

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

О. В. Кондаков, Е. В. Кондакова

**ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ
В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ
АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУМЕТАЛЛА**

Учебное пособие

Елец – 2019

УДК 538.971+538.956+538.958

ББК 22.37

К 64

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина
от 31.01.2019, протокол № 1*

Рецензенты:

К.Г. Иванов, доктор физико-математических наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна);

Д.В. Кузнецов, кандидат физико-математических наук, доцент
(Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина)

Кондаков О. В., Кондакова Е. В.

К 64 Волновые процессы в замагниченной плазме анизотропного полуметалла: учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2019. – 83 с.

ISBN 978-5-00151-091-8

Учебное пособие содержит систематическое изложение курса «Волновые процессы в замагниченной плазме анизотропного полуметалла». Изучаемый материал представлен таким образом, чтобы ввести читателя в основные идеи, связанные с распространением электромагнитных волн в анизотропном монокристалле, находящемся в магнитном поле.

Книга написана в соответствии с требованием государственного стандарта и адресована студентам физических и инженерно-физических направлений подготовки, связанным с современной электроникой.

УДК 538.971+538.956+538.958

ББК 22.37

ISBN 978-5-00151-091-8

© Елецкий государственный
университет им. И.А. Бунина, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитные волны являются наиболее часто используемым инструментом для «сканирования» объектов неизвестной структуры. В нашем случае – это инфракрасное излучение, распространяющееся в планарном волноводе, помещённом в магнитное поле. Стенки планарного волновода состоят из анизотропного материала. Планарный волновод в силу своей геометрии, когда между двумя трансляционно-симметричными монокристаллами имеется узкий зазор, с одной стороны обеспечивает идеальные условия для взаимодействия электромагнитной волны с материалом его стенок, а с другой отсекает излучение, которое не участвует во взаимодействии с кристаллом. Ширина зазора должна быть не менее половины длины волны электромагнитного излучения, распространяющегося в нём, и не слишком велика, чтобы исключить часть излучения, которая не участвует во взаимодействии с кристаллом. Таким образом повышается отношения сигнал/шум при регистрации излучения, прошедшего через рассматриваемую систему. Магнитное поле необходимо, чтобы повысить информативность результатов эксперимента. Введение новой степени свободы резко повышает количество информации, полученной в результате регистрации сигнала. Таким образом, мы имеем возможность получить уникальную информацию, как о материале стенок волновода, так и о особенностях взаимодействия электромагнитных волн с веществом.

Однако, анализ полученных в результате эксперимента магнитооптических спектров требует глубоких знаний в области физики твёрдого тела, электродинамики и кристаллооптики. Более того, сложность полученных уравнений часто не позволяет провести аналитическое исследование результатов эксперимента. Необходимы численные расчёты в сочетании с теоретическим анализом. Данное пособие как раз реализует этот синтетический подход к решению поставленной проблемы.

В пособии рассмотрены общие вопросы, связанные с распространением электромагнитных волн в веществе. Особое внимание уделено условиям которые возникают при наложении магнитного поля. Отклик вещества на внешнее воздействие описывается функцией диэлектрической проницаемости для диэлектриков и проводимостью для металлов. При наложении магнитного поля эти две функции становятся взаимозависимыми и связанными друг с другом. Магнитное поле создаёт осевую симметрию в изотропном веществе. Таким образом, диэлектрическая проницаемость, как и проводимость, становятся тензорными величинами. Если же само вещество анизотропно, то это приводит к ещё большим осложнениям. Рассмотрение распространения электромагнитных волн в таких условиях изобилуют целым рядом разных и неочевидных условий и становится чрезвычайно сложным. Именно такому случаю и посвящено данное учебное пособие.

ГЛАВА 1. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УЗКОЗОННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ И ПОЛУМЕТАЛЛОВ

§ 1.1. Электромагнитные волны. Общие сведения

При наличии электрических зарядов в пространстве устанавливается возбужденное состояние, которое называется электромагнитным полем. Его представляют двумя векторами \vec{E} и \vec{B} , именуемыми соответственно электрическим вектором и магнитной индукцией. Для того чтобы описать влияние поля на материальные объекты, необходимо ввести вторую группу векторов, а именно плотность электрического тока \vec{j} , электрическое смещение \vec{D} и магнитный вектор \vec{H} . Пространственные и временные производные пяти указанных векторов связаны уравнениями Максвелла [1]:

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \dot{\vec{D}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}), \quad (1.1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{B}} = 0, \quad (\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}), \quad (1.1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho), \quad (1.1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0), \quad (1.1.4)$$

где $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ – зависящие от времени векторы напряжённости и индукции электрического и магнитного полей, $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ – оператор градиента, \vec{j} – плотность тока.

Так в теоретической физике система единиц «сгс» является предпочтительной, то система уравнений Максвелла приведена именно в этой системе, а в скобках приведены те же уравнения в системе СИ. Это сделано для удобства читателей, которым физика преподавалась в системе СИ.

Для того чтобы при заданном распределении зарядов и токов уравнения допускали единственное решение для векторов поля, к этим уравнениям необходимо добавить соотношения, описывающие поведение вещества под влиянием поля. Такие соотношения называются материальными уравнениями. В общем случае они довольно сложны, но для тел, находящихся в покое друг относительно друга (или в состоянии очень медленного движения) и состоящих из изотропных веществ (т.е. веществ, физические свойства которых в каждой точке не зависят от направления), эти уравнения принимают относительно простую форму [1]:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}), \quad (1.1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}), \quad (1.1.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}). \quad (1.1.7)$$

Величина σ называется удельной проводимостью, ε – диэлектрической проницаемостью, а μ – магнитной проницаемостью.

Существование электромагнитных волн было теоретически предсказано Максвеллом (1862-1864) как прямое следствие из уравнений электромагнитного поля. Скорость электромагнитных волн в вакууме оказалось равной величине $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ (в системе СИ), называемой в то время электродинамической постоянной. Ее числовое значение ($3,1 \cdot 10^8$ м/с) было получено несколько раньше (1856) из электромагнитных измерений В.Е. Вебера (1804-1891) и Р.Г. Кольрауша (1809-1858). Оно почти совпадало со скоростью света в вакууме, равной, по измерениям И.Л. Физо (1819-1896) в 1849 г., $c = 3,15 \cdot 10^8$ м/с. Впоследствии ε_0 и μ_0 получили названия – соответственно электрическая и магнитная постоянные.

§ 1.2. Диэлектрическая постоянная

Диэлектрическая постоянная или диэлектрическая проницаемость ε - безразмерная величина, показывающая во сколько раз сила взаимодействия зарядов в данной среде уменьшена по сравнению с вакуумом. Формула Клаузиуса – Мосотти связывает ε с поляризуемостью атомов, молекул или ионов, т.е. с химическими свойствами вещества:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \sum N_i \alpha_i, \quad (1.2.1),$$

где N_i - число атомов, молекул или ионов типа i в объеме вещества; α_i - их поляризованность.

Значения α_i периодически изменяются в зависимости от положения элемента в периодической системе. В отличие от поляризующего действия ионов, их поляризуемости α_i растут с увеличением главного квантового числа и уменьшаются с ростом заряда. В твердых телах из-за сложности взаимодействий ε обычно не удается вычислить из поляризуемостей отдельных ионов. Поляризуемость в твердом веществе состоит в основном из двух частей: электронной $\alpha_{эл}$, обусловленной смещением электронов относительно ядра, и ионной $\alpha_{ионн}$, связанной со смещением ионов по отношению к другим ионам. В молекулярных кристаллах к этому добавляются ориентационная поляризуемость, а в сегнетоэлектриках – спонтанная поляризуемость целых областей кристалла.

Электронная поляризуемость определяется в основном объемом частицы и сохраняет свое значение в полях высоких частот. Соответствующую высоким частотам диэлектрическую проницаемость ε_∞ можно определить, измерив показатель преломления n : $\varepsilon_\infty = n^2$, а величину $\alpha_{эл}$ – из формулы (1.2.1),

заменяв ε на n^2 . Для большинства ионных кристаллов значение ε_∞ изменяется в пределах от 2 до 4 [2].

Ионная поляризуемость определяется эффективным зарядом e^* , массой ионов m^* и собственной частотой оптических колебаний ω_0 . Ионная часть диэлектрической проницаемости изменяется в более широких пределах от 5 до 30 и больше. Ориентационная поляризуемость в ионных кристаллах составляет небольшую величину. Отсюда видно, что основной вклад (50-80%) в диэлектрическую проницаемость ионных кристаллов дает ионная поляризуемость полупроводников. В кристаллах с ковалентными связями величины ε довольно близки к n^2 . Теоретическое вычисление ε для ионных кристаллов затруднено из-за незнания ряда констант. Поэтому при изучении закономерностей изменения различных свойств твердого тела их сравнивают обычно с экспериментальными значениями $\varepsilon_\infty = n^2$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon$, т.е. высокочастотной и статической диэлектрическими проницаемостями (ε_0 – здесь диэлектрическая проницаемость, когда частота электромагнитного поля равна нулю, не путать с электрической постоянной).

Значения ε_0 обычно приведены в таблицах. Расхождения в литературных данных по ε иногда очень велики и вызваны разными причинами. Например, величина ε может зависеть от кристаллографического направления. Так, значение ε для рутила TiO_2 в направлении, перпендикулярном оптической оси кристалла, равно 86, а в параллельном направлении – 170. Иногда очень малые количества примесей соединений металлов иной валентности могут изменять ε ионных кристаллов во много раз. Например, 0,03% U_3O_8 в TiO_2 увеличивает значение ε от 100 до 10000; 0,1% Nb_2O_5 и Ta_2O_5 в TiO_2 – до 40000; примесь (1-5%) V_2O_3 в ZnO увеличивает ε от 10-20 до 1000. Объясняется это высоким значением электронной поляризуемости водородоподобной орбиты атома примеси из-за большого радиуса его орбиты.

Рассмотрим влияние диэлектрической проницаемости на каталитическую активность. В конечном счете это определяется тем, что взаимодействие между зарядами (например, ионами, электронами, диполями) происходит в среде, уменьшающей это взаимодействие в ε раз. На поверхности твердого тела для оценки взаимодействия между зарядами часто рассматривают среднеарифметическое значение ε между $\varepsilon_{\text{крист}}$ и $\varepsilon_{\text{газ}}$. В действительности такой расчет является очень грубым приближением. Точно также и поляризацию адсорбированного слоя нельзя рассчитывать по правилу аддитивности из поляризаций адсорбата и адсорбента. Кроме того, в микротрещинах, щелях и в присутствии постоянной примеси значение ε может быть повышено по сравнению с этим средним значением $\left(\frac{\varepsilon_{\text{крист}} + \varepsilon_{\text{газ}}}{2} \right)$.

§ 1.3. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Тензор диэлектрической проницаемости

В однородной проводящей среде проводимость $\sigma \neq 0$ и поэтому уравнения Максвелла (1.1.2)-(1.1.4) остаются без изменений, а уравнения (1.1.1) и (1.1.2) можно записать в виде:

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \sigma \cdot \vec{E}, \quad (\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \mu \sigma \vec{E} + \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}), \quad (1.3.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0. \quad (1.3.2)$$

Сравнивая уравнения (1.3.1) в системах сгс и СИ становится понятно, что более удобно пользоваться сгс системой.

