Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»

И. В. Пешков

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ»

Елец – 2017

УДК 621.396.2
ББК 32.884.1
П 23

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета имени И.А. Бунина
от 31. 01. 2017 г., протокол № 1

Рецензенты:
Волобуев С.В., к.п.н., доц. каф. физики и методики ее преподавания
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

Нечаев Ю.Б., д-р ф.-м.н., проф. каф. информационных систем
Воронежского государственного университета

И.В. Пешков
П 23 Курс лекций по дисциплине «Цифровая обработка сигналов». – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2017. – 46 с.

В методических указаниях представлены материалы лекций по дисциплине «Цифровая обработка сигналов». По каждой теме даются основные теоретические положения.

Методические указания предназначены для студентов направлений подготовки бакалавров: Радиотехника.

Предназначено для студентов вышеуказанных направлений подготовки и специальности очной и заочной форм обучения.

УДК 621.396.2
ББК 32.884.1

Оглавление

Тема 1. **Сигналы и обработка сигналов.**

Дисциплина «Цифровая обработка сигналов» является вводной и изучает дискретные сигналы и системы.

Определение

Сигнал x(n) является обнаруживаемой физической величиной, по которой сообщения или информация могут быть переданы (Merriam-Webster).
Таким образом, можно сказать, что сигналы переносят **информацию**.

Примеры:
• Речевые сигналы передают язык посредством акустических волн.
• Радиолокационные сигналы передают положение и скорость целей через электромагнитные волны.
• Сигналы электрофизиологии передают информацию о процессах внутри тела.
• Финансовые сигналы передают информацию о событиях в экономике.

Системы манипулируют информацией, передаваемой посредством сигналов.

Определение

Обработка сигналов включает в себя теорию и практику в следующих областях:
• фильтрация, кодирование, передача, оценка, обнаружение, анализ, распознавание, синтез, запись и воспроизведение сигналов с помощью цифровых или аналоговых устройств или методы,
• где сигнал включает в себя аудио, видео, речь, изображение, связь, геофизику, сонар, радар, медицинские, музыкальные и другие сигналы.

Обработка сигналов

Обработка сигналов традиционно была частью электротехники и вычислительной техники, но в настоящее время расширяется в прикладной математике, статистике, информатике, геофизике и прикладные дисциплины.
Первоначально аналоговые сигналы и системы были реализованы с использованием резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности и транзисторов.

Начиная с 1940-х годов, появляются все больше цифровых сигналов и систем, реализованных с использованием компьютеров и компьютерного кода (Matlab, Python, C, ...), поскольку
• Преимущества цифровой техники включают стабильность и программируемость

• кроме того, компьютеры значительно уменьшились в размерах, вследствие чего цифровая обработка сигналов стала повсеместной

Приложения цифровой обработки сигналов

Дискретные сигналы

Сигналы – это функции

Определение

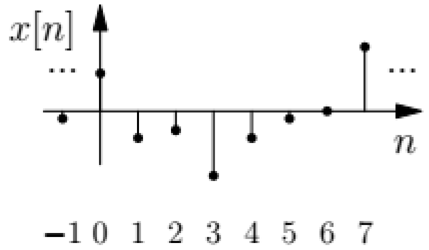
Сигнал - это функция, которая сопоставляет независимую переменную зависимой переменной.

Допустим, имеется дискретный во времени сигнал, обозначаемый x[n]: каждое значение n производит значение сигнала x[n].

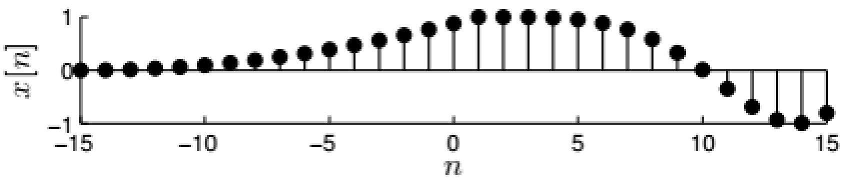
В этом курсе мы сосредоточимся на сигналах дискретного времени:

Независимая переменная - это целое число: $n \in Z$ (обозначается как время, а поскольку рассматриваются дискретные системы, то n целое число, обозначающее номер отсчета, 0 1 2 и т.д.)

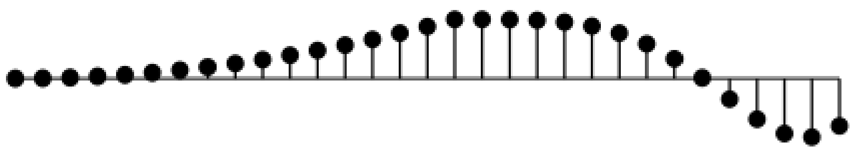
Зависимая переменная - это действительное или комплексное число: $x[n] \in R$ или C.



Когда x [n] ∈ R (например: температура в комнате в полдень в понедельник), мы используем один график сигнала

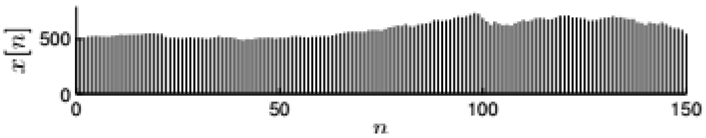


Когда это ясно из контекста, мы часто будем подавлять метки на одной или обеих осях, как это показано ниже

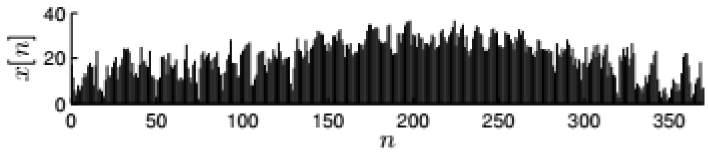


Приведем несколько примеров дискретных сигналов

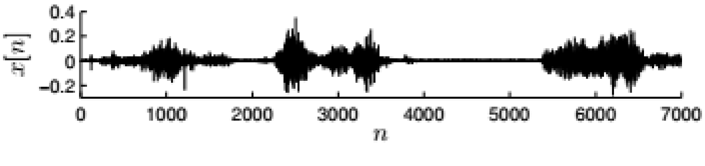
Ежедневная цена акций Google в течение 5 месяцев



Температура в межконтинентальном аэропорту Хьюстона в 2013 году (Селций)



Выдержка из Гамлета Шекспира

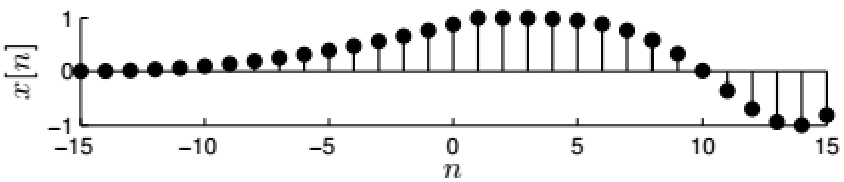


Корректное изображение сигналов

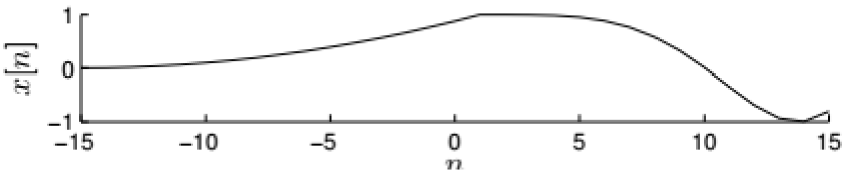
В дискретном сигнале x [n] независимая переменная n является дискретной (целочисленной)

Чтобы построить сигнал дискретного времени в программе типа Matlab, вы должны использовать команду stem или аналогичную команду, а не команду plot

Правильно



НеПравильно (аналоговый сигнал)



Изображение комплексных сигналов

Напомним, что комплексное число a ∈ C может быть равнозначно представлено двумя способами:

Полярная форма $a = |a|\, e^{j\angle a}$

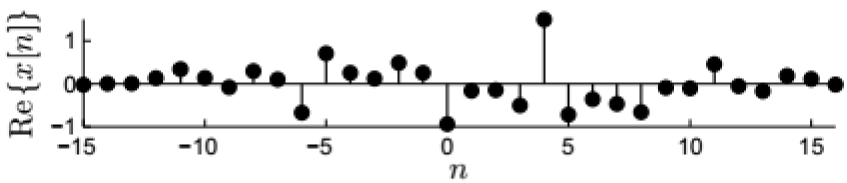
Прямоугольная форма $a = \mathrm{Re}\{a\} + j\,\mathrm{Im}\{a\}$

Когда x[n] ∈ C (например: амплитуда и фаза электромагнитной волны), мы используем два сигнальных графика

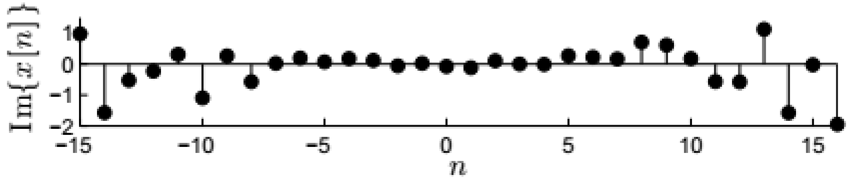
Прямоугольная форма $x[n] = \mathrm{Re}\{x[n]\} + j\,\mathrm{Im}\{x[n]\}$, т.е. имеется действительная и мнимая составляющие

Полярная форма $x[n] = |x[n]|\, e^{j\angle x[n]}$, т.е. имеются амплитуда и фаза

Прямоугольная $x[n] = \mathrm{Re}\{x[n]\} + j\,\mathrm{Im}\{x[n]\}$

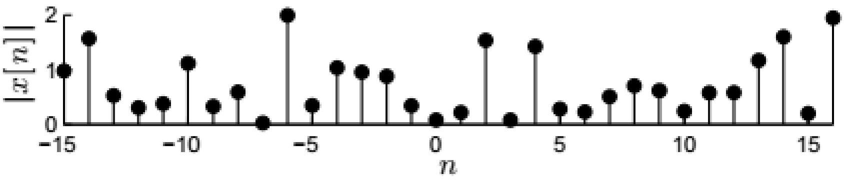


Действительная часть

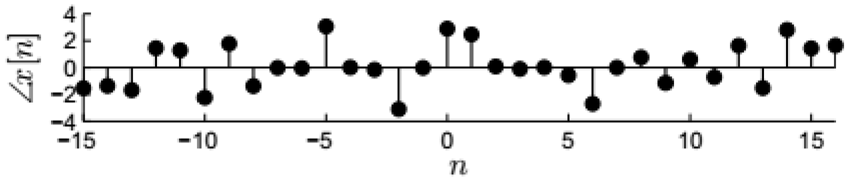


Мнимая часть

Полярная форма $x[n] = |x[n]|\, e^{j\angle x[n]}$



Амплитуда



Фаза

Таким образом,

сигналы дискретного времени

• независимая переменная - целое число: $n \in Z$ (обозначается как время)

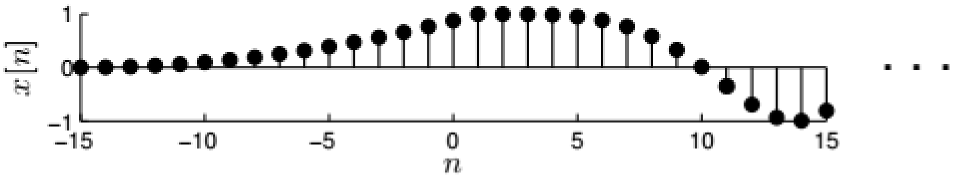
• зависимая переменная - это действительное или комплексное число: $x[n] \in R$ или C.

Изображай сигналы (особенно дискретные) правильно!

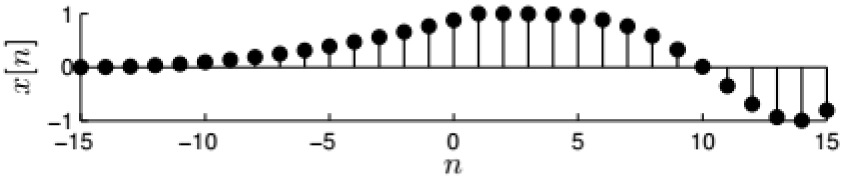
Тема 2. Свойства сигналов.

Сдвиг сигналов во времени

Бесконечные сигналы x[n] определены для всех $n \in Z$, $-\infty < n < \infty$

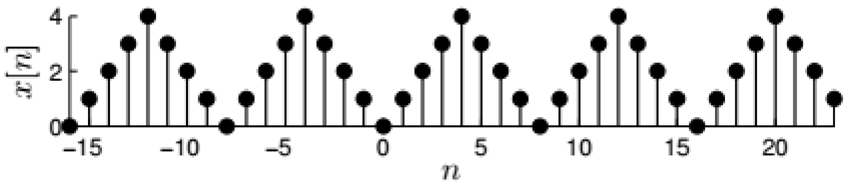


Конечные сигналы x[n] определены только для конечного диапазона $n \in Z$, $N_1 \leq n \leq N_2$

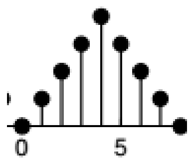


Определение

Сигнал дискретного времени является **периодическим**, если он повторяется с периодом $N \in Z$: $x[n + mN] = x[n] \quad \forall m \in \mathbb{Z}$



Периодический сигнал



Исходный сигнал

При этом период N должен быть целым числом и периодический сигнал бесконечен по длине.

