)) L_j(z_2(t)) G_k(z_3(t)) H_l(z_4(t)) (A_{ijkl} x(t) + B_{ijkl} u(t)). \end{aligned}$$

Объединив суммирование, получим

$$\dot{x}(t) = \sum_{r=1}^{16} h_r(z(t)) (A_r^* x(t) + B_r^* u(t)), \quad (4.16)$$

где  $A_r^* = A_{ijkl} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g q_i b_j & -\frac{aml}{2} q_i c_k \end{pmatrix}$ ,  $B_r^* = B_{ijkl} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a q_i d_l \end{pmatrix}$ ,  $i, j, k, l \in \{1, 2\}$ ,

$r = l + 2(k-1) + 4(j-1) + 8(i-1)$ ,  $h_r(z(t)) = E_i(z_1(t)) L_j(z_2(t)) G_k(z_3(t)) H_l(z_4(t))$ .

Согласно уравнению (4.16), получим, что в базе правил, состоящей из 16 правил, содержатся правила следующего вида:

П<sub>1</sub>: если  $z_1(t)$  есть П и  $z_2(t)$  есть Н и  $z_3(t)$  есть П и  $z_4(t)$  есть Б,  
то  $\dot{x}(t) = A_1^* x(t) + B_1^* u(t)$ .

П<sub>2</sub>: если  $z_1(t)$  есть П и  $z_2(t)$  есть Н и  $z_3(t)$  есть П и  $z_4(t)$  есть М,  
то  $\dot{x}(t) = A_2^* x(t) + B_2^* u(t)$ .

П<sub>3</sub>: если  $z_1(t)$  есть П и  $z_2(t)$  есть Н и  $z_3(t)$  есть О и  $z_4(t)$  есть Б,  
то  $\dot{x}(t) = A_3^* x(t) + B_3^* u(t)$ .

П<sub>4</sub>: если  $z_1(t)$  есть П и  $z_2(t)$  есть Н и  $z_3(t)$  есть О и  $z_4(t)$  есть М,  
то  $\dot{x}(t) = A_4^* x(t) + B_4^* u(t)$ .

П<sub>5</sub>: если  $z_1(t)$  есть П и  $z_2(t)$  есть не Н и  $z_3(t)$  есть П и  $z_4(t)$  есть Б,  
то  $\dot{x}(t) = A_5^* x(t) + B_5^* u(t)$ .

П<sub>6</sub>: если  $z_1(t)$  есть П и  $z_2(t)$  есть не Н и  $z_3(t)$  есть П и  $z_4(t)$  есть М,  
то  $\dot{x}(t) = A_6^* x(t) + B_6^* u(t)$ .

П<sub>7</sub>: если  $z_1(t)$  есть П и  $z_2(t)$  есть не Н и  $z_3(t)$  есть О и  $z_4(t)$  есть Б,  
то  $\dot{x}(t) = A_7^* x(t) + B_7^* u(t)$ .



П<sub>8</sub>: *если*  $z_1(t)$  *есть* П и  $z_2(t)$  *есть* не Н и  $z_3(t)$  *есть* О и  $z_4(t)$  *есть* М,  
*то*  $\dot{x}(t) = A_8^*x(t) + B_8^*u(t)$ .

П<sub>9</sub>: *если*  $z_1(t)$  *есть* О и  $z_2(t)$  *есть* Н и  $z_3(t)$  *есть* П и  $z_4(t)$  *есть* Б,  
*то*  $\dot{x}(t) = A_9^*x(t) + B_9^*u(t)$ .

П<sub>10</sub>: *если*  $z_1(t)$  *есть* О и  $z_2(t)$  *есть* Н и  $z_3(t)$  *есть* П и  $z_4(t)$  *есть* М,  
*то*  $\dot{x}(t) = A_{10}^*x(t) + B_{10}^*u(t)$ .

П<sub>11</sub>: *если*  $z_1(t)$  *есть* О и  $z_2(t)$  *есть* Н и  $z_3(t)$  *есть* О и  $z_4(t)$  *есть* Б,  
*то*  $\dot{x}(t) = A_{11}^*x(t) + B_{11}^*u(t)$ .

П<sub>12</sub>: *если*  $z_1(t)$  *есть* О и  $z_2(t)$  *есть* Н и  $z_3(t)$  *есть* О и  $z_4(t)$  *есть* М,  
*то*  $\dot{x}(t) = A_{12}^*x(t) + B_{12}^*u(t)$ .

П<sub>13</sub>: *если*  $z_1(t)$  *есть* О и  $z_2(t)$  *есть* не Н и  $z_3(t)$  *есть* П и  $z_4(t)$  *есть* Б,  
*то*  $\dot{x}(t) = A_{13}^*x(t) + B_{13}^*u(t)$ .

П<sub>14</sub>: *если*  $z_1(t)$  *есть* О и  $z_2(t)$  *есть* не Н и  $z_3(t)$  *есть* П и  $z_4(t)$  *есть* М,  
*то*  $\dot{x}(t) = A_{14}^*x(t) + B_{14}^*u(t)$ .

П<sub>15</sub>: *если*  $z_1(t)$  *есть* О и  $z_2(t)$  *есть* не Н и  $z_3(t)$  *есть* О и  $z_4(t)$  *есть* Б,  
*то*  $\dot{x}(t) = A_{15}^*x(t) + B_{15}^*u(t)$ .

П<sub>16</sub>: *если*  $z_1(t)$  *есть* О и  $z_2(t)$  *есть* не Н и  $z_3(t)$  *есть* О и  $z_4(t)$  *есть* М,  
*то*  $\dot{x}(t) = A_{16}^*x(t) + B_{16}^*u(t)$ .

В приведенных правилах использованы следующие лингвистические значения входящих переменных: П – положительная, О – отрицательная, Н – нулевая, М – малая, Б – большая.

Анализ устойчивости полученной ТС-модели (4.16) оказывается затруднительным в связи с большим числом правил модели. Для упрощения исследования устойчивости применим охарактеризованную в разделе 3.2 универсальную аппроксимацию. Указанный прием приведет к редукации числа правил модели к меньшему их числу без потери информативности и соответственно к уменьшению набора условий устойчивости [221].

Известно [446, 70, 155, 188, 218, 231], что для построения логических регуляторов используется метод параллельной распределенной компенсации (ПРК). Указанный метод является ключевой технологией, обеспечивающей заданную точность воспроизведения динамических задаваемых воздействий. Метод ПРК заключается в том, что каждое правило регулятора строится из соответствующего правила ТС-модели. Образующийся общий логический регулятор представляет

собой комбинацию линейных регуляторов. При этом логический регулятор использует те же нечеткие множества, что и модель в исходных частях, и в расчет берется только локальная эффективность каждого правила. В [44а, 188, 218, 231] дается подробное описание изучения моделей управляемых динамических систем с логическими регуляторами указанным методом.

Приведем предварительные рассуждения, необходимые для синтеза логического регулятора и получения условий устойчивости модифицированной модели.

Для модели (4.8), (4.9) логический ПРК-регулятор описывается следующим образом [231]:

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t))F_i x(t), \quad (4.17)$$

где  $F_i$  – матрица коэффициентов усиления. Согласно (4.8), (4.9) и (4.17), требуется найти соответствующие значения  $F_i$ , обеспечивающие устойчивость состояния равновесия уравнения (4.9).

Для уравнения вида  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  функция Ляпунова имеет вид  $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ ,  $V(0) = 0$ , и удовлетворяет условиям:  $V(x(t)) > 0 \forall x(t) \neq 0$ , и  $\dot{V}(x(t)) < 0 \forall x(t) \neq 0$  [112а, 153]. Нахождение функции Ляпунова заключается в отыскании соответствующей положительно определенной матрицы  $P$ .

Подставляя (4.17) в (4.9), получим уравнение вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - B_i F_j)x(t). \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r h_i(z(t))h_i(z(t))G_{ii}x(t) + \\ & + 2\sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t))h_j(z(t))\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)x(t), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ ,  $G_{ii} = A_i - B_i F_i$ .

Достаточные условия асимптотической устойчивости определяются следующей теоремой.

**Теорема 4.1** [231]. Состояние равновесия уравнения (4.19) устойчиво, если существует общая для подсистем положительно определенная матрица  $P$  такая, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0, \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right) - P \leq 0, \quad i < j, \quad h_i \cap h_j \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Если число  $r$  правил велико, то нахождение общей матрицы  $P$ , удовлетворяющей условиям теоремы 4.1, является затруднительным. В [231] показано, что задачу нахождения общей матрицы  $P$  можно решить численно, т.е. условия устойчивости в теореме 4.1 можно представить в виде ЛМН. Отметим, что в [129] приведены основные положения теории ЛМН, показан переход от теоремы Ляпунова к условию устойчивости в форме ЛМН. В [65г] на основе свойств ЛМН разработаны алгоритмы стабилизации управляемых систем.

Задача построения ПРК-регулятора для уравнения (4.9) формулируется следующим образом. Найти  $X > 0$  и  $M_i, i = 1, 2, \dots, r$ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{pmatrix} X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{pmatrix} > 0, \\ \begin{pmatrix} X & \frac{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i}{2} \\ \frac{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i}{2} & X \end{pmatrix} \geq 0, \\ i < j, h_i \cap h_j \neq \emptyset,$$

где  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$ . В этом случае обратная связь  $F_i$  и общая матрица  $P$  имеют вид  $P = X^{-1}$ ,  $F_i = M_i X^{-1}$ , а функция Ляпунова задается в виде  $V(x(t)) = x(t) X^{-1} x(t)$ . Однако даже при использовании ЛМН и при увеличении числа правил  $r$  затрудняется поиск общей для всех подсистем положительно определенной матрицы  $P$ . В этом случае эффективным является получение условий устойчивости с использованием функции Ляпунова следующего вида.

Функция вида

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) x^T(t) P_i x(t), \quad (4.20)$$

где  $P_i$  – положительно определенная матрица, определяет функцию Ляпунова для уравнения (4.9), если производная по времени от  $V(x(t))$  всегда отрицательна при  $x(t) \neq 0$  [221].

Рассмотрим следующие условия.

**Условие 4.1.** Производная по времени функции  $h_i(z(t))$  ограничена сверху, т.е.

$$|\dot{h}_i(z(t))| \leq \phi_i, i = 1, 2, \dots, r, \quad (4.21)$$

где  $\phi_i$  – заданные положительные постоянные.

**Условие 4.2.** Локальные квадратичные функции Ляпунова  $x^T(t) P_i x(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , удовлетворяют соотношениям пропорциональности так, что  $P_j = \alpha_{ij} P_i$ ,  $i, j = 1, \dots, r$ , где  $\alpha_{ij} \neq 1$  и  $\alpha_{ij} > 0$  при  $i \neq j$ , и  $\alpha_{ij} = 1$  при  $i = j$ .

**Теорема 4.2** [188]. Пусть выполнены условия 4.1 и 4.2. Тогда для уравнения (4.18) можно построить ПРК-регулятор (4.17), если существуют коэффициенты  $\phi_\rho$ ,  $\alpha_{ij}$ ,  $i, j, \rho = 1, 2, \dots, r$ , положительно определенные матрицы  $P_1, P_2, \dots, P_r$  и матрицы  $F_1, F_2, \dots, F_r$  такие, что

$$P_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (4.22)$$

$$\sum_{\rho=1}^r \phi_\rho P_\rho + (G_{ij}^T P_i + P_i G_{ij}) < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (4.23)$$

$$\left( \frac{G_{jk} + G_{kj}}{2} \right)^T P_i + P_i \left( \frac{G_{jk} + G_{kj}}{2} \right) < 0 \quad (4.24)$$

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad j < k,$$

где  $G_{jk} = A_j - B_j F_k$  и  $G_{jj} = A_j - B_j F_j$ .

Теорема 4.2 получена при наличии условий (4.21), поэтому возникает необходимость выбора постоянных  $\phi_i$  в этих условиях. Для построения ПРК-регулятора будем использовать условия (4.21), преобразованные к виду ЛМН, и условия (4.22)–(4.24) теоремы 4.2. Из теоремы 4.1 и теоремы 4.2 вытекает справедливость следующей теоремы.

**Теорема 4.3** [188]. Пусть известны  $x(0)$  и  $z(0)$ . Условия (4.21) выполняются, если существуют положительно определенные матрицы  $P_1, P_2, \dots, P_r$  и матрицы  $F_1, F_2, \dots, F_r$ , удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{pmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & P^{-1} \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$\begin{pmatrix} \phi_\rho P_i & W_{ij\rho l}^T \\ W_{ij\rho l}^T & \phi_\rho I \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall i, j, \rho \in \{1, 2, \dots, r\}, \forall l,$$

где  $W_{ij\rho l} = \xi_{\rho l} (A_i - B_i F_j)$ .

При построении ПРК-регулятора предполагается определение локальных коэффициентов усиления  $F_i$  для уравнения (4.18). Зададим  $X_i = P_i^{-1}$ ,  $F_i = M_i X_i^{-1}$ ,  $X_i = \alpha_{ij} X_j$ , для  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , где  $\alpha_{ij} \neq 1$  и  $\alpha_{ij} > 0$  при  $i \neq j$ ,  $\alpha_{ij} = 1$  при  $i = j$ . С учетом  $\phi_\rho > 0$  и  $\alpha_{ij}$  при  $i, j, \rho = 1, 2, \dots, r$ , получим следующие условия устойчивости модели (4.8) на базе ЛМН:

$$X_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad (4.25)$$

$$\sum_{\rho=1}^r \phi_\rho X_\rho + X_i A_j^T - \alpha_{ij} M_j^T B_j^T + A_j X_i - \alpha_{ij} B_j M_j < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & X_i A_j^T - \alpha_{ik} M_k^T B_k^T + X_i A_k^T - \alpha_{ij} M_j^T B_k^T + \\ & + A_j X_i - \alpha_{ik} B_j M_k + A_k X_i - \alpha_{ij} B_k M_j < 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

для каждого заданных  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, r\}$  таких, что  $j < k$ ;

$$\begin{pmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & X_i \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (4.28)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_\rho X_i & W_{ij\rho}^T \\ W_{ij\rho} & \phi_\rho I \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall i, j, \rho \in \{1, 2, \dots, r\}, \forall l, \quad (4.29)$$

где  $W_{ij\rho l} = \xi_{\rho l} (A_i X_i - \alpha_{ij} B_i M_j)$ .

Сформулированные условия (4.25)–(4.29) в дальнейшем будут использованы для получения условий устойчивости модели (4.16).

Рассмотрим процедуру модификации модели перевернутого маятника (4.16) на основе выше приведенных рассуждений. Применим метод аппроксимации к уравнениям (4.11). При  $x_1(t)$ , близком к нулю, модель (4.11) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{gx_1(t) - au(t)}{\frac{4l}{3} - aml}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

При  $x_1(t)$ , близком к  $\pm \pi/2$ , нелинейные уравнения (4.11) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{2gx_1(t)/\pi - a\beta u(t)}{\frac{4l}{3} - aml\beta^2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Заметим, что модели (4.30) и (4.31) являются линейными. Аппроксимация нелинейных членов модели (4.11) рационально выбранными линейными членами с учетом (4.30) и (4.31) позволяет редуцировать число правил в ТС-модели перевернутого маятника (4.16) до двух ( $r = 2$ ). С учетом вышесказанного, модифицированная ТС-модель перевернутого маятника (4.16) примет вид:

$$\begin{aligned} \text{П}_1: \text{если } x_1(t) \text{ в окрестности } 0, \\ \text{то } \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t). \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \text{П}_2: \text{если } x_1(t) \text{ в окрестности } \pm \pi/2 (|x_1| < \pi/2), \\ \text{то } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{4l/3 - aml} & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{pmatrix}, \beta = \cos(\pi/2 - \varepsilon), \varepsilon - \text{малое положительное число} \end{aligned}$$

такое, что разность  $\pi/2 - \varepsilon$  близка к  $\pi/2$ .

Функции принадлежности  $h_1$  и  $h_2$  для правил 1 и 2 модели (4.32) представлены на рис. 4.5.

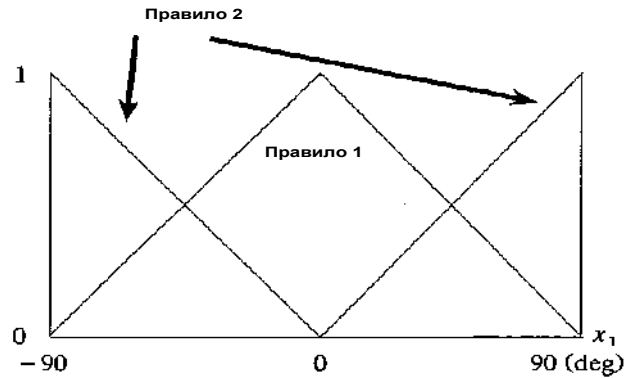


Рис. 4.5

Использование функций  $h_1$  и  $h_2$  треугольного вида обусловлено типом неопределенности в части *если* правил ТС-модели (4.32) [191]. В [103] приведена классификация функций принадлежности и дана конкретизация их применения для задания неопределенностей различного типа. Методы построения указанных функций приведены в [183]. В [131] дан сравнительный анализ различных типов функций принадлежности. Преимущество функций принадлежности треугольного типа перед другими видами функций принадлежности обусловлено простотой их вычислительной реализации, и тем, что они позволяют сформировать модели системы, обладающие хорошими аппроксимирующими свойствами. Таким образом, выбор типа функций принадлежности существенно упрощает соответствующие аналитические и численные расчеты в контексте решаемой задачи.

Для модели (4.32) ПРК-регулятор определяется также двумя правилами следующего вида:

$\Pi_1$ : если  $x_1(t)$  в окрестности 0,  
то  $u(t) = -F_1 x(t)$ .

$\Pi_2$ : если  $x_1(t)$  в окрестности  $\pm \pi/2$  ( $|x_1| < \pi/2$ ),  
то  $u(t) = -F_2 x(t)$ .

Функция Ляпунова, определяемая уравнением (4.20), для модели (4.32) запишется в виде  $V(x(t)) = h_1(x_1(t))x^T(t)P_1x(t) + h_2(x_1(t))x^T(t)P_2x(t)$ , где  $P_1, P_2$  – положительно определенные матрицы. При этом предполагаем, что выполняются следующие условия:

1)  $|\dot{h}_1(x_1(t))| \leq \phi_1$  и  $|\dot{h}_2(x_1(t))| \leq \phi_2$ , где  $\phi_1, \phi_2$  – положительные постоянные;

2) локальные квадратичные функции Ляпунова  $x^T(t)P_1x(t)$  и  $x^T(t)P_2x(t)$  удовлетворяют соотношениям пропорциональности:  $P_1 = \alpha_{21}P_2, P_2 = \alpha_{12}P_1$ , где  $\alpha_{21} > 0, \alpha_{12} > 0$ .

Тогда по теореме 4.2 для модели (4.32) перевернутого маятника можно построить ПРК-регулятор, если существуют коэффициенты  $\phi_1, \phi_2, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ , положительно определенные матрицы  $P_1, P_2$  и матрицы  $F_1, F_2$  такие, что

$$\phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + (G_{11}^T P_1 + P_1 G_{11}) + (G_{22}^T P_2 + P_2 G_{22}) < 0, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{G_{12} + G_{21}}{2} \right)^T P_1 + P_1 \left( \frac{G_{12} + G_{21}}{2} \right) + \\ & + \left( \frac{G_{12} + G_{21}}{2} \right)^T P_2 + P_2 \left( \frac{G_{12} + G_{21}}{2} \right) < 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где  $G_{12} = A_1 - B_1 F_2$  и  $G_{11} = A_1 - B_1 F_1, G_{21} = A_2 - B_2 F_1, G_{22} = A_2 - B_2 F_2$ .