Падающее на вещество электромагнитное излучение можно представить как монохроматическую плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении вектора \vec{k} с частотой ω :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \vec{r})), \quad (1.3.3)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \vec{r})). \quad (1.3.4)$$

Тогда, проведя дифференцирование, уравнения (1.3.1) и (1.3.2) можно представить в виде:

$$-i\vec{k} \times \vec{H} = \left(\frac{i\omega\varepsilon}{c} + \frac{4\pi}{c} \sigma \right) \cdot \vec{E}, \quad (1.3.5)$$

$$-i\vec{k} \times \vec{E} = -\frac{i\mu\omega}{c} \vec{H} \Leftrightarrow \vec{H} = \frac{c}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{E}. \quad (1.3.6)$$

Подставляя выражение (1.3.6) в уравнение (1.3.5) получим:

$$-\frac{ic}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = \left(\frac{i\omega\varepsilon}{c} + \frac{4\pi}{c} \sigma \right) \cdot \vec{E}, \quad (1.3.7)$$

$$-\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mu\varepsilon - \frac{i4\pi\omega}{c^2} \mu\sigma \right] \cdot \vec{E}. \quad (1.3.8)$$

Рассмотрим магнитно неактивную среду, где $\mu=1$. Это справедливо для большинства материалов. В результате получаем:

$$-\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon - \left(\frac{i4\pi\omega}{c^2} \right) \sigma \right] \vec{E}. \quad (1.3.9)$$

Рассмотрим только одну конфигурацию $\vec{k} \perp \vec{E}$. Тогда дисперсионное уравнение приобретает следующий вид:

$$-k^2 \vec{E} = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(\varepsilon - \frac{i4\pi}{\omega} \sigma \right) \cdot \vec{E} = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon^* \cdot \vec{E}, \quad (1.3.10)$$

где
$$\varepsilon^* = \varepsilon - \frac{i4\pi}{\omega} \sigma, \quad (1.3.11)$$

комплексная диэлектрическая проницаемость.

Дисперсионным уравнением называется зависимость $k(\omega)$.

Переобозначим для удобства $\varepsilon^* \Rightarrow \varepsilon$, а $\varepsilon \Rightarrow \varepsilon_0$. Таким образом выражение (1.3.11) преобразуется к виду:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{i4\pi}{\omega} \sigma, \quad (1.3.12)$$

где ε_0 – часто называется решёточной частью диэлектрической проницаемости.

Все формулы для распространения света в диэлектрике превращаются в формулы для распространения света в проводящих средах, если в них диэлектрическую проницаемость ε заменить на комплексную диэлектрическую проницаемость (1.3.12).

В диэлектрической среде между волновым числом k , частотой ω и диэлектрической проницаемостью ε существует соотношение, которое можно записать в виде:

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu, \quad (1.3.13),$$

где $\varepsilon \mu = 1/v^2$, v – скорость света в веществе. Для проводящей среды ε заменяется на $\varepsilon(\omega)$ (1.3.12), k на $k(\omega)$, определяемые в соответствии с (1.3.13) из равенства:

$$k(\omega)^2 = \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu. \quad (1.3.14)$$

Рассмотрим анизотропное вещество, электрическое возбуждение которого зависит от направления электрического поля. Тогда вектор \mathbf{D} не будет параллелен вектору \mathbf{E} . Напишем соотношение между \mathbf{D} и \mathbf{E} , позволяющим учесть анизотропию, а именно соотношение, в котором каждая компонента вектора \mathbf{D} связана линейно с компонентами \mathbf{E} , то есть [3]:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Девять величин $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \dots, \varepsilon_{zz}$ являются постоянными среды и составляют тензор диэлектрической проницаемости, следовательно вектор \mathbf{D} равен произведению этого тензора на вектор \mathbf{E} .

Перепишем уравнение (1.3.5) в более компактной форме:

$$D_k = \sum_l \varepsilon_{kl} E_l, \quad (1.3.16),$$

где k – один из трех индексов x, y , или z , а индекс l , по которому ведется суммирование, принимает по очереди значения x, y или z .

Уравнение (1.3.16) в символической форме записывается как

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon} \vec{E}, \quad (\vec{D} = \hat{\varepsilon} \varepsilon_0 \vec{E}), \quad (1.3.17)$$

где

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.3.18)$$

тензор комплексной диэлектрической проницаемости.

Для плотностей электрической w_e и магнитной w_m энергии, имеем:

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{8\pi} \sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} E_l, \quad (1.3.19)$$

$$w_m = \frac{1}{8\pi} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{8\pi} \mu H^2. \quad (1.3.20)$$

Вектор Пойтинга или «лучевой вектор» равен:

$$\vec{s} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (1.3.21)$$

После преобразований из первого и второго уравнения Максвелла получаем:

$$\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{B} \cdot \dot{\vec{H}} = -c \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} \dot{E}_l + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu H^2). \quad (1.3.22)$$

Если разделить обе части равенства на 4π , то второй член в правой части будет представлять скорость изменения магнитной энергии в единице объема, а первый его член – скорость изменения плотности электрической энергии лишь при условии:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} \dot{E}_l = \frac{dw_e}{dt} = \frac{1}{8\pi} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} (E_k \dot{E}_l + E_l \dot{E}_k) = 0. \quad (1.3.23)$$

Здесь различие индексов k и l фиктивно, т.к. они оба принимают одни и те же значения (x , y , z). Следовательно, выражение не изменится, если переставить k и l во втором члене, что дает:

$$\sum_{kl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{lk}) E_k \dot{E}_l = 0. \quad (1.3.24)$$

Поскольку такое условие выполняется при любом значении поля, отсюда следует, что

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}. \quad (1.3.25)$$

Это означает, что тензор диэлектрической проницаемости должен быть симметричным. Из девяти его компонент только шесть независимы. Обратно, условие (1.3.25) достаточно, чтобы обеспечить справедливость уравнения (1.3.23), и получаем теорему, выражающую закон сохранения энергии в дифференциальной форме («гидродинамическое уравнение непрерывности»), то есть:

$$w = w_e + w_m \left(-\operatorname{div} \vec{s} = \frac{dw}{dt} \right).$$

Симметричность тензора диэлектрической проницаемости ε позволяет привести выражение для электрической энергии w_e к такой форме, при которой сохраняются лишь квадраты компонент поля и отсутствуют их произведения.

Рассмотрим в пространстве $\{x, y, z\}$ поверхность второго порядка [4]:

$$\varepsilon_{xx}x^2 + \varepsilon_{yy}y^2 + \varepsilon_{zz}z^2 + 2\varepsilon_{xy}xy + 2\varepsilon_{xz}xz + 2\varepsilon_{yz}yz = const. \quad (1.3.26)$$

Левая часть уравнения (1.3.26) должна иметь положительную квадратичную форму, потому что при замене x , y и z на компоненты вектора \mathbf{E} она становится равной $8\pi w_e$, а энергия w_e должна быть положительной для любого значения вектора поля. Поэтому уравнение (1.3.26) описывает эллипсоид, и его всегда можно привести к главным осям эллипсоида; таким образом, существует система координат, связанная с кристаллом, в которой уравнение эллипсоида имеет вид (рис 1.1):

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = const. \quad (1.3.27)$$

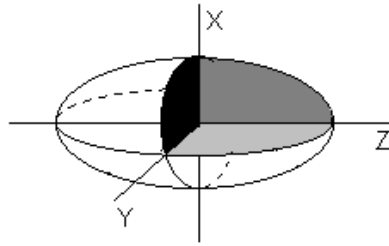


Рис. 1.3.1. Тензор диэлектрической проницаемости в собственных осях

В этой системе главных диэлектрических осей материальные уравнения и выражения для электрической энергии принимают простую форму, а именно:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_x E_x, \\ D_y &= \varepsilon_y E_y, \\ D_z &= \varepsilon_z E_z, \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

$$w_e = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right). \quad (1.3.29)$$

При этом тензор диэлектрической проницаемости является диагональным:

$$\varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & & 0 \\ & \varepsilon_y & \\ 0 & & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Величины $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ называются главными диэлектрическими проницаемостями. Из приведенных выше формул непосредственно следует, что \mathbf{D} и

\mathbf{E} всегда имеют различные направления, если только направления вектора \mathbf{E} не совпадает с одной из главных осей или все главные диэлектрические проницаемости не равны друг другу. В последнем случае ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$) эллипсоид вырождается в сферу.

Здесь необходимо сделать замечание о влиянии дисперсии. В случае анизотропных сред диэлектрическая проницаемость не является постоянной веществу, а зависит от частоты, и точно также в анизотропной среде шесть компонент тензора диэлектрической проницаемости ε_{kl} изменяются с изменением частоты. Поэтому меняются не только значения главных диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, но и направления главных осей. Это явление известно как дисперсия осей. Однако оно может возникать лишь в тех кристаллических структурах, симметрия которых не позволяет выделить предпочтительный ортогональный триплет направлений, то есть в кристаллах моноклинной и триклинной систем.

Можно не учитывать дисперсию, если ограничиться рассмотрением монохроматических волн, тогда величины ε_{kl} являются постоянными, зависящими лишь от свойств вещества.

Рассмотрим временные аспекты, связанные с взаимодействием электромагнитной волны с веществом. Подставляя выражения (1.1.5) - (1.1.7) в систему уравнений Максвелла (1.1.1)- (1.1.4), получим:

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} - \frac{\varepsilon}{c} \dot{\vec{\mathbf{E}}} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{\mathbf{E}}, \quad (1.3.30)$$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} + \frac{\mu}{c} \dot{\vec{\mathbf{H}}} = 0, \quad (1.3.31)$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad (1.3.32)$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{H}} = 0. \quad (1.3.33)$$

Для электромагнитного возмущения, падающего извне на проводник, можно заменить (1.3.32) уравнением $\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 0$. Если применить операцию дивергенции к уравнению (1.3.30) и используя (1.3.32), то получим:

$$\left(-\frac{\varepsilon}{c} \right) \operatorname{div} \dot{\vec{\mathbf{E}}} = \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho. \quad (1.3.34)$$

Дифференцируя уравнение (1.3.32) по времени, найдем:

$$\operatorname{div} \dot{\vec{\mathbf{E}}} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \dot{\rho}. \quad (1.3.35)$$

Исключая $\operatorname{div} \dot{\vec{\mathbf{E}}}$ из двух последних уравнений, получим:

$$\dot{\rho} + \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho = 0, \quad (1.3.36)$$

или после интегрирования:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (1.3.37)$$

где:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}. \quad (1.3.38)$$

Таким образом, видно, что любая плотность электрического заряда ρ экспоненциально уменьшается со временем. Время релаксации τ чрезвычайно мало для любой среды, обладающей заметной проводимостью. Для металлов это время значительно меньше периода колебания волны.

Для любого разумного значения ε , которого можно ожидать, τ так мало по сравнению с периодом световой волны, что в металле ρ всегда практически равно нулю. Тогда уравнение (1.3.32) можно переписать в виде:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0. \quad (1.3.39)$$

Из (1.3.30) и (1.3.31) после исключения \vec{H} и использования (1.3.39) следует, что \vec{E} удовлетворяет волновому уравнению:

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\dot{\vec{E}}. \quad (1.3.40)$$

Наличие члена с $\dot{\vec{E}}$ означает затухание волны, т.е. при распространении через среду волна постепенно ослабевает.