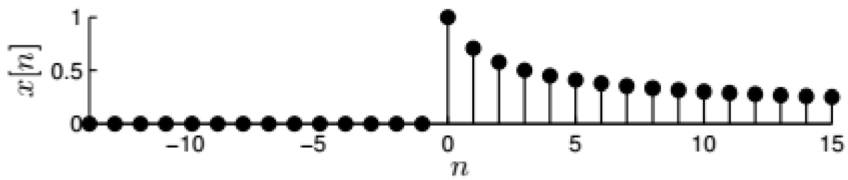
Кроме того, вся информация в периодическом сигнале содержится в одном периоде (конечной длины).

Любой сигнал конечной длины может быть периодизирован.

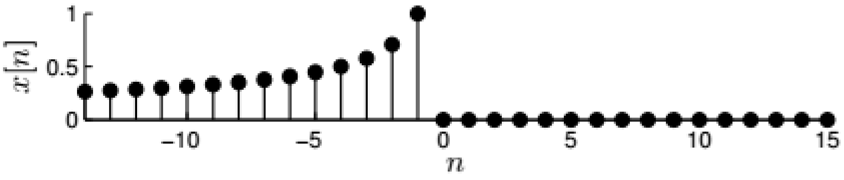
Причинные (казуальные) сигналы

Определение

Сигнал x [n] является причинным, если x [n] = 0 для всех n <0.



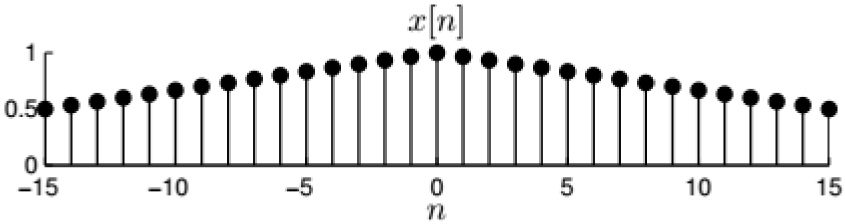
Сигнал x [n] является антипричинным, если x [n] = 0 для всех $n \geq 0$



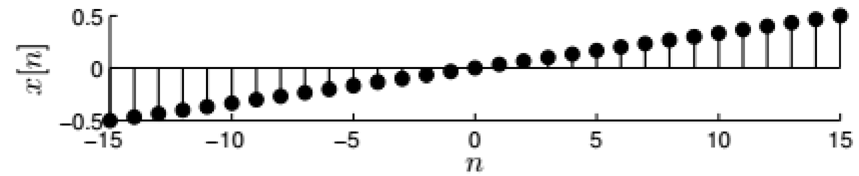
Четные сигналы

Определение

Вещественный сигнал x [n] является четным, если x [-n] = x [n], т.е. он симметричен относительно вертикальной.

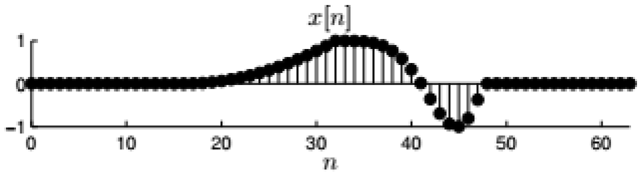


Вещественный сигнал x [n] является нечетным, если x [-n] = -x [n], т.е. он симметричен относительно начала координат.

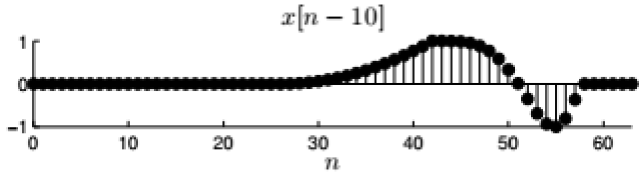


Сдвиг сигналов во времени

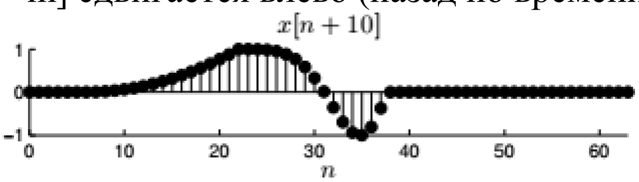
Допустим, имеется сигнал бесконечной длины x [n], мы можем сдвигать его вперед и назад по времени как x [n - m], m ∈ Z



Когда m> 0, x [n - m] смещается вправо (вперед по времени, задержка)

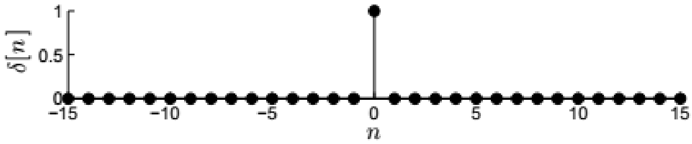


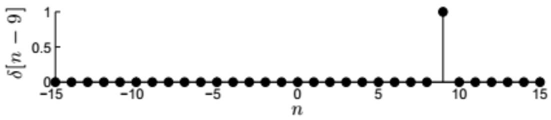
Когда m <0, x [n - m] сдвигается влево (назад по времени, вперед)



Тема 3. Ключевые тестовые сигналы. Дельта-импульс, функция Хевисайда, комплексная экспонента.

Дельта-импульс задается выражением $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

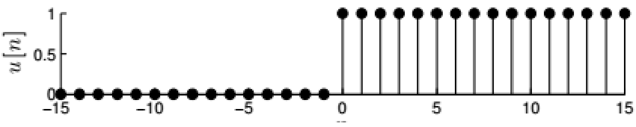


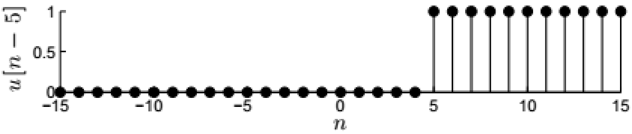


Сдвинутая дельта-функция δ [n - m] достигает пика при n = m; здесь m = 9 Умножение сигнала сдвинутой дельта-функции выбирает один отсчет сигнала и устанавливает все остальные отсчеты в ноль

$$y[n] \ = \ x[n]\,\delta[n-m] \ = \ x[m]\,\delta[n-m]$$

Функция Хевисайда задается выражением $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

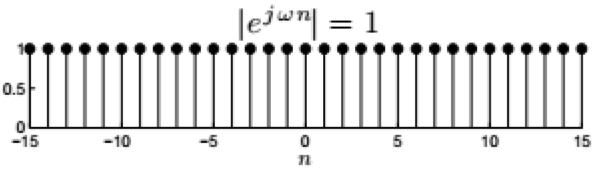




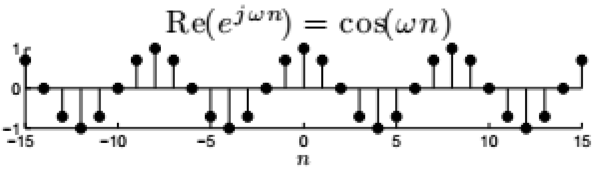
Сдвинутый единичный шаг u [n - m] переходит от 0 до 1 при n = m; Здесь m = 5

Комплексная экспонента

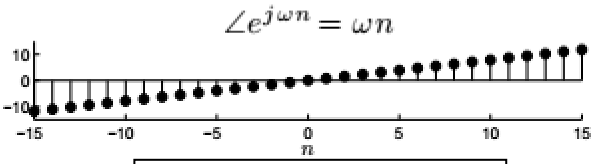
Синусоиды появляются в бесчисленных дисциплинах, в частности обработки сигналов. Они являются основой (буквально) анализа Фурье (ДПФ, DFT, DTFT). Комплекснозначная синусоида объединяет как cos, так и sin (через выражение Эйлера) $e^{j(\omega n+\phi)} = \cos(\omega n+\phi) + j\sin(\omega n+\phi)$



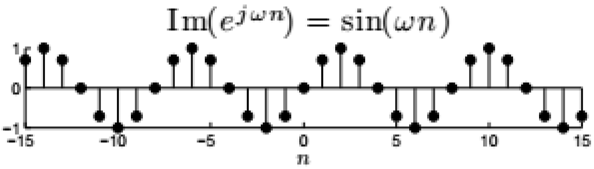
амплитуда



действительная часть



фаза



мнимая часть

Тема 4. Синусоидальные функции. Свойства.

Дискретные во времени синусоиды $e^{j(\omega n+\phi)}$ имеют два противоречивых свойства: алиасинг и апериодичность.

Рассмотрим две синусоиды с двумя разными частотами

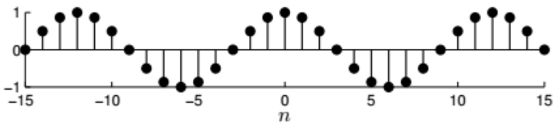
$$\omega \quad \Rightarrow \quad x_1[n] = e^{j(\omega n+\phi)}$$

$$\omega + 2\pi \quad \Rightarrow \quad x_2[n] = e^{j((\omega+2\pi)n+\phi)}$$

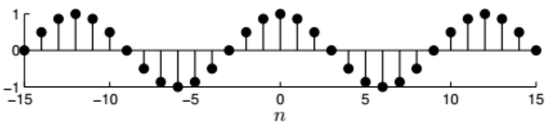
При этом

$$x_2[n] = e^{j((\omega+2\pi)n+\phi)} = e^{j(\omega n+\phi)+j2\pi n} = e^{j(\omega n+\phi)}\ e^{j2\pi n} = e^{j(\omega n+\phi)} = x_1[n]$$

Сигналы x_1 и x_2 имеют разные частоты, но идентичны! Мы говорим, что x_1 и x_2 являются псевдонимами; это явление называется алиасинг. Примечание: любое целое число, кратное 2π, будет давать тот же результат: $x_3[n] = e^{j((\omega+2\pi m)n+\phi)},\ m \in \mathbb{Z}$



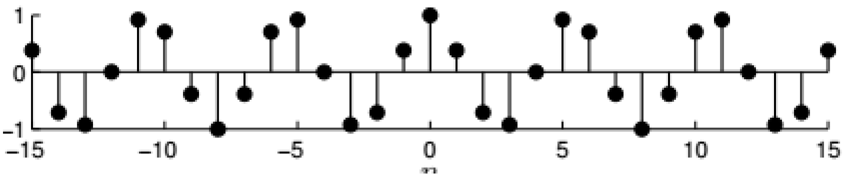
$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$



$x_2[n] = \cos\left(\frac{13\pi}{6}n\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)n\right)$

Пусть $x_1[n] = e^{j(\omega n+\phi)}$ с частотой $\omega = \frac{2\pi k}{N},\quad k, N \in \mathbb{Z}$ (гармоническая частота). Легко показать, что x_1 периодический с периодом N

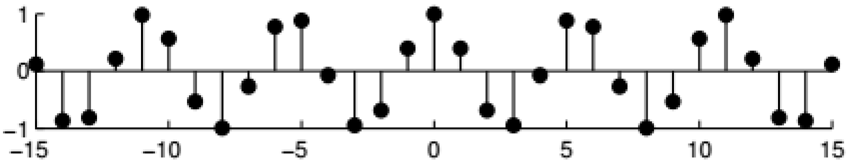
$$x_1[n+N] = e^{j(\omega(n+N)+\phi)} = e^{j(\omega n+\omega N+\phi)} = e^{j(\omega n+\phi)}\ e^{j(\omega N)} = e^{j(\omega n+\phi)}\ e^{j(\frac{2\pi k}{N}N)} = x_1[n]$$



$x_1[n] = \cos(\frac{2\pi 3}{16}n),\quad N = 16$

Рассмотрим $x_2[n] = e^{j(\omega n+\phi)}$ с частотой $\omega \neq \frac{2\pi k}{N},\quad k, N \in \mathbb{Z}$ (негармоническая частота). При этом x_2 не является периодическим

$$x_2[n+N] = e^{j(\omega(n+N)+\phi)} = e^{j(\omega n+\omega N+\phi)} = e^{j(\omega n+\phi)}\ e^{j(\omega N)} \neq x_1[n]$$

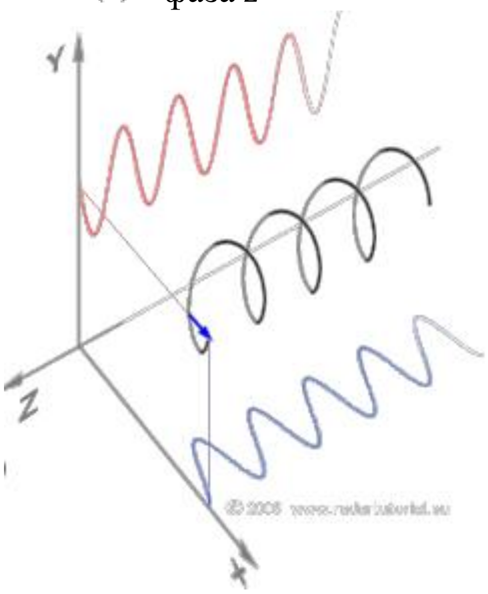


$x_2[n] = \cos(1.16\, n)$

Если его частота ω не гармонична, то синусоида осциллирует, но не является периодической!