Условия (4.33) и (4.34) являются конкретизацией условий (4.21) и (3.22)–(3.24) для модели (3.32) с числом правил  $r = 2$ .

Зададим  $X_1 = P_1^{-1}, X_2 = P_2^{-1}, F_1 = M_1 X_1^{-1}, F_2 = M_2 X_2^{-1}, X_1 = \alpha_{12} X_2, X_2 = \alpha_{21} X_1$ . Условия устойчивости (4.25)–(4.29) для модифицированной модели (4.32) перевернутого маятника с учетом  $\phi_1 > 0, \phi_2 > 0$  и коэффициентов  $\alpha_{21} > 0, \alpha_{12} > 0$  на базе ЛМН примут вид:

$$X_1 > 0, X_2 > 0; \quad (4.35)$$

$$\phi_1 X_1 + \phi_2 X_2 + X_1 A_2^T - \alpha_{12} M_2^T B_2^T + A_2 X_1 - \alpha_{12} B_2 M_2 < 0; \quad (4.36)$$

$$\phi_1 X_1 + \phi_2 X_2 + X_2 A_1^T - \alpha_{21} M_1^T B_1^T + A_1 X_2 - \alpha_{21} B_1 M_1 < 0; \quad (4.37)$$

$$X_1 A_2^T - \alpha_{12} M_2^T B_2^T + X_1 A_2^T - \alpha_{12} M_2^T B_2^T + \quad (4.38)$$

$$+ A_2 X_1 - \alpha_{12} B_2 M_2 + A_2 X_1 - \alpha_{12} B_2 M_2 < 0;$$

$$X_2 A_1^T - \alpha_{21} M_1^T B_1^T + X_2 A_1^T - \alpha_{21} M_1^T B_1^T + \quad (4.39)$$

$$+ A_1 X_2 - \alpha_{21} B_1 M_1 + A_1 X_2 - \alpha_{21} B_1 M_1 < 0;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & X_1 \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & X_2 \end{pmatrix} \geq 0; \quad (4.40)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 X_1 & W_{1211}^T \\ W_{1211} & \phi_1 I \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} \phi_2 X_2 & W_{2111}^T \\ W_{2111} & \phi_2 I \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} \phi_2 X_2 & W_{2112}^T \\ W_{2112} & \phi_2 I \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 X_1 & W_{1212}^T \\ W_{1212} & \phi_1 I \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} \phi_1 X_1 & W_{1221}^T \\ W_{1221} & \phi_1 I \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} \phi_2 X_2 & W_{2121}^T \\ W_{2121} & \phi_2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad (4.41)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 X_1 & W_{1222}^T \\ W_{1222} & \phi_1 I \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} \phi_2 X_2 & W_{2122}^T \\ W_{2122} & \phi_2 I \end{pmatrix} \geq 0,$$

где  $W_{1211} = \xi_{11}(A_1 X_1 - \alpha_{12} B_1 M_2), W_{2111} = \xi_{11}(A_2 X_2 - \alpha_{21} B_2 M_1), W_{2112} = \xi_{12}(A_2 X_2 - \alpha_{21} B_2 M_1),$   
 $W_{1212} = \xi_{12}(A_1 X_1 - \alpha_{12} B_1 M_2), W_{1221} = \xi_{21}(A_1 X_1 - \alpha_{12} B_1 M_2),$

$$W_{2121}=\xi_{21}(A_2X_2-\alpha_{21}B_2M_1), \quad W_{1222}=\xi_{22}(A_1X_1-\alpha_{12}B_1M_2), \quad W_{2122} = \xi_{22}(A_2X_2 - \alpha_{21}B_2M_1).$$

Условия устойчивости (4.35)–(4.41) для модели (4.32) перевернутого маятника являются конкретизацией условий (4.25)–(4.29) для числа правил  $r = 2$ . Если для различных начальных условий  $x(0)$  существуют положительно определенные матрицы  $P_1, P_2$  и матрицы  $F_1, F_2$ , постоянные  $\phi_1 > 0, \phi_2 > 0, \alpha_{21} > 0, \alpha_{12} > 0$  и коэффициенты  $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}$ , то для модели (4.32) можно построить соответствующий ПРК-регулятор в виде  $u(t) = -h_1(x_1(t))F_1x(t) - h_2(x_1(t))F_2x(t)$ , где  $h_1$  и  $h_2$  – функции принадлежности для правил  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  соответственно,  $h_1+h_2=1$ .

Построение модифицированной модели управляемого перевернутого маятника на основе универсальной аппроксимации и метода функций Ляпунова позволило упростить ее качественный анализ и получить условия устойчивости в более компактном виде, удобном для проведения вычислительных процедур в интегрированных средах с помощью прикладных пакетов.

Рассмотрим пример моделирования управляемых маятниковых систем с переключением на основе подхода, описание которого дано разделе 3.4 главы 3.

Предположим, что в системе (4.6) имеет место переключение, а именно, переход в модели (4.7) с одной подсистемы на другую с учетом начальных условий осуществляется с помощью функций принадлежности  $h_i$ . В случае выполнения условия  $y = Cx = (1 \ 0)x$ , тогда ТС-модель маятниковой системы с переключением с учетом правил модели (4.7) и (4.31), (4.32) примет вид

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_i(y)h_j(y)\tilde{A}^{ij}x + \sum_{i=1}^r h_i\tilde{B}^i y, \quad u = \sum_{i=1}^r h_i(y)\tilde{C}^i x + \tilde{D}y. \quad (4.42)$$

Уравнения (4.42) являются обобщением уравнений (4.32) на гибридный случай. На основании теоремы 3.8, получим, что для обеспечения условий устойчивости (3.37), (3.38) для модели (4.42) параметры управления (3.39) ПРК-регулятора будут иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{11} = & \frac{1}{2}P_{12}^{-1}(2\bar{A}_{11}^* - P_{12}\tilde{B}^1C_1Q_{11} - P_{12}\bar{B}^{1*}C_1Q_{11} - P_{11}B_1\tilde{C}_1Q_{12}^T - \\ & - P_{11}B_1\tilde{C}_1Q_{12}^T - P_{11}(A_1 + B_1\tilde{D}C_1)Q_{11} - P_{11}(A_1 + B_j\tilde{D}C_j)Q_{11})Q_{12}^{-1}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{12} &= \frac{1}{2} P_{12}^{-1} (2\bar{A}_{12}^* - P_{12} \tilde{B}^1 C_2 Q_{11} - P_{12} \bar{B}^{2*} C_1 Q_{11} - P_{11} B_1 \tilde{C}_2 Q_{12}^T - \\
&\quad - P_{11} B_2 \tilde{C}_1 Q_{12}^T - P_{11} (A_1 + B_1 \tilde{D} C_2) Q_{11} - P_{11} (A_2 + B_2 \tilde{D} C_1) Q_{11}) Q_{12}^{-1}, \\
\tilde{A}^{21} &= \frac{1}{2} P_{12}^{-1} (2\bar{A}_{21}^* - P_{12} \tilde{B}^i C_1 Q_{11} - P_{12} \bar{B}^{j*} C_2 Q_{11} - P_{11} B_2 \tilde{C}_1 Q_{12}^T - \\
&\quad - P_{11} B_1 \tilde{C}_2 Q_{12}^T - P_{11} (A_2 + B_2 \tilde{D} C_1) Q_{11} - P_{11} (A_2 + B_1 \tilde{D} C_i) Q_{11}) Q_{12}^{-1}, \\
\tilde{B}^1 &= P_{12}^{-1} (\bar{B}_1^* - P_{11} B_1 \tilde{D}), \quad \tilde{B}^2 = P_{12}^{-1} (\bar{B}_2^* - P_{11} B_2 \tilde{D}), \\
\tilde{C}^1 &= (\bar{C}_1^* - \tilde{D} C_1 Q_{11}) Q_{12}^{-T}, \quad \tilde{C}^2 = (\bar{C}_2^* - \tilde{D} C_2 Q_{11}) Q_{12}^{-T}, \\
D &= \bar{D}^*.
\end{aligned}$$

Результаты компьютерного моделирования процесса стабилизации перевернутого маятника, описываемого модифицированными уравнениями (4.32) и (4.42), будут представлены в разделе 5.2 главы 5.

Результаты настоящего раздела изложены в работах [59, 65е, 81, 121а, 122].

### 4.3. Алгоритм стабилизации

Построение алгоритмов стабилизации моделей управляемых систем с логическими регуляторами на основе условий устойчивости, представленных в достаточно компактном виде, является важной задачей анализа указанных систем [65г, 219, 224]. Рассмотрим построение алгоритма стабилизации перевернутого маятника с помощью функции Ляпунова и логического ТС-регулятора, для этого воспользуемся результатами раздела 3.3.

Модель перевернутого маятника (4.6) запишем в терминах переменных состояния вида (3.10):

$$\dot{x} = f(x) + b(x)u, \quad (4.43)$$

где  $x = (x_1 \ x_2)^T$  – вектор состояния,  $f(x) = (x_2 \ g \sin(x_1)/l)^T$ ,  $b(x) = (0 \ -1/((m+M)l^2))^T$ . Переменные  $x_1$  и  $x_2$  определим соотношениями  $x_1 \in [-80, 80]$ ,  $x_2 \in [-30, 30]$ .

Построение логического регулятора начинается с процедуры фаззификации [65а]. На рис. 4.6 и рис. 4.7 представлены функции принадлежности, соответствующие лингвистическим термам переменных  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. Лингвистические термы имеют значения: положительный (П), нуль (Н) и отрицательный (О).

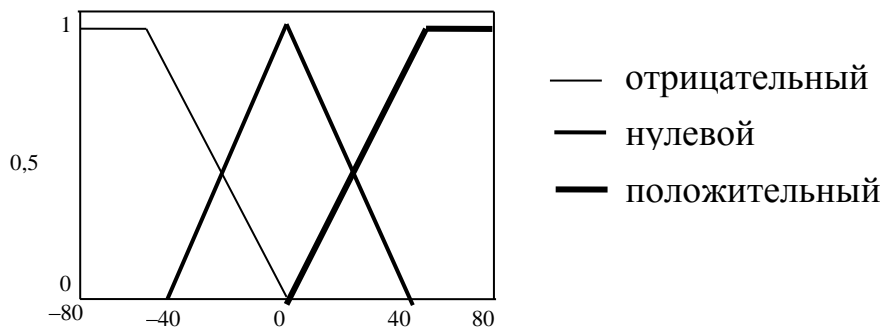


Рис. 4.6

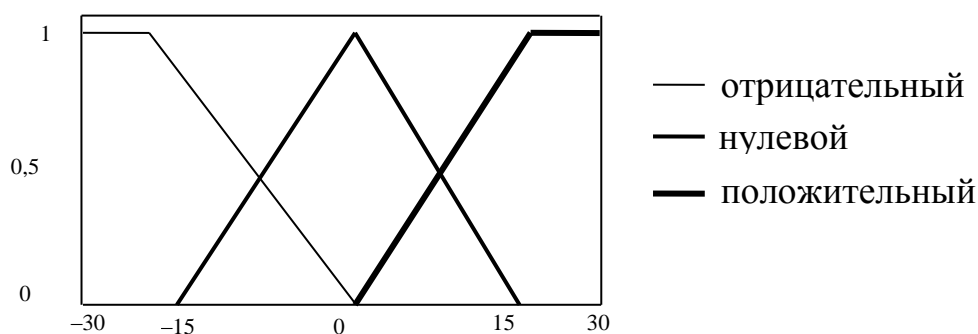


Рис. 4.7

В процедуре вывода логического регулятора используются операторы MIN и MAX [64а], с помощью которых формируется база правил, представленных в табл. 4.1.

Табл. 4.1

База правил

Правило	Антецедент		Консеквент
	$z_1$	$z_2$	
1	П	П	$u_1$
2	О	О	$u_2$
3	П	О	$u_3$
4	О	П	$u_4$
5	П	Н	$u_5$
6	О	Н	$u_6$
7	Н	П	$u_7$
8	Н	О	$u_8$
9	Н	Н	$u_9$

В первом столбце табл. 4.1 указаны номера правил, во втором и третьем столбцах даны значения переменных  $x_1$  и  $x_2$  в антецеденте

каждого из девяти правил, в третьем столбце приведены значения управления  $u$  в консеквенте каждого правила. В структуре ТС-регулятора используется дефаззификация методом взвешенной суммы [114г]. Суммированием вычисляются параметры–консеквенты  $u_i$  в девяти правилах управления.

Приведем далее конкретизацию алгоритма стабилизации, базирующегося на теореме 3.6, для анализа устойчивости и стабилизации модели перевернутого маятника. Процедура сводится к нахождению значений  $u_i$ , для которых модель (4.43) можно стабилизировать ТС-регулятором.

Алгоритм стабилизации перевернутого маятника имеет вид.

*Шаг 1.* Рассмотреть возможную функцию Ляпунова и убедиться, что она является положительно определенной.

Для рассматриваемого случая функция вида  $V(x) = x^T P x = x_1^2 + x_2^2$ , где  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , определяет функцию Ляпунова и является положительно определенной. Если  $\|x\| \rightarrow \infty$ , то  $V(x) \rightarrow \infty$ , выполняется условие  $V(x) > 0 \forall x \neq 0$ .

*Шаг 2.* Найти производную функции Ляпунова и показать, что множество  $\{x \in E: \dot{V}(x) = 0\}$  не содержит траекторий состояния кроме тривиального.

А именно, в данном случае имеем, что  $\dot{V}(x) = 2x_2 \left( x_1 + \frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{1}{(m+M)l^2} u \right)$ , причем  $\dot{V}(0) = 0$ .

В предположении, что существует траектория, для которой  $x_2(t) = 0$  и  $x_1(t) \neq 0$ , выполнено соотношение  $\dot{x}_2(t) = \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{1}{(m+M)l^2} u(t) \neq 0$ , которое означает, что  $x_2(t)$  не является постоянной. Следовательно, траектория  $x(t) = 0$  является положительной траекторией состояния, для которой  $\dot{V}(x) = 0$ . Таким образом, множество  $\{x \in E: \dot{V}(x) = 0\}$  не содержит траекторий модели управляемой системы, кроме тривиальной траектории  $x(t) = 0$  для  $t \geq 0$ .

*Шаг 3.* Определить множества  $G_1(x)$ ,  $G_2(x)$ ,  $G_2^0$ ,  $G_2^-$ ,  $G_2^+$  следующим образом:

$$G_1(x) = 2x_2 \left( x_1 + \frac{g}{l} \sin(x_1) \right), \quad G_2(x) = -\frac{2x_2}{(m+M)l^2},$$

$$G_2^0 = \{(x_1, 0) \in X: x_1 \in [-1, 1]\}, \quad G_2^- = \{(x_1, x_2) \in X: x_2 > 0\},$$

$$G_2^+ = \{(x_1, x_2) \in X: x_2 < 0\}, -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1l + g \sin(x_1)).$$

*Шаг 4.* Если  $x \in G_2^0$ , то  $x_2 = 0$  и  $G_1(x) = 0$ .

*Шаг 5.* Реализовать правила, составляющие базу правил ТС-регулятора, с учетом свойств, введенных для множеств в шаге 3.

Получено, что для модели (4.43) база правил логического регулятора будет представлена девятью правилами следующего вида:

П<sub>1</sub>:  $x_1$  есть П,  $x_2$  есть П. Имеем  $A_1 = (0, 80] \times (0, 30]$ ,  $A_1 \cap G_2^+ = \emptyset$  и  $A_1 \cap G_2^- = (0, 80] \times (0, 30]$ . Таким образом,  $u_1(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1l + g \sin(x_1))$ . Выберем функцию  $u_1(x) = l(m+M)(x_1l + g)$ , которая удовлетворяет условию 2) теоремы 3.6.

П<sub>2</sub>:  $x_1$  есть О,  $x_2$  есть О. Имеем  $A_2 = [-80, 0) \times [-30, 0)$ ,  $A_2 \cap G_2^+ = [-80, 0) \times [-30, 0)$  и  $A_2 \cap G_2^- = \emptyset$ . Таким образом,  $u_2(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1l - g)$ , удовлетворяющую условию 2) теоремы 3.6.

П<sub>3</sub>:  $x_1$  есть П,  $x_2$  есть О. Имеем  $A_3 = (0, 80] \times (-30, 0]$ ,  $A_3 \cap G_2^- = \emptyset$  и  $A_3 \cap G_2^+ = (0, 80] \times (-30, 0]$ . Таким образом,  $u_3(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1l + g \sin(x_1))$ . Выберем функцию  $u_3(x) = -x_1$ , которая удовлетворяет условию 2) теоремы 3.6.

П<sub>4</sub>:  $x_1$  есть О,  $x_2$  есть П. Имеем  $A_4 = [-80, 0) \times (0, 30]$ ,  $A_4 \cap G_2^+ = \emptyset$  и  $A_4 \cap G_2^- = [-80, 0) \times (0, 30]$ . Таким образом,  $u_4(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1l + g \sin(x_1))$ . Выберем функцию  $u_4(x) = -x_1$ , удовлетворяющую условию 2) теоремы 3.6.

П<sub>5</sub>:  $x_1$  есть П,  $x_2$  есть Н. Имеем  $A_5 = (0, 80] \times (-5, 5)$ . Тогда возможны следующие два случая:

а) для  $x \in A_5 \cap G_2^- = (0, 80] \times [0, 5)$  имеем

$$u_5(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1l + g \sin(x_1));$$

б) для  $x \in A_5 \cap G_2^+ = (0, 80] \times (-5, 0]$

$$\text{имеем } u_5(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1l + g \sin(x_1)).$$

Для выполнения указанных условий а) и б) выберем функцию  $u_5(x) = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$ .

П<sub>6</sub>:  $x_1$  есть О,  $x_2$  есть Н. Имеем  $A_6 = [-80, 0) \times (-5, 5)$ . Возможны следующие случаи:

а) для  $x \in A_6 \cap G_2^- = [-80, 0) \times [0, 5)$  имеем

$$u_6(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1));$$

б) для  $x \in A_6 \cap G_2^+ = [-80, 0) \times (-5, 0]$  имеем

$$u_6(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1)).$$

Для выполнения указанных условий а) и б) выберем функцию  $u_6(x) = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$ .

П<sub>7</sub>:  $x_1$  есть Н,  $x_2$  есть П. Имеем  $A_7 = (-10, 10) \times (0, 30]$ ,  $A_7 \cap G_2^+ = \emptyset$  и  $A_7 \cap G_2^- = (-10, 10) \times (0, 30]$ .

Таким образом,  $u_7(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$ . Положим

$u_7(x) = l(m+M)(x_1 l + g)$ . Функция  $u_7(x)$  удовлетворяет условию 2) теоремы 3.6.

П<sub>8</sub>:  $x_1$  есть Н,  $x_2$  есть О. Имеем  $A_8 = (-10, 10) \times [-30, 0]$ ,  $A_8 \cap G_2^+ = (-10, 10) \times (-30, 0]$  и  $A_8 \cap G_2^- = \emptyset$ . Таким образом,  $u_8(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$ . Положим  $u_8(x) = l(m+M)(x_1 l - g)$ . Функция  $u_8(x)$  удовлетворяет условию 2) теоремы 3.6.