Покажем, как видоизменится выражение (1.3.12) для комплексной диэлектрической проницаемости, если в предполагаемом решении изменить знак перед показателем экспоненты на противоположный. Если поле строго монохроматично и обладает циклической частотой ω , т.е. если \vec{E} и \vec{H} имеют вид $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$, то производная $\frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega$, и уравнения (1.3.30) и (1.3.31) можно переписать следующим образом:

$$\operatorname{rot}\vec{H} + \frac{i\omega}{c}\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\vec{E} = 0, \quad (1.3.41)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} - \frac{i\omega\mu}{c}\vec{H} = 0. \quad (1.3.42)$$

Тогда, применяя операцию ротора к уравнению (1.3.41), и, подставляя ротор электрического поля из уравнения (1.3.42), получим волновое уравнение в виде:

$$\nabla^2\vec{E} + \hat{k}^2\vec{E} = 0 \quad (1.3.43)$$

где

$$\hat{k}^2 = \frac{\omega^2\mu}{c^2}\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) \quad (1.3.44)$$

Если в эти уравнения ввести величину:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (1.3.45)$$

то они формально станут идентичными с соответствующими уравнениями для непроводящих сред, где фигурирует вещественная диэлектрическая проницаемость ε .

Таким образом, знак перед мнимой частью выражения (1.3.45) зависит от знака в экспоненциальном множителе выражения для вектора напряжённости электрического и магнитного полей электромагнитной волны ($\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$ или $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$).

Аналогия с непроводящими средами станет еще ближе, если, кроме комплексного волнового числа \hat{k} и комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, ввести комплексную фазовую скорость \hat{v} и в комплексный показатель преломления \hat{n} , которые определяются:

$$\hat{v} = \frac{c}{\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}}}; \quad \hat{n} = \frac{c}{\hat{v}} = \sqrt{\mu\hat{\varepsilon}} = \frac{c}{\omega} \hat{k}. \quad (1.3.46)$$

Положим:

$$\hat{n} = n(1 + ik), \quad (1.3.47)$$

где n и k – вещественны, и назовем k – показателем затухания. Величины n и k легко выразить через материальные постоянные ε , μ и σ .

Возводя в квадрат обе части (1.3.47), получим:

$$\hat{n}^2 = n^2(1 + 2ik - k^2). \quad (1.3.48)$$

Кроме того, из (1.3.46) и (1.3.45) имеем:

$$\hat{n}^2 = \mu\hat{\varepsilon} = \mu \left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right). \quad (1.3.49)$$

Приравнявая мнимые и вещественные части в этих двух выражениях для \hat{n}^2 , получим:

$$n^2(1 - k^2) = \mu\varepsilon, \quad (1.3.50)$$

$$n^2 k = \frac{2\pi\mu\sigma}{\omega} = \frac{\mu\sigma}{\nu}. \quad (1.3.51)$$

Отсюда следует, что:

$$n^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\mu^2 \varepsilon^2 + \frac{4\mu^2 \sigma^2}{\nu^2}} + \mu\varepsilon \right\}, \quad (1.3.52)$$

$$n^2 k^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\mu^2 \varepsilon^2 + \frac{4\mu^2 \sigma^2}{\nu^2}} - \mu\varepsilon \right\}. \quad (1.3.53)$$

Здесь выбран положительный квадратный корень, т.к. n и k – вещественны, а следовательно, n^2 и $n^2 k^2$ должны быть положительны.

Уравнение (1.3.43) формально идентично волновому уравнению для непроводящей среды, но теперь волновое число комплексно. Простейшим решением (1.3.43) служит плоская гармоническая во времени волна:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left\{ i \left[\hat{k}(\vec{r} \cdot \vec{s}) - \omega t \right] \right\}, \quad (1.3.54)$$

где \vec{s} – единичный вектор нормальный к волновому фронту, $\vec{k} = \hat{k} \cdot \vec{s}$.

Если в соответствии с (1.3.46) и (1.3.47) подставить значение \hat{k} из соотношения:

$$\hat{k} = \frac{\omega \hat{n}}{c} = \frac{\omega n(1 + ik)}{c}, \quad (1.3.55)$$

то (1.3.54) примет вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left[-\frac{\omega}{c} nk(\vec{r} \cdot \vec{s})\right] \exp\left\{i\omega\left[\frac{n}{c}(\vec{r} \cdot \vec{s}) - t\right]\right\}. \quad (1.3.56)$$

Вещественная часть этого выражения, а именно:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left[-\frac{\omega}{c} nk(\vec{r} \cdot \vec{s})\right] \cos\left\{\omega\left[\frac{n}{c}(\vec{r} \cdot \vec{s}) - t\right]\right\}, \quad (1.3.57)$$

представляющая собой электрический вектор, является плоской волной длиной $\lambda = 2\pi c/\omega n$, затухание которой определяется экспоненциальным членом.

Так как плотность энергии w волны пропорциональна среднему по времени E^2 , то ясно, что w будет уменьшаться в соответствии с законом:

$$w = w_0 \exp[-\chi(\vec{r} \cdot \vec{s})], \quad (1.3.58)$$

где

$$\chi = \frac{2\omega}{c} nk = \frac{4\pi\nu}{c} nk = \frac{4\pi}{\lambda_0} nk = \frac{4\pi}{\lambda} k. \quad (1.3.59)$$

Здесь λ_0 – длина волны в вакууме, λ – длина волны в среде, постоянная χ – коэффициент поглощения.

Плотность энергии падает в e раз на расстоянии d , где

$$d = \frac{1}{\chi} = \frac{\lambda_0}{4\pi nk} = \frac{\lambda}{4\pi k}. \quad (1.3.60)$$

Обычно эта величина составляет очень малую долю длины волны.

Возвращаясь к уравнениям (1.3.52) и (1.3.53), видно, что когда $\sigma = 0$, первое уравнение точно переходит в соотношение Максвелла: $n^2 = \mu\varepsilon$, а второе дает $k=0$. Для металлов $\sigma \neq 0$ и фактически так велико, что в (1.3.52) и (1.3.53) можно пренебречь величиной ε по сравнению с $\frac{2\sigma}{\nu}$.

Диэлектрическая проницаемость ε металла невозможно измерить прямо, но ее легко получить из оптических экспериментов. Однако величины электрической поляризации в металлах и диэлектриках не могут фундаментально отличаться друг от друга, и в обоих типах сред ε одинаково по порядку величины. Следовательно, для не слишком коротких волн можно сказать, что:

$$\frac{\mu\sigma}{\nu} = n^2 k \gg \mu\varepsilon. \quad (1.3.61)$$

Уравнения (1.3.52), (1.3.53) переходят при этом в:

$$n \approx nk = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\nu}}, \quad (1.3.62)$$

а (1.3.60) в

$$d \approx \frac{\lambda_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\nu}{\mu\sigma}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{c\lambda_0}{\mu\sigma}}. \quad (1.3.63)$$

§ 1.4. Металл как система ионизированных атомов и свободно движущихся электронов

Рассмотрим металл не как бесструктурную среду, а как систему фиксированных ионизированных атомов металла и свободно (или почти свободно) движущихся между ними электронов. Рассмотрим электроны, движущиеся через решетку, образованную ионами. Они движутся практически свободно, за исключением коротких периодов столкновений с ионами, в течение которых между ионами и электронами происходит обмен небольшими количествами энергии. Уравнение движения такого модельного электрона в электрическом поле \mathbf{E} запишется в виде:

$$m\ddot{r} + m\beta\dot{r} = e\mathbf{E}, \quad (1.4.1)$$

где m – масса электрона, e – заряд электрона и β – показатель затухания, отнесенный к единице массы.

Рассмотрим гармоническое во времени поле $\mathbf{E} = E_0 \exp(-i\omega t)$. Тогда решение уравнения (1.4.1) является суммой двух членов, один из которых представляет затухающее движение – решение однородного уравнения

$$\ddot{r} + \beta\dot{r} = 0, \quad (1.4.2)$$

при $\mathbf{E}=0$:

$$\dot{r} = V = V_0 \exp(-\beta t), \quad (1.4.3)$$

$$r = r_0 - \frac{1}{\beta} V_0 \exp(-\beta t), \quad (1.4.4)$$

а другой описывает периодическое движение:

$$r = -\frac{e}{m(\omega^2 + i\beta\omega)} \mathbf{E}. \quad (1.4.5)$$

Периодическое движение вносит в поляризацию среды вклад $p = er$. Если в единице объема содержится N свободных электронов, то полная поляризация P , обусловленная всеми электронами, равна

$$P = Np = -\frac{Ne^2}{m(\omega^2 + i\beta\omega)} \mathbf{E}. \quad (1.4.6)$$

Так как

$$\hat{\epsilon}\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi P, \quad (1.4.7)$$

то

$$\hat{\varepsilon} = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega^2 + i\beta\omega)}. \quad (1.4.8)$$

Поскольку при $\mu=1$ в соответствии с (1.3.48) и (1.3.49)

$$\hat{\varepsilon} = n^2(1 - k^2) + 2in^2k, \quad (1.4.9)$$

то, приравнивая отдельно вещественные и мнимые части, получим:

$$\varepsilon = n^2(1 - k^2) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega^2 + \beta^2)}, \quad (1.4.10)$$

$$\frac{\sigma}{\nu} = n^2k = \frac{2\pi Ne^2\beta}{m\omega(\omega^2 + \beta^2)}. \quad (1.4.11)$$

Если β невелико, то для достаточно малых значений ω величина ε отрицательна. Критическое значение ω_p , при котором ε меняет знак, определяется выражением:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m} - \beta^2. \quad (1.4.12)$$

Используя (1.4.12), можно переписать уравнения (1.4.10) и (1.4.11) в виде:

$$\varepsilon = n^2(1 - k^2) = 1 - \frac{\omega_p^2 + \beta^2}{\omega^2 + \beta^2}, \quad (1.4.13)$$

$$\frac{\sigma}{\nu} = n^2k = \frac{\beta(\omega_p^2 + \beta^2)}{2\omega(\omega^2 + \beta^2)}. \quad (1.4.14)$$

Предположим, что $\omega_p^2 \gg \beta^2$, тогда вместо (1.4.12) можно написать:

$$\omega_p^2 \approx \frac{4\pi Ne^2}{m}. \quad (1.4.15)$$

Величина ω_p , когда $\varepsilon = 0$, получила название плазменной частоты.

Если ограничиться также достаточно высокими частотами ($\omega^2 \gg \beta^2$), то вместо (1.4.13) и (1.4.14) получим более простые формулы:

$$\varepsilon = n^2(1 - k^2) \approx 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \quad (1.4.16)$$

$$\frac{\sigma}{\nu} = n^2k \approx \frac{\beta}{2\omega} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2. \quad (1.4.17)$$

Из (1.4.16) следует, что если $\omega < \omega_p$, то ε отрицательно и $k > 1$. Отрицательное значение вещественной части диэлектрической проницаемости имеет вполне определенный смысл. Оно указывает, что поле, возникающее в результате колебания электронов, находится в противофазе с возбуждающим полем. Отражательная способность в рассматриваемом случае велика. Если же $\omega > \omega_p$, то ε принимает положительное значение, $k < 1$ и отражательная способность падает до чрезвычайно низкого значения. Среда становится достаточно прозрачной, похожей на диэлектрик.