Рассмотренные выше соотношения для случаев только синуса/косинуса справедливы и для комплексных сигналов. Рассмотрим общее по виду

комплексное число $z = |z|\, e^{j\omega},\ z \in \mathbb{C}$, где
$|z|$ - амплитуда z
$\omega = \angle(z)$ - фаза z



Тема 5. Представление дискретных сигналов как векторов.

Сигналы являются математическими объектами. Интерпретируя сигналы как векторы в векторном пространстве, мы сможем говорить о длине сигнала (его «силе», о чем ниже), об углах между сигналами (их сходство) и многое другое.

Линейным векторным пространством *V* называется набор векторов такой, что если x, y $\in V$ и α – скаляр, тогда $\alpha x \in V$ и $x + y \in V$. То есть: вектор с измененной масштабировкой (длиной) остается в векторном пространстве. Сумма двух векторов из векторного пространства остается также в этом векторном пространстве.

Классические векторные пространства, которые вы знаете и любите

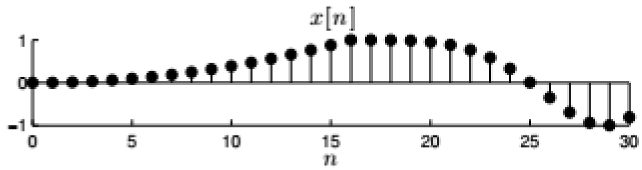
R^N - Множество всех векторов длины N с вещественными элементами

C^N - Множество всех векторов длины N с комплексными элементами. Например:

$$\mathbb{R}^2: \quad x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \end{bmatrix}, \; x[0], x[1], y[0], y[1] \in \mathbb{R}$$

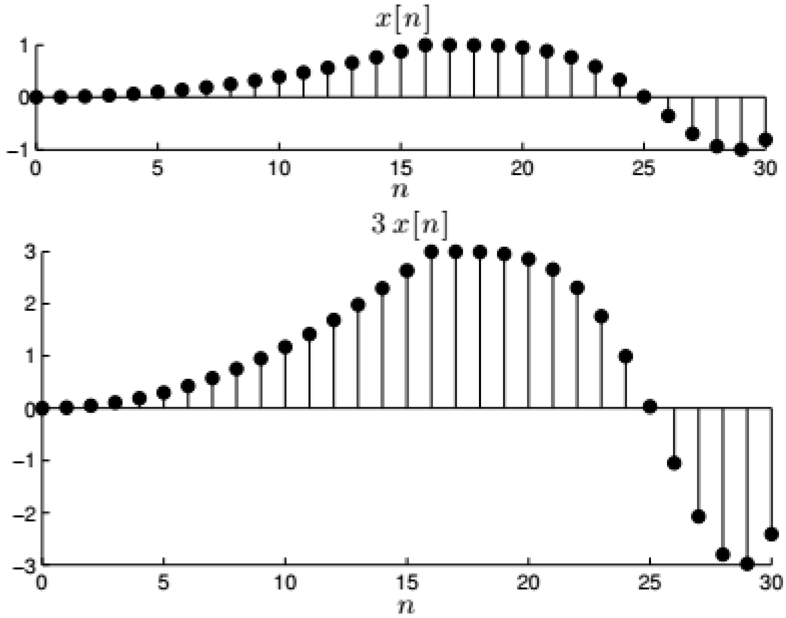
Или более актуальное представление для реальных сигналов

$$\mathbb{R}^N: \quad x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}, \quad x[n] \in \mathbb{R}$$

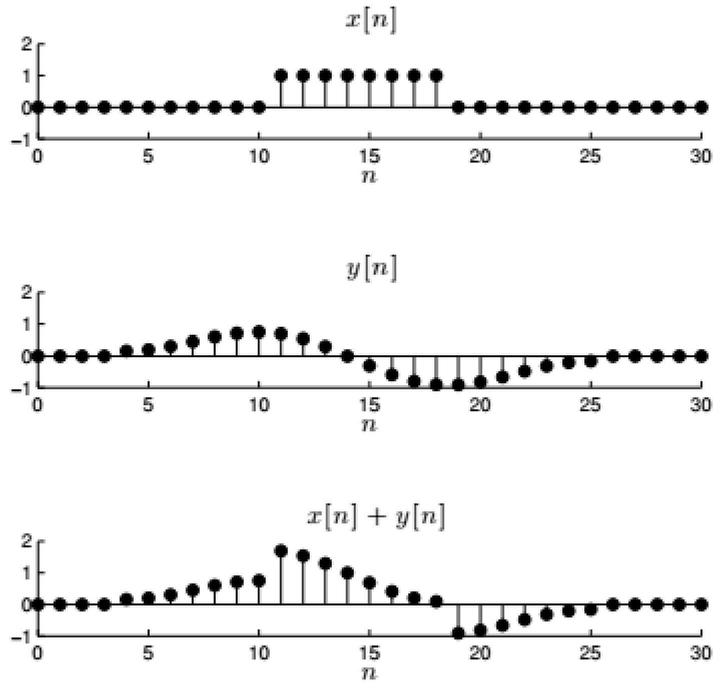


Это точно так же, как и реальный дискретный сигнал времени; то есть сигналы являются векторами.

Масштабирование αx усиливает / ослабляет сигнал с помощью коэффициента α



Суммирование x + y создает новый сигнал, который смешивает x и y



R^N сложнее визуализировать, чем R^2 и R^3, но интуиция, полученная от R^2 и R^3, как правило, верна без сюрпризов (по крайней мере, в этом курсе).

Многие приложения обработки сигналов содержат суммы сигналов. Пусть имеется набор из M векторов $x_0, x_1, \ldots x_{M-1} \in \mathbb{C}^N$ и M скаляров $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{M-1} \in \mathbb{C}$, тогда **линейная комбинация** даст новый вектор

$$y = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{M-1} x_{M-1} = \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m x_m$$

К примеру, студия звукозаписи использует микшерный пульт (или стол) для создания линейной комбинации сигналов от разных инструментов, составляющих песню. Скажем, x_0 = барабаны, x_1 = бас, x_2 = гитара,. . . , X_{22} = саксофон, x_{23} = певец (M = 24). Линейная комбинация (выход микшерного пульта) образует сложную музыкальную композицию

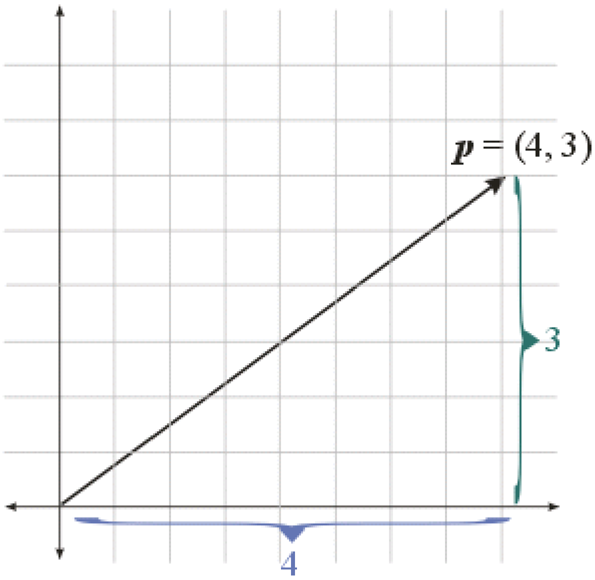
$$y = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{23} x_{23} = \sum_{m=0}^{23} \alpha_m x_m$$

Изменение результатов α_m в другом y, который акцентирует / дефокусирует определенные инструменты, создает новую отличную композицию.

Нормы сигналов

Как определить количество \ силу вектора? Как сказать, что один сигнал сильнее, чем другой? Для этого используется Евклидова длина, или 2-норма вектора $x \in \mathbb{C}^N$ $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2}.$

Другими словами, словами Евклидова длина или 2-норма определят длину произвольного вектора. В случае сигналов, чем длиннее вектор, тем мощнее сигнал.



Таким образом, чем больше составляющие вектора, тем больше его длина. Применяя то же к сигналам, можно сказать, что чем больше по амплитуде его временные отсчеты, тем мощнее сигнал.

Тогда энергия сигнала (вектора) x определяется как

$$(\|x\|_2)^2 = \|x\|_2^2$$

Вектор x нормирован (в 2-норме), если if $\|x\|_2 = 1$, т.е. длина (мощность) равна единице.

Тема 6. Скалярное произведение сигналов. Неравенство Коши-Шварца.

Мы сосредоточились на величинах, связанных с отдельными векторами, например: норма (сила). Перейдем теперь к величине, связанной с парами векторов, а именно скалярное произведение.

Скалярное произведение (или точечное произведение) между двумя векторами x и y ∈ C^N задается выражением $\langle x, y\rangle = y^H x = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, y[n]^*$

Угол между двумя векторами x и y ∈ C^N задается выражением $\cos\theta_{x,y} = \frac{\mathrm{Re}\{\langle x, y\rangle\}}{\|x\|_2\, \|y\|_2}$

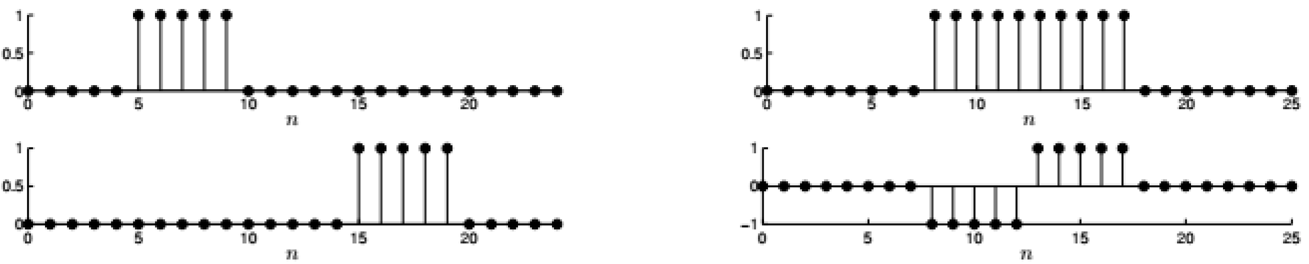
Рассмотрим два вектора в R^2 $x = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$. И Тогда

$$\|x\|_2^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \qquad \|y\|_2^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

Следовательно, угол между ними будет

$$\theta_{x,y} = \arccos\left(\frac{1\times 3\ +\ 2\times 2}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right) = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{65}}\right) \approx 0.519\ \mathrm{rad} \approx 29.7°$$

Два вектора называются ортогональными, если $\langle x, y\rangle = 0$. Например,



Скалярное произведение измеряет сходство между двумя сигналами. Гармонические синусоиды являются ортогональными (а также периодическими).

Скалярное произведение и угол между векторами позволяют сравнивать сигналы. Неравенство Коши Шварца количественно задает данное сравнение. Пусть мы имеем действительные сигналы в R^N, пусть угол между векторами (сигналами) $\cos\theta_{x,y} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|_2\, \|y\|_2}$,

теперь используем тот факт, что $0 \le |\cos\theta| \le 1$, тогда

$$0 \ \le\ \left|\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|_2\, \|y\|_2}\right| \ \le\ 1$$

и перепишем выражение согласно неравенство Коши-Шварца

$$0 \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Интерпретируем последнее неравенство, таким образом, что скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ измеряет подобие x по y. Если $\langle x, y\rangle = 0$ и угол между ними 90^0, тогда говорят, что сигналы ортогональны и различны между собой.

Если $\langle x, y\rangle = \|x\|_2\|y\|_2$ и угол между ними 0^0, тогда говорят, что сигналы коллинеарные и весьма похожи. Данные свойства используются во многих приложениях, таких как:

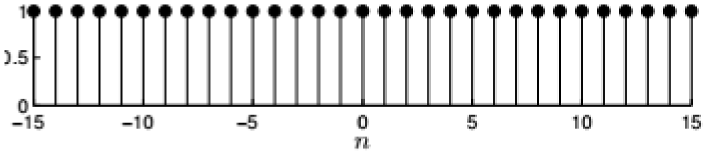
Как цифровая система связи решает, был ли передан сигнал, соответствующий 0? Или сигнал, соответствующий 1?

Как система радара или сонара находит цели в сигнале, который она получает после передачи импульса?

Как многие системы компьютерного зрения находят лица в изображениях?

Тема 7. Бесконечные во времени сигналы.