П<sub>9</sub>:  $x_1$  есть Н,  $x_2$  есть Н. Имеем  $A_9 = (-10, 10) \times (-5, 5)$ . Возможны следующие случаи:

а) для  $x \in A_9 \cap G_2^+ = (-10, 10) \times (-5, 0)$  имеем  $u_9(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1));$

б) для  $x \in A_9 \cap G_2^- = (-10, 10) \times (0, 5)$  имеем  $u_9(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1)).$

Для выполнения указанных условий а) и б) положим  $u_9(x) = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$ .

По теореме 3.6 маятниковая система, моделируемая уравнением (4.43), с построенным ТС-регулятором, является асимптотически устойчивой в целом в начале координат.

Отметим, что описанную процедуру исследования модели перевернутого маятника с логическим регулятором, можно применять в случаях, когда:

1) система имеет состояние равновесия, отличное от начала координат,

2) база правил ТС-регулятора не является полной.

Предложенный алгоритм может быть модифицирован применительно и к другим моделям управляемых маятниковых систем с логическими регуляторами, в частности, к модели двухзвенного перевернутого маятника.

Результаты раздела представлены в работе [65в, 206].

#### 4.4. Исследование устойчивости модели перевернутого маятника с помощью функций Ляпунова и свойств дивергенции поля скоростей

В данном разделе продолжено изучение устойчивости модели перевернутого маятника (4.43). Проведен качественный анализ и получены условия асимптотической устойчивости и равномерной устойчивости на основе комбинированного метода, базирующегося на совместном использовании свойств дивергенции поля скоростей и функций Ляпунова. Разработаны алгоритмы исследования устойчивости модели перевернутого маятника с логическим регулятором.

Приведем теоретические сведения, которые будут использованы для исследования модели (4.43). Рассмотрим нелинейную модель, описываемую дифференциальным уравнением [68а]

$$\dot{x} = s(x, h), \quad x \in R^n, \quad h \in H \subset R^k, \quad (4.44)$$

которое определено на множестве  $B(\rho) \times H$ , где  $B(\rho) = \{x \in R^n: \|x\| \leq \rho\}$ ,  $\rho > 0$ .

Предполагается, что функция  $s(x, h)$  удовлетворяет условию Липшица относительно  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  для каждого  $h \in H \subset R^k$ , т.е.  $\exists L = L(h) > 0: |s(x^1, h) - s(x^2, h)| \leq L|x^1 - x^2| \forall x^1, x^2 \in B(\rho)$ , и решения  $x(t, x_0, h)$  уравнения (3.44) непрерывно зависят как от начальной точки  $x_0 = x(0, x_0, h)$ , так и от параметра  $h = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$  для  $k \geq 1$ .

Решение  $x = 0$  называется равномерно устойчивым относительно множества  $H \subset R^k$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) |x_0| < \delta$  следует  $|x(t, x_0, h)| < \varepsilon \forall t \in R^+, \forall h \in H$ , причем число  $\delta$  зависит от  $\varepsilon$ , но не зависит от выбора точки  $h \in H$ .

Будет иметь место следующая теорема.

**Теорема 4.4** [68а]. Если тривиальное состояние равновесия  $x=0$  уравнения (4.44) асимптотически устойчиво для каждого  $h$ , принадлежащего компактному множеству  $H \subset R^k$ , то состояние равновесия  $x=0$  уравнения (4.44) равномерно устойчиво относительно множества  $H$ .

Если  $z$  – асимптотически устойчивое состояние равновесия дифференциального уравнения вида  $\dot{x} = s(x)$  и  $V(x)$  – функция Ляпунова, для которой выполняется условие  $-\dot{V} > \alpha_1 V^{\alpha_2}$ ,  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ , то существует множитель Эйлера  $\sigma(x)$ , для которого дивергенция  $\text{div}(\sigma(x)s(x))$  является отрицательно определенной. Множителем Эйлера называется любая положительная в окрестности  $(0,0)$  функция, равная нулю лишь в точке  $x=0$ . Функцию Ляпунова, обладающую указанным свойством, назовем дивергентной функцией Ляпунова для состояния равновесия  $z$ .

Изучение модели (4.44) при сделанных предположениях можно свести к изучению модели вида

$$\dot{x} = s(x, u), \quad x \in R^n, u \in U \subset R, \quad (4.45)$$

где множество  $U$  является компактным,  $u$  – скалярная переменная управляющего воздействия, причем  $u=F(x)$  и  $F(0)=0$ ,  $F(x)$  – нелинейная функция описывает работу логического регулятора. Результат действия  $F(x)$  соответствует управляющему воздействию на объект управления.

Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 4.5** [180, 58в]. Пусть  $\text{div} s(x, u) \leq 0$  в окрестности состояния равновесия  $x=(x_1, \dots, x_n)=0$  модели (4.45) и существует дивергентная функция Ляпунова в силу указанной модели. Тогда состояние равновесия  $x=0$  модели (4.43) асимптотически устойчиво для каждого  $u \in U$ .

**Теорема 4.6** [180, 52в]. Пусть  $\text{div} [\sigma(x) s(x, u)] \leq 0$  в окрестности состояния равновесия  $x=(x_1, \dots, x_n)=0$  модели (4.45), где  $\sigma(x)$  – множитель Эйлера, и пусть существует дивергентная функция Ляпунова в силу модели (4.45). Тогда состояние равновесия  $x=(x_1, \dots, x_n)=0$  асимптотически устойчиво для каждого  $u \in U$ .

**Теорема 4.7** [180, 52в]. Если состояние равновесия  $x=0$  модели (4.45) асимптотически устойчиво для каждого  $u$ , принадлежащего компактному множеству  $U \subset R$ , то состояние равновесия  $x=0$  модели (4.45) равномерно устойчиво относительно множества  $U$ .

На основе вышеприведенных теорем 4.4 – 4.7 и с учетом (4.44), (4.45) условия устойчивости модели (4.43) перевернутого маятника имеют вид.

1. Пусть для рассматриваемой модели перевернутого маятника (4.43) в окрестности состояния равновесия  $x_1 = x_2 = 0$  выполнено условие

$$-\frac{1}{(m+M)l^2} \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \leq 0$$

и существует дивергентная функция Ляпунова в силу модели. Тогда состояние равновесия асимптотически устойчиво по Ляпунову для каждого  $u \in U$ .

2. Если выполняются условия 1 для каждого  $u$ , принадлежащего компактному множеству  $U \subset R$ , то состояние равновесия  $x_1 = x_2 = 0$  равномерно устойчиво относительно множества  $U$ .

3. Пусть для рассматриваемой модели перевернутого маятника (4.43) в окрестности состояния равновесия выполнено условие

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} \left( \frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{1}{(m+M)l^2} \cdot F(x) \right) + \sigma \left( -\frac{1}{(m+M)l^2} \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \right) \leq 0,$$

где  $\sigma(x)$  – множитель Эйлера, и существует дивергентная функция Ляпунова в силу модели (4.43). Тогда состояние равновесия  $x_1 = x_2 = 0$  асимптотически устойчиво для каждого  $u \in U$ .

4. Если выполняются условия 4 для каждого  $u$ , принадлежащего компактному множеству  $U \subset R$ , то состояние равновесия  $x_1 = x_2 = 0$  равномерно устойчиво относительно множества  $U$ .

Полученные результаты послужили основой для разработки алгоритмов исследования устойчивости модели (4.43) перевернутого маятника в окрестности состояния равновесия  $x = 0$ . Алгоритм исследования устойчивости имеет вид:

*Шаг 1.* С учетом базы правил логического регулятора записать исследуемую модель (4.43) в форме (4.45).

*Шаг 2.* Вычислить дивергенцию  $\text{div } s(x, u)$ .

*Шаг 3.* Если  $-\frac{1}{(m+M)l^2} \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \leq 0$  и существует функция Ляпунова

в силу указанной модели, то состояние равновесия  $x = 0$  модели (3.51) асимптотически устойчиво для каждого  $u \in U$ , в противном случае перейти к шагу 1.

В случае, когда переход к шагу 1 не требуется, делается вывод о том, что состояние равновесия  $x = 0$  равномерно устойчиво относительно множества  $U$ .

Алгоритм исследования устойчивости модели (4.43) перевернутого маятника в окрестности состояния равновесия  $x = 0$ , основанный на вычислении дивергенции от произведения функции, описывающей поведение системы, на множитель Эйлера  $\sigma(x)$  имеет вид [66б]:

*Шаг 1.* С учетом базы правил логического регулятора записать исследуемую модель (4.43) в форме (4.45).

*Шаг 2.* Вычислить дивергенцию  $\text{div } [\sigma(x) s(x, u)]$ .



*Шаг 3.* Если  $\operatorname{div} [\sigma(x) s(x, u)] \leq 0$  и существует дивергентная функция Ляпунова в силу указанной модели, то состояние равновесия  $x = 0$  модели (4.43) асимптотически устойчиво для каждого  $u \in U$ , в противном случае перейти к шагу 1.

В случае, когда переход к шагу 1 не требуется, на основании теорем об устойчивости можно сделать вывод о том, что, состояние равновесия  $x = 0$  равномерно устойчиво относительно множества  $U$ .

Таким образом, в разделе изучена устойчивость модели перевернутого маятника (4.43). Выполнен качественный анализ и получены условия асимптотической устойчивости на основе комбинированного метода, базирующегося на совместном использовании свойств дивергенции поля скоростей и функций Ляпунова. Разработаны алгоритмы исследования устойчивости модели перевернутого маятника с логическим регулятором.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования устойчивости моделей управляемых маятниковых систем при постоянно действующих возмущениях, а также при моделировании указанных систем на основе экспертных правил. Предложенные алгоритмы исследования устойчивости перевернутого маятника могут использоваться в дальнейшем для реализации в виде компьютерных программ.

Результаты раздела представлены в [65д, 77б].

## Глава 5.

### КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ МАЯТНИКОВЫХ СИСТЕМ

#### 5.1. Описание алгоритма Лоусона для исследования устойчивости моделей управляемых маятниковых систем

Для проведения численного анализа модифицированной ТС-модели (4.32) перевернутого маятника раздела 4.2 главы 4 необходимо привести обоснование применения алгоритма Лоусона решения систем линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений [216].

Как известно [38, 84, 149, 173], для нахождения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамические системы, используются известные численные методы разного порядка точности (методы Рунге–Кутты, метод Адамса и др.) или их модификации на случай разрывной правой части [48, 89, 170]. Для нахождения решения жестких дифференциальных уравнений, когда традиционные численные методы не применимы, разработаны специальные численные методы, изученные в работах [53–55]. В [12] дана классификация и рассмотрены вопросы о применении численных методов в зависимости от вида дифференциальных уравнений. Для проведения численного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих динамику управляемых систем, применение традиционных методов оказывается неэффективным. Это обусловлено ограниченной областью устойчивости решений, полученных традиционными численными методами, и быстротой протекания процессов в управляемых системах. В этом случае целесообразным является применение численных методов с неограниченной областью устойчивости решений [12].

Метод Лоусона является одношаговой процедурой и используется для нахождения решения задачи Коши для квазилинейной системы, заданной в общем виде [216]

$$y' = f(x, y), \quad (5.1)$$

или в виде

$$y' = Ay + u(x, y), \quad (5.2)$$

где  $A = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} = \text{const}$ .

На каждом частичном сегменте  $x_n \leq x \leq x_n + h$ , длина которого равна шагу интегрирования  $h$ , исходная система уравнений  $y' = g(x, y)$  с помощью замены искомой функции  $y(x)$  по формуле

$$y(x) = e^{A^\circ(x-x_n)} z(x), \quad (5.3)$$

где  $A^\circ$  – некоторая постоянная матрица, преобразуется в систему уравнений относительно новой неизвестной функции  $z(x)$ :

$$z'(x) = G(x, z). \quad (5.4)$$

Матрица Якоби  $\frac{\partial G}{\partial z}$  системы (3.5) и матрица Якоби  $\frac{\partial g}{\partial y}$  правой части

$g(x, y)$  исходной системы связаны между собой соотношением

$$\frac{\partial G}{\partial z} = e^{-(x-x_n)A^\circ} \left( \frac{\partial g}{\partial y} - A^\circ \right) e^{(x-x_n)A^\circ}. \quad (5.5)$$

Для нелинейной системы (5.2) соотношением  $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ , для

квазилинейной системы (5.3) соотношением  $\frac{\partial g}{\partial y} = A + \frac{\partial u}{\partial y}$ .

Преобразование (5.3) позволяет уменьшить характеристические корни матрицы Якоби  $\frac{\partial G}{\partial z}$  по сравнению с характеристическими корнями матрицы Якоби исходной системы, что приводит к уменьшению константы Липшица системы (5.4) по сравнению с константой Липшица исходной системы (5.1) или (5.2). Приведенные выше преобразования автоматически выполняются программой, представленной в виде расширения для Matlab, после чего полученная система может быть решена традиционными методами численного интегрирования. Алгоритм Лоусона решает систему методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности, причем одновременно с интегрированием приводится обратное преобразование от функции  $z(x)$  к функции  $y(x)$ . Отметим, что метод Лоусона применим и в случаях, когда нелинейную систему дифференциальных уравнений можно достаточно близко аппроксимировать линейными системами с постоянной матрицей на исследуемых областях [12].

## 5.2. Численный анализ ТС-моделей перевернутого маятника

В данном разделе выполнена верификация синтезированной ТС-модели перевернутого маятника (4.32) с помощью комплекса программ, реализованного в компьютерной среде Matlab. Комплекс программ, реализованный в компьютерной среде Matlab, содержит модули для ввода данных, для вывода результатов, для графической иллюстрации результатов, модуль основной программы, объединяющей работу двух правил модели (4.32), а также две подпрограммы и модуль-справки, в котором дается описание используемых обозначений.

Нахождение решений дифференциальных уравнений ТС-модели перевернутого маятника, осуществляется с помощью алгоритма Лоусона, описание и обоснование применения которого к исследованию управляемых маятниковых систем дано в разделе 5.1 настоящей главы. Алгоритм Лоусона сводится к преобразованию исходной системы дифференциальных уравнений в систему дифференциальных уравнений относительно новой неизвестной функции с помощью специальной замены, после чего полученная система может быть решена традиционными методами численного интегрирования [79б]. Алгоритм Лоусона решает ее методом Рунге–Кутты, при этом одновременно с решением производится обратное преобразование от новой введенной функции к исходной функции. Эффективность используемого алгоритма для исследования управляемых маятниковых систем с ПИД-регуляторами описана С.Ф. Николаевым и Е.Л. Тонковым в работе [135]. Алгоритм Лоусона, представленный в виде расширения для Matlab, использует две подпрограммы: `right.m` – вычисляет значение функции в правой части уравнения (4.32), `rightj.m` – вычисляет матрицу Якоби правой части уравнения (4.32).

При проведении численного анализа модели (4.32) использованы следующие значения параметров  $m = 2$  кг,  $M = 8$  кг,  $2l = 1$  м, для которых устойчивое вертикальное положение маятника достигается при  $\alpha_{12} = 1,3$ ,  $\alpha_{21} = 1/\alpha_{12}$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = \pi / 1,5$ . Построение стабилизирующего логического регулятора выполняется с учетом значений матриц  $P_1, P_2, F_1, F_2$ , которые вычисляются для каждого начального условия. Значения функций принадлежности  $h_1, h_2$  определяются с помощью редактора функций принадлежности Membership Function Editor пакета Fuzzy Logic Toolbox среды Matlab.

Численное моделирование процесса стабилизации перевернутого маятника, описываемого ТС-моделью (4.32) при конкретных начальных условиях представлено на рис. 5.1–5.3.

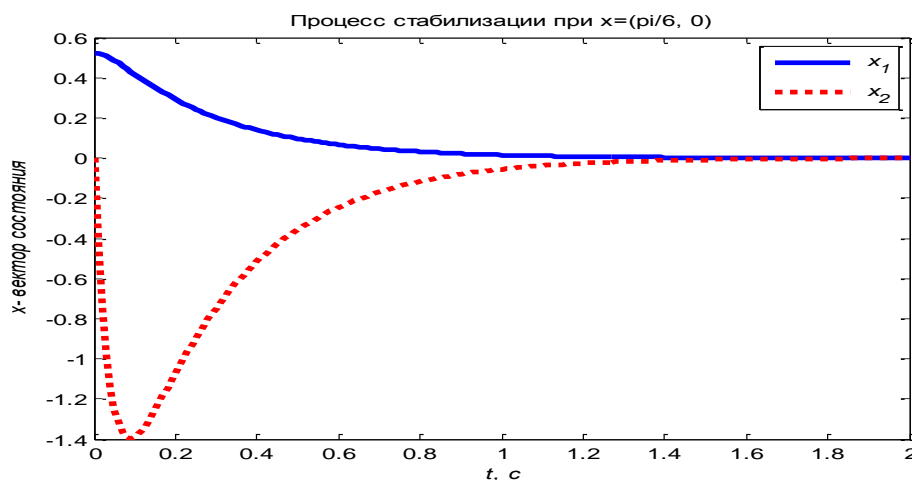


Рис. 5.1

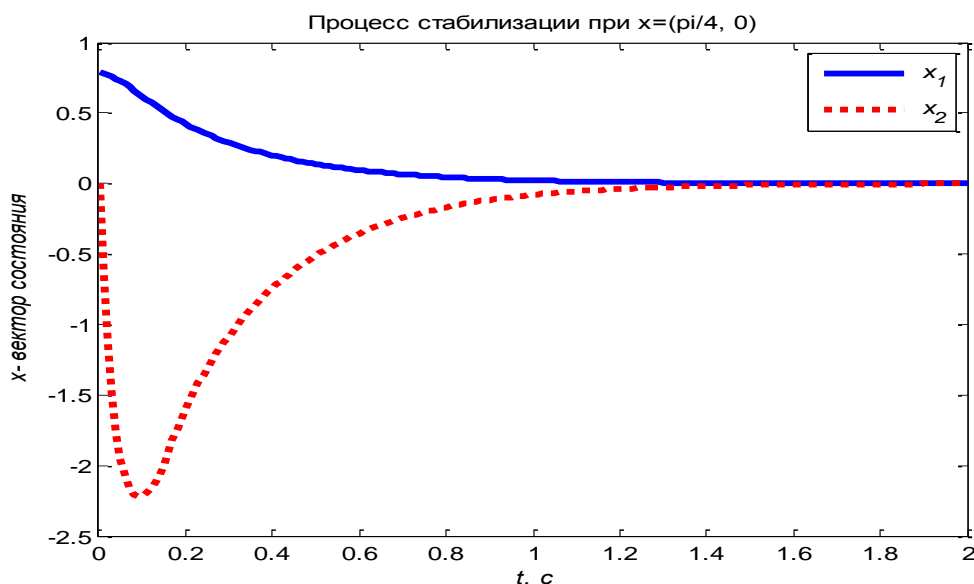


Рис. 5.2

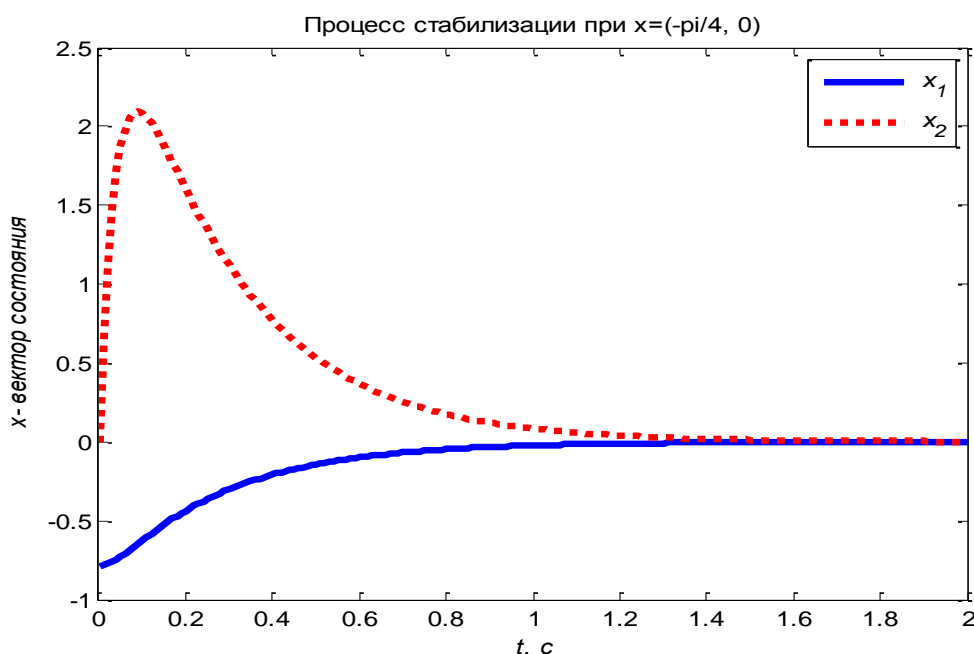


Рис. 5.3

График, представленный на рис. 5.3, описывает динамику маятника, отклоненного влево относительно вертикали.