§ 1.5. Двойное лучепреломление формы [2]

Способность кристаллов к двойному лучепреломлению можно объяснить, исходя из анизотропии электрических свойств молекул, составляющих кристаллы. Однако двойное лучепреломление может возникать и вследствие анизотропии элементов, значительно более крупных, чем молекулы. Речь идет в данном случае о некоторой упорядоченной системе частиц из оптически изотропного вещества, размер которых велик по сравнению с размерами молекул, но мал по сравнению с длиной волны света. Тогда говорят о двойном лучепреломлении формы [5].

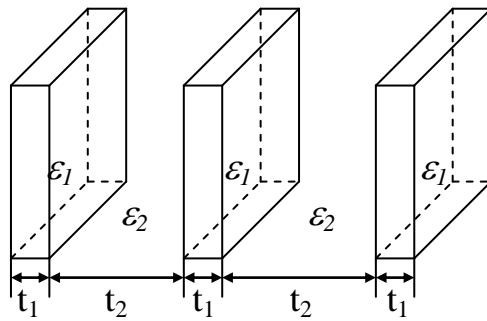


Рис. 1.5.1. Геометрическая конструкция, формирующая двойное лучепреломление

Рассмотрим совокупность частиц, которые имеют форму тонких параллельных пластин. Пусть t_1 – толщина каждой пластины, t_2 – ширина промежутков между ними, ϵ_1 – диэлектрическая проницаемость каждой из пластин, а ϵ_2 – диэлектрическая проницаемость окружающей их среды. Предположим, что на эту систему падает плоская монохроматическая волна и что ее электрический вектор перпендикулярен к пластинам. Если предположить, что линейные размеры граней пластин велики, а толщины t_1 и t_2 малы по сравнению с длиной волны, то поле в пластинах и между ними можно считать однородным. Нормальная составляющая вектора электрического смещения должна оставаться непрерывной при пересечении поверхности, на которой резко меняются свойства среды. Следовательно, вектор электрического смещения \mathbf{D} должен быть одинаковым как внутри пластин, так и вне их. Если \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 – соответствующие электрические поля, то есть:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}}{\epsilon_1}, \quad (1.5.1)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}}{\epsilon_2}, \quad (1.5.2)$$

то среднее поле \mathbf{E} , полученное усреднение по всему объему, равно

$$\vec{E} = \frac{t_1 \frac{\vec{D}}{\varepsilon_1} + t_2 \frac{\vec{D}}{\varepsilon_2}}{t_1 + t_2}. \quad (1.5.3)$$

В этом случае эффективная диэлектрическая проницаемость ε_{\perp} равна

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\vec{D}}{\vec{E}} = \frac{(t_1 + t_2)\varepsilon_1\varepsilon_2}{t_1\varepsilon_2 + t_2\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{f_1\varepsilon_2 + f_2\varepsilon_1}, \quad (1.5.4)$$

где $f_1 = \frac{t_1}{t_1 + t_2}$ и $f_2 = \frac{t_2}{t_1 + t_2} = 1 - f_1$ - доли общего объема, занимаемые пластинами и окружающей средой соответственно.

Предположим теперь, что электрический вектор падающего поля параллелен пластинам. Тангенциальная составляющая электрического вектора непрерывна на поверхности разрыва, так что в данном случае он будет иметь одно и то же значение \vec{E} внутри пластин и между ними. Электрические смещения в обеих этих областях равны:

$$\begin{aligned} \vec{D}_1 &= \vec{\varepsilon}_1 \vec{E}, \\ \vec{D}_2 &= \vec{\varepsilon}_2 \vec{E}, \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

и, значит, для среднего электрического смещения \vec{D} имеет место формула:

$$\vec{D} = \frac{t_1\varepsilon_1\vec{E} + t_2\varepsilon_2\vec{E}}{t_1 + t_2}. \quad (1.5.6)$$

Следовательно, в этом случае эффективная диэлектрическая проницаемость будет равна:

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{\vec{D}}{\vec{E}} = \frac{t_1\varepsilon_1 + t_2\varepsilon_2}{t_1 + t_2} = f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2. \quad (1.5.7)$$

Так как эффективная диэлектрическая проницаемость одинакова для всех направлений, параллельных пластинам, но различна для направлений, перпендикулярных к ним, система ведет себя как одноосный кристалл с оптической осью, нормальной к плоскости пластин. Разность $\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$ всегда положительна, так как согласно (1.5.4) и (1.5.7):

$$\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp} = \frac{f_1 f_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{f_1 \varepsilon_2 + f_2 \varepsilon_1} \geq 0. \quad (1.5.8)$$

Электрический вектор обыкновенной волны перпендикулярен к оптической оси, то есть параллелен плоскости пластин. Уравнение (1.5.8) означает, что рассматриваемая система всегда ведет себя как отрицательный одноосный кристалл.

Вопросы к главе 1

1. Какой смысл имеет мнимая часть диэлектрической проницаемости?
2. Из первого и второго уравнения Максвелла получите равенство:

$$\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{B} \cdot \dot{\vec{H}} = -c \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} \dot{E}_l + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu H^2). \quad (1.3.22)$$

3. Объясните появление знака «минус» в выражении (1.3.24).

4. Получить из (1.3.30) и (1.3.31)

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \dot{\vec{E}}. \quad (1.3.40)$$

5. Получить (1.3.52) и (1.3.53):

$$n^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\mu^2 \varepsilon^2 + \frac{4\mu^2 \sigma^2}{v^2}} + \mu \varepsilon \right\}, \quad (1.3.52)$$

$$n^2 k^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\mu^2 \varepsilon^2 + \frac{4\mu^2 \sigma^2}{v^2}} - \mu \varepsilon \right\}. \quad (1.3.53)$$

6. Получить решения дифференциального уравнения (1.4.1):

$$m\ddot{r} + m\beta\dot{r} = eE \quad (1.4.1)$$

7. Что такое отрицательный одноосный кристалл?

ГЛАВА 2. КРИСТАЛЛ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В данном пособии мы не будем рассматривать квантующее магнитное поле, т.е. квантование энергетических уровней носителей заряда и тот эффект, который производит это квантование на распространение электромагнитных волн в кристалле. Мы ограничимся классическим рассмотрением влияния магнитного поля на взаимодействие электромагнитного излучения с веществом.

§ 2.1. Энергетическая структура полуметалла висмута

Висмут принадлежит пятой группе периодической системы Менделеева и является характерным полуметаллом. Кристаллическая решетка относится к ромбоэдрической системе с двумя атомами в элементарной ячейке с симметрией точечной группы дитригонального скаленоэдра D_{3d}^5 [6, 7].

Кристаллическая решетка включает в себя следующие элементы симметрии: ось C_3 , являющуюся зеркально-поворотной осью 6-го порядка (рис. 2.1.1); три оси симметрии второго порядка C_1 (бинарные) (рис. 2.1.1 и рис. 2.1.2); три перпендикулярные к бинарным осям биссекторные плоскости, являющиеся плоскостями зеркальной симметрии; плоскости, перпендикулярные C_3 , которые называются бинарно-биссекторными или базисными плоскостями. Ось, лежащую в биссекторной плоскости и перпендикулярную тригональной оси, называют биссекторной осью (C_2) [8]. В русскоязычной литературе можно встретить название бинарной оси как оси C_2 , так как бинарной ось – это ось симметрии второго порядка. Соответственно, биссекторная ось называется в русскоязычной литературе осью C_1 . В данной книге мы будем пользоваться международными обозначениями кристаллических осей.

Причиной того, что висмут является полуметаллом, притом, что его элементарная ячейка содержит десять электронов, является небольшое перекрытие пятой и шестой зон Бриллюэна [9-11], возникающее из-за ромбоэдрической деформации кубической решетки и приводящее к появлению уже при $T=0$ К электронов и дырок с равными концентрациями. Концентрации электронов (дырок) у висмута равны: при гелиевой температуре $3,0157 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ [12], при азотной – $4,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ [13].

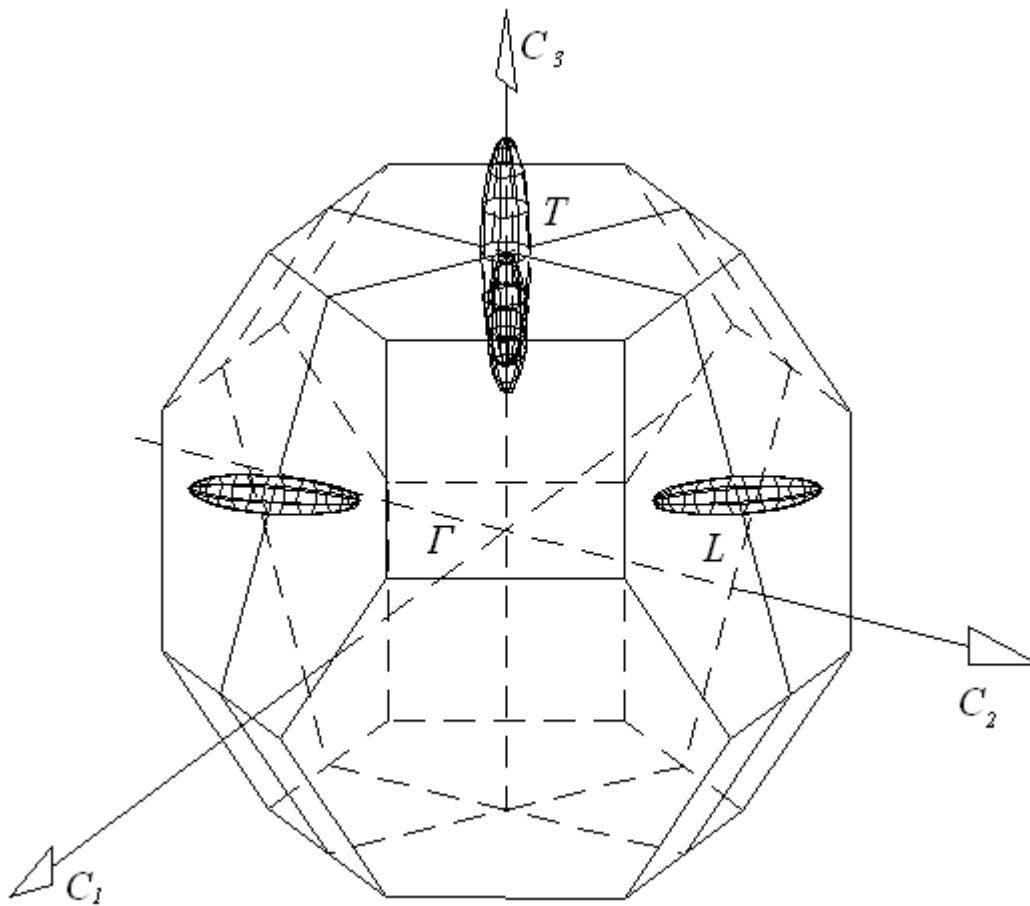


Рис. 2.1.1. Приведенная зона Бриллюэна Bi

C_1 – бинарная ось; C_2 – бисекторная ось; C_3 – тригональная ось; Γ – центр зоны Бриллюэна; L – точка локализации электронных экстремумов; T – точка локализации дырочного экстремума.