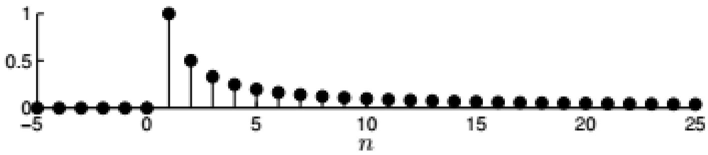
2-норма вектора бесконечной длины x дается формулой $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}$. Энергия x дается формулой $(\|x\|_2)^2 = \|x\|_2^2$. Пусть имеется сигнал $x[n] = 1, \quad -\infty < n < \infty$



,

тогда он имеет бесконечную энергию $\|x\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$.

Возьмем сигнал $x[n] = \begin{cases} 0 & n \le 0 \\ \frac{1}{n} & n \ge 1 \end{cases}$



,

такой сигнал будет иметь конечную энергию $\|x\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.64 < \infty$.

Скалярное произведение между двумя бесконечными по длине сигналами (векторами) задается выражением $\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y[n]^*$.

Тема 8. Линейные инвариантные во времени системы.

Система с дискретным временем *H* является преобразованием (правилом или формулой), которое отображает дискретный входной сигнал x в выходной сигнал дискретного времени y

$$y = \mathcal{H}\{x\}$$

$$x \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y$$

Системы манипулируют информацией в сигналах. Примеры:

• Система распознавания речи преобразует акустические волны речи в текст

• Радиолокационная система преобразует принятый радиолокационный импульс для оценки положения и скорости мишеней

• Функциональная магнитно-резонансная томография (ФМРТ) преобразует измерения электронного спина в воксельно-воксельные оценки активности мозга

• 30-дневное скользящее среднее сглаживает повседневную изменчивость цены акций.

Приведем более конкретные примеры:

Отображение входного в выходной сигнал без изменения y[n] = x[n] ∀n;

Усиление входного сигнала в 2 раза y[n] = 2 x[n] ∀n;

Смещение входного сигнала на 2 y[n] = x[n] + 2 ∀n;

Задержка входного сигнала на 2 отсчета y[n] = x[n + 2] ∀n и др.

Более сложные примеры:

Сдвиг сигнала во времени $y[n] = x[n-m] \quad \forall n$

Скользящее среднее $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1]) \quad \forall n$

Рекурсивное среднее $y[n] = x[n] + \alpha\, y[n-1] \quad \forall n$

Система *H* называется линейной, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1. Масштабирование

$$\mathcal{H}\{\alpha\, x\} = \alpha\, \mathcal{H}\{x\} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$x \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y \qquad\qquad \alpha\, x \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow \alpha\, y$$

2. Аддитивность

$$\text{If} \quad y_1 = \mathcal{H}\{x_1\} \quad \text{and} \quad y_2 = \mathcal{H}\{x_2\} \quad \text{then}$$

$$\mathcal{H}\{x_1 + x_2\} = y_1 + y_2$$

$$x_1 \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y_1 \qquad\qquad x_2 \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y_2$$

$$x_1 + x_2 \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y_1 + y_2$$

Система, которая не является линейной, называется нелинейной. Чтобы доказать линейность системы, вы должны строго доказать, что она обладает свойствами масштабирования и аддитивности для произвольных входных сигналов. Чтобы доказать, что система нелинейна, достаточно показать контрпример.

Пример: скользящее среднее

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y[n] = \tfrac{1}{2}(x[n] + x[n-1])$$

Масштабирование: (Стратегия, чтобы доказать - масштабировать вход x на $\alpha \in$ C, вычислить выход y по формуле наверху, и проверить, что она также масштабируется).

Пусть $x'[n] = \alpha x[n], \quad \alpha \in \mathbb{C}$.
Обозначим y’ как выход, когда на вход подается x’, т.е. y’=*H{*x’*}*. Тогда

$$y'[n] = \frac{1}{2}(x'[n] + x'[n-1]) = \frac{1}{2}(\alpha x[n] + \alpha x[n-1]) = \alpha\left(\frac{1}{2}(x[n] + x[n-1])\right) = \alpha y[n]$$

Аддитивность: (Стратегия для доказательства – подать на вход два сигнала и проверить, что на выходе сумма соответствующих отдельных выходных сигналов)

Пусть $x'[n] = x_1[n] + x_2[n]$.
Обозначим как y’ y1 y2 как выходы, когда на входе x’ x1 x2. Тогда

$$\begin{aligned} y'[n] &= \frac{1}{2}(x'[n] + x'[n-1]) = \frac{1}{2}(\{x_1[n] + x_2[n]\} + \{x_1[n-1] + x_2[n-1]\}) \\ &= \frac{1}{2}(x_1[n] + x_1[n-1]) + \frac{1}{2}(x_2[n] + x_2[n-1]) = y_1[n] + y_2[n] \quad \checkmark \end{aligned}$$

Пример: возведение сигнала в квадрат не является линейной операцией

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y[n] = (x[n])^2$$

Аддитивность: Подать на вход два сигнала и наблюдать, что произойдет
Пусть $y_1[n] = (x_1[n])^2, \qquad y_2[n] = (x_2[n])^2$

Обозначим $x'[n] = x_1[n] + x_2[n]$. Тогда:

$$y'[n] = \left(x'[n]\right)^2 = \left(x_1[n] + x_2[n]\right)^2 = \left(x_1[n]\right)^2 + 2x_1[n]x_2[n] + \left(x_2[n]\right)^2 \neq y_1[n] + y_2[n]$$

Система обработки сигналов *H* является **инвариантной во времени**, если сдвиг входного сигнала во времени создает соответствующий временной сдвиг на выходе

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n-q] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y[n-q]$$

Другими словами: не зависящая от времени система ведет себя одинаково независимо от того, когда применяется вход. Система, которая не является инвариантной по времени, называется изменяющейся во времени.

Пример: скользящее среднее является инвариантной во времени

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y[n] = \tfrac{1}{2}(x[n] + x[n-1])$$

Пусть $x'[n] = x[n-q], \quad q \in \mathbb{Z}$.
Обозначим y’ как выход, когда на вход подается x’, т.е. y’=*H{*x’*}*. Тогда

$$y'[n] = \frac{1}{2}(x'[n] + x'[n-1]) = \frac{1}{2}(x[n-q] + x[n-q-1]) = y[n-q] \quad \checkmark$$

Пример: децимация является изменяющейся во времени

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y[n] = x[2n]$$

Пусть $x'[n] = x[n-1]$.
Обозначим y’ как выход, когда на вход подается x’, т.е. y’=*H{*x’*}*. Тогда

$$y'[n] = x'[2n] = x[2n-1] \neq x[2(n-1)] = y[n-1]$$

Система H **линейно-инвариантна по времени** (LTI), если она одновременно линейна и инвариантна по времени. Системы LTI являются основой обработки сигналов и основным предметом этого курса.

Тема 9. Свертка сигналов. Свойства свертки и способы ее вычисления.

Пусть имеется линейно-инвариантна по времени система

$$x \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y$$

Общая формула для вычисления сигнала на выходе y выглядит как

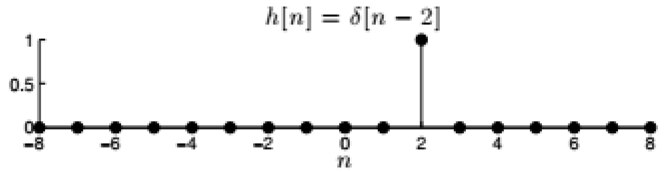
$$y[n] \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]\,x[m]$$

Пусть на вход подается дельта-импульс $x[n] = \delta[n]$, тогда на выходе будет т.н. импульсная характеристика

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]\,\delta[m] \;=\; h[n] \quad ,$$

которая характеризует систему в целом.

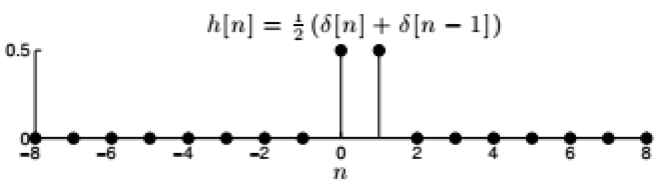
Пример: рассмотрим систему со сдвигом во времени на 2 отсчета. Импульсная характеристика такой системы выглядит следующим образом



или $h[n] \;=\; \mathcal{H}\{\delta[n]\} \;=\; \delta[n-2]$

Пример: рассмотрим систему, реализующую алгоритм скользящего среднего.

Сигнал на выходе такой системы выглядит как $y[n] \;=\; \mathcal{H}\{x[n]\} \;=\; \frac{1}{2}\,(x[n] + x[n-1])$. Таким образом, импульсная характеристика $h[n] \;=\; \mathcal{H}\{\delta[n]\} \;=\; \frac{1}{2}\,(\delta[n] + \delta[n-1])$ или



Существуют три способа для вычисления выходного сигнала линейно-инвариантной системы для заданного сигнала на входе.

1. Если *H* определено в терминах формулы или алгоритма, применить входной сигнао x [n] и вычислить y [n] в каждой временной точке n ∈ Z
   • Таким способом системы обычно реализовываются в компьютерном коде и аппаратном обеспечении.

2. Найти импульсную характеристику h (путем ввода x [n] = δ [n]), сформировать матрицу системы Теплица **H** и умножить на вектор входного сигнала (бесконечной длины) x, чтобы получить y = **H** x
   • Это обычно не практично, но полезно для концептуальных целей

3. Найти импульсную характеристику h и применить формулу для произведения матриц / векторов для каждого n ∈ Z

$$y[n] \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]\,x[m] \;=\; x[n]*h[n]$$

   • Это называется сверткой и является концептуальной и практически полезной операцией (команда Matlab: conv)

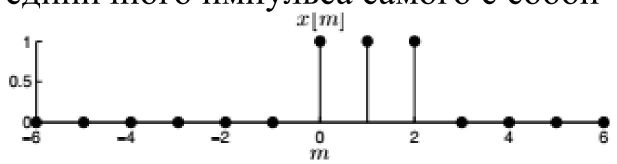
Чтобы вычислить каждый отсчет y [n] в выходном векторе y необходимо:

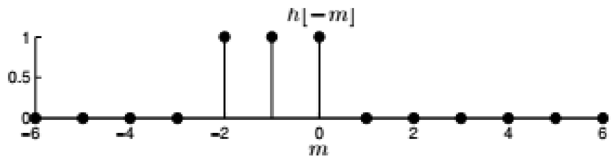
1. Обратить во времени импульсную характеристику h и сдвиньте его на n шагов времени вправо (задержка)

2. .Вычислить скалярное произведение между сдвинутыми импульсной характеристикой и входным вектором x
   Повторите для каждого n

Семиступенчатая программа для вычисления свертки вручную
Шаг 1: Выберите, какой из x или h вы будете переворачивать и сдвигать; у вас есть выбор, так как x * h = h * x
Шаг 2: нарисуйте график x [m] в зависимости от m
Шаг 3: Начертите обратную по времени импульсную характеристику h [-m]
Шаг 4: Чтобы вычислить y в момент времени n, постройте обратную по времени импульсную характеристику после того, как она была сдвинута вправо (отложена) на n единиц времени: h [- (m - n)] = h [n - m]
Шаг 5: y [n] = скалярное произведение между сигналами x [m] и h [n - m]
Шаг 6: Повторите для всех интересующих n (потенциально всех n ∈ Z)
Шаг 7: Начертите y [n] и выполните проверку на реальность, чтобы убедиться, что ваш ответ кажется разумным.