На рисунке 5.4 представлен процесс стабилизации маятниковой системы с переключением, описываемой ТС-моделью (4.42). Для реализации компьютерного моделирования использованы следующие значения параметров маятника  $m = 2$  кг,  $M = 8$  кг,  $2l = 1$  м. Графики угла отклонения и угловой скорости, полученные на рис. 5.4 для начального условия  $x(0) = (\pi/3 \ 0)^T$ , доказывают эффективность синтезированного управления.

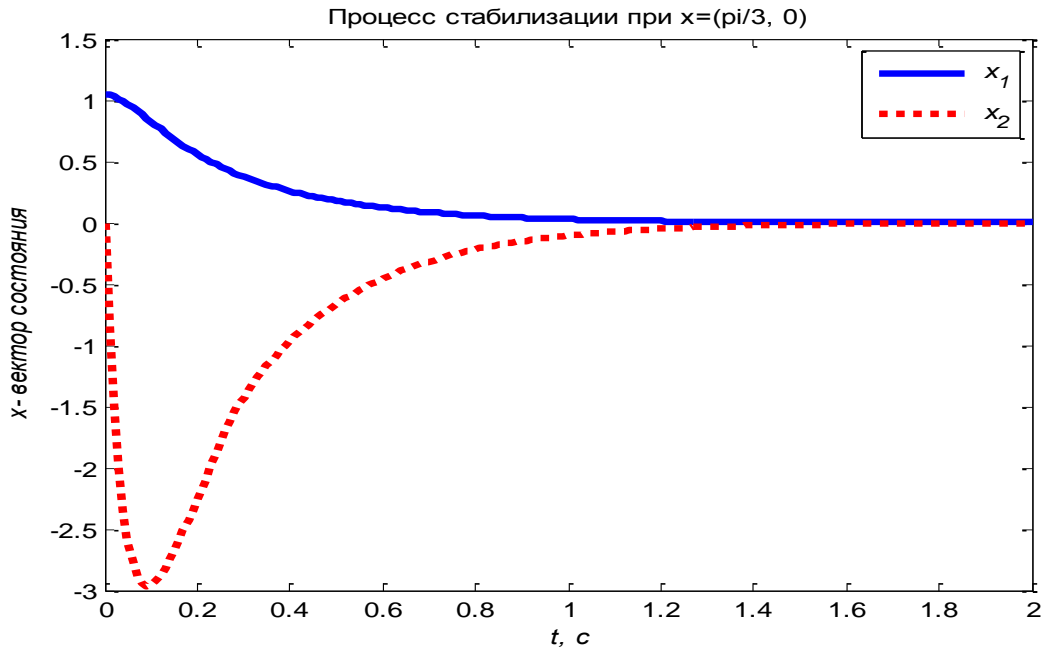


Рис. 5.4

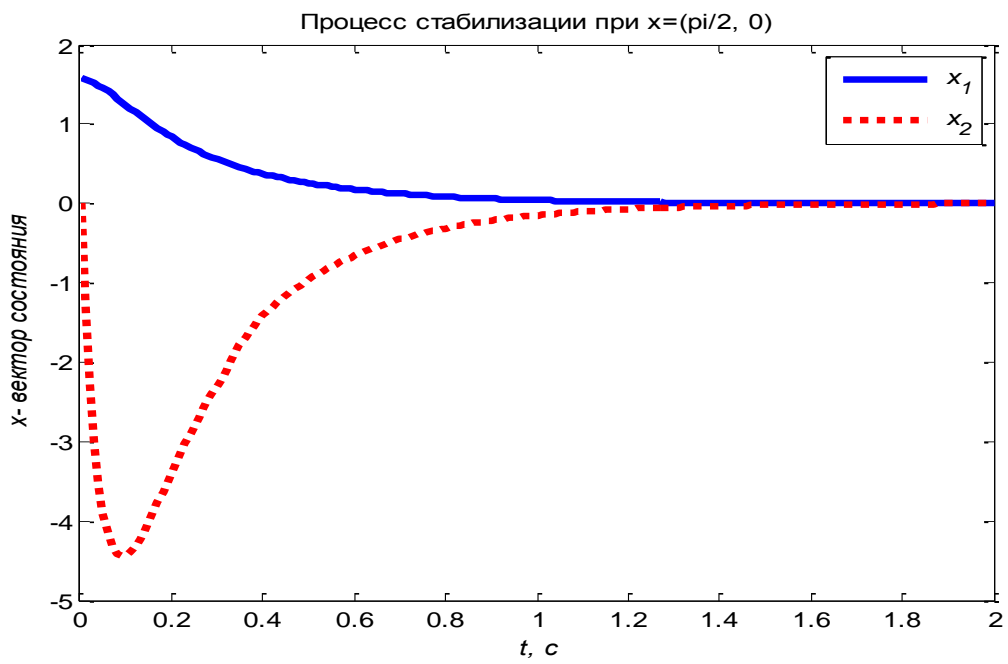


Рис. 5.5

Графики демонстрируют эффективность применения построенного логического регулятора при достаточно больших углах отклонения маятника. Отметим значение результата численного моделирования, представленного на рис. 5.5. Синтез модели перевернутого маятника (4.32) осуществлялся при  $x_1(t) \in [-\pi/2 + \varepsilon, \pi/2 - \varepsilon]$ . На графике рис. 5.5 видно, что логический регулятор модели (4.32) стабилизирует маятник, имеющий угол отклонения, равный  $\pi/2$ . В [166] показано, что при углах отклонения, близких к  $\pi/2$ , одного ПИД-регулятора по стабилизации недостаточно, необходимо использовать в дополнении к нему регулятор по подъему. В нашем случае логический регулятор, построенный для модели (4.32), не только успешно справился с поставленной перед ним задачей, но и расширил диапазон изменения угла отклонения маятника. Отметим, что в работе [231] показано, что устойчивость модели (4.7) и функционирование логического регулятора  $u(t)$  не имеет место при  $\pi/2 \leq |x_1(t)| \leq \pi$ .

Модельные расчеты показали, что для каждого начального условия существуют положительно определенные матрицы  $P_1, P_2$  и матрицы  $F_1, F_2$  коэффициентов усиления, при которых для ТС-модели перевернутого маятника можно построить стабилизирующий логический регулятор.

Приведем значения указанных матриц для некоторых начальных условий.

Для  $x(0) = (\pi/6 \ 0)^T$  получено

$$P_1 = \begin{pmatrix} 57.7603 & 23.2068 \\ 23.2068 & 10.3697 \end{pmatrix} > 0, P_2 = \begin{pmatrix} 58.1998 & 17.5082 \\ 17.5082 & 6.1428 \end{pmatrix} > 0,$$

$$F_1 = (-630.7446 \ -164.6591), F_2 = 10^{-3}(-1.2393 \ -0.2958).$$

Для  $x(0) = (\pi/4 \ 0)^T$  получено

$$P_1 = \begin{pmatrix} 32.0668 & 13.1229 \\ 13.1229 & 6.4541 \end{pmatrix} > 0, P_2 = \begin{pmatrix} 39.1987 & 11.4436 \\ 11.4436 & 4.1936 \end{pmatrix} > 0,$$

$$F_1 = (-530.6214 \ -127.4777), F_2 = 10^3(-1.0859 \ -0.2427).$$

На рис. 5.6 представлен график управления, вырабатываемого логическим регулятором модели маятниковой системы с переключением (4.42). На рис. 5.7–5.8 для конкретных начальных условий дана графическая реализация управления модели (4.32). Скачок на графиках, представленных на рис. 5.6–5.8, обусловлен особенностью численного метода Рунге–Кутты. На рис. 5.8 приведен график управления маятником, отклоняющегося влево от вертикали, а именно для начальных условий  $x(0) = (-\pi/4 \ 0)^T$ .

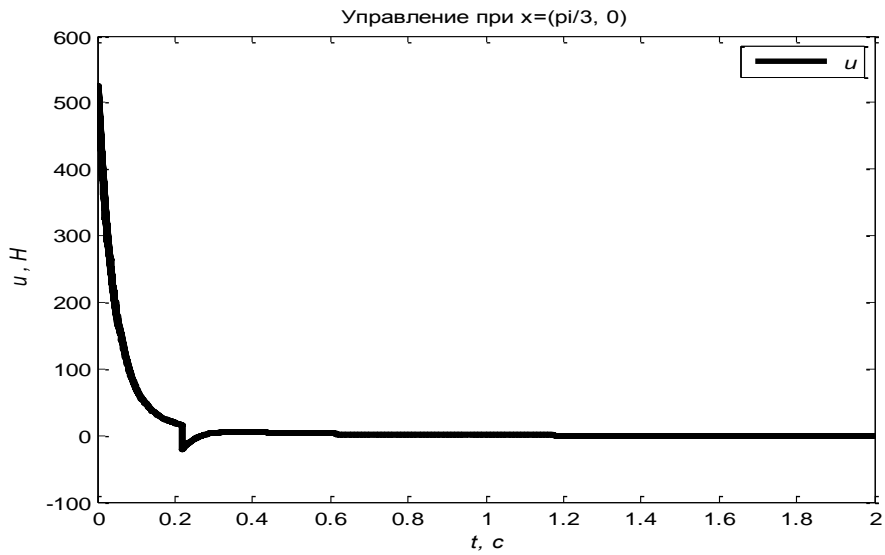


Рис. 5.6

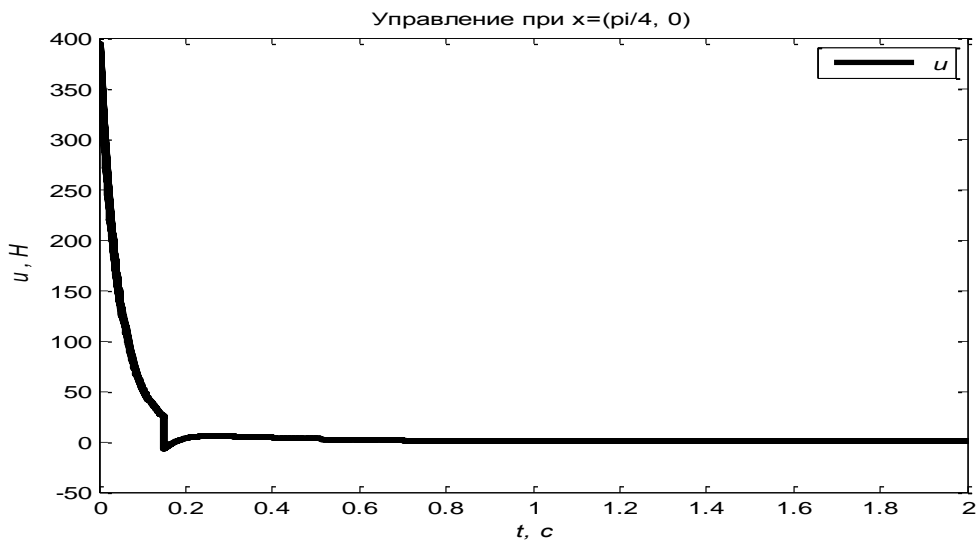


Рис. 5.7

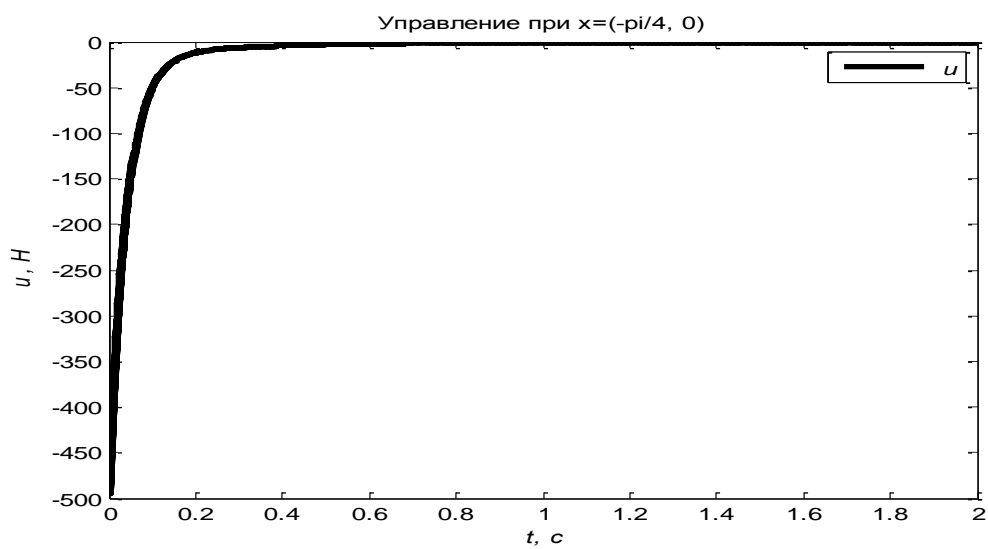


Рис. 5.8



С помощью алгоритма Лоусона и разработанного комплекса программ проведено качественное исследование решений системы дифференциальных уравнений модели перевернутого маятника (4.32). На рис. 5.9–5.13 представлены фазовые траектории модели для конкретных начальных условий. Из графиков видно, что при  $t \rightarrow \infty$  траектории приближаются к точке равновесия  $x = 0$  и определяют состояние равновесия устойчивый узел.

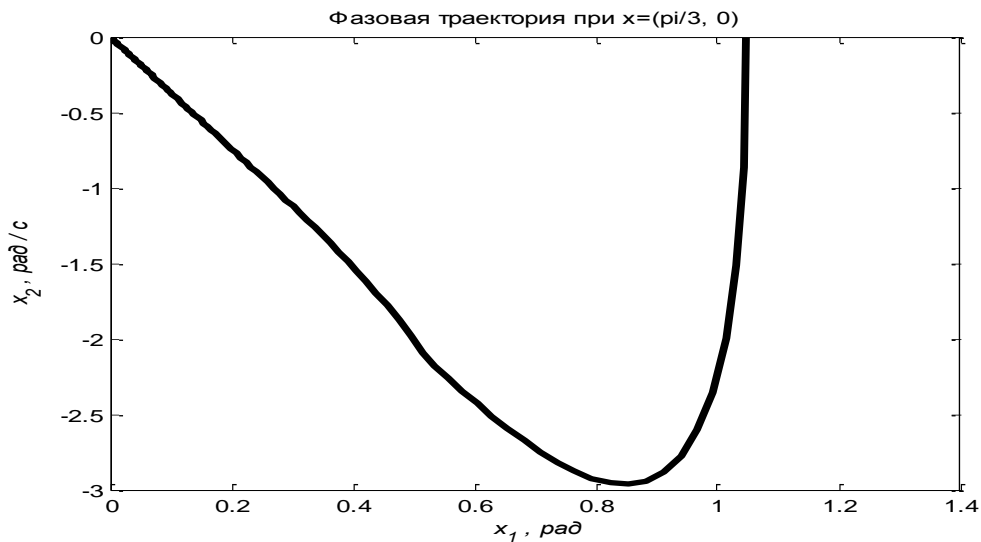


Рис. 5.9

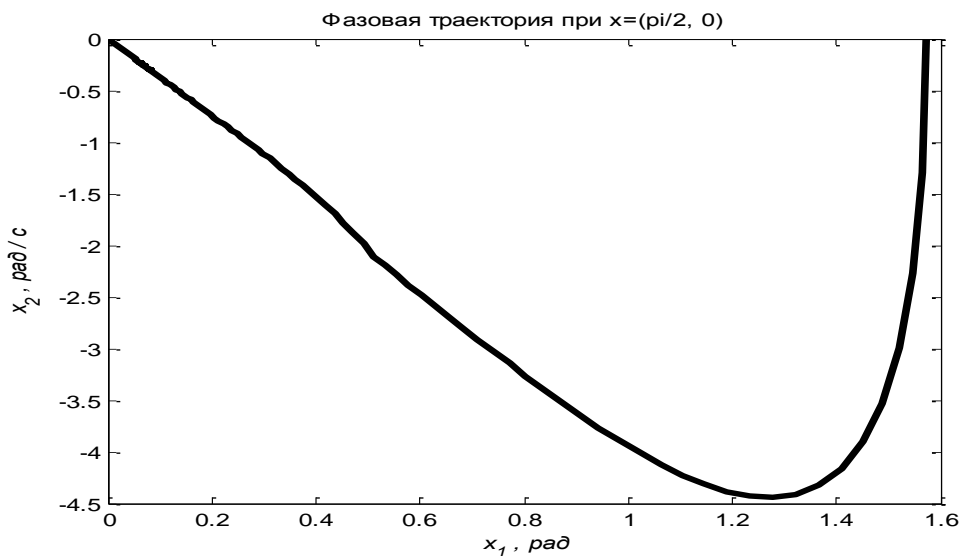


Рис. 5.10.

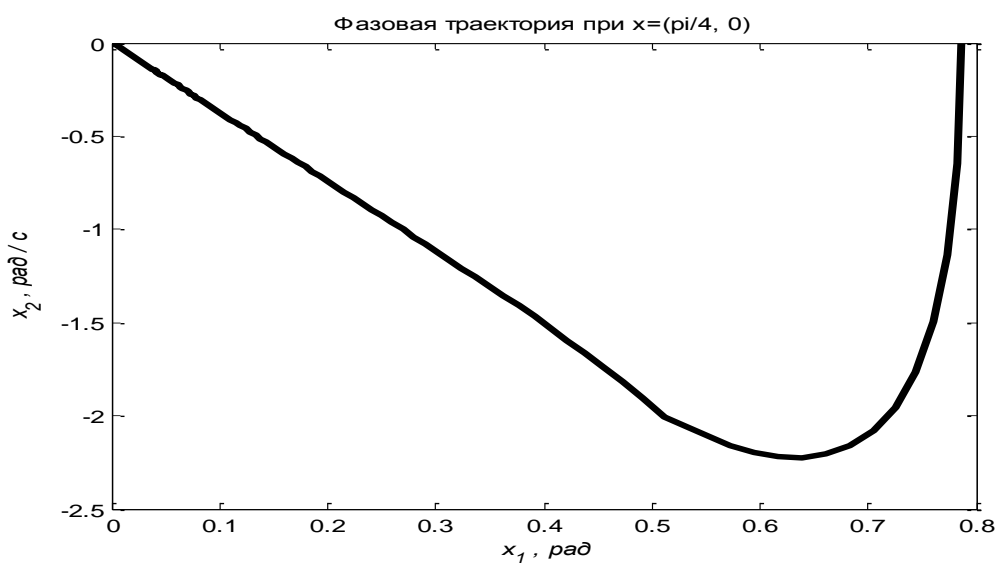


Рис. 5.11.