Теоретические и экспериментальные исследования висмута позволили определить энергетический спектр носителей заряда, места локализации электронной и дырочной поверхностей Ферми и их форму [14,15]. Установлено, что электронные поверхности Ферми локализованы в L – точках зоны Бриллюэна [16, 17] и приближенно имеют вид сильно анизотропных эллипсоидов (рис. 2.1.2), направление вытянутости которых совпадает с бисекторной осью C_2 и имеет угол наклона к базисной плоскости, равный $6^\circ 23'$ (рис. 2.1.3) [16, 18]. Отношение большой полуоси к малой (максимального импульса к минимальному) равно 13,9 [19]. Электронные поверхности переходят друг в друга при повороте на угол $\pm 120^\circ$ (рис. 2.1.2). Дырочная поверхность Ферми локализована в T точке и близка по форме к эллипсоиду вращения, вытянутого вдоль оси вращения, совпадающей с тригональной осью. Отношение максимального импульса к минимальному равно 3,3 [16]. Объем дырочной и суммарной электронной поверхностей Ферми одинаков и по величине составляет $43,981 \cdot 10^{-63} \text{ г}^3 \text{ см}^3 \text{ с}^{-3}$ [16, 20].

Схема расположения электронных и дырочного экстремумов вблизи уровня Ферми по-казана на рис. 2.4.

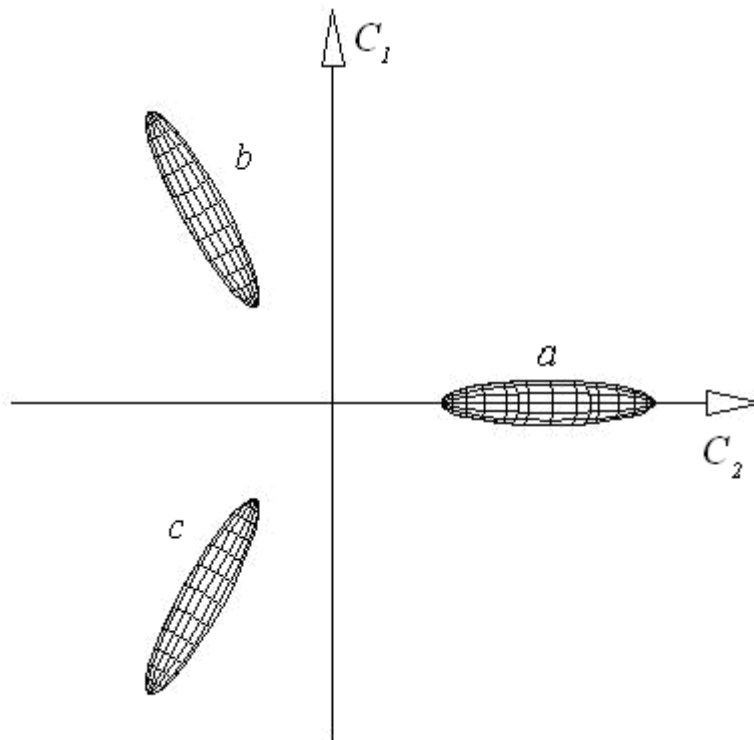


Рис. 2.1.2. Вид на электронные квази-эллипсоиды вдоль тригональной оси

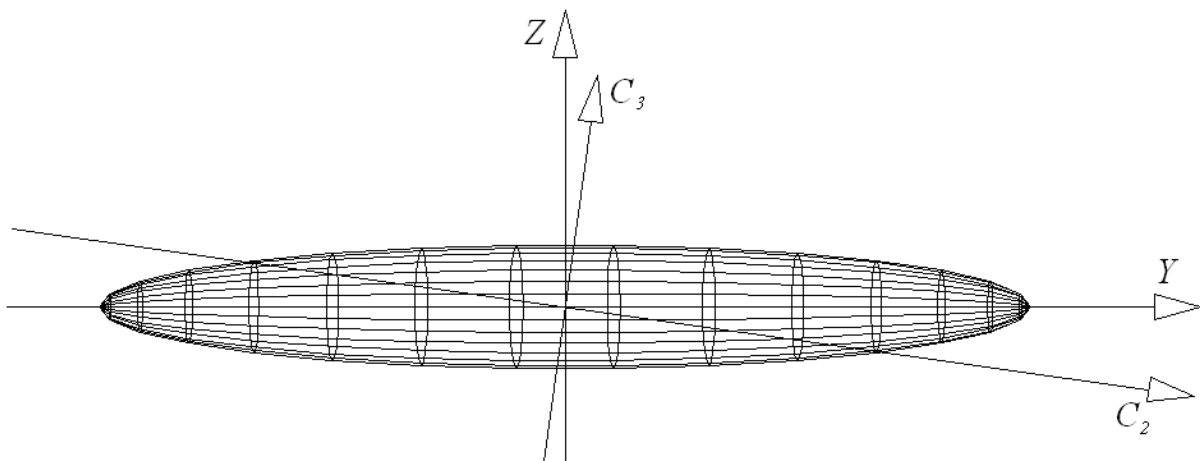


Рис. 2.1.3. Вид на электронный квазиэллипсоид вдоль бинарной оси

§ 2.2. Анизотропия зонной структуры висмута

Анизотропия электронной структуры висмута может быть описана введением в модель свободных электронов тензора обратных электронных масс:

$$\hat{\alpha} = (\hbar)^{-2} \nabla_{\vec{k}}^2 E(\vec{k}), \quad (2.2.1)$$

где \hbar – постоянная Планка делённая на 2π , $E(\vec{k})$ – энергия заряженной частицы, $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial k_x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial k_y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial k_z}$ – оператор градиента в пространстве волновых векторов.

Так что энергию носителей заряда можно описать выражением:

$$E = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \hat{\alpha} \cdot \vec{P}, \quad (2.2.2)$$

где \vec{P} – импульс электрона или дырки.

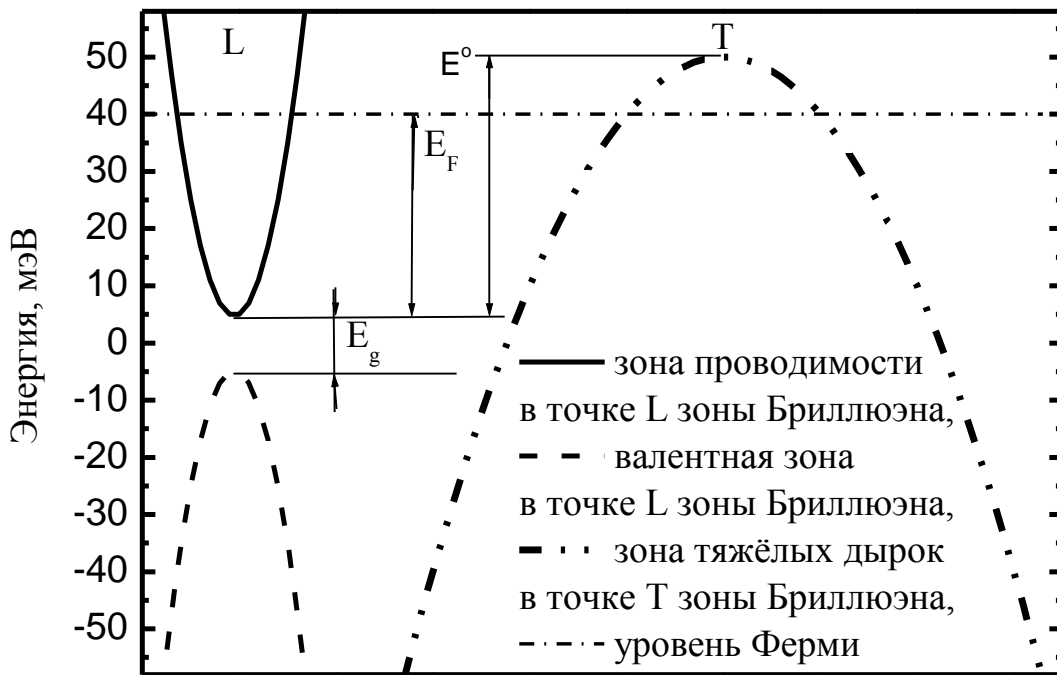


Рис. 2.2.1. Расположение энергетических зон висмута в L и T -экстремумах. $E_g=13,6$ мэВ – ширина запрещенной зоны в L – точке; $E_F=27,6$ мэВ – энергия Ферми электронов; $E^0=38,5$ мэВ – перекрытие зон L и T [21, 22] ($T=4,2$ К)

Дырочная поверхность Ферми, локализованная в T точке, близка по форме к эллипсоиду вращения, вытянутого вдоль оси вращения, совпадающей с тригональной осью, поэтому её можно представить в виде:

$$\hat{\alpha}^{(h)} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{pmatrix} = \hat{\beta}. \quad (2.2.3)$$

Вытянутая вдоль тригональной оси Ферми поверхность дырок, расположенных в Т точке зоны Бриллюэна представляется в виде:

$$E_o - E_F = \frac{1}{2m_0} [\beta_{11}(P_x^2 + P_y^2) + \beta_{33} \cdot P_z^2], \quad (2.2.4)$$

где E_o – энергия перекрытия между электронной и дырочной зонами (рис. 2.2.1), E_F – энергия Ферми, энергии отсчитываются от дна зоны проводимости (рис 2.2.1), β_{11} и β_{33} компоненты тензора обратных эффективных масс (2.2.2), x, y и z относятся к бинарной; биссекторной и тригональной осям.

Если взять матрицу обратной (2.2.2) и нормировать на массу свободного электрона m_0 , то получим тензор эффективных масс дырок:

$$(\hat{\beta})^{-1} = \frac{\hat{M}_h}{m_0} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.2.5)$$

где m_o – масса свободного электрона,

$$M_1 = \frac{1}{\beta_{11}}, \quad (2.2.6)$$

$$M_3 = \frac{1}{\beta_{33}}. \quad (2.2.7)$$

Одинарные обозначения компонент тензора эффективных масс имеют отношение к кристаллической системе координат, в которой обозначения 1, 2 и 3 означают бинарную; биссекторную и тригональную оси, а двойные обозначения компонент тензора эффективных масс имеют отношение к собственной системе координат эллипсоида вращения, когда оси координат направлены вдоль главных осей эллипсоида. Для тензора эффективных масс дырок величины компонент этого тензора в этих двух системах координат совпадают друг с другом, так как главные оси эллипсоида совпадают с направлением кристаллических осей.