Пример 1 вычисления свертки вручную: необходимо выполнить свертку единичного импульса самого с собой





Свойства свертки

Входной сигнал x, импульсная характеристика системы LTI h и выходной сигнал y связаны сверткой как

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]\,x[m], \quad -\infty < n < \infty$$

1. Свертка коммутативна $x * h = h * x$
2. Импульсная характеристика последовательно соединенных блоков

$y = h_1 * h_2 * x$

3. Импульсная характеристика параллельно соединенных блоков

$y = h_1 + h_2 * x$

4. Сигнал входа и выхода на частотах ω связан соотношением

$$x \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow y$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]\,x[m]$$

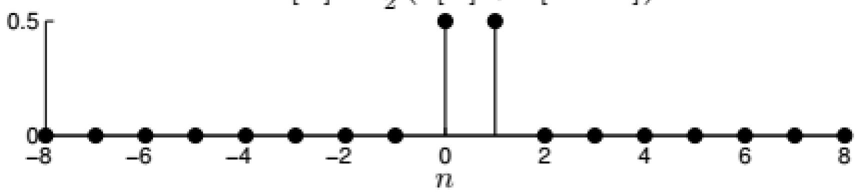
$$Y(\omega) = H(\omega)\,X(\omega)$$ H(ω) - ДПФ h

Система H является причинной, если выход y [n] в момент времени n зависит только от входа x [m] для моментов времени m ≤ n. Что более конкртено, каузальные системы не «смотрят» в будущее

Сигнал x имеет опорный интервал [N1; N2], N1 ≤ N2, если x [n] = 0 для всех n <N1 И n> N2. Длительность Dx для x равна N2 - N1 + 1. Например, если x имеет длительность Dx выборок и h имеет длительность Dh выборок, то свертка y = x * h имеет длительность не более Dx + Dh - 1 выборок

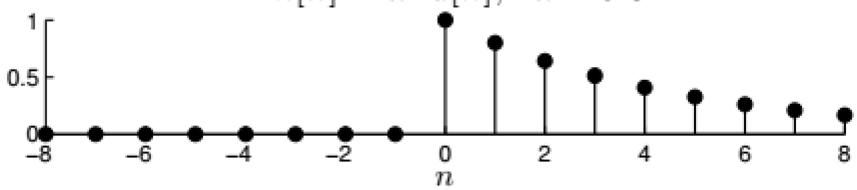
Система LTI имеет конечную импульсную характеристику (FIR), если длительность ее импульсной характеристики h конечна

$$h[n] = \frac{1}{2}\left(\delta[n] + \delta[n-1]\right)$$



Система LTI имеет бесконечную импульсную характеристику (IIR), если длительность ее импульсной характеристики h бесконечна

$$h[n] = \alpha^n u[n], \quad \alpha = 0.8$$

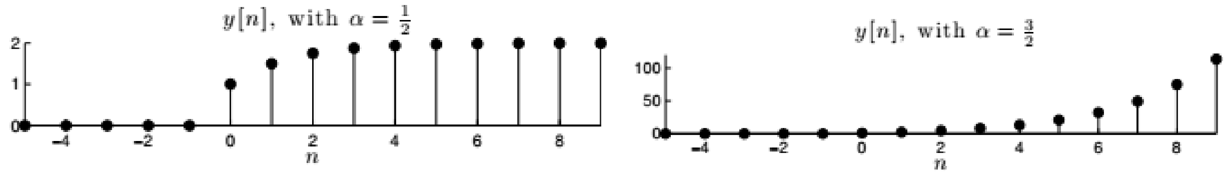


Тема 10. Характеристика стабильности систем обработки сигналов.

При использовании стабильной системы «корректный» вход всегда выводит «правильный» выход. Стабильность необходима для обеспечения правильной и безопасной работы множества систем

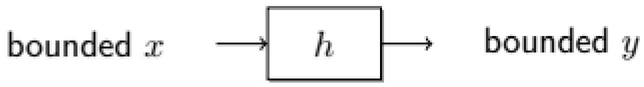
• Системы рулевого управления
• Тормозные системы
• Роботизированная навигация
• Современный самолет
• Международная космическая станция
• Интернет-пакетная коммуникация (TCP)

Рассмотрим пример системы рекурсивного вычисления скользящего среднего $y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\} = x[n] + \alpha\, y[n-1]$. На вход такой системы подается единичный импульс $x[n] = u[n]$. Тогда при выборе коэффициента α=0.5 сигнал на выходе достигает стабильности, однако при α=1.5 происходит выход системы из-под контроля.



Каким же образом оценить «стабильность» системы? Существуют различные критерии. Одна разумная мера: сигнал x хорошо себя ведет, если он ограничен. $\|x\|_\infty = \sup_n |x[n]| < \infty$

Система LTI является ограниченной по входу с ограниченным выходом (BIBO), если ограниченный по амплитуде вход x всегда создает ограниченный по амплитуде выход y



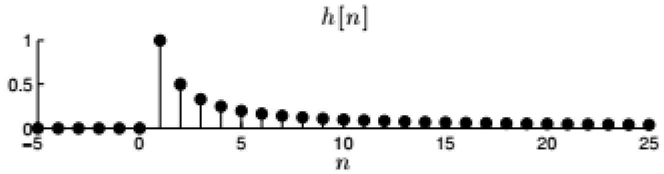
или $\|x\|_\infty < \infty$ и $\|y\|_\infty < \infty$

Факт: система LTI с импульсной характеристикой h является стабильной по BIBO тогда и только тогда, когда $\|h\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

Тогда, если $\|h\|_1 = \infty$, то система является нестабильной – т.е. при любом входном воздействии $\|x\|_\infty < \infty$ на выходе всегда будет бесконечность $\|y\|_\infty = \infty$. Таким образом, хотя x было ограниченным, y не ограничено; Поэтому система не устойчива согласно BIBO.

Примеры

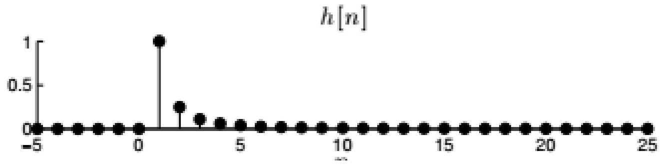
$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \geq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$\|h\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = \infty \Rightarrow$ not BIBO

Другой пример

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \geq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$\|h\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow$ BIBO

Системы с конечной импульсной характеристикой **всегда** являются стабильными.

Тема 11. Ортогональный базис.

Вернемся к линейной алгебре, чтобы понять преобразования, которые отображают сигналы между различными «доменами». Напомним, что сигналы могут быть интерпретированы как векторы в векторном пространстве (линейная алгебра). Перейдем теперь к рассмотрению понятия базиса для векторного пространства. Как мы увидим, разные сигнальные преобразования (и области) соответствуют разным основаниям (базисам).

Базис $\{b_k\}$ векторного пространства V определяется как коллекция векторов из этого пространства V, которые линейно независимы и охватывают V. Здесь под охватом понимается, что любой вектор из V может быть представлен как линейная комбинация базисных векторов

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k b_k = \alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_{N-1} b_{N-1} \quad \forall x \in V$$

Под линейной независимостью понимается, что вектор не может быть выражен через линейную комбинацию других базисных векторов.

Размерность V – числа базисных векторов.
Т.е. размерность R^N или C^N равна N.

Ортогональный базис $\{b_k\}_{k=0}^{N-1}$ векторного пространства V определяется как базис, чьи векторы взаимно ортогональны $\langle b_k, b_l \rangle = 0, \quad k \neq l$

Ортонормированный базис $\{b_k\}_{k=0}^{N-1}$ векторного пространства V определяется базис, чьи векторы взаимно ортогональны и нормированы $\langle b_k, b_l \rangle = 0, \quad k \neq l \quad \|b_k\|_2 = 1$.

Пример в двумерном пространстве R^2 b1 = [1 0], b2 = [0 1].

Для данного ортонормированного базиса $\{b_k\}_{k=0}^{N-1}$ с матрицей **B**, образованной из $\{b_k\}_{k=0}^{N-1}$, можно выразить любой вектор x как

$$x = \mathbf{B}\,a = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k b_k$$ - синтез

или

$a = \mathbf{B}^H x$, $\alpha_k = \langle x, b_k \rangle$ - анализ.

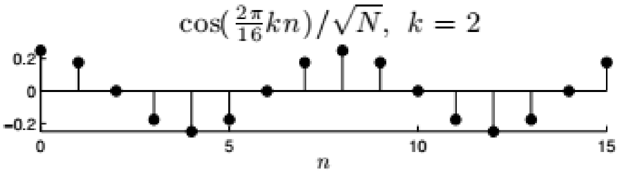
Синтез. Создаёт сигнал x как линейную комбинацию базисных элементов b_k, взвешенных весами α_k

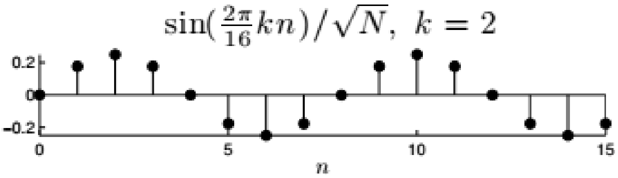
Анализ. Вычисляет веса α_k так, чтобы синтез производил x; Вес α_k измеряет подобие между x и базовым элементом b_k. Ясно, что преобразование α содержит всю информацию о сигнале x (и наоборот).

Тема 12. Дискретное преобразование Фурье.

Напомним о существовании нормированных по длине N комплексных гармонических синусоид

$$s_k[n] \;=\; \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}{\sqrt{N}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)\right), \qquad 0 \le n,k \le N-1$$





Такие гармонические нормированные синусоиды являются взаимно ортогональными

$$\langle s_k, s_l \rangle \;=\; 0, \quad k \neq l, \qquad\qquad \|s_k\|_2 \;=\; 1$$

Нетрудно показать, что N ортонормированных векторов в N-мерном случае должно быть ортонормированным базисом.

Таким образом, данные ортонормированные комплексные синусоиды $\{s_k\}_{k=0}^{N-1}$ могут образовать базис **S**, для которого можно определить дискретное преобразование Фурье для любого сигнала x

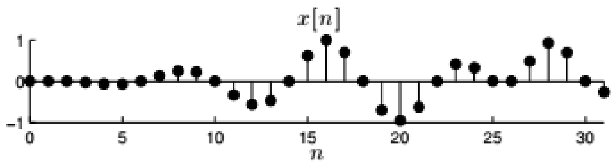
Анализ (прямое дискретное преобразование Фурье)

$$X \;=\; \mathbf{S}^H x$$

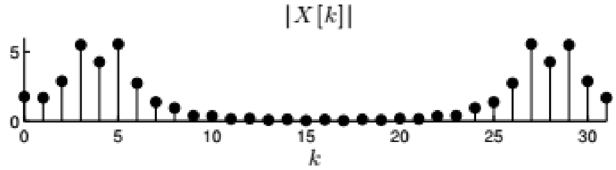
$$X[k] \;=\; \langle x, s_k \rangle \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{\sqrt{N}}$$

Интерпретация

1. Выберите коэффициенты DFT X [k], чтобы синтез вызывал сигнал x
2. Вес X [k] измеряет подобие между x и гармонической синусоидой sk
3. Поэтому X [k] измеряет «частотный состав» x на частоте k $\omega_k \;=\; \frac{2\pi}{N}k$
4. ДПФ отображает сигналы из «временной области» (x [n]) в «частотную область» (X [k])
5. Набор коэффициентов DFT X содержит всю информацию о сигнале x (и наоборот)



time domain



frequency domain

Синтез (обратное дискретное преобразование Фурье)

Построить сигнал x как линейную комбинацию гармонических синусоид s_k, взвешенных с коэффициентами DFT X [k]

$$x = \mathbf{S}X$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}{\sqrt{N}}$$

Тема 13. Дискретизация и восстановление сигналов.

Блок-схема типичной системы ЦОС, работающей в реальном времени, изображена на рисунке. Аналоговый входной фильтр используется для ограничения полосы частот входного аналогового сигнала перед его оцифровкой, чтобы уменьшить наложение. Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) трансформирует аналоговый входной сигнал в цифровую форму. После цифровой обработки в процессоре цифроаналоговый преобразователь (ЦАП) вновь преобразует обработанный сигнал в аналоговую форму. Выходной фильтр сглаживает выход ЦАП и устраняет нежелательные высокочастотные компоненты.

Сердце системы, изображенной на рис., — это цифровой процессор, которым может быть обычный универсальный процессор. Цифровой процессор может выполнять один из нескольких алгоритмов ЦОС, например цифровую фильтрацию, и отображать вход $x(n)$ в выход $y(n)$.

При обработке сигнала цифровым процессором подразумевается, что перед обработкой входной сигнал нужно преобразовать в цифровую форму. В некоторых приложениях, работающих в реальном времени, данные уже представлены в цифровом виде или их не нужно преобразовывать в аналоговый сигнал. Например, после обработки сигнал может храниться в памяти компьютера с целью использования в будущем или изображаться графически на экране. В других приложениях может возникнуть необходимость создания цифровых сигналов. Примерами таких приложений служат синтез речи, цифровой синтез частот и генерация псевдослучайных бинарных последовательностей. В данной книге в большинстве случаев считается, что сигнал имеет цифровой вид или был оцифрован соответствующим образом, который описан в следующем разделе.

Как говорилось выше, прежде чем выполнять любой алгоритм ЦОС, сигнал нужно представить в цифровом виде. Большинство сигналов в природе существуют в аналоговом виде, поэтому для них необходим процесс аналого-цифрового преобразования, который состоит из таких этапов.

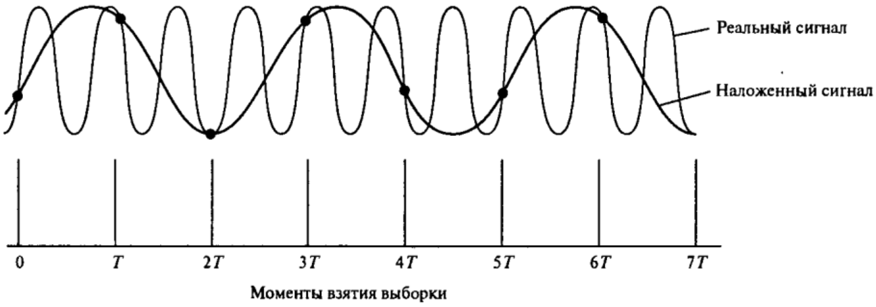
- Вначале сигнал (с ограниченной полосой) дискретизуется, т.е. аналоговый сигнал преобразуется в дискретный по времени сигнал с непрерывной амплитудой.
- Амплитуда каждого дискретного элемента сигнала квантуется в один из 2^B уровней, где B — число битов, которым дискретная выборка представлена в АЦП.
- Дискретные уровни амплитуды представляются или кодируются в виде различных бинарных слов, каждое из которых имеет длину B бит.