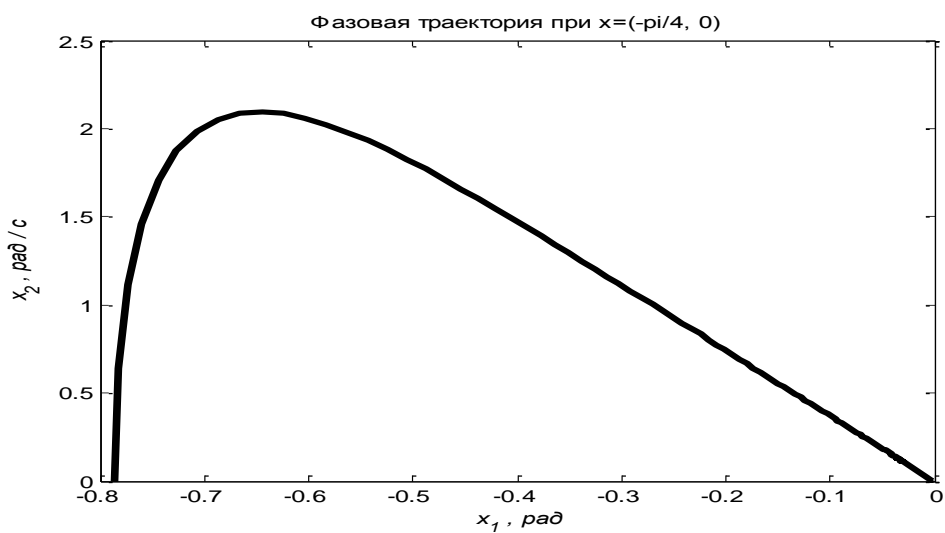


Рис. 5.12

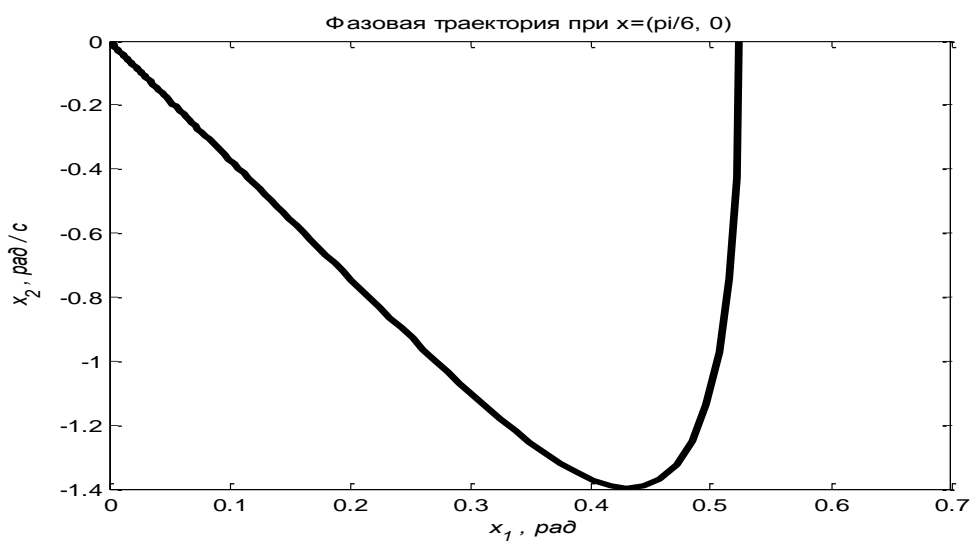


Рис. 5.13.

Результаты компьютерного моделирования показывают, что при заданных начальных условиях можно построить логический регулятор, стабилизирующий перевернутый маятник, описываемый моделью (4.32).

Таким образом, в настоящем разделе изучена динамика моделей управляемых маятниковых систем с логическими регуляторами на примере ТС-модели перевернутого маятника (4.32) и (4.42) с помощью программного комплекса, разработанного на основе алгоритма Лоусона.

Преимущества программного комплекса заключаются в следующем.

1. Комплекс программ с учетом универсальной аппроксимации ТС-моделью позволяет исследовать широкий класс моделей управляемых динамических систем не только в окрестности положения равновесия, но и в глобальном смысле.

2. При разработке комплекса программ для изучения динамики моделей управляемых маятниковых систем предложено использовать алгоритм Лоусона решения систем линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений.

3. В процессе создания и применения комплекса показана согласованность аналитических и численных результатов на примере моделирования перевернутого маятника.

Результаты раздела опубликованы в работах [65е, 79б].

### **5.3. Программная реализация алгоритма стабилизации перевернутого маятника**

Приведем результаты программной реализации в среде Visual Studio на языке C# синтезированного алгоритма стабилизации перевернутого маятника, полученного в разделе 4.3 настоящей главы.

Завершающим этапом разработки любого алгоритма стабилизации является его апробация. В случаях, когда реальные испытания процесса стабилизации управляемой системы затруднены из-за финансовых или физических препятствий или могут дать непредсказуемый результат, целесообразным является выполнение компьютерной реализации исследуемого алгоритма [33]. Главной составляющей компьютерного эксперимента является правильный выбор языка программирования. Наиболее эффективным для выполнения компьютерной реализации алгоритмов стабилизации управляемых систем с логическими регуляторами является использование проблемно-ориентированных языков программирования, структуры данных которых отражают структуру некоторой предметной области. Как правило, такие языки являются достаточно простыми, поскольку они не предполагают использования вне данной области [88].

C# (произносится «си шарп») – объектно-ориентированный язык программирования, который был разработан в 1998–2001 гг. группой инженеров под руководством Андерса Хейлсберга в компании Microsoft как язык разработки приложений для платформы Microsoft.NET Framework. C# относится к языкам с C-подобным синтаксисом, его синтаксис наиболее близок к C++ и Java. В настоящем исследовании использован пакет разработчика Visual Studio компаний Microsoft – линейка продуктов компании Microsoft, включающих интегрированную среду разработки программного обеспечения и ряд других инструментальных средств [133]. Данные продукты позволяют разрабатывать как консольные приложения, так и приложения с графическим интерфейсом. Visual Studio включает в себя редактор исходного кода с поддержкой технологии IntelliSense (технология автодополнения Microsoft) и возможностью простейшего рефакторинга кода. Встроенный отладчик может работать как отладчик уровня исходного кода, так и как отладчик машинного уровня. Остальные встраиваемые инструменты включают в себя редактор форм для упрощения создания графического интерфейса приложения, дизайнер классов и дизайнер схемы базы данных.

Программа, реализующая алгоритм стабилизации управляемой маятниковой системы (4.43), на языке C# представлена следующими модулями [82]:

- 1) модуль объявления переменных (описание и обозначение входящих величин);
- 2) модуль инициализации (выполняется построение «окна», в котором будут отражены конкретные числовые значения входящих величин и результаты компьютерного моделирования в виде графиков);
- 3) вспомогательный модуль (описание команд для построения графика, изменения цвета и толщины линий, обозначения координатных осей и т.д.);
- 4) модуль, содержащий описание базы правил логического регулятора;
- 5) основной модуль, реализующий численное решение системы (3.43) с учетом начальных данных.

На рис. 5.14 приведен фрагмент листинга программы в C#(модуль 4), в котором для описания базы правил логического регулятора использованы команды if (если), else (иначе), && (и).

```

Form1.cs X
Pendulum Pendulum.Pendulum

if ((x1 > 0 && x1 < 1.4) && (x2 > 0 && x2 < 0.52)) {
    bot1 = 0; top1 = 1.4;
    bot2 = 0; top2 = 0.52;
    u = 1 * (mP + mT) * (x1 * 1 + G);
} else if ((x1 >= -1.4 && x1 <= 0) && (x2 >= -0.52 && x2 <= 0)) {
    bot1 = -1.4; top1 = 0;
    bot2 = -0.52; top2 = 0;
    u = 1 * (mP + mT) * (x1 * 1 - G);
} else if ((x1 > 0 && x1 <= 1.4) && (x2 > -0.52 && x2 <= 0)) {
    bot1 = 0; top1 = 1.4;
    bot2 = -0.52; top2 = 0;
    u = -x1;
} else if ((x1 >= -1.4 && x1 < 0) && (x2 > 0 && x2 <= 0.52)) {
    bot1 = -1.4; top1 = 0;
    bot2 = 0; top2 = 0.52;
    u = -x1;
} else if ((x1 > 0 && x1 <= 1.4) && (x2 > -0.09 && x2 < 0.09)) {
    bot1 = 0; top1 = 1.4;
    bot2 = -0.09; top2 = 0.09;
}
    
```

Рис. 5.14

Оценка начальных условий проведена с учетом сопоставления лингвистических термов реальным значениям входящих величин. Заметим, что база правил логического регулятора представлена девятью правилами, подробное описание которых дано в разделе 4.3 главы 4.

При проведении компьютерного моделирования системы (4.43) использованы следующие значения параметров маятника  $m = 2$  кг,  $M = 8$  кг,  $2l = 1$  м. Для выполнения вычислительных расчетов значения входящих величин  $x_1$  и  $x_2$  записываются в радианах и радиан/сек соответственно. На рис. 5.15 представлены графики угла отклонения при условиях  $x_1 = -8^\circ$  и  $x_1 = 8^\circ$  соответственно. Из графиков видно, что траектории приближаются к точке равновесия  $x=0$ .

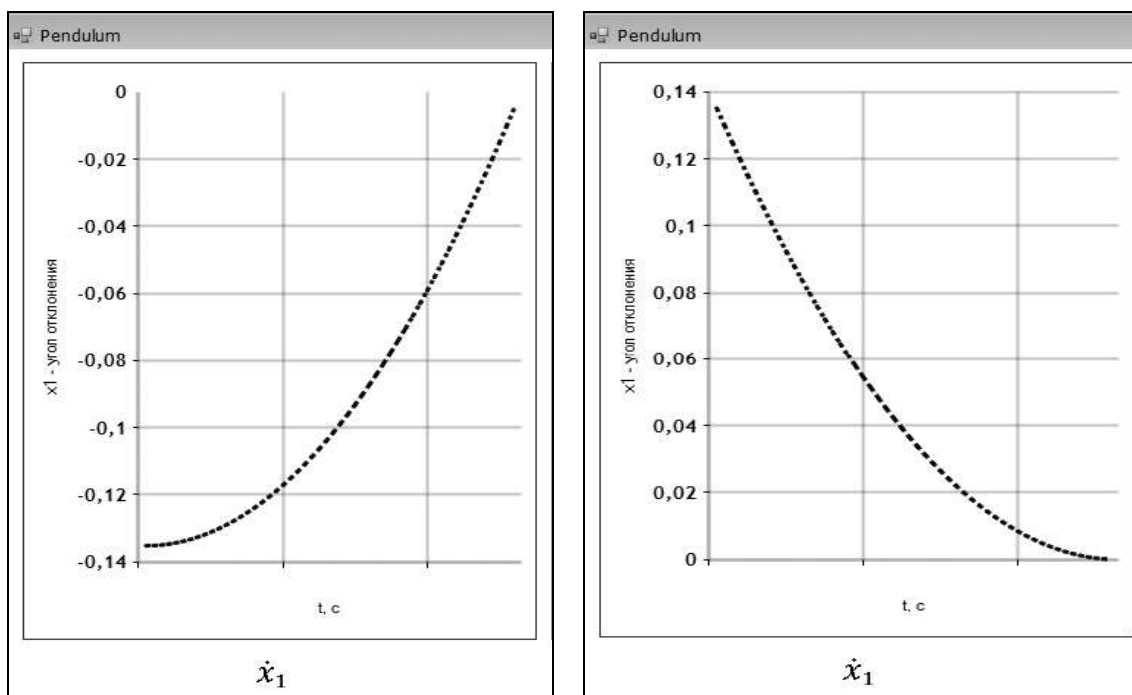


Рис. 5.15

Результаты компьютерного моделирования системы (4.43), полученные и для других начальных условий, подтверждают эффективность применения синтезированного логического регулятора.

Предложенный в разделе 4.3 алгоритм стабилизации управляемой маятниковой системы может быть модифицирован к другим моделям управляемых маятниковых систем с логическими регуляторами, в частности, к модели двухзвенного перевернутого маятника, а также использован для синтеза логических регуляторов в многосвязных системах управления сложными динамическими объектами.

#### 5.4. Применение когнитивного подхода к моделированию управляемой маятниковой системы

Проведение когнитивного анализа и моделирования систем с неполной информацией является крайне сложной задачей, для решения которой привлекаются прикладные компьютерные системы. Компьютерная среда Matlab объединяет более 40 пакетов прикладных инженерных и математических программ и является эффективным инструментом для моделирования управляемых систем [96, 103, 183]. В работе [98] дано описание разработанных российскими учеными компьютерных систем моделирования когнитивных карт с учетом их разновидностей. Заметим, что не менее эффективным инструментом для моделирования систем с неполной информацией в компьютерной среде

Matlab является пакет Fuzzy Logic Toolbox [183]. В [128] рассмотрено применение нечетко-когнитивного подхода в задаче управления процессом выплавки FESI на основе использования вышеуказанного пакета.

Рассмотрим применение пакета Fuzzy Logic Toolbox для проектирования маятниковой системы с логическим регулятором. Работа в этом пакете определяется следующими этапами: моделирование, исследованием и визуализацией в режиме реального времени. Пакет Fuzzy Logic Toolbox представлен встроенными GUI-модулями (англ. Graphical User Interface, GUI), которые создают понятийную среду, обеспечивающую легкое продвижение по всем этапам проектирования системы с логическим регулятором. Приведем краткую характеристику каждого GUI-модуля [96]:

- Fuzzy Inference System Editor (FIS) – редактор общих свойств системы с логическим регулятором, с помощью которого можно установить число входов и выходов системы, выбрать тип системы (Суджено, Мамдани), метод дефаззификации, реализацию логических операций или выполнить переход к другим GUI-модулям;

- Membership Function Editor – редактор функций принадлежности, который выводит на экран графики функций принадлежности входных и выходных переменных. Позволяет выбрать количество термов для лингвистической оценки входных и выходных переменных, а также задать тип и параметры функции принадлежности каждого терма;

- Rule Editor – редактор базы знаний позволяет задавать и редактировать правила в лингвистическом, логическом и индексном формате. Редактирование правил осуществляется выбором необходимого сочетания термов из меню;

- Rule Viewer – браузер логического вывода., который визуализирует выполнение логического вывода по каждому правилу, получение результирующего трем-множества и его дефаззификацию;

- Surface Viewer – браузер поверхности «входы-выход» управляемой системы. Строит графики зависимости выходной переменной от любых двух входных переменных.

Для построения устойчивой модели перевернутого маятника воспользуемся экспертными знаниями о поведении объекта, изложенными в работе [151]. Проектирование модели основано на построении зависимости управляющего воздействия  $u$ , вырабатываемого логическим регулятором, от угла отклонения  $x_1$  маятника от вертикали и от его угловой скорости  $x_2$ . Для описания входных переменных  $x_1$  и  $x_2$  введены следующие термы: отрицательная большая (ОБ), отрицательная (О), нулевая (Н), положительная (П), положительная большая (ПБ).

Переменная выхода  $u$  описывается термами: очень большая отрицательная (оБО), большая отрицательная (БО), отрицательная (О), нулевая (Н), положительная (П), большая положительная (БП), очень большая положительная (оБП). Зависимость переменной выхода от значений входящих переменных описывается лингвистическими правилами  $\Pi_i$ , где  $i=1, \dots, 25$ , вида [151]:

$\Pi_1$ : если  $x_1=OB$  и  $x_2=OB$ , то  $u=оБО$ .

Зависимость переменной выхода от значений входящих переменных представлено в табл. 5.1.

**Табл. 5.1.**

**Зависимость переменной выхода  $u$  от значений входящих переменных  $x_1$  и  $x_2$**

Угол отклонения ( $x_1$ )	Угловая скорость ( $x_2$ )				
	OB	O	H	П	БП
OB	оБО	оБО	БО	O	H
O	оБО	БО	O	H	П
H	БО	O	H	П	БП
П	O	H	П	БП	оБП
БП	H	П	БП	оБП	оБП

С помощью метода функций Ляпунова выполним синтез устойчивой модели перевернутого маятника. Предполагается, что о поведении перевернутого маятника известна лишь следующая априорная информация:

- состояния модели определяются переменными  $x_1$  и  $x_2$ ;
- $x_2$  пропорционально управлению  $u$ , т.е. если  $u$  возрастает (убывает), то  $\dot{x}_2$  возрастает (убывает).

Управление  $u$  зависит от  $x_1$  и  $x_2$ , т.е.  $u = u(x_1, x_2)$ . В качестве функции Ляпунова рассмотрим функцию  $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ . Поскольку  $V(0, 0) = 0$  и  $V(x_1, x_2) > 0$ , то для того, чтобы  $V(x_1, x_2)$  была функцией Ляпунова, необходимо обеспечить выполнимость условия

$$\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial t} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2 \dot{x}_2 < 0.$$

Имеют место три случая:

1. Если  $x_1$  и  $x_2$  имеют противоположные знаки, то  $x_1 x_2 < 0$  и заданное условие будет выполняться при  $x_2 \dot{x}_2 = 0$ .

2. Если  $x_1$  и  $x_2$  положительны, то заданное условие будет выполняться при  $\dot{x}_2 = -x_1$ .



3. Если  $x_1$  и  $x_2$  отрицательны, то заданное условие будет выполняться при  $\dot{x}_2 > -x_1$ .

Используя вышеприведенные рассуждения и априорную информацию о том, что  $x_2$  пропорционально  $u$ , получим редуцированную базу правил логического регулятора, состоящую из четырех лингвистических правил:

- П<sub>1</sub>: если  $x_1 = П$  и  $x_2 = О$ , то  $u = Н$ .
- П<sub>2</sub>: если  $x_1 = О$  и  $x_2 = П$ , то  $u = Н$ .
- П<sub>3</sub>: если  $x_1 = П$  и  $x_2 = П$ , то  $u = БП$ .
- П<sub>4</sub>: если  $x_1 = О$  и  $x_2 = О$ , то  $u = БО$ .

Проведем пошаговое проектирование и тестирование синтезированной модели перевернутого маятника (5.6), используя GUI-модули пакета Fuzzy Logic Toolbox. На основе FIS-редактора представим общую информацию об управляемой системе: количество входных переменных, переменная выхода, алгоритм Мамдани (рис. 5.16).

С помощью модуля Rule Editor сформируем функции принадлежности для переменных. На рис. 5.17 представлен вид окна редактора функций принадлежности, в частности для входящей переменной – угол отклонения введены термы (ОБ, О, Н, П, ПБ) и определен вид функции принадлежности (треугольный вид). Аналогичные действия проведены для переменных  $x_2$  и  $u$ .