Ферми поверхность электронов висмута состоит из трёх эквивалентных трёхосных эллипсоидов. Ферми поверхность электронов эллипсоида «а» (рис 2.1.2 и рис. 2.1.3) может быть выражена в виде [23]:

$$E_F = \frac{1}{2m_0} (\alpha_{11} \cdot P_x^2 + \alpha_{22} \cdot P_y^2 + \alpha_{33} \cdot P_z^2 + 2\alpha_{23} \cdot P_y P_z). \quad (2.2.8)$$

Электронную поверхность Ферми для эллипсоида «а», в соответствие с выше сказанным, можно представить в виде:

$$\hat{\alpha}^{(e)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (2.2.9)$$

Если посчитать матрицу обратную данной, то можно получить компоненты тензора эффективных масс электронов

$$(\alpha)^{-1} = \hat{m} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & m_4 \\ 0 & m_4 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

где

$$m_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \quad (2.2.11)$$

$$m_2 = \frac{\alpha_3}{(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4^2)}, \quad (2.2.12)$$

$$m_3 = \frac{\alpha_2}{(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4^2)}, \quad (2.2.13)$$

$$m_4 = \frac{-\alpha_4}{(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4^2)}. \quad (2.2.14)$$

Тензор эффективных масс электронов, нормированный на массу свободного электрона имеет вид:

$$\frac{\hat{m}_a}{m_0} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & m_4 \\ 0 & m_4 & m_3 \end{bmatrix}, \quad (2.2.15)$$

где обозначения 1, 2 и 3 означают бинарную; бисекторную и тригональную оси.

В табл. 1. приведены данные по обсуждаемым компонентам тензора эффективных масс электронов и дырок и тензора обратных масс на уровне Ферми. Данные приведены для уровня Ферми, потому что эксперименты по определению циклотронных масс обычно чувствительны к этому параметру на уровне Ферми.

Табл. 1. Тензор масс и тензор обратных масс на уровне Ферми

Тензор масс	Тензор обратных масс
$m_1 = 0.0071$	$\alpha_1 = 141$
$m_2 = 1.5$	$\alpha_2 = 1.85$
$m_3 = 0.0301$	$\alpha_3 = 92.3$
$m_4 = 0.17$	$\alpha_4 = -10.5$
$M_1 = 0.067$	$\beta_1 = 14.9$
$M_3 = 0.76$	$\beta_3 = 1.32$

Выражения для двух других эллипсоида (рис 2.1.2) $\frac{\hat{m}_b}{m_0}$ and $\frac{\hat{m}_c}{m_0}$ можно получить используя матрицу поворота вокруг оси 3 (тригональной оси) на $\pm 120^\circ$ [25]:

$$S_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.16)$$

Подставляя выше названные углы, получим:

$$S_{b,c} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \pm \sqrt{3} & 0 \\ \mp \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.2.17)$$

Поворот тензора осуществляем с помощью матричного преобразования [26]:

$$\hat{m}_{b,c} = (S_{b,c})^{-1} \cdot \hat{m}_a \cdot S_{b,c}. \quad (2.2.18)$$

В результате получим:

$$\hat{m}_{b,c} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} m_1 + 3m_2 & \mp \sqrt{3}(m_1 - m_2) & \mp 2\sqrt{3}m_4 \\ \mp \sqrt{3}(m_1 - m_2) & 3m_1 + m_2 & -2m_4 \\ \mp 2\sqrt{3}m_4 & -2m_4 & 4m_3 \end{bmatrix}. \quad (2.2.19)$$

В точке L зоны Бриллюэна (рис. 2.2.1) валентную зону отделяет от зоны проводимости экстремально малая величина запрещённой энергетической зоны. При температуре жидкого гелия ($T=4,2$ К) ширина запрещённой зоны равна $E_g=10$ мэВ. Экстремальная энергетическая близость валентной зоны и зоны проводимости электронов в точке L зоны Бриллюэна (рис. 2.2.1) приводит к взаимодействию электронов зоны проводимости и валентной зоны.

Взаимодействие приводит к тому, что эффективная масса электронной уменьшается вблизи дна зоны проводимости и в окрестности потолка валентной зоны. Таким образом, видоизменяется закон дисперсии носителей заряда в точке L зоны Бриллюэна (рис. 2.2.1) [27, 28]:

$$E \left(1 + \frac{E}{E_g} \right) = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \hat{\alpha} \cdot \vec{P}, \quad (2.2.20)$$

где E_g – ширина запрещённой зоны в точке L зоны Бриллюэна.

Формально рассматриваемая двухзонная модель эквивалентна дисперсионному соотношению для релятивистского электрона. Масса электрона изменяется при изменении энергетического расстояния от дна зоны проводимости, приближаясь, при больших энергиях к параболическому закону дисперсии.

§ 2.3. Тензор диэлектрической проницаемости в магнитном поле

Рассмотрим вещество, отклик которого на внешнее воздействие описывается полным тензором диэлектрической проницаемости (1.3.18):

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.3.1)$$

Падающее на вещество электромагнитное излучение можно представить как монохроматическую плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении вектора \vec{k} с частотой ω :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)), \quad (2.3.2)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)), \quad (2.3.3)$$

Тогда, волновое уравнение (1.3.43) можно записать в тензорном виде:

$$\left[\vec{k} \left[\vec{k}, \vec{E} \right] \right]_{\alpha} + k_0^2 \epsilon_{\alpha\beta} \vec{E}_{\beta} = 0, \quad (2.3.4)$$

где
$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i \frac{4\pi\sigma_{\alpha\beta}(k, \omega)}{\omega}, \quad (2.3.5)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (2.3.6)$$

Данная система находится в постоянном магнитном поле \vec{H} . Носители заряда вращаются вокруг направления вектора индукции магнитного поля с частотой равной циклотронной частоте $\omega_c = \frac{|e|H}{mc}$. Резонансное поглощение энергии электромагнитного поля на частоте ларморовской прецессии электронов (циклотронной частоте), в соответствии с соотношениями Крамерса-Кронига

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega - \Omega} d\omega, \quad (2.3.7)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\Omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)}{\omega - \Omega} d\omega \quad (2.3.8)$$

обуславливает возможность распространения электромагнитных волн в металлах.

Соотношения Крамерса-Кронига (2.3.7), (2.3.8) имеют универсальный характер. Они относятся к любой линейной функции отклика системы. Из них, в частности, следует, что вблизи пика резонансного поглощения ($\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)$) должна существовать область аномальной дисперсии. То есть $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)$ может стать положительной величиной и большой по сравнению с мнимой частью. При этом становится возможным распространение электромагнитных волн в проводящих средах [29].

Для решения дисперсионного уравнения (2.3.4) необходимо использовать какие-то представления о структуре тензора диэлектрической проницаемости или тензора проводимости. Для этого нужно вычислить ток, индуцируемый в среде электрическим полем. Не будем делать никаких предположений относительно зависимости ε или σ от динамических переменных – частоты ω и волнового вектора k . Используя только соображения симметрии, обусловленные специальным выбором координатных осей и аксиальной симметрией магнитного поля, можно существенно упростить волновое уравнение (2.3.4).

В присутствии постоянного магнитного поля \vec{H} компоненты тензоров диэлектрической проницаемости и проводимости зависят от \vec{H} , подчиняясь соотношениям Онсагера. Принцип симметрии кинетических коэффициентов Онсагера гласит, что индексы тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ или $\varepsilon_{\alpha\beta}$ меняются местами при изменении знака аксиального вектора \vec{H} , но не меняются при изменении знака волнового вектора \vec{k} то есть

$$\sigma_{\alpha\beta}(\vec{H}, \vec{k}, \omega) = \sigma_{\beta\alpha}(-\vec{H}, \vec{k}, \omega) = \sigma_{\beta\alpha}(-\vec{H}, -\vec{k}, \omega). \quad (2.3.9)$$

Пусть направление постоянного магнитного поля \vec{H} совпадает с осью OZ, а волновой вектор \vec{k} лежит в плоскости XZ. Тогда оси OX, OY, OZ направлены соответственно вдоль $[\vec{H}, \vec{k}]$, $[\vec{H}, \vec{k}]$, \vec{H} . В такой геометрии изменение знака \vec{H} и \vec{k} изменяет направление осей OX и OZ, но не изменяет направление оси OY. Если среда изотропна, то знаки σ_{xy} и σ_{yz} при таком преобразовании изменяются, а σ_{xz} и диагональные элементы σ_{ii} остаются неизменными.

Из соотношений Онсагера следует:

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = -\sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}. \quad (2.3.10)$$

Уже эти равенства сокращают число независимых компонент тензора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ до шести.

В общем случае $\sigma_{\alpha\beta}(k, \omega)$ представляет собой сложную трансцендентную функцию \vec{k} и уравнение, получающееся в результате приравнивания нулю детерминанта третьего порядка дисперсионного уравнения, также оказывается весьма сложным. Наиболее громоздкими дисперсионные уравнения получаются при произвольном направлении распространения электромагнитных волн. Задача существенно упрощается в частных случаях $\vec{H} \parallel \vec{k}$ и $\vec{H} \perp \vec{k}$.

Выпишем дисперсионные соотношения (2.3.4) для электромагнитных волн, распространяющихся вдоль постоянного магнитного поля (вдоль оси OZ), то есть $k=k_z$:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - N^2 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - N^2 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.3.11)$$

где $N = c \frac{k}{\omega}$ – комплексный коэффициент преломления.

Предполагая, что среда обладает вращательной относительно оси OZ симметрией, получим:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}, \quad (2.3.12)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (2.3.13)$$

Равенство (2.3.12) выражает тот факт, что в этой геометрии оси OX и OY эквивалентны. Равенство (2.3.13) справедливо ввиду отсутствия связи между движением электрона вдоль оси OZ и его движением в плоскости XY.

Итак,

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - N^2 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - N^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.3.14)$$

Перепишем дисперсионное уравнение (2.3.14) в виде

$$\left[(\varepsilon_{xx} - N^2)^2 + \varepsilon_{xy}^2 \right] \cdot \varepsilon_{zz} = 0. \quad (2.3.15)$$

или

$$(\varepsilon_{xx} + i\varepsilon_{xy} - N^2) \cdot (\varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy} - N^2) \cdot \varepsilon_{zz} = 0. \quad (2.3.16)$$

Если ввести обозначения

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}, \quad (2.3.17)$$

то окончательно получим

$$(\varepsilon_{\pm} - N^2) \cdot \varepsilon_{zz} = 0. \quad (2.3.18)$$

Моды, соответствующие двум корням уравнения

$$\varepsilon_{\pm} = N^2 \quad (2.3.19)$$

являются чисто поперечными волнами с круговой поляризацией, а решение

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.3.20)$$

Соответствует чисто продольной моде – плазмону.

Полученные решения (2.3.19) и (2.3.20) – это всё, что можно найти, не затрагивая вопрос о динамике электронного газа. Если пренебречь зависимостью диэлектрической проницаемости от волнового вектора k , легко вычислить тензор проводимости для газа невзаимодействующих электронов. Пренебрежение зависимостью $\sigma_{\alpha\beta}(k, \omega)$ от k эквивалентно предположению, что электрическое поле в металле является однородным. Тогда нужно вычислить ток, решая уравнение движения электронов в однородных электрическом и магнитном полях.

В приближении однородного поля

$$\vec{j}(\omega) = \hat{\sigma}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega), \quad (2.3.21)$$

где $\hat{\sigma}(\omega)$ – тензор удельной электропроводности.

В отсутствие межэлектронного взаимодействия и направленного дрейфа электронов

$$\vec{j}(\omega) = ne\vec{v}(\omega), \quad (2.3.22)$$

где n – концентрация носителей заряда, e – заряд рассматриваемой частицы.