Описанный процесс изображен на рисунке выше. На этом рисунке можно выделить три различных типа сигнала.

- *Аналоговый входной сигнал* непрерывен как по времени, так и по амплитуде.
- *Дискретный сигнал* непрерывен по амплитуде, но определяется только в дискретных точках во времени.

▪ *Цифровой сигнал x(n)(n* — 0,1,...) существует только в дискретных точках во времени и в каждой временной точке может иметь одно из 2^B значений (дискретный во времени сигнал с дискретной амплитудой). Именно этот тип сигнала и будет интересовать нас в данной книге.

Дискретизация — это определение значений непрерывного сигнала (например, аналогового) в дискретные моменты времени. Это основное понятие обработки сигнала в реальном времени. Пример аналогового сигнала, подвергшегося дискретизации, показан на рисунке.



Отметим, что в данном идеальном случае после дискретизации аналоговый сигнал представлен только в дискретные моменты времени, причем значения сигнала в эти моменты равны соответствующим значениям исходного аналогового сигнала.

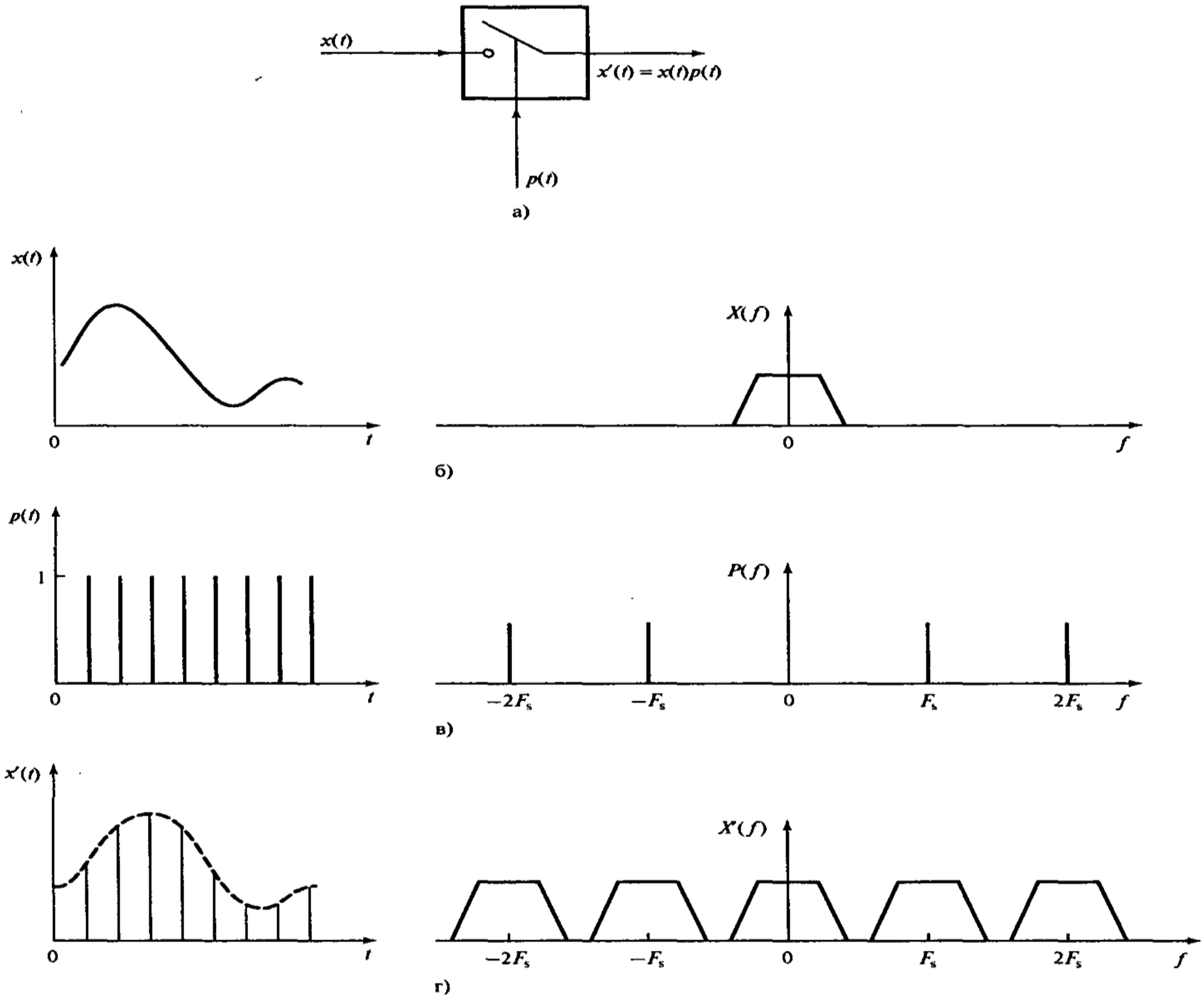
Если f_{max} — самый высокочастотный компонент сигнала, то, чтобы элементы выборки полностью описывали сигнал, дискретизация сигнала должна осуществляться с частотой не ниже 2fmax:

$$F_s > 2\ f_{max},$$

где F_s— частота дискретизации. Следовательно, если максимальная частота аналогового сигнала составляет 4 кГц, то для того, чтобы собрать или сохранить всю информацию, содержащуюся в сигнале, его дискретизация должна осуществляться с частотой 8 кГц или больше. Дискретизация с частотой, меньшей той, которую дает теорема о дискретном представлении, приведет к появлению перегибов или *наложению* зеркальных частот в интересующей нас частотной области. Следовательно, если захочется преобразовать дискретную информацию обратно в аналоговую, исходный сигнал будет уже невозможно восстановить. Важно помнить о том, что часто значительная доля энергии сигнала может попадать за пределы интересующей нас частотной области, и/или сигнал может содержать шум, ширина полосы которого всегда будет большой. Например, в телефонной связи самая высокая из представляющих интерес частот составляет приблизительно 3,4 кГц, но частоты речевого сигнала могут превышать 10 кГц. Поэтому, если не удалить лишний сигнал или шум за пределы полосы интересующих нас частот, теорема о дискретном представлении выполняться не будет. На практике это достигается путем предварительного пропускания сигнала через аналоговый фильтр защиты от наложения спектров.

Предположим, мы выполнили дискретизацию сигнала в определенной временной области с интервалом *T* (в секундах) (т.е. частота дискретизации равна 1 /*T* (в герцах)). Видно (рис. выше), что в исходном сигнале есть еще одна частотная составляющая с таким же набором дискретных значений. Следовательно, этот частотный компонент можно ошибочно принять за компонент с более низкой частотой. Это и есть наложение.

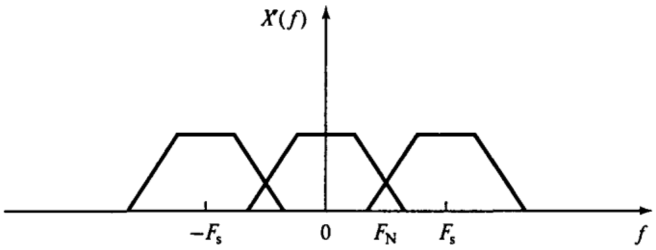
На рисунке ниже показан процесс дискретизации, который можно рассматривать как умножение аналогового сигнала *x{t)* на выборочную функцию *p(t).* Функция *p(t)* состоит из импульсов единичной амплитуды с шириной *dt*



(бесконечно малой величиной) и периодом *T.* Спектр сигнала *x(t),* функция *p{t)* и их произведение показаны на рис.

Для дискретного сигнала (рис. *г)* следует отметить такие моменты.

- Спектр идентичен исходному аналоговому спектру, только повторяется в точках, кратных частоте дискретизации *Fs.* Компоненты более высокого порядка с центрами в точках, кратных *Fs* называются *зеркальными частотами.*
- Если частота дискретизации *Fs* недостаточно высока, то зеркальные частоты с центром в *Fs,* будут, например, накладываться на частоты основной полосы (рис. ниже). В этом случае полезную информацию, содержащуюся в сигнале, невозможно отличить от его образа в области наложения.



■ Перекрывание (или наложение) происходит в районе точки *Fs*, равной половине частоты дискретизации. Эту точку часто называют *максимальной частотой сигнала, частотой Найквиста, частотой Котельникова* и т.п.

На практике наложение существует всегда, из-за шума и наличия энергии сигнала за пределами полосы частот, которая представляет интерес. Поэтому задача разработчика — определить уровень допустимого наложения, создать подходящий фильтр защиты от наложения спектров и выбрать подходящую для этого частоту дискретизации.

Тема 14. Преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа представляет собой математический метод решения линейных дифференциальных уравнений, который оказался очень полезным в технике и физике. Преобразование Лапласа непрерывной функции времени f(t), которая определена только для положительного времени (t>0), математически выражается как

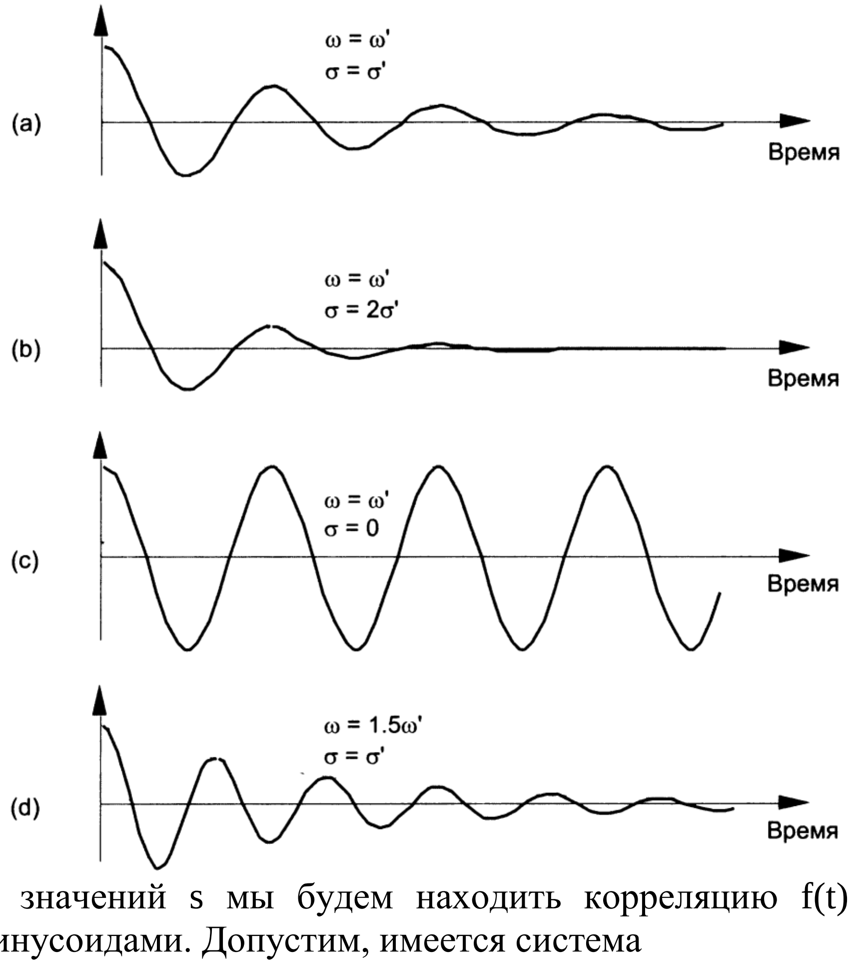
$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

$$s = \sigma + j\omega$$

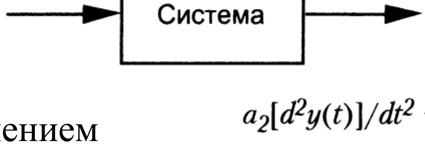
Преобразование Лапласа можно рассматривать как непрерывную функцию, комплексное значение которой при некотором s представляет собой корреляцию функции f(t) и затухающей комплексной синусоиды e^{-st}, частота которой равна ω, а коэффициент затухания равен σ. Комплексные синусоиды представляют собой вращающиеся радис-векторы, описываемые выражением:

$$e^{-st} = e^{-j\omega t}/e^{\sigma t} = \cos(\omega t)/e^{\sigma t} - j\sin(\omega t)/e^{\sigma t}$$

Несколько примеров s



Для разных значений s мы будем находить корреляцию f(t) с разными комплексными синусоидами. Допустим, имеется система



вход и выход которой связаны следующим уравнением $a_2[d^2y(t)]/dt^2 + a_1[dy(t)]/dt + a_0y(t) = b_1[dx(t)]/dt + b_0x(t)$. Тогда преобразование Лапласа будет использоваться для понимания того, как будет вести себя система при подаче на ее вход различным сигналов, т.е. каким будет выходной сигнал y(t) для любого заданного x(t). Другими словами, задача состоит в том, чтобы определить, какие функции (сигналы) на входе будут удовлетворять последнему равенству. Для этого будут использоваться функции e^{-st}, т.е. получится зависимость сигнала на выходе $y(e^{-st})$ от $x(e^{-st})$. После некоторых преобразований Лапласа получится соотношение