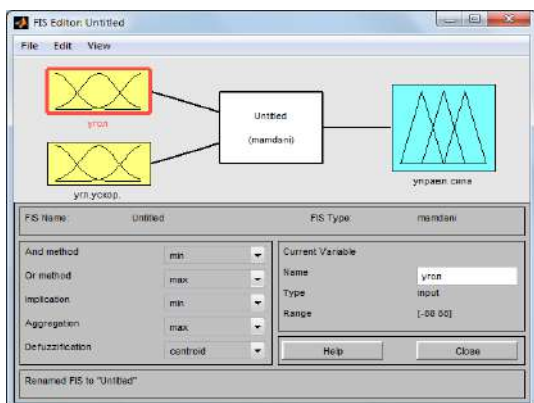


Рис. 5.16

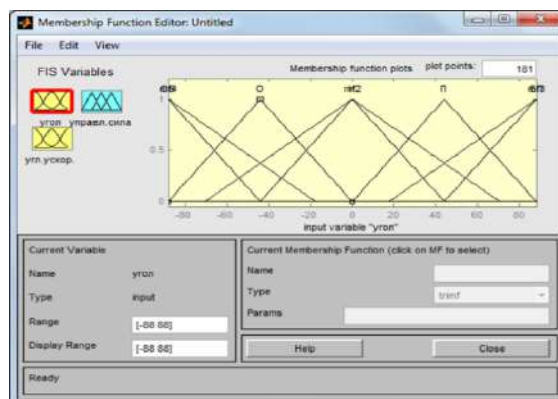


Рис. 5.17

Формирование базы правил логического регулятора модели (5.6) проведено с помощью модуля Rule Editor и представлено на рис. 5.18. Визуализация логического вывода осуществляется с помощью модуля Rule Viewer. Указанный модуль иллюстрирует для каждого правила ход логического вывода, нахождение результирующего нечеткого множества и процесс дефаззификации, т.е. позволяет увидеть числовые значения входящих переменных и переменной выхода (рис. 5.19). Таким образом, с помощью построенной модели и окна просмотра правил Rule Viewer

можно решать задачу интерполяции, т.е. задачу, решение которой и требовалось найти.

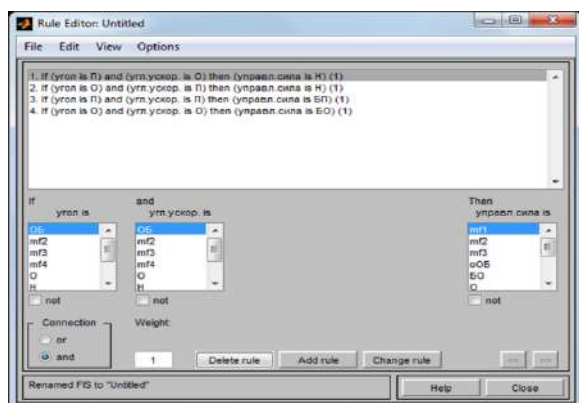


Рис. 5.18

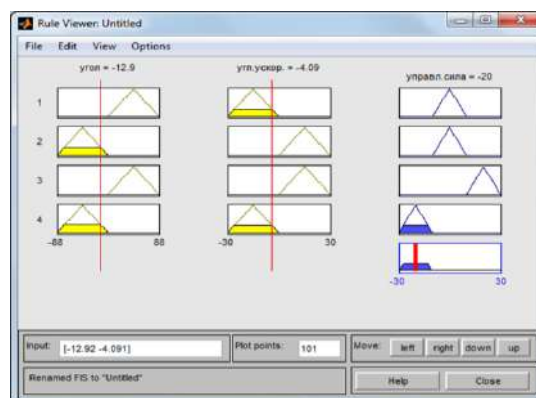


Рис. 5.19

Результат отображения входов в выход синтезированного логического регулятора можно представить в виде полилинейной гиперповерхности с помощью модуля View-Surface (рис. 5.20). Полученная поверхность характеризует функционирование логического регулятора для возможных значений лингвистических переменных.

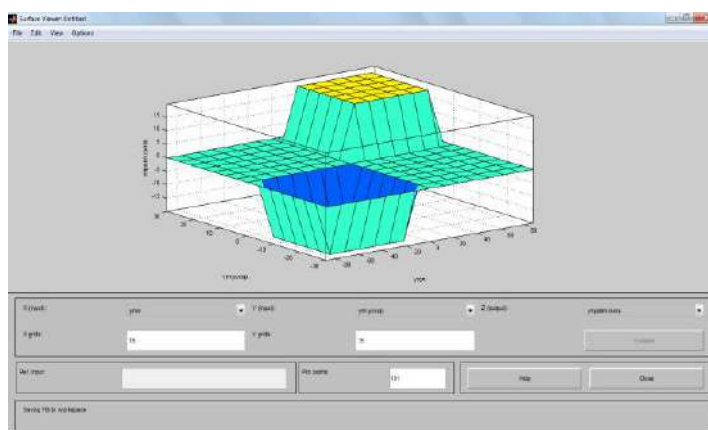


Рис. 5.20

Отметим достоинства моделирования управляемой маятниковой системы, представленной в виде лингвистического описания, с помощью пакета Fuzzy Logic Toolbox:

- для проектирования управляемой системы нет необходимости в наличии дифференциальной модели, описывающей динамику изучаемого процесса, управление осуществляется с помощью правил вида *если ... то*;
- логические регуляторы, относящиеся к классу обучаемых, сохраняют высокую работоспособность в условиях помех и погрешностей измерения, в отличие от линейных регуляторов, и достаточно быстро настраиваются на изменяющиеся внешние воздействия, малые вариации нечетких множеств, определяющих выбор состава и вида терм, оказывают слабое влияние на показатели качества системы;

– моделирование управляемых систем с логическими регуляторами на основе экспертных данных сокращает время их разработки, характеризуется простотой выполнения. Экспертные знания легко внедрить в системы с помощью логических регуляторов, что позволяет быстро создавать прототипы изделий, процессов, механизмов с понятными для человека алгоритмами функционирования;

– система тестирования правил позволяет в реальном времени изменять значение входящих переменных и получить значения переменных выхода.

В заключении отметим, что используемый подход к построению когнитивных моделей систем с неполной информацией позволяет реализовать эффективное управление такими системами без построения точной математической модели. Наглядность НКК, возможности проведения численного моделирования, а также комбинирование экспертного и адаптивного подходов для построения базы лингвистических правил делают обобщенные НКК удобным средством описания систем с неполной информацией.

Ряд результатов настоящего раздела опубликован в [77в].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии рассмотрены вопросы моделирования и анализа устойчивости динамических систем на основе методов интеллектуального управления и свойств линейных матричных неравенств. В первой главе приведен обзор методов моделирования и анализа устойчивости управляемых динамических систем. Перспективным направлением для изучения устойчивости моделей управляемых систем является применение метода функций Ляпунова в сочетании с другими методами. Эффективность предложенных методов определяется ослаблением требований к функциям Ляпунова и расширением класса используемых вспомогательных функций. Во второй главе приведен обзор результатов по применению когнитивного моделирования и искусственного интеллекта для исследования динамических систем в различных областях науки и техники. В третьей главе рассмотрен подход к изучению нелинейных динамических систем на основе построения моделей Такаги–Суджено. Рассмотрена формализация нелинейных динамических систем с логическими регуляторами с помощью ТС-моделей. Предложен подход к синтезу управления динамической системы с переключением, базирующийся на представлении исходной системы моделью ТС-моделью. Получены условия устойчивости в виде модифицированных ЛМН. В четвертой главе построена ТС-модель перевернутого маятника и приведены ее модификации, основанные на редукции числа правил ТС-модели, а также на проектировании управляемой системы с переключением. Редукция числа правил модели позволила представить условия устойчивости, представленные ЛМН, в более компактном виде для проведения вычислительных процедур с помощью прикладных пакетов. Изучена адекватность построенной модели. В пятой главе проведено компьютерное моделирование управляемых маятниковых систем. С помощью разработанного комплекса компьютерных программ в пакете Matlab получены численные решения ЛМН, определяющих конкретное задание положительно определенной матрицы функции Ляпунова и матриц коэффициентов усиления, при которых для ТС-моделей перевернутого маятника можно построить стабилизирующий логический регулятор. Показана согласованность аналитических и численных результатов моделирования рассматриваемых систем маятникового типа. Проведено тестирование когнитивной модели перевернутого маятника с интеллектуальным управлением с помощью пакета Fuzzy Logic Toolbox компьютерной среды Matlab.

Исследование устойчивости перевернутого маятника является классической задачей в динамике и теории управления. Указанный объект

маятникового типа находит широкое применение в науке и технике в настоящее время. Изучение маятниковых систем является перспективным направлением исследования. Модель перевернутого маятника используется в системах ракетного управления, в робототехнике, в управлении и стабилизации строительными кранами [20, 21, 40, 150, 151, 176, 182]. Перевернутый маятник можно рассматривать в качестве эталона для тестирования алгоритмов управления (ПИД-регуляторов, нейронных сетей, нечеткого управления, генетических алгоритмов, теории машинного обучения и т.д.). Модели, рассмотренные в [214], могут быть аппроксимированы с помощью ТС-моделей. Для исследования указанных моделей также возможно применение методов интеллектуального управления.

Существующие различные вариации перевернутого маятника имеют разнообразные приложения. В [201] дано обобщение маятника Капицы, точка подвеса которого движется в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Выполнен анализ устойчивости по Ляпунову движения изучаемой маятниковой системы, подверженной возбуждению периодических движущих сил и стохастических движущих сил. Проведено численное исследование случайного движения обобщенного маятника Капицы при стохастических движущих силах. Показано существование устойчивого квазипериодического движения для этого маятника. Имитация движения маятника может быть использована для анализа устойчивости зданий и конструкций во время землетрясения.

В качестве перспективы развития нейросетового подхода к моделированию нелинейных систем следует выделить: использование рекуррентных нейронных сетей с единичной задержкой, хранящих информацию о прошлых реализациях переключений; использование нейросетей глубокого обучения; использование нейросетей для поиска коэффициентов матриц, входящих в правые части уравнений движения. Кроме того, перспективным направлением исследований является синтез и реализация новых типов нейросетей с каскадным обучением.

Важно отметить, что в рамках развития когнитивных технологий предполагается применение методов машинного обучения с подкреплением [157]. Для задач интеллектуального управления важен обмен данными с внешней средой и получение новых знаний на каждом этапе функционирования искусственных нейронных сетей с учетом возможностей обучения с подкреплением.

Перспективным является проведение исследований в следующих направлениях: 1) возможности пакета Python3 в рамках программно-аппаратной платформы «Эльбрус 801-РС» для исследования систем интеллектуального управления с использованием когнитивного моделирования и нейросетей с обучением; 2) анализ моделей с

нестационарными возмущениями специального вида; 3) исследование нелинейных моделей более высокой размерности; 4) разработка алгоритмов обучения нейросетей с учетом высокопараллельного и каскадного обучения, а также обучения с подкреплением; 5) разработка подключаемых библиотек вспомогательных операций на языке C/C++ с учетом особенностей архитектуры e2k.

## Список литературы

1. *Авдеева З.К., Коврига С.В., Макаренко Д.И.* Когнитивное моделирование для решения задач управления слабоструктурированными системами (ситуациями) // Управление большими системами: сборник трудов. 2006. № 16. С. 26–39.
2. *Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силов В.Б., Тарасов В.Б.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
3. *Аксенов Г.С., Фомин В.Н.* Синтез адаптивных регуляторов на основе метода функций Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1982. № 6. С. 126–138.
4. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Об устойчивости гибридных однородных систем // Вестник Самарского. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 5(21). С. 24–32.
5. *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М.* Оптимизация динамики управляемых систем. М.: МГУ, 2000.
6. *Александров В.В., Сарычев В.А.* Цифровые программируемые технологии // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2010. Т. 8. № 11. С. 3–9.
7. *Александрова В.В., Зайцева А.А.* 3D-технология и когнитивное программирование // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2012. Том 10. № 5. С. 61–64.
8. *Алиев Р.А., Захарова Э.Г., Ульянов С.В.* а) Нечеткие модели управления динамическими системами // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. М.: ВИНТИ, 1990. Т. 29. С. 127–201; б) Нечеткие регуляторы и интеллектуальные промышленные системы управления // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 32. С. 233–313.
9. *Андреев А.С.* О методах исследования задач устойчивости, стабилизации и управления движением механических систем // Прикладная математика и механика: сб. научных трудов. Ульяновск: УлТУ, 2011. С. 16–65.
10. *Ананьевский И.М.* Синтез управления динамическими системами на основе метода функций Ляпунова // Труды Междунар. конф. по математической теории управления и механике. М.: РУДН. 2011. С. 23–29.
11. *Андреевский Б.Р., Гузенко П.Ю., Фрадков А.Л.* Управление нелинейными колебаниями механических систем методом скоростного градиента // АиТ. 1996. №4. С. 4–17.

12. *Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф.* Общее описание подпрограмм решения обыкновенных дифференциальных уравнений библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ // Вычислительные методы и программирование. 2003. Т.4. С. 7–15.

13. *Афанасьев В.Н.* а) Динамические системы управления с неполной информацией: алгоритмическое конструирование. М.: УРСС, 2007; б) Алгоритмический метод построения управлений нелинейным неопределенным объектом // Проблемы управления. 2015. № 5. С. 14–19; в) Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: Либроком/URSS, 2015.

14. *Афанасьев В.Н., Семион А.А.* Регулятор с дискретно изменяемыми параметрами // Проблемы управления. 2014. № 5. С. 14–19.

15. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1989.

16. *Афанасьева В.И.* Об устойчивости некоторых классов технических систем нечеткого управления // Вопросы теории и безопасности и устойчивости систем. Вып.12. М.:ВЦ РАН, 2010. С. 197–205.

17. *Афанасьева В.И., Дружинина О.В.* Устойчивость дескрипторных систем с неполной информацией // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Вып. 13. М.: ВЦ РАН, 2011. С. 59–69.

18. *Афанасьева В.И., Петрова С.Н., Лисовский Е.В., Игонина Е.В., Людаговская М.А.* Адаптивная мультимодельная аппроксимация в системах управления с интеллектуальными компонентами // Научные технологии. 2019. Т. 20. № 5. С. 5–12.

19. *В.Н. Ашихмин, М.Б. Гитман, Н.Э. Келлер, О.Б. Наймарк, В.Ю. Столбов, П.В. Трусов, П.Г. Фрик.* Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие / Под ред. П.В. Трусова. М.: Университетская книга. Логос. 2007.

20. *Бакаев Ю.Н.* Приближенное интегрирование дифференциального уравнения маятника // ПММ. 1952. №6. С. 26–34.

21. *Баландин Д.В., Городецкий С.Ю.* Классические и современные методы построения регуляторов в примерах. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012.

22. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. Н. Новгород. 2010.

23. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.

24. *Басалин П.Д., Тимофеев А.Е., Кумагина Е.А., Неймарк Е.А., Фомина И.А., Чернышова Н.Н.* Реализация гибридной интеллектуальной



обучающей среды производственного типа // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С. 256–267.

25. *Батыршин И.З.* Основные операции нечеткой логики и их обобщения. Казань: Отечество, 2001.

26. *Батыршин И.З., Недосекин А.О., Стецко А.А., Тарасов В.Б., Язенин А.В., Ярушкина Н.Г.* Нечеткие гибридные системы: Теория и практика. М.: Физматлит, 2007.

27. *Бегун П.И.* Моделирование в биомеханике М.: Высшая школа, 2010.

28. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. Ижевск: ИД «Удмуртский университет», 1999.

29. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление (линейная теория). М.: Высшая школа, 2001.

30. *Бобылев Н.А., Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Об устойчивости семейств динамических систем // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 447–452.

31. *Борисов В.В., Федулов А.С.* Нечеткий когнитивный анализ и моделирование слабо формализуемых проблем // Материалы XIX Международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета СмолГУ «Системы компьютерной математики и их приложения». Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 113–117.

32. *Бортяков Д.Е., Орлов А.Н.* Специальные грузоподъемные машины. Портальные, судовые и плавучие краны. СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2009.

33. *Булавин Л.А., Выгорницкий Н.В., Лебовка Н.И.* Компьютерное моделирование физических систем: учебное пособие. Долгопруд.: Интеллект, 2011.

34. *Васильев С.Н.* К интеллектуальному управлению // Нелинейная теория управления и ее приложения. М.: Физматлит, 2000. С. 57–126.

35. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Т. 1. Казань: Фолиант, 2011. С. 23–81.

36. *Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е.* Интеллектуальное управление динамическими системами. М.: Физматлит, 2000. 352 с.

37. *Веремей Е.И.* Когнитивная реализация оптимизационного подхода к синтезу законов управления подвижными объектами // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. №12. С. 98 – 107.

38. *Вержбицкий В.М.* Численные методы. М.: Высшая школа, 2000.
39. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.
40. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ружицкая Е.А.* Демпфирование и стабилизация маятника при больших начальных возмущениях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. №1. С.29 – 38.
41. *Галиуллин А.С., Шестаков А.А.* а) Об определениях устойчивости механических систем// Тез.докл. XXXII науч. конф. ф-та физ.-мат. и ест.наук. Ч. 2. М.: РУДН, 1996. С.15–16; б) Устойчивость движения и вариационные принципы динамики// Вестник РУДН. Сер. Прикл. матем. и информатика. 1996. №2. С.20–28.
42. *Глазачев А.В.* Динамические факторы, обеспечивающие устойчивость маятниковых систем: дис. ... канд. тех. наук. Томск, 2000. 97 с.
43. *Головкин В.А.* Нейронные сети. Обучение, организация и применение. Книга 4. М.: ИПРЖР, 2001. 256 с.
44. *Горюшкин В.А.* а) Математические модели с логическими регуляторами // Вестник КамчатГТУ. Петропавловск-Камчатский, 2012. Вып. 20. С. 5–14; б) О синтезе регулятора для стабилизации нечеткой системы с неопределенностью // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 2(3). С. 5–11.
45. *Горюшкин Е.И.* Использование нейросетевых технологий в адаптивном тестировании по информатике в вузе: дис. ... канд. пед. наук. Курск. 2009. 174 с.
46. *Горяченко В.Д.* Элементы теории колебаний. – М.: Высшая школа, 2001.
47. *Гостев В.И.* Нечеткие регуляторы в системах автоматического управления. Киев: Радіоматор, 2008.
48. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М.: Наука, 1979.
49. *Грушевский С.П., Архипова А.И.* Проектирование учебно-информационных комплексов: монография. Краснодар: Издательство Кубанского государственного университета. 2000. 69 с.
50. *Деменков Н.П.* Нечеткое управление в технических системах. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
51. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
52. *Денисенко В.С.* Устойчивость нечетких импульсных систем Такаги–Сугэно: метод линейных матричных неравенств// Доклады АН Украины. 2008. № 11. С. 66–73.

53. *Дикусар В.В., Засухин С.В., Фигура А.* Применение методов теории управления при численном решении жестких стохастических уравнений // Оптимизация и приложения. Вып. IV. М.: ВЦ РАН, 2015. С.74–87.

54. *Дикусар В.В., Кошья М., Фигура А.* Применение явных схем при численном интегрировании жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Оптимизация и приложения. Вып. III. М.: ВЦ РАН, 2013. – С.67–79.