Воспользуемся уравнением движения электрона в виде

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m^*}{\tau} \vec{v} = -e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right), \quad (2.3.23)$$

где m^* – эффективная масса, \vec{v} – скорость, τ – время релаксации носителей заряда.

Решая это дифференциальное уравнение стандартным образом, т.е. делая

подстановку $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} e^{i\omega t}$ и учитывая выражения (2.3.21) и (2.3.22) для

случая $\vec{H} \parallel z$ оси получаем:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_x = -\frac{e}{m^*} \left(E_x + \frac{H}{c} v_y \right), \quad (2.3.24)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_y = -\frac{e}{m^*} \left(E_y - \frac{H}{c} v_x \right), \quad (2.3.25)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_z = -\frac{e}{m^*} E_z. \quad (2.3.26)$$

Здесь учтено, что

$$\vec{v} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix} = \vec{i}v_y H - \vec{j}v_x H. \quad (2.3.27)$$

Обозначая циклотронную частоту

$$\omega_c = \frac{|e|H}{mc}, \quad (2.3.28)$$

уравнения (2.3.24)- (2.3.26) можно переписать в следующем виде:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)v_x = -\frac{e}{m^*}E_x - \omega_c v_y, \quad (2.3.29)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)v_y = -\frac{e}{m^*}E_y + \omega_c v_x, \quad (2.3.30)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)v_z = -\frac{e}{m^*}E_z. \quad (2.3.31)$$

Так как справедливо выражение (2.3.22)

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{ne} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}. \quad (2.3.32)$$

Знак минус появился в выражении (2.3.32) с учётом отрицательного заряда электрона.

Таким образом, соотношения (2.3.29) – (2.3.31) можно выразить через плотность тока:

$$-\frac{1}{ne} \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)J_x = -\frac{e}{m^*}E_x + \frac{1}{ne} \omega_c J_y, \quad (2.3.33)$$

$$-\frac{1}{ne} \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)J_y = -\frac{e}{m^*}E_y - \frac{1}{ne} \omega_c J_x, \quad (2.3.34)$$

$$-\frac{1}{ne} \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)J_z = -\frac{e}{m^*}E_z. \quad (2.3.35)$$

Умножим выражения (2.3.33) – (2.3.35) на -1. В результате получим:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)J_x = \frac{ne^2}{m^*}E_x - \omega_c J_y, \quad (2.3.36)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)J_y = \frac{ne^2}{m^*}E_y + \omega_c J_x, \quad (2.3.37)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)J_z = \frac{ne^2}{m^*}E_z. \quad (2.3.38)$$

Так как связь индуцированного тока с напряженностью электрического поля падающей на вещество волны определяется выражением (2.3.21), а структура тензора удельной электропроводности, как и тензора диэлектрической проницаемости, - выражением (2.3.14), то можем записать, что:

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (2.3.39)$$

Поставляя из (2.3.39) выражения для компонент вектора плотности тока в уравнения (2.3.36) – (2.3.38), получим:

$$\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)(\sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y) = \frac{ne^2}{m^*}E_x - \omega_c(\sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y), \quad (2.3.40)$$

$$\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)(\sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y) = \frac{ne^2}{m^*}E_y + \omega_c(\sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y), \quad (2.3.41)$$

$$\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)\sigma_{zz}E_z = \frac{ne^2}{m^*}E_z. \quad (2.3.42)$$

Сравнивая в уравнениях (2.3.40) - (2.3.42) выражения при одних и тех же компонентах вектора напряженности электрического поля, получим из (2.3.40):

$$i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)\sigma_{xx} = \frac{ne^2}{m^*} - \omega_c\sigma_{yx}, \quad (2.3.43)$$

$$i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)\sigma_{xy} = -\omega_c\sigma_{yy}. \quad (2.3.44)$$

Из (2.3.41):

$$i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)\sigma_{yx} = \omega_c\sigma_{xx}, \quad (2.3.45)$$

$$i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)\sigma_{yy} = \frac{ne^2}{m^*} + \omega_c\sigma_{xy}. \quad (2.3.46)$$

Из (2.3.42):

$$i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)\sigma_{zz} = \frac{ne^2}{m^*}. \quad (2.3.47)$$

Решая систему уравнений (2.3.43) и (2.3.45), получим:

$$\frac{i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{\omega_c} \sigma_{yx} = \frac{-i}{\omega - \frac{i}{\tau}} \left(\frac{ne^2}{m^*} - \omega_c \sigma_{yx} \right), \quad (2.3.48)$$

$$\left[\frac{i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{\omega_c} - \frac{i\omega_c}{\omega - \frac{i}{\tau}} \right] \sigma_{yx} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{-i}{\omega - \frac{i}{\tau}}, \quad (2.3.49)$$

$$\sigma_{yx} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{-i}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right) i \left[\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2 \right]}, \quad (2.3.50)$$

$$\sigma_{yx} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{-\omega_c}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2}. \quad (2.3.51)$$

Подставляя (2.3.51) в (2.3.45), получим:

$$\sigma_{xx} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{-\omega_c}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2} \frac{i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{\omega_c}. \quad (2.3.52)$$

После сокращений:

$$\sigma_{xx} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{-i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2}. \quad (2.3.53)$$

Решая систему уравнений (2.3.45) и (2.3.46), получим:

$$\frac{-i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{\omega_c} \sigma_{xy} = \frac{-i}{\omega - \frac{i}{\tau}} \left(\frac{ne^2}{m^*} + \omega_c \sigma_{xy} \right), \quad (2.3.54)$$

$$\left[\frac{-i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{\omega_c} + \frac{i\omega_c}{\omega - \frac{i}{\tau}} \right] \sigma_{xy} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{-i}{\omega - \frac{i}{\tau}}, \quad (2.3.55)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{-i}{\omega - \frac{i}{\tau}} \frac{\omega_c \left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{-i \left[\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2 \right]}. \quad (2.3.56)$$

После сокращений:

$$\sigma_{xy} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{\omega_c}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2}. \quad (2.3.57)$$

Подставляя (2.3.57) в (2.3.44), получим:

$$\sigma_{yy} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{\omega_c}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2} \frac{-i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{\omega_c}. \quad (2.3.58)$$

После сокращений:

$$\sigma_{yy} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{-i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2}. \quad (2.3.59)$$

Выражение (2.3.47) можно преобразовать к виду:

$$\sigma_{zz} = \frac{ne^2}{m^*} \frac{-i}{\omega - \frac{i}{\tau}}. \quad (2.3.60)$$

Таким образом мы получили все компоненты тензора электропроводности [24]:

$$\sigma = \frac{ne^2}{m^*} \begin{pmatrix} \frac{-i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2} & \frac{\omega_c}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2} & 0 \\ \frac{-\omega_c}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2} & \frac{-i\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)^2 - \omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-i}{\left(\omega - \frac{i}{\tau}\right)} \end{pmatrix}. \quad (2.3.61)$$

Заметим, что в полученном выражении для тензора электропроводности эффективная масса изотропна.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости (1.3.45)

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_0 + i \frac{4\pi\hat{\sigma}}{\omega} \quad (2.3.62)$$

теперь легко пересчитать, используя полученное выражение для тензора электропроводности (2.3.61).

Крышечка над диэлектрическими проницаемостями и проводимостью в (2.3.62) означает, что это величины тензорные, $\hat{\varepsilon}_0$ – решёточная часть диэлектрической проницаемости.

§ 2.4. Расчёт компонент тензора высокочастотной электропроводности в наиболее общем случае

Как уже отмечалось ранее, энергетический спектр висмута представляет собой сложную структуру, позволяющую реализовать наиболее общий случай расчёта компонент тензора высокочастотной электропроводности. Действительно, электронные поверхности Ферми висмута состоят из трёх трёхосных эллипсоида, которые переходят друг в друга при повороте на угол $\pm 120^\circ$ вокруг тригональной оси (рис. 2.1.2). Поэтому в общем случае тензор эффективных масс (2.2.19) можно переписать в виде:

$$\hat{m}_e = \begin{bmatrix} m_{e11} & m_{e12} & m_{e13} \\ m_{e21} & m_{e22} & m_{e23} \\ m_{e31} & m_{e32} & m_{e33} \end{bmatrix}, \quad (2.4.1)$$

в котором имеется 9 компонент. Мы не будем сейчас ссылаться на симметрию представления (2.2.19), которая, конечно же, имеется и упрощает расчёт.

Нам предстоит проделать ту же процедуру, что и в предыдущем параграфе, только уравнение (2.3.23) необходимо переписать с учётом того, что масса носителей заряда анизотропна и описывается тензорной величиной:

$$\hat{m}_e \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{e\vec{B}}{m_0} \times \vec{v} + \tau^{-1} \cdot \hat{m}_e \cdot \vec{v} = e \frac{\vec{E}}{m_0}, \quad (2.4.2)$$

где \vec{B} - магнитная индукция, \vec{v} - скорость электрона в эллипсоиде постоянной энергии собственные оси, которого не совпадают с кристаллическими осями кристаллической решётки.

Мы заменили вектор напряжённости магнитного поля \vec{H} на вектор магнитной индукции \vec{B} потому что для абсолютного большинства материалов магнитная проницаемость $\mu \approx 1$, в том числе и для висмута.

Решая это дифференциальное уравнение стандартным методом, как и ранее, результат формально можно записать в виде:

$$\vec{v} = (\hat{m} + \vec{b} \times \hat{I})^{-1} \cdot \frac{e\vec{E}}{m_0(\tau^{-1} + i \cdot \omega)} \quad (2.4.3)$$

где

$$\vec{b} = [q\vec{B}/(\tau^{-1} + i\omega)m_0], \quad (2.4.4)$$

а \hat{I} - единичная матрица.