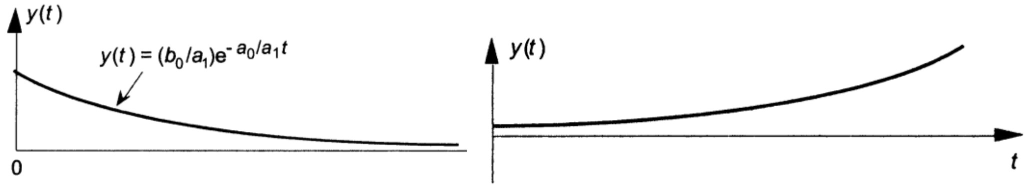
$$Y(s) = X(s)(b_1 s + b_0)/(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = X(s)H(s)$$

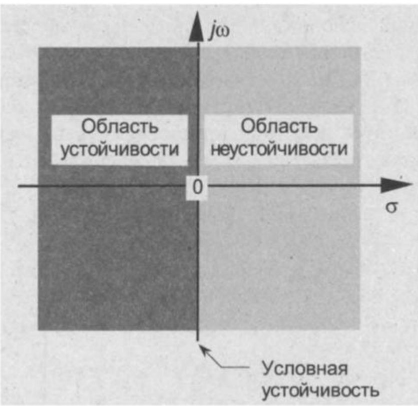
где Y(s) - преобразование Лапласа выходного сигнала, X(s) - преобразование Лапласа входного сигнала, H(s) – передаточная функция системы. Тогда если она известна, то можно взять X(s), умножить на H(s) и получить Y(s), а затем взять обратное преобразование Лапласа и получить y(t). На практике представляет интерес H(s): можно нарисовать её график и ответить на вопросы: устойчива ли система и, если да, то какова её частотная характеристика.

Одной из важнейших характеристик системы является её устойчивость, т.е. такой, что при ограниченном сигнале на входе она всегда выдает ограниченный выходной сигнал. Например, внутренняя неустойчивость фильтров может привести к тому, что выходные отсчеты не будут фильтрованными версиями входных отсчетов, они представляют собой какие-то непонятные колебания или псевдослучайные значения. Этого следует избегать. Допустим, имеется система с передаточной функцией

$$H_1(s) = b_0/(a_1 s + a_0) = (b_0/a_1)/(s + a_0/a_1)$$

При $s=-a_0/a_1$ знаменатель H_1 обращается в ноль, а модуль устремляется в бесконечность. Эта точка $s=-a_0/a_1$ называется полюсом. Если в момент времени t=0 на неё подать импульс x(t), то выходной сигнал представлял собой затухающую экспоненту, очевидно, что система устойчива.





Неустойчивая система показана на рисунке справа. Когда импульсный входной сигнал выводит такую систему из состояния покоя, её выходной сигнал неограниченно возрастает. Итак, можно сказать, что, когда полюсы расположены в правой полуплоскости комплексной плоскости, система неустойчива.

Тема 15. z-Преобразование. Регион сходимости. Реализация дискретных во времени систем.

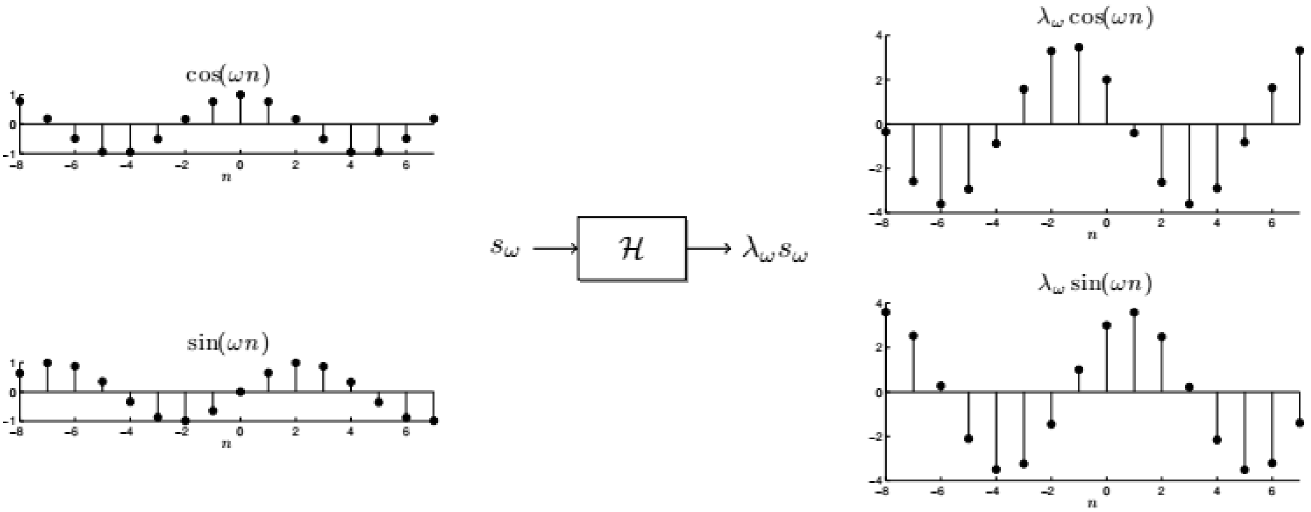
Z-преобразование обобщает преобразование Фурье дискретного времени (DTFT) для анализа сигналов и систем бесконечной длины. Очень полезно для проектирования и анализа систем обработки сигналов. Свойства очень похожи на DTFT с несколькими оговорками. Напомним, что Дискретное преобразование Фурье (DTFT):

$$X(\omega) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}, \qquad -\pi \le \omega < \pi$$

$$x[n] \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n}\, \frac{d\omega}{2\pi}, \qquad \infty < n < \infty$$

Основными базисными функциями DTFT являются синусоиды $e^{j\omega n}$ с произвольными частотами ω. Известно, что при прохождении комплексных синусоид через инвариантно-линейную систему у них изменяется амплитуда и начальная фаза.

$$s_\omega[n] \;=\; e^{j\omega n} \;=\; \cos(\omega n) + j\sin(\omega n), \qquad -\pi \le \omega < \pi, \quad -\infty < n < \infty$$



Комплексное значение λ_ω соответствует частоте ω сигнала s_ω и называется частотный отклик на частоте ω, т.к. она измеряет как система «откликается» на сигнал s_ω. Значение λ_ω можно определить из дискретного преобразования Фурье импульсной характеристики. При этом ДПФ является всего лишь скалярным произведением импульсной характеристики на соответствующую комплексную синусоиду с частотой ω.

$$\lambda_\omega \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j\omega n} \;=\; \langle h, s_\omega \rangle \;=\; H(\omega) \quad (\text{DTFT of } h)$$

Напомним свойства скалярного произведения: λ_ω растет/уменьшается, когда h и s_ω становятся более/менее похожими.

Кроме того, известно свойство, согласно которому, если имеется входной сигнал x и импульсная характеристика h, а также их частотные характеристики X и H, то сигнал на выходе y будет иметь частотную характеристику Y

$$Y(\omega) \ = \ X(\omega)H(\omega)$$

Теперь допустим, имеется сигнал комплексной экспоненты

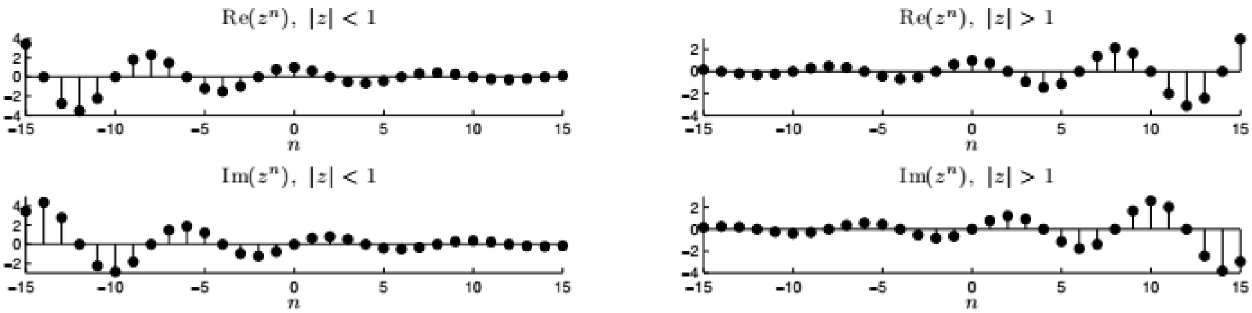
$$z^n \ = \ \left(|z|\, e^{j\omega}\right)^n \ = \ |z|^n\, e^{j\omega n} \ = \ |z|^n \ (\cos(\omega n) + j\sin(\omega n))$$

$|z|^n$ - огибающая комплексной экспоненты

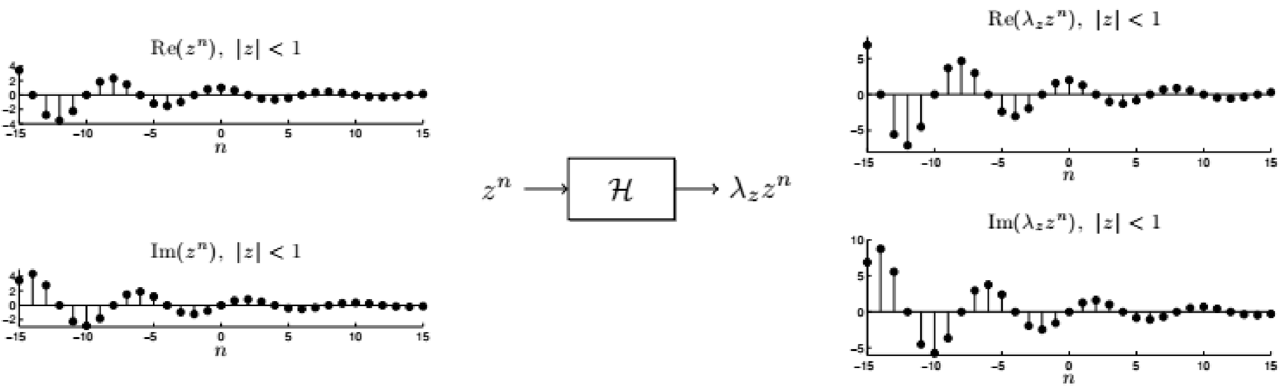
$e^{j\omega n}$ - комплексная синусоида.

Другими словами, сигнал комплексной экспоненты представляет собой по форме комплексную синусоиду с изменяющейся на каждом шаге n амплитудой.

$|z| < 1$ $|z| > 1$



Поскольку z^n является всё-таки синусоидой, но с изменяющейся амплитудой, то её можно подать на вход линейно-инвариантной системы. Тогда на выходе такой системы будет сигнал комплексной экспоненты с уменьшенной/увеличенной амплитудой и изменой фазой, т.е.



Значение $\lambda_z \in$ C соответствует комплексной экспоненциальной синусоиде z^n и называется функцией передачи; она измеряет как система «передает» сигнал z^n на выход.

$$\lambda_z \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, z^{-n} \ = \ H(z)$$

Стоит вспомнить свойство скалярного произведения: λ_z растет/уменьшается при h[n] становится более/менее похожей на z^{-n}. Таким образом, можно определить прямое z-преобразование сигнала x[n] $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$.

Основными базисными функциями z-преобразования являются комплексные экспоненты z^n с определенными значениями z ∈ C.

Мы используем X(·) для представления как ДПФ X (ω), так и z-преобразования X (z); они, по сути, тесно связаны между собой

$$X_{\mathrm{DTFT}}(\omega) = X_z(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = X_z(e^{j\omega})$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

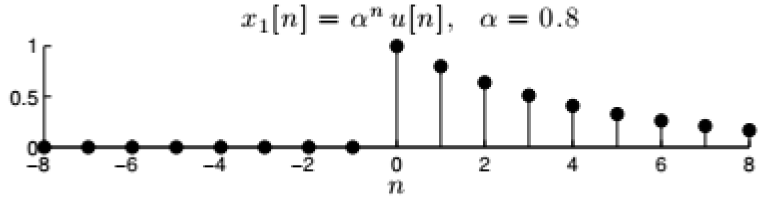
X(z) - комплекснозначная функция комплексного переменного: X(z) ∈ C и z ∈ C.

Принимая z-преобразования от x и h:

$$Y(z) = X(z)\, H(z)$$

Регион сходимости. Реализация дискретных во времени систем.