55. *Дикусар В.В., Милютин А.А.* Качественные и численные методы принципа максимума. М.: Наука, 1989.

56. *Добровольская Н.Ю.* Компьютерные нейросетевые технологии как средство индивидуализированного обучения студентов физико-математических специальностей: дис. ... канд. пед. наук. Краснодар. 2009. 263 с.

57. *Дорф Р., Бишон Р.* Современные системы управления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2004.

58. *Дружинина О.В.* а) Исследование прочности по Жуковскому траекторий гладких динамических систем с помощью функций Ляпунова // ДАН. 1998. Т. 36. № 2. С. 198–201; б) Индексно-дивергентный метод исследования устойчивости нелинейных динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2007; в) Индекс, дивергенция и функции Ляпунова в качественной теории динамических систем. М.: УРСС, 2013.

59. *Дружинина О.В., Игонина Е.В., Масина О.Н.* Моделирование и стабилизация динамических систем с логическими регуляторами / Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ РАН, 2015.

60. *Дружинина О.В., Игонина Е.В., Масина О.Н., Петров А.А.* Аспекты использования технологий прототипирования и искусственного интеллекта в рамках цифровой трансформации образовательного процесса // Современные информационные технологии и ИТ-образование, Т.16. № 1, 2020. С. 65–74.

61. *Дружинина О.В., Каледина Е.А., Щенников В.Н., Щенникова Е.В.* Стабилизация многосвязной управляемой манипуляционной системы с использованием кусочно-постоянного управления // Системы управления и информационные технологии. 2014. № 4 (58). С. 55–59.

62. *Дружинина О.В., Климачкова Т.С., Мулкиджан А.С.* Анализ технической устойчивости и стабилизации управляемых динамических систем // Наукоемкие технологии. 2013. Т. 14. № 6. С. 59–65.

63. *Дружинина О.В., Людаговская М.А.* а) Интеллектуальные методы для разработки и совершенствования информационно-управляющих систем на железнодорожном транспорте // Транспорт: наука, техника, управление. 2019. № 8. С. 3–12; б) Сравнительный анализ

информационно-управляющих транспортных систем с интеллектуальными компонентами // Материалы V Международной научно-практической конференции «Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования». Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2019. С. 62–66.

64. Дружинина О.В., Масина О.Н. а) Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2009; б) Исследование устойчивости управляемых технических систем индексно-дивергентным методом// Нелинейный мир. 2011. Т. 9. № 10. С. 677–682; в) Исследование устойчивости технических систем управления с нечеткими регуляторами на основе свойств векторных полей// Научные технологии. 2011. Т. 12. № 7. С. 57–61; г) Асимптотическая устойчивость некоторых классов систем с запаздыванием// Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Вып. 13. М.: ВЦ РАН, 2011. С. 19–28; д) Об устойчивости математических моделей технических систем управления с нечеткими регуляторами // Сборник тезисов второй международной конференции «Моделирование нелинейных процессов и систем». М.: Янус-К, 2011. С. 296 – 297; е) Исследование устойчивости трехмерной управляемой системы с помощью первого метода Ляпунова и бифуркационной картины поля состояний// Информационно-измерительные и управляющие системы. 2012. Т. 10. № 7. С. 62–66; ж) Алгоритм стабилизации непрерывной управляемой системы с сингтон-выходом // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Вып. 14. М.: ВЦ РАН, 2012. С. 145–156; з) Развитие метода функций Ляпунова для исследования устойчивости дифференциальных уравнений, моделирующих системы предикатного управления // Вестник Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 13. № 4. С. 9–13; и) Стабилизация систем интеллектуального управления на основе развития метода функций Ляпунова // Материалы V Международной научной конференции «Фундаментальные проблемы системной безопасности», посвященной 90-летию со дня рождения академика В.Ф. Уткина. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина. 2014. С. 180–185; к) Анализ устойчивости управляемых динамических систем на основе принципа сведения// Труды XVI научной конференции «Математическое моделирование и информатика». М.: МГТУ «СТАНКИН», 2014. С. 96–98; л) Анализ устойчивости и стабилизация разрывных систем с помощью обобщенных функций Ляпунова// Нелинейный мир. 2014. Т. 12. № 11. С. 12–22; м) Подход к исследованию систем интеллектуального управления на основе сравнительного анализа полиномиальных ТС-моделей // Материалы Всероссийской конференции с международным участием

«Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». М.: РУДН, 2015. С. 265–268; н) О подходах к анализу устойчивости нелинейных динамических систем с логическими регуляторами // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т.13. №2 . С. 40–49; о) Методы анализа устойчивости динамических систем интеллектуального управления. М.: ЛЕНАНД. 2016; п) Анализ устойчивости многомерных моделей динамики популяций на основе принципа редукции // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (Москва, РУДН, 24–28 апреля 2017 г.). М.: РУДН, 2017. С. 264–267.

65. *Дружинина О.В., Масина О.Н., Игонина Е.В.* а) О структуре нечетких регуляторов и их применении к алгоритмическому конструированию систем управления // Материалы Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы современной науки и образования» (г. Сибай, февраль 2010). Уфа: РИЦ БашГУ, 2010. С. 117–121; б) Исследование устойчивости управляемых систем с неполной информацией прямым методом Ляпунова // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(3). С. 42–46; в) Моделирование и построение алгоритма стабилизации перевернутого маятника // Динамика сложных систем. 2012. Т. 6. №4. С. 75–79; г) Разработка алгоритмов стабилизации управляемых систем на основе свойств линейных матричных неравенств // Научные технологии. 2013. Т. 14. № 6. С. 4–8; д) Исследование устойчивости перевернутого маятника с помощью функций Ляпунова и свойств дивергенции поля скоростей // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Вып. 15. М.: ВЦ РАН, 2013. С. 120–131; е) Синтез управления маятниковой системы с переключением на основе применения модифицированных линейных матричных неравенств // Научные технологии. 2015. Т. 16. № 10. С.3–13.

66. *Дружинина О.В., Масина О.Н., Петров А.А.* Высокопараллельные алгоритмы обучения для нейросетевых моделей технических систем // Материалы V Международной научно-практической конференции «Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования». Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2019. С. 37–41.

67. *Дружинина О.В., Седова Н.О.* Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных каскадных систем с запаздыванием в терминах линейных матричных неравенств // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 21–35.

68. *Дружинина О.В., Шестаков А.А.* а) О равномерной устойчивости состояния равновесия дифференциального уравнения, зависящего от многомерного параметра // ДАН. 2001. Т. 377. № 4. С. 485–487; б) Обобщенный прямой метод Ляпунова исследования устойчивости и притяжения в общих временных системах // Матем. сборник. 2002. Т. 193. № 10. С. 17–48.
69. *Дыда А.А., Маркин В.Е.* Системы управления с переменной структурой с парными и нелинейно деформируемыми поверхностями переключения // Проблемы управления. 2005. № 1. С. 22–25.
70. *Еграшкина Ж.Е., Седова Н.О.* Устойчивость и стабилизация нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах линейных матричных неравенств // Нелинейный мир. 2015. № 1. С. 3–15.
71. *Егунов Н.Д., Пупков К.А.* Синтез регуляторов систем автоматического управления. Т. 3. // Методы классической и современной теории автоматического управления. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
72. *Еругин Н.П.* Качественные методы в теории устойчивости // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 2. С. 227–236.
73. *Жуковский Н.Е.* О прочности движения // Уч. зап. Московского ун-та. 1882. Вып. 4. С. 1–104.
74. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.
75. *Зацаринный А.А., Киселев Э.В., Козлов С.В., Колин К.К.* Информационное пространство цифровой экономики России. Концептуальные основы и проблемы формирования / Под общей редакцией А.А. Зацаринного. М.: ФИЦ ИУ РАН, 2018. 236 с.
76. *Зубов В.И.* а) Теория колебаний. М.: Гостехиздат, 1954; б) Методы А.М. Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957;
77. *Игонина Е.В.* а) Сравнительный анализ подходов к исследованию устойчивости перевернутого маятника // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(4). С. 90–96; б) Алгоритмы исследования устойчивости управляемых маятниковых систем на основе дивергентных функций Ляпунова // Труды XXI Международной конференции «Проблемы управления безопасностью сложных систем» (г. Москва, декабрь 2013). М.: ИПУ РАН, 2013. С. 483–486; в) Исследование устойчивости и компьютерное моделирование маятниковой системы управления // Материалы I школы-семинара молодых ученых «Фундаментальные проблемы системной безопасности» (г. Елец, 20–22 ноября 2014). Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2014. С. 93–99; г) Разработка и исследование устойчивости модели интеллектуального управления контейнерным краном //

Труды XXII Международной конференции «Проблемы управления безопасностью сложных систем». М.: ИПУ РАН, 2014. С. 380–383; д) Моделирование маятниковых систем интеллектуального управления // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». М.: РУДН, 2015. С. 275–278; е) Применение когнитивного подхода к исследованию систем с неполной информацией // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2019. № 3 (15). С. 80–87.

78. *Иголина Е.В., Дружинина О.В.* Особенности разработки и применения FDM-технологии при создании и прототипировании 3D-объектов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т.13. №2. С.185–193.

79. *Иголина Е.В., Масина О.Н.* а) Численное моделирование динамических режимов функционирования системы управления перевернутым маятником // Тез.докл. XX Международной конференции «Проблемы управления безопасностью сложных систем» (г. Москва, декабрь 2012). М.: ИПУ РАН, 2012. С. 375–379; б) Применение метода Лоусона решения линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью для исследования модели перевернутого маятника // Вестник Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. 2015. Т.15. №3. С.45–48.

80. *Иголина Е.В., Масина О.Н., Дружинина О.В.* Моделирование и устойчивость системы управления порталным краном // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Вып.16. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына, 2014. С. 142–152.

81. *Иголина Е.В., Пирожок А.А.* Синтез и устойчивость системы управления перевернутым маятником // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(3). С.47–51.

82. *Иголина Е.В., Шелганов М.А.* Разработка и программная реализация алгоритма стабилизации управляемой маятниковой системы с помощью построения логического регулятора // Материалы III школы-семинара молодых ученых «Фундаментальные проблемы системной безопасности» (г. Елец, 26–28 мая 2016). Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина. 2016. С. 148–157.

83. *Исаев Р.А.* Модифицированный метод парных сравнений для экспертной оценки параметров нечеткой когнитивной модели // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. №12. С. 35 – 42.

84. *Калиткин Н.Н.* Численные методы анализа. М.: Наука, 1978.

85. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т.21. 588 с.
86. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
87. *Колесников А. А.* Синергетическое управление системой «Перевернутый маятник на управляемой тележке» // Тез.докл. VII Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». М.: ИПУ РАН, 2002. С. 45–49.
88. *Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б.* Моделирование систем. Практикум по компьютерному моделированию. СПб.: БХВ-Петербург, 2007.
89. *Коробицын В.В., Маренич В.Б., Фролова Ю.В.* Исследование поведения явных методов Рунге–Кутты при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Математические структуры и моделирование. 2007. Вып. 17. С. 19–25.
90. *Костенко К.И., Лебедева А.П., Левицкий Б.Е.* а) Анализ и синтез когнитивных структур при моделировании содержания областей знаний // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. №12. С. 50 – 55; б) Моделирование когнитивных целей операциями над формализованными знаниями // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. №13. С. 83 – 92.
91. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.
92. *Красильников П.С.* Об обобщенной схеме построения функций Ляпунова // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 199–210.
93. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: Фазис, 2000.
94. *Красовский А.А.* Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
95. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
96. *Круглов В.В., Дли М.Н., Голунов Р.Ю.* Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. М.: Физматлит, 2001.
97. *Кузнецов А.П., Марков А.В., Хаджинов М.К., Шмарловский А.С., Гаврилик Т.В.* Интеллектуальные алгоритмы управления подъемно-транспортными механизмами // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем (OSTIS–2011): материалы Междунар. науч.-техн. конф. Минск: БГУИР, 2011. С. 493–504.
98. *Кулинич А.А.* Компьютерные системы моделирования Когнитивных карт: подходы и методы // Проблемы управления. 2013. №3. С.2–16.



99. *Кураваки И., Литвинцева Л.В., Панфилов С.А., Риззотто Г.Г., Такахаши К., Ульянов И.С., Хагивара Т., Язенин А.В.* Построение робастных баз знаний нечетких регуляторов для интеллектуального управления существенно нелинейными динамическими системами // Российской академии наук. Теория и системы управления. 2004. №4. С.127–145.
100. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределённости. М.: Наука, 1977.
101. *Ла Салль Ж.П., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.
102. *Лебедев Г.Н.* Интеллектуальные системы управления и их обучение с помощью методов оптимизации. М.: МАИ, 2012.
103. *Леоненков А.В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. Издательство: БХВ-Петербург, 2005.
104. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006.
105. *Лётов А.М.* Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981.
106. *Лизина Е.А. Щенников В.Н.* Двухуровневая стабилизация многосвязной гибридной динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями // Системы управления и информационные технологии. 2011. № 2(44). С. 30–34.
107. *Луценко Е.В., Серга Г.В.* Теория информации и когнитивные технологии в моделировании сложных многопараметрических динамических технических систем // Научный журнал КубГАУ, №121(07), 2016. С.68–115.
108. *Лю Б.* Теория и практика неопределенного программирования. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
109. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
110. *Маккалох Дж., Питтс У.* Логические исчисления идей, относящихся к нервной деятельности // Автоматы. М.: ИЛ. 1956.
111. *Малинецкий Г.Г.* Когнитивный вызов и информационные технологии // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 46. 28 с.
112. *Малкин И.Г.* а) Существование функций Ляпунова // Изв. Казанского физ.-матем. общества. 1929/30. Т. 4. С. 51–62; б) Теория устойчивости движения. М.: ГИТТЛ, 1952.
113. *Мартынюк А.А.* Практическая устойчивость движения. Киев: Наукова думка, 1983.
114. *Масина О.Н.* а) О задаче обеспечения устойчивости управляемой системы // Качественное и численное исследование

математических моделей динамических систем. Межвуз. сб. научн. трудов. М.: РГОТУПС, 2006. С. 95–97; б) Об управлении нелинейными динамическими системами // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением. Труды IX Международной Четаевской конференции, посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. Иркутск: Ин-т динамики систем и теории управления, 2007. Т. 3. С. 125–129; в) О существовании решений дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 6. С. 845–847; г) Конструирование регуляторов нечеткого управления техническими системами на основе качественных данных // Научно-технические технологии. 2011. № 3. Т. 12. С. 50–55; д) Метод функций Ляпунова исследования устойчивости непрерывных систем с нечеткими регуляторами синглтонного типа // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(1). С. 61–65; е) Развитие первого метода Ляпунова исследования устойчивости дифференциальных уравнений, моделирующих системы предикатного управления // Известия РАН. Дифференц. уравнения. 2012. Вып. 17. С. 40–46; ж) Исследование качественных свойств моделей, описываемых дифференциальными включениями специального вида // Сборник статей Международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования». М.: РУДН, 2015. С. 226–231.

115. Масина О.Н., Гладких О.Б., Игонина Е.В. Колебательные режимы и неустойчивость динамических систем с неполной информацией // Материалы третьей Международной научной конференции «Фундаментальные проблемы системной безопасности и устойчивости» (ЗАО ГО «Звездный городок», 20-22 апреля 2011). М.: ВЦ РАН, 2012. С. 84–87.

116. Масина О.Н., Дружинина О.В. а) Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011; б) Метод мягких функций Ляпунова исследования устойчивости дифференциальных уравнений, моделирующих предикатную систему Такахи–Суджено // Известия РАН. Дифференц. уравнения. 2012. Вып. 17. С. 47–53; в) Анализ устойчивости и стабилизация управляемых систем с учетом разрывности правых частей // Труды XVI научной конференции «Математическое моделирование и информатика». М.: МГТУ «СТАНКИН», 2014. С. 120–122.

117. Масина О.Н., Дружинина О.В., Афанасьева В.И. Анализ устойчивости дискретных систем управления на основе функций Ляпунова и свойств линейных матричных неравенств // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2011. Т. 9. № 7. С. 53–62.

118. Масина О.Н., Дружинина О.В., Климачкова Т.С. Синтез и стабилизация систем управления с помощью полиномиальных ТС-моделей // Материалы II школы-семинара молодых ученых «Фундаментальные проблемы системной безопасности». Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2015. С. 187–190.

119. Масина О.Н., Дружинина О.В., Мияйлович Н., Ячимович М. Исследование устойчивости некоторых классов моделей естествознания на основе принципа редукции // Материалы молодежной секции в рамках IV Международной научно-практической конференции «Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования». Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2018. С. 121–125.

120. Масина О.Н., Дружинина О.В., Рапопорт Л.Б. Элементы теории устойчивости математических моделей управляемых систем. Учебное пособие. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2019.

121. Масина О.Н., Иголина Е.В. а) Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений, описывающих движение перевернутого маятника, с помощью функции Ляпунова и логического регулятора // Вестник Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. 2013. Т.13. № 4. С. 58–62; б) Сравнение подходов к анализу устойчивости перевернутого маятника с помощью линейного регулятора и построения модифицированной модели Такаги–Суджено // Тез.докл. Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (г. Москва, 22–26 апреля 2013). М.: РУДН, 2013. С. 193–196; в) Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений, описывающих движение порталного крана, на основе дивергентных функций Ляпунова // Вестник Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. 2014. №5. С. 61–63; г) Сравнительный анализ подходов к разработке методов управления моделью подъемно-транспортного механизма // Тез.докл. Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (г. Москва, 22–24 апреля 2014). М.: РУДН, 2014. С. 262–265.

122. Масина О.Н., Иголина Е.В., Мухин А.В. Анализ устойчивости и стабилизации системы управления перевернутым маятником с помощью функций Ляпунова и регулятора Такахи–Суджено // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Вып. 14. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына, 2012. С. 135–144.

123. *Масина О.Н., Петрова Н.П., Карпеченкова О.Н.* Применение лингвистических переменных и функций Ляпунова для стабилизации нелинейных нечетких систем // *Нелинейный мир*. 2010. Т. 8. № 9. С. 592–596.
124. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
125. *Матросов В.М., Васильев С.Н., Москаленко А.И.* Нелинейная теория управления и ее приложения: динамика, управление, оптимизация. М.: Физматлит, 2003.
126. *Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.Я.* Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. М.: Наука, 1990.
127. *Меренков Ю.Н.* а) Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений. М.: Изд-во РУДН, 2000; б) Об устойчивости нечетких систем // *Вестник РУДН. Сер. «Прикладная математика и информатика»*. 2002. № 1. С. 21–27; в) Математическое моделирование и качественный анализ математических моделей динамических систем: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: РГОТУПС, 2003. 245 с.
128. *Михалев А.И., Новикова Е.Ю.* Нечетко-когнитивный подход в задаче управления процессов выплавки FESI // *АСАУ*. 2006. №9(29). С. 133–139.
129. *Митришкин Ю.В., Коньков А.Е.* Метод линейных матричных неравенств в системах управления: учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ. 2018. 91 с.
130. *Моисеев Н.Н.* Теория управления и проблема «человек–окружающая среда» // *Вестник АН СССР*. 1980. № 1. С. 62–73.
131. *Нгуен Хай Зьонг.* Структурно-параметрическое оценивание нелинейных моделей динамических объектов в адаптивных системах с использованием нечетких технологий // *Интеллектуальные системы: труды VII Международного симпозиума*. Краснодар, 2006. С. 54–57.
132. *Негойцэ К.* Применение теории систем к проблемам управления. М.: Мир, 1981.
133. *Нейгел К., Уотсон К. и др.* Visual C# 2010: полный курс (Beginning Microsoft Visual C# 2010). М.: Диалектика, 2010.
134. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
135. *Николаев С.Ф., Тонков Е.Л.* О некоторых задачах, связанных с существованием и построением неупреждающего управления для

нестационарных управляемых систем// Вестник Удмуртского университета. Ижевск. 2000. Т. 1. С. 11–32.