Допустим, имеем сигнал $x_1[n] = \alpha^n u[n],\ \alpha \in \mathbb{C} \quad \alpha = 0.8$ и его график



Тогда его прямое z-преобразование

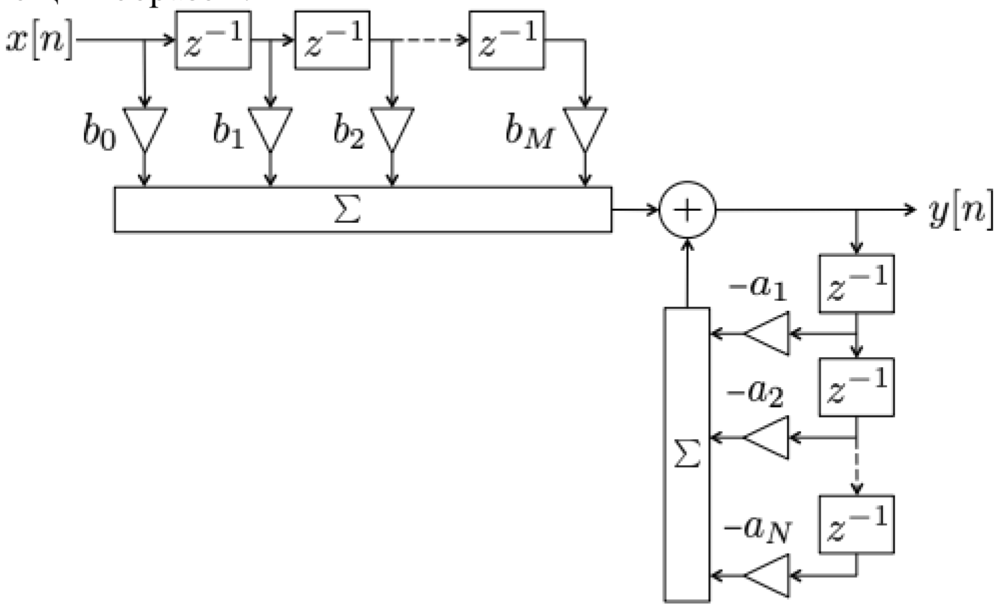
$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha\, z^{-1})^n = \frac{1}{1-\alpha\, z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}$$

Тогда можно сказать, что для данного сигнала x[n] регион сходимости его z-преобразования X(z) – это набор z ∈ C такие что X(z) сходится, т.е. $x[n]\, z^{-n}$ абсолютно суммируема $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]\, z^{-n}| < \infty$.

Для вышеописанного примера регион сходимости $X_1(z) = \frac{1}{1-\alpha\, z^{-1}}$ составляют такие значения, что $|z| > |\alpha|$.

Регион сходимости является достаточно важной характеристикой. Z-преобразование сходится только при некоторых значениях z и не существует для других значений z. Z-преобразования не являются уникальными без этого

Обобщенная схема дискретной системы обработки сигналов выглядит следующим образом:



где
z^{-1} – линия задержки на один такт.
a_i, b_i – масштабирование сигналов
\+ - суммирование.

Связь между входным и выходным сигналов выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} y[n] \;&=\; b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \cdots + b_Mx[n-M] \\ &-\; a_1y[n-1] - a_2y[n-2] + \cdots - a_Ny[n-N] \end{aligned}$$

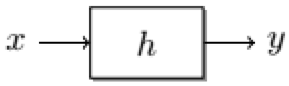
Такое выражение называется дифференциальным. Если выполнить над ним z-преобразование, то

$$\begin{aligned} Y(z) \;&=\; b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) + b_2z^{-2}X(z) + \cdots b_Mz^{-M}X(z) \\ &-\; a_1z^{-1}Y(z) - a_2z^{-2}Y(z) - \cdots - a_Nz^{-N}Y(z) \\ Y(z) \;&=\; H(z)\,X(z) \\ H(z) \;&=\; \frac{Y(z)}{X(z)} \;=\; \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_Nz^{-N}} \end{aligned}$$

Последнее выражение носит название функцией передачи. Поэтому при проектирование любой дискретной системы обработки сигналов важен корректный выбор коэффициентов a_i, b_i, которые будут определять всю систему в целом. При $z=e^{\omega n}$, то $H(z)= H(e^{\omega n})$ будет частотной характеристикой.

Тема 16. Проектирование дискретных во времени фильтров.

Допустим, имеется следующая системы, входной и выходной сигнал которой связаны как показано на схеме



$$y[n] \;=\; x[n] * h[n] \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]\,x[m]$$

$$Y(z) \;=\; H(z)\,X(z), \qquad Y(\omega) \;=\; H(\omega)\,X(\omega)$$

Цель – спроектировать линейную инвариантную во времени систему, выполняющую определенную задачу. При этом такая система обрабатывает сигнал x[n], усиливая или ослабевая его синусоидальные составляющие на определенных частотах, согласно дискретному преобразованию Фурье. У такой системы, именуемой фильтром, существуют эквивалентные параметры, изменяя которые можно добиться изменения соответствующих связанных величин и таким образом добиться поставленной цели. К таким параметрам относятся:

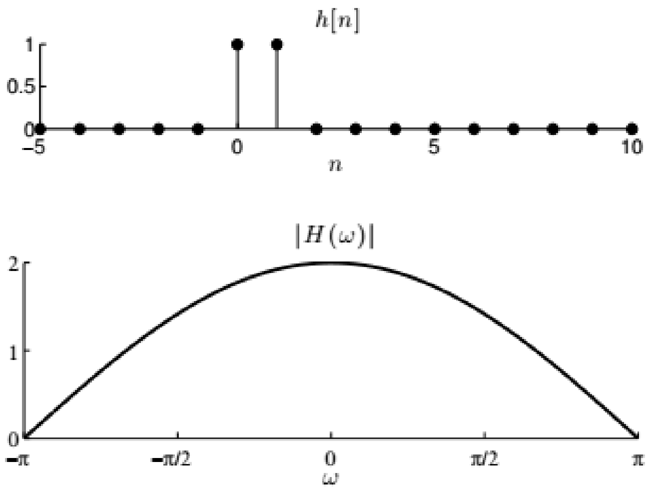
Импульсная характеристика h[n]

Функция передачи H(z)

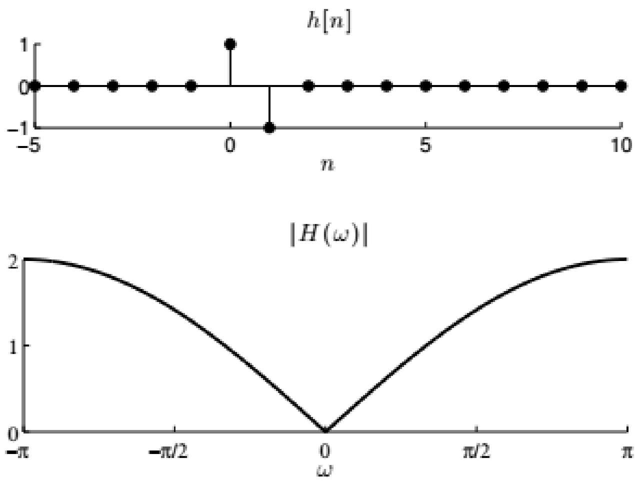
Частотная характеристика H(ω)

Коэффициенты дифференциального выражения a_i, b_i

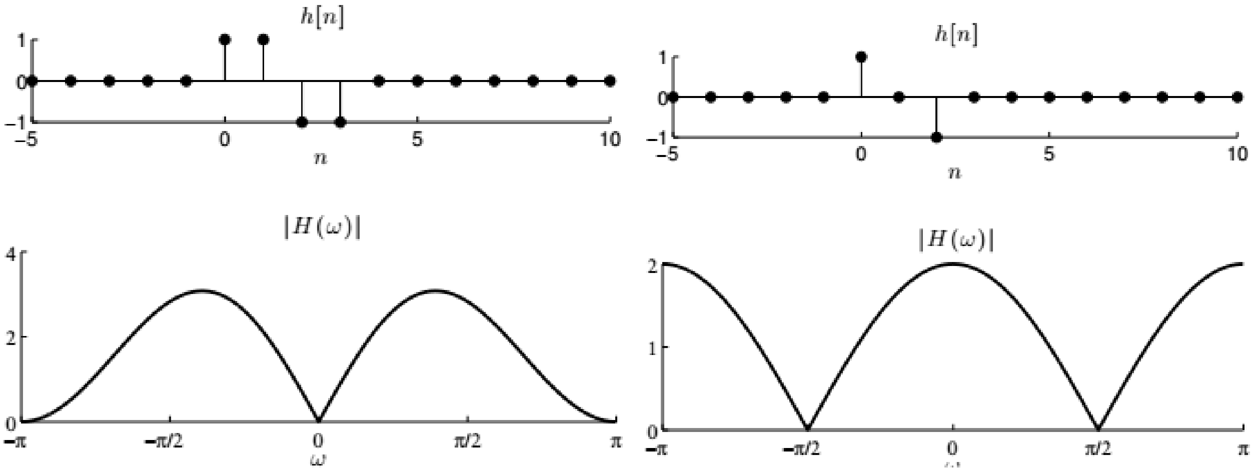
Имеются несколько основополагающих типов фильтров: низкочастотный, высокочастотный, полосовой, режекторный.



Низкочастотный

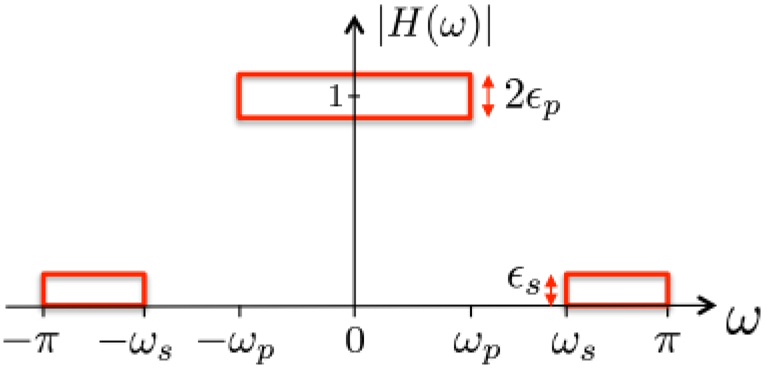


высокочастотный



полосовой режекторный

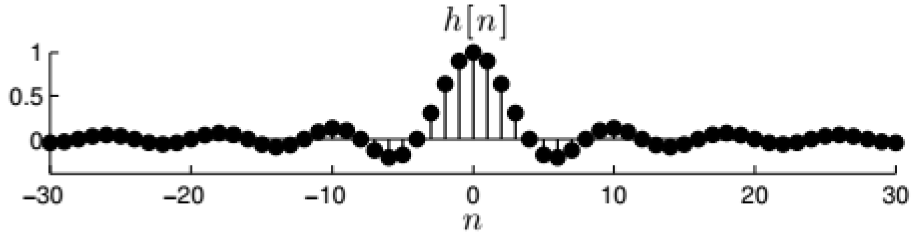
Очевидно, что фильтры должны удовлетворять некоторым спецификациям.
Граничная частота фронта полосы пропускания: ω_p
Граничная частота полосы среза: ω_s
Между полосами пропускания и останова: полоса перехода
Пульсации полосы пропускания: e_p
Пульсации полосы подавления: e_s



Ясно, что чем жестче спецификации, тем сложнее фильтр.
Допустим, идеальный частотный отклик фильтра низких частот выглядит как

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Тогда, зная, что обратное дискретное преобразование Фурье частной характеристики фильтра дает импульсную характеристику, то импульсный отклик - это печально известная функция sinc $h[n] = 2\omega_c \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}$



Дискретные фильтры бывают, кроме того, двух типов: с конечной и бесконечной импульсной характеристикой.

Фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (IIR)

• Использует как движущиеся, так и рекурсивные средние

• H (z) имеет как полюса, так и нули

• Относящиеся к \ аналоговому "дизайну фильтра с использованием резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности

• Как правило, имеют наименьшую сложность для удовлетворения заданной спецификации

Фильтры с конечной импульсной характеристикой (FIR)

• Использует только скользящее среднее

• H (z) имеет только нули

• Недостижимо в аналоговом режиме с использованием резисторов, конденсаторов и индукторов

• Обычно более высокая сложность (чем IIR) для удовлетворения заданной спецификации

• Но может иметь линейную фазу (большой плюс)

Список литературы

1. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – 3-е изд., испр. – М.: Техносфера, 2012. – 1048 с.

2. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. – 2-е изд.; пер. с англ. / Р. Лайонс. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. – 656 с.

3. Айфичер С., Джервис У. Цифровая обработка сигналов: Практический подход. Пер. с англ. / С. Айфичер, У. Джервис. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004 г. – 992 с.

4. Щетинин, Ю.И. Анализ и обработка сигналов в среде MATLAB: учебное пособие / Ю.И. Щетинин. – Новосибирск: НГТУ, 2011. – 115 с.

Учебно-методическое издание

Илья Владимирович Пешков

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ»

Технический редактор – О. А. Ядыкина
Техническое исполнение – В. М. Гришин
Формат 60 x 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 2,8 Уч.-изд.л. 2,6
Тираж 300 экз. (1-й завод 1-10 экз.). Заказ 71

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1