136. *Новак В., Перфилова И., Мочкорж И.* Математические принципы нечеткой логики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

137. *Осинов Г.С.* Лекции по искусственному интеллекту. М.: Книжный дом «Либроком», 2014.

138. *Ошурков В.А., Макашова В.Н.* Оперативное планирование производства в MES-системах с использованием методов и алгоритмов искусственного интеллекта // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. №11. С. 133 – 139.

139. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.

140. *Петров А.А.* Моделирование и построение алгоритма поиска оптимальных параметров управляемых динамических систем, описываемых дифференциальными включениями // Нелинейный мир. 2017. Т. 15. № 4. С. 47–52.

141. *Петрова С.Н., Дружинина О.В.* Синтез и стабилизация нечетких систем управления с помощью параметризованных линейных матричных неравенств// Труды Института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 49(1). С. 57–61.

142. *Полосин М.Д.* Устройство и эксплуатация подъемно-транспортных и строительных машин. М.: АСАДЕМІА, 1999.

143. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

144. *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970.

145. *Поспелов Д.А.* Логико-лингвистические модели в системах управления. М.: Энергоиздат, 1981.

146. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1,2. М.: Наука, 1971, 1972.

147. *Пупков К.А., Егунов Н.Д., Гаврилов А.И., Зверев В.Ю., Коньков В.Г., Милов Л.Т., Мочалов И.А., Мышляев Ю.И., Трофимов А.И.* Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

148. *Радченко С.А.* Разработка когнитивных моделей и программных средств для анализа процесса функционирования социально-экономических систем: дис. ... канд. экон. наук: 08.00.13. Таганрог, 2005. 209 с.

149. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974.

150. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальный по быстрдействию синтез управления нелинейным маятником // Известия Российской академии естественных наук. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 13–22.
151. *Ротштейн А.П., Кательников Д.И.* Идентификация нелинейных объектов нечеткими базами знаний // Кибернетика и системный анализ. 1998. №5. С. 53–61.
152. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия–Телеком, 2008.
153. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
154. *Самарский А.А. Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
155. *Седова Н.О., Еграшкина Ж.Е.* Аппроксимирующая нечеткая модель для нелинейной системы в решении задачи стабилизации // Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования: материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора А.А. Шестакова. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2015. С.117–122.
156. *Силантьева А.В., Толпинская Н.Б., Орешкина О.А., Неземский В.И.* Когнитивные технологии в информатике: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 72 с.
157. *Синицын И.Н., Дружинина О.В., Белоусов В.В., Масина О.Н., Петров А.А.* Опыт разработки инструментально-методического обеспечения для решения задач моделирования нелинейных управляемых систем с применением технологий машинного обучения и отечественных программно-аппаратных средств // Нелинейный мир. 2019. Т.17. №4. С. 5–19.
158. а) Системы искусственного интеллекта: курс лекций [Электронный ресурс]. StudFiles URL: <https://studfiles.net/preview/7311630/page:4/>; б) Системы искусственного интеллекта: курс лекций [Электронный ресурс]. СИИ URL: <http://www.mari-el.ru/mmlab/home/AI/1/index.html>
159. *Синицын И.Н., Синицын В.И.* Лекции по нормальной и эллипсоидальной аппроксимации распределений в стохастических системах. М.: Торус Пресс, 2013. 488 с.
160. *Слепцов А.Ф., Слепцова М.В.* Интеллектуальная образовательная среда: теоретические подходы и возможности реализации

// Современные исследования социальных проблем (электронный научный журнал). 2016. № 5. С. 70-88.

161. *Сотников С.Л.* Проектирование систем искусственного интеллекта М.: ИНТУИТ, 2016.

162. *Талагаев Ю.В.* Нечеткое представление и сверхстабилизация обобщенной хаотической системы лоренцева типа // Материалы молодежной секции в рамках III Международной научно-практической конференции «Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования». Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2017. С. 30–34.

163. *Титов Ю.П.* Модификации метода муравьиных колоний для разработки программного обеспечения решения задач многокритериального управления поставками // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13. № 2. С. 64–74.

164. *Точилин П.А., Куржанский А.Б.* К задаче синтеза управлений при неопределенности по данным финитных заключений // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1599–1607.

165. *Тэрано Т., Асаи К., Сугэно М.* Прикладные нечеткие системы. М.: Мир, 1993.

166. *Ульянов С.В., Тятюшкина О.Ю., Колбенко Е.В.* Нечеткие модели интеллектуальных промышленных регуляторов и систем управления. Методология проектирования // Системный анализ в науке и образовании. 2011. № 2. С. 1–18.

167. *Усков А.А.* Системы с нечеткими моделями объектов управления. Смоленск: филиал АНО ВПО ЦС РФ «Российский университет кооперации», 2013.

168. *Федосов Б.Т.* Идентификация объекта управления. Примеры моделей технических объектов управления. Рудный: РИИ, 2008.

169. *Федулов А. С., Борисов В. В.* Модели системной динамики на основе нечетких реляционных когнитивных карт // Системы управления, связи и безопасности. 2016. №1. С.66–80.

170. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

171. *Финн В.К.* Интеллектуальные системы и общество. 2007. 352 с.

172. *Формальский А.М.* О стабилизации перевернутого маятника с неподвижной или подвижной точкой подвеса // ДАН. 2006. Т. 406. № 2 С. 175–179.

173. *Фуртат И.Б.* Дивергентные условия устойчивости динамических систем// Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 62–75

174. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.

175. *Челомей В.Н.* Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // ДАН СССР. Механика. 1983. Т.270. №1.
176. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
177. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: ГИТТЛ, 1964.
178. *Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: УРСС, 2007.
179. *Шестаков А.А., Дружинина О.В.* Метод функций Ляпунова исследования диссипативных автономных динамических процессов // Дифференц. уравнения. 2009. Т.45. №28. С. 1108–1115.
180. *Шестаков А.А., Степанов А.Н.* Индексные и дивергентные признаки устойчивости особой точки автономной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 18. № 4. С. 650–661.
181. *Широносков В.Г.* Резонанс в физике, химии и биологии. Ижевск: Удмуртский университет, 2000. №1. 92 с.
182. *Шпилевая О.Я.* Система стабилизации маятниковой установки с сигнальной настройкой // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2008. №2. С. 17–20.
183. *Штовба С.Д.* Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. М.: Телеком, 2007.
184. *Щенников В.Н., Щенникова Е.В., Каледина Е.А.* Условия стабилизации гибридных управляемых систем // Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования: материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора А.А. Шестакова. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2015. С.35–39.
185. *Щенникова Е.В.* Устойчивоподобные свойства решений нелинейных управляемых систем. М.: Изд-во РУДН, 2006.
186. *Ягер Р.Р.*(ред.) Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. М.: Радио и связь, 1986.
187. *Ярушкина Н.Г.* Нечеткие системы: обзор итогов и тенденций развития // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. №4. С.26–38.
188. *Abdelmalek I., Golea N., Hadjili M.* A new fuzzy Lyapunov approach to non-quadratic stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy models // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2007. V. 17. № 1. P. 39–51.
189. *Anshakov Yu.M., Gerdely T.* Cognitive Reasoning. Springer, 2010.



190. *Baranyi P., Korondi P., Patton R.J., Hashimoto H.* Trade-off between approximation accuracy and complexity for TC fuzzy models// *Asian J. of Control.* 2004. V. 6(1). P. 21–33.
191. *Bernal M., Guerra T. M., Kruszewski A.* A membership function-dependent approach for stability analysis and controller synthesis of Takagi-Sugeno models // *Fuzzy SeTC and Systems.* 2009. V. 160(19). P. 2776–2795.
192. *Borne P., Dieulot J.-Y.* Fuzzy systems and controllers: Lyapunov tools for a regionwise approach // *Nonlinear Analysis.* 2005. V. 63. P. 653–665.
193. *Braae M., Rutherford D.A.* Selection of parameters for a fuzzy logic controller // *Fuzzy SeTC and Systems.* 1979. V. 2. P. 185–199.
194. *Brauchli H.I.* Index, Divergenz und Stabilität in Autonomen Systemen. Zürich: Abhandlung Verlag, 1968.
195. *Chang S.S.L., Zadeh L.A.* On fuzzy mappings and control// *IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetics (SMC-2).* 1972. P. 30–34.
196. *Chen G., Pham T.T.* Introduction to fuzzy seTC, fuzzy logic and fuzzy control systems. Boca Raton: CRC Press, 2001.
197. *Cho Y.-W., Park C.-W., Lee K.-C., Park M.* An indirect model reference adaptive fuzzy control for SISO Takagi-Sugeno model// *Proc. of Inst. of Control, Automation and Systems Engineers (ICASE).* Korea, 2001. V. 3. № 1. P. 32–42.
198. *de Glas M.* Theory of fuzzy systems // *Fuzzy SeTC and Systems.* 1983. V.10. P. 65–77.
199. *Driankov D., Hellendorm H., Reich Frank M.* An introduction to fuzzy control. Berlin: Springer, 1996.
200. *Druzhinina O.V., Sedova N.O.* Analysis of stability and stabilization of cascade systems with time delay in terms of linear matrix inequalities // *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 2017. V. 56. № 1. P. 19–32.
201. *Druzhinina O.V., Sevastianov L.A., Vasilyev S.A., Vasilyeva D.G.* Lyapunov stability analysis for the generalized Kapitza pendulum// *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 937. P. 1–7.
202. *Feng G.* A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems // *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 2006. V. 14 (5). P. 676–697.
203. *Feng G., Cao S.G, Rees N.W., Chak C.K.* Design of fuzzy control systems with guaranteed stability // *Fuzzy SeTC and Systems.* 1997. V. 85. P.1–10.
204. *Hale J.K.* Dynamical systems and stability// *J.Math. Anal. Appl.* 1969. V. 26. P. 39–59.
205. *Hartman P., Olech C.* On global asymptotic stability of solutions of differential equations// *Trans. Amer. Math. Soc.* 1962. V.104. P.154–178.

206. *Igonina E. V.* Stabilization of the overturned pendulum with using of Takagi–Sugeno controller // Proc. of Distributed Intelligent Systems and Technologies Workshop DIST'2013 (Saint-Petersburg, 1–4 July 2013). Saint-Petersburg: St. Petersburg State Polytechnical University, 2013. P. 37–38.
207. *Iwashiro M., Furuta K., Astrom K.J.* Energy based control of pendulum // Proc. IEEE Conference on control Applications. Dearborn, Michigan. 1996. P. 715–720.
208. *Johanson M., Rantzer A., Arzen K.* Piecewise quadratic stability of fuzzy systems // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1999. V. 7. P. 713–722.
209. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy SeTC and Systems. 1987. V. 24. № 3. P. 301–317.
210. *King P.E., Mamdani E.N.* The application of fuzzy control systems to industrial processes // Automatica. 1977. V. 13. P. 493–507.
211. *Kiszka J.B., Gupta M.M., Nikiforuk P.N.* Energetic stability of fuzzy dynamic systems // IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetics. 1985. V. SMC-15. № 6. P. 783–792.
212. *Kluska J.* Analytical methods in fuzzy modeling and control // Studies in fuzziness and soft computing. 2009. V. 241. P. 1–251.
213. *Kosko B.* Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Trans. on Computers. 1994. V. 43. № 11. P. 1329–1333.
214. *Krasilnikov P., Gurina T., Svetlova V.* Bifurcation study of a chaotic model variable-length pendulum on a vibrating base // Int. J. of Non-Linear Mechanics. 2018. V. 105. P. 88–98.
215. *LaSalle J.P.* Fuzzy differential equations // Fuzzy SeTC and Systems. 1987. V.24. №3. P.301–317.
216. *Lawson D. J.* Generalized Runge–Kutta processes for stable systems with large Lipschitz constant // SIAM J. Numer. Anal. 1967. V. 4. № 3. P. 372–380.
217. *Lee C.* Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller I, II // IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetic. 1990. V. 20. P. 401–418.
218. *Li J., Wang H.O., Niemann D., Tanaka K.* Dynamic parallel distributed compensation for Takagi–Sugeno fuzzy systems: An LMI approach // Information Sciences. 2000. V. 123. P. 201–221.
219. *Manai Y., Benrejeb M.* New condition of stabilization for continuous Takagi–Sugeno fuzzy system based on fuzzy Lyapunov function // Inter. J. of Control and Automation. 2011. V. 4. № 3. P. 51–63.
220. *Massera J.L.* On Liapunov's condition of stability // Ann. Math. 1949. V. 50. № 3. P. 705–725.
221. *Mozelli L.A., Palhares R.M., Souza F.O., Mendes E.M.* Reducing conservativeness in recent stability conditions for fuzzy systems // Automatica. 2009. V. 45. P. 1580–1583.

222. *Negoita C.B.* On the stability of fuzzy systems // Proc. of the Int. Conf. on Cybernetics and Society. IEEE. Trans. Syst., Man and Cybernetics. 1978. V. II,III. P. 936–937.
223. *Pitarch J. L., Sala A., Ariño C. V.* Closed-form estimates of the domain of attraction for nonlinear systems via fuzzy-polynomial models // IEEE Trans. on Cybernetics. 2014. V. 44(4). P. 526–538.
224. *Precup R.-E., Tomescu M.-L., Preitl St.* Fuzzy logic control system stability analysis based on Lyapunov's direct method // Int. J. of Computers, Communications & Control. 2009. V. IV. № 4. P. 415–426.
225. *Rajesh R., Kaimal M. R.* Variable gain Takagi–Sugeno fuzzy logic controllers // Informatica. 2006. V. 17. № 3. P. 427–444.
226. *Sala A., Guerra T.M., Babuška R.* Perspectives of fuzzy systems and control. Preprint submitted to Elsevier Science. 2005. P. 1–17.
227. *Sugeno M., Kang G.T.* Fuzzy modelling and control of multilayer incinerator // Fuzzy SeTC and Systems. 1986. V. 18. № 3. P. 329–346.
228. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and iTC applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetics. 1985. V. 15. P. 116–132.
229. *Tanaka K., Hori T., Wang H.O.* A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 2003. V. 11(4). P. 582–589.
230. *Tanaka K., Sugeno M.* Stability analysis and design of fuzzy control systems // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1992. V. 45. № 2. P. 135–156.
231. *Tanaka K., Wang H.O.* Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. N.Y.: Wiley, 2001.
232. *Walker J.A.* Some resul TC on Lyapunov functions and generated dynamical systems // J. Of Differential Equations. 1978. V. 30. № 3. P. 424–440.
233. *Vassilyev S.N., Novikov D.A., Bakhtadze N.N.* Intelligent control of industrial processes // PreprinTC of the 2013 IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control, Saint Petersburg State University and Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics, and Optics, Saint Petersburg, Russia, June 19–21, 2013, pp. 49–57.
234. *Wicks M., Peleties P., DeCarlo R.* Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems // Eur. J. Control. 1998. V. 4. P. 140–147.
235. *Yen J., Wang L.* Simplifying fuzzy rule-based models using orthogonal transformation methods // IEEE Trans. Syst., Man and Cyber., Part B: Cybernetics. 1999. V. 29. № 1. P. 13–24.

236. *Yeong-Hwa Chang, Chang C.W., Chan W.S., Taur J. S., Tao C.W.* Robust and stable hybrid fuzzy control of a pendulum-cart system with particle swarm optimization // *Int. J. of Fuzzy Syst.* 2010. V. 12. № 1. P. 48–58.
237. *Ying H.* Constructing nonlinear variable gain controllers via the Takagi–Sugeno fuzzy control// *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 1998. V. 6. № 2. P. 226–234.
238. *Yoshizawa T.* Stability theory by Lyapunov's second method. Tokio: Math. Soc. Japan, 1966.
239. *Ye Hui, Mitchel A.N., Hou Ling.* Stability theory for hybrid dynamical system // *IEEE Transactions automatic control.* 1998. V. 43.№ 4. P. 461–474.
240. *Zadeh L.* Fuzzy SetC / *Information and Control*, 8(3), June 1965, pp.338–353.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

<b>Введение</b> .....	3
<b>Глава 1. Обзор методов моделирования и анализа устойчивости управляемых динамических систем</b> .....	12
1.1. Классификация систем управления и некоторые задачи их моделирования и анализа.....	12
1.2. Методы анализа устойчивости систем интеллектуального управления и их развитие.....	23
1.3. Принцип сведения задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений нечетких дифференциальных уравнений.....	32
1.4. Линейные матричные неравенства и их связь с теорией устойчивости.....	38
1.5. Модели динамических систем с логическими регуляторами и методы анализа устойчивости.....	44
<b>Глава 2. Когнитивное моделирование и искусственный интеллект в исследовании динамических систем</b> .....	50
2.1. Уровни моделирования динамических систем и их взаимосвязь.....	50
2.2. Проектирование и исследование когнитивных моделей на основе искусственного интеллекта.....	56
2.3. Области применения искусственного интеллекта и когнитивных технологий в задачах моделирования динамических систем.....	67
2.4. Приложения к системам 3D-прототипирования и к автоматизированным интеллектуальным системам обучения.....	72
<b>Глава 3. Подход к изучению нелинейных динамических систем на основе построения моделей Такаги-Суджено</b> .....	79
3.1. Динамические ТС-модели и их стабилизация.....	79
3.2. Универсальная аппроксимация управляемых систем ТС-моделями.....	83
3.3. Анализ асимптотической устойчивости на основе прямого метода Ляпунова с применением функций Немыцкого-ЛаСалля.....	87
3.4. Моделирование управляемой системы с переключением...	93
<b>Глава 4. Построение моделей и анализ устойчивости маятниковых систем интеллектуального управления</b> .....	101
4.1. Основные аспекты исследования маятниковых систем....	101
4.2. ТС-модель перевернутого маятника и ее модификации...	109

4.3. Алгоритм стабилизации.....	121
4.4. Исследование устойчивости модели перевернутого маятника с помощью функций Ляпунова и свойств дивергенции поля скоростей.....	126
<b>Глава 5. Компьютерное моделирование управляемых маятниковых систем.....</b>	<b>130</b>
5.1. Описание алгоритма Лоусона для исследования устойчивости моделей управляемых маятниковых систем.	130
5.2. Численный анализ ТС-моделей перевернутого маятника.....	131
5.3. Программная реализация алгоритма стабилизации перевернутого маятника.....	139
5.4. Применение когнитивного подхода к моделированию управляемой маятниковой системы.....	142
<b>Заключение.....</b>	<b>148</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>151</b>

Научное издание

Елена Викторовна Игонина,  
Ольга Николаевна Масина,  
Ольга Валентиновна Дружинина

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ИНТЕЛЛЕКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
И СВОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ  
МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ**

Монография

*Техническое исполнение – В. М. Гришин  
Технический редактор – О.А. Ядыкина  
Книга печатается в авторской редакции*

Лицензия на издательскую деятельность  
ИД № 06146. Дата выдачи 26.10.01.  
Формат 60 x 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная  
Печ.л. 10,9 Уч.-изд.л. 10,2  
Тираж 500 экз. Заказ 20

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии  
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»  
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1