Тогда тензор удельной электропроводности просто получить используя (2.3.21) и (2.3.22), т.е.

$$\vec{J} = \hat{\sigma} \cdot \vec{E} = ne\vec{v}. \quad (2.4.5)$$

Отсюда

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_0} = (\hat{m}_e + \vec{b} \times I)^{-1}, \quad (2.4.6)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{[m_0(\nu + i\omega)]}. \quad (2.4.7)$$

Используем эти результаты для того, чтобы в явном виде записать компоненты тензора электропроводности электронов одного из эллипсоидов постоянной энергии:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_0} = (\hat{m}_e + \vec{b} \times I)^{-1} = \Delta^{-1} \times \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}, \quad (2.4.8)$$

где

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_0} = \Delta^{-1} \times (m_{e22}m_{e33} - m_{e23}m_{e32} + b_1^2), \quad (2.4.9)$$

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_0} = \Delta^{-1} \times (m_{e13}m_{e23} - m_{e12}m_{e33} + b_1m_{e13} + b_2m_{e32} + b_3m_{e33} + b_1b_2), \quad (2.4.10)$$

$$\frac{\sigma_{21}}{\sigma_0} = \Delta^{-1} \times (m_{e31}m_{e32} - m_{e12}m_{e33} - b_1m_{e31} - b_2m_{e23} - b_3m_{e33} + b_1b_2), \quad (2.4.11)$$

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_0} = \Delta^{-1} \times (m_{e11}m_{e33} - m_{e13}m_{e31} + b_2^2), \quad (2.4.12)$$

$$\frac{\sigma_{31}}{\sigma_0} = \Delta^{-1} \times (m_{e12}m_{e23} - m_{e13}m_{e22} + b_1m_{e12} + b_2m_{e22} + b_3m_{e23} + b_1b_3), \quad (2.4.13)$$

$$\frac{\sigma_{31}}{\sigma_0} = \Delta^{-1} \times (m_{e21}m_{e32} - m_{e31}m_{e22} + b_1m_{e21} + b_2m_{e22} + b_3m_{e32} + b_1b_3) \quad (2.4.14)$$

$$\frac{\sigma_{23}}{\sigma_0} = \Delta^{-1} \times (m_{e13}m_{e21} - m_{e11}m_{e23} + b_1m_{e11} + b_2m_{e21} + b_3m_{e13} + b_2b_3), \quad (2.4.15)$$

$$\frac{\sigma_{32}}{\sigma_0} = \Delta^{-1} \times (m_{e31}m_{e12} - m_{e11}m_{e32} - b_1m_{e11} - b_2m_{e12} - b_3m_{e31} + b_2b_3), \quad (2.4.16)$$

$$\frac{\sigma_{33}}{\sigma_0} = \Delta^{-1} \times (m_{e11}m_{e22} - m_{e12}m_{e21} + b_3^2), \quad (2.4.17)$$

где

$$\Delta = m_{e11}m_{e22}m_{e33} - m_{e11}m_{e23}m_{e32} + 2m_{e12}m_{e13}m_{e23} - m_{e11}m_{e23}^2 - m_{e33}m_{e12}m_{e21} - m_{e22}m_{e13}m_{e31} + \vec{b} \cdot \hat{m}_e \cdot \vec{b}, \quad (2.4.18)$$

а \hat{m}_e – тензор эффективных масс для любой выбранной ориентации вектора индукции магнитного поля относительно кристаллографических осей кристалла.

Таким же образом мы можем получить явный вид тензора проводимости для Г – дырок, используя тензор эффективных масс (2.2.5) и выражение (2.4.6):

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\Sigma}_h}{\sigma_0} &= (\hat{M}_h - \vec{b} \times I)^{-1} = \Delta_h^{-1} \times \begin{bmatrix} \Sigma_{h11} & \Sigma_{h12} & \Sigma_{h13} \\ \Sigma_{h21} & \Sigma_{h22} & \Sigma_{h23} \\ \Sigma_{h31} & \Sigma_{h32} & \Sigma_{h33} \end{bmatrix} = \\ &= \Delta_h^{-1} \times \begin{bmatrix} M_{11}M_{33} + b_1^2 & -M_{33}b_3 + b_1b_2 & M_{11}b_2 + b_1b_3 \\ M_{33}b_3 + b_1b_2 & M_{11}M_{33} + b_2^2 & -M_{11}b_1 - b_2b_3 \\ -M_{11}b_2 + b_1b_3 & M_{11}b_1 + b_2b_3 & M_{11}^2 + b_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

где

$$\Delta_h = M_{11}^2M_{33} + (b_2^2 + b_1^2) \cdot M_{11} + b_3^2M_{33} \quad (2.4.20)$$

Теперь мы можем получить явный вид полного тензора высокочастотной проводимости для висмута для любой наперед выбранной ориентации вектора магнитной индукции относительно кристаллографических осей кристалла висмута, который включает в себя отклик трёх электронных эллипсоидов и одного дырочного:

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{3}(\hat{\sigma}_a + \hat{\sigma}_b + \hat{\sigma}_c) + \hat{\Sigma}_h \quad (2.4.21)$$

Абсолютное большинство экспериментов проводится в ориентации, когда кристалл приготавливается таким образом, чтобы была полная уверенность в том, какие плоскости являются «рабочими». Наименьшими экспериментальными погрешностями в определении углов являются конфигурации, например, для висмута, связанные с базисной, т.е. перпендикулярной тригональной оси плоскостью. Таким образом, наиболее важными с точки зрения экспериментальных возможностей являются ориентации, когда вектор магнитного поля направлен вдоль бинарной, биссекторной или тригональной оси.

Рассмотрим случай, когда внешнее магнитное поле направлено вдоль тригональной оси кристаллической решётки висмута. В этом случае в соответствие со структурой электронных экстремумов все три эллипсоида дают эквивалентный вклад в тензор электропроводности. Вектор \vec{b} имеет только одну компоненту, т.е. $b_3 = b$. Повторяя вышеприведённую процедуру получаем:

$$\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{2\Delta} [(m_1 + m_2)m_3 - m_4^2] + \frac{M_{11}}{M_{11}^2 + b^2}, \quad (2.4.22)$$

$$\Sigma_{12} = -\Sigma_{21} = \sigma_0 \left[\frac{bm_3}{\Delta} - \frac{b}{M_{11}^2 + b^2} \right], \quad (2.4.23)$$

$$\Sigma_{33} = \sigma_0 \left[\frac{1}{\Delta} (m_1 m_2 + b^2) + \frac{1}{M_{33}} \right], \quad (2.4.24)$$

$$\Sigma_{13} = \Sigma_{31} = 0, \quad \Sigma_{23} = \Sigma_{32} = 0, \quad (2.4.25)$$

$$\Delta_a = \Delta_b = \Delta_c = \Delta = m_1(m_2 m_3 - m_4^2) + m_3 b^2. \quad (2.4.26)$$

Для случая, когда внешнее магнитное поле направлено вдоль бинарной оси кристаллической решётки висмута вектор \vec{b} имеет также только одну неравную нулю компоненту $b_1 = b$, подставляя которую в вышеприведённые формулы, получаем:

$$\Sigma_{11} = \sigma_0 \left[\frac{1}{3m_1} + \frac{2}{3\Delta_c} \left(\frac{(3m_1 + m_2)m_3 - m_4^2}{4} + b^2 \right) + \frac{1}{M_{11}} \right], \quad (2.4.26)$$

$$\Sigma_{22} = \sigma_0 \left[\frac{m_1 m_3}{3\Delta_a} + \left(\frac{2}{3\Delta_c} \right) \left[\frac{(m_1 + 3m_2)m_3 - 3m_4^2}{4} \right] + \frac{M_{33}}{M_{11}M_{33} + b^2} \right], \quad (2.4.27)$$

$$\Sigma_{33} = \sigma_0 \left[\frac{m_1 m_2}{3\Delta_a} + \left(\frac{2m_1 m_2}{3\Delta_c} \right) + \left(\frac{M_{11}}{M_{11}M_{33} + b^2} \right) \right], \quad (2.4.28)$$

$$\Sigma_{23} = \sigma_0 \left[\frac{m_1(b - m_4)}{3\Delta_a} + \left(\frac{2}{3\Delta_a} \right) \left[\frac{(m_1 + 3m_2)}{4} b + \frac{m_1 m_4}{2} \right] - \frac{b}{M_{11}M_{33} + b^2} \right] \quad (2.4.29)$$

$$\Sigma_{32} = \sigma_0 \left[-\frac{m_1(b + m_4)}{3\Delta_a} + \left(\frac{2}{3\Delta_a} \right) \left[\frac{(m_1 m_4)}{2} - \frac{m_1 + 3m_2}{4} b \right] + \frac{b}{M_{11}M_{33} + b^2} \right], \quad (2.4.30)$$

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = 0, \quad \Sigma_{13} = \Sigma_{31} = 0 \quad (2.4.31)$$

$$\Delta_a = m_1(m_2 m_3 - m_4^2 + b^2) \quad (2.4.32)$$

$$\Delta_b = \Delta_c = m_1 m_2 m_3 - m_1 m_4^2 + \frac{1}{4} b^2 (m_1 + 3m_2) \quad (2.4.33)$$

Для случая, когда внешнее магнитное поле направлено вдоль биссекторной оси кристаллической решётки висмута вектор \vec{b} имеет также только одну неравную нулю компоненту $b_2 = b$, подставляя которую в вышеприведённые формулы, получаем:

$$\Sigma_{11} = \sigma_0 \left[\frac{1}{3\Delta_a} (m_2 m_3 - m_4^2) + \left(\frac{2}{3\Delta_c} \right) \left[\frac{(3m_1 + m_2)m_3 - m_4^2}{4} \right] + \frac{M_{33}}{M_{11}M_{33} + b^2} \right], \quad (2.4.34)$$

$$\Sigma_{22} = \sigma_0 \left[\frac{1}{3\Delta_a} (m_1 m_3 + b^2) + \left(\frac{2}{3\Delta_c} \right) \left[\frac{(m_1 + 3m_2)m_3 - 3m_4^2}{4} + b^2 \right] + \frac{1}{M_{11}} \right], \quad (2.4.35)$$

$$\Sigma_{33} = \sigma_0 \left[\frac{m_{11} m_{22}}{3\Delta_c} + \frac{2m_{11} m_{22}}{3\Delta_c} + \left(\frac{M_{11}}{M_{11}M_{33} + b^2} \right) \right], \quad (2.4.36)$$

$$\Sigma_{13} = -\Sigma_{31} = \sigma_0 \left[-\frac{b m_2}{3\Delta_a} + \frac{2b}{3\Delta_c} \cdot \left(\frac{3m_1 + m_2}{4} \right) + \left(\frac{b}{M_{11}M_{33} + b^2} \right) \right], \quad (2.4.37)$$

$$\Sigma_{12} = -\Sigma_{21} = \sigma_0 b m_4 \left[\frac{1}{3\Delta_a} - \frac{1}{3\Delta_c} \right], \quad (2.4.38)$$

$$\Sigma_{23} = \Sigma_{32} = \sigma_0 m_1 m_4 \left[\frac{1}{3\Delta_c} - \frac{1}{3\Delta_a} \right], \quad (2.4.39)$$

$$\Delta_a = m_1 m_2 m_3 - m_1 m_4^2 + m_2 b^2, \quad (2.4.40)$$

$$\Delta_b = \Delta_c = m_1 m_2 m_3 - m_1 m_4^2 + \frac{1}{4} b^2 (m_1 + 3m_2). \quad (2.4.41)$$

Вопросы к главе 2

1. Чем полуметалл отличается от полупроводника?
2. Напишите программу, реализующую поворот тензора на произвольный угол относительно: а) оси 3, б) оси 1, в) оси 2, а) оси 3 и 1, а) оси 3 и 2, а) осей 3, 2, 1.
3. Что такое соотношения Крамерса-Кронига? Как их можно использовать для восстановления оптического спектра?
4. Сформулируйте принцип симметрии кинетических коэффициентов Онсагера.

ГЛАВА 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАНАРНОМ ВОЛНОВОДЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 3.1. Волновой процесс в планарном волноводе

Рассмотрим планарный волновод из висмута, помещённый в магнитное поле (рис. 3.1.1). Оси координат направим следующим образом: ось Y – параллельно направлению распространения волны, ось Z – перпендикулярно стенкам планарного волновода (рис. 3.1.1). Поместим планарный волновод во внешнее магнитное поле, направленное вдоль оси Y .

Так как висмут – анизотропный материал, то мы рассматриваем наиболее общий случай. Общий случай требует рассмотрения вещества с тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$, все девять компонент, которого отличны от нуля [30] (3.18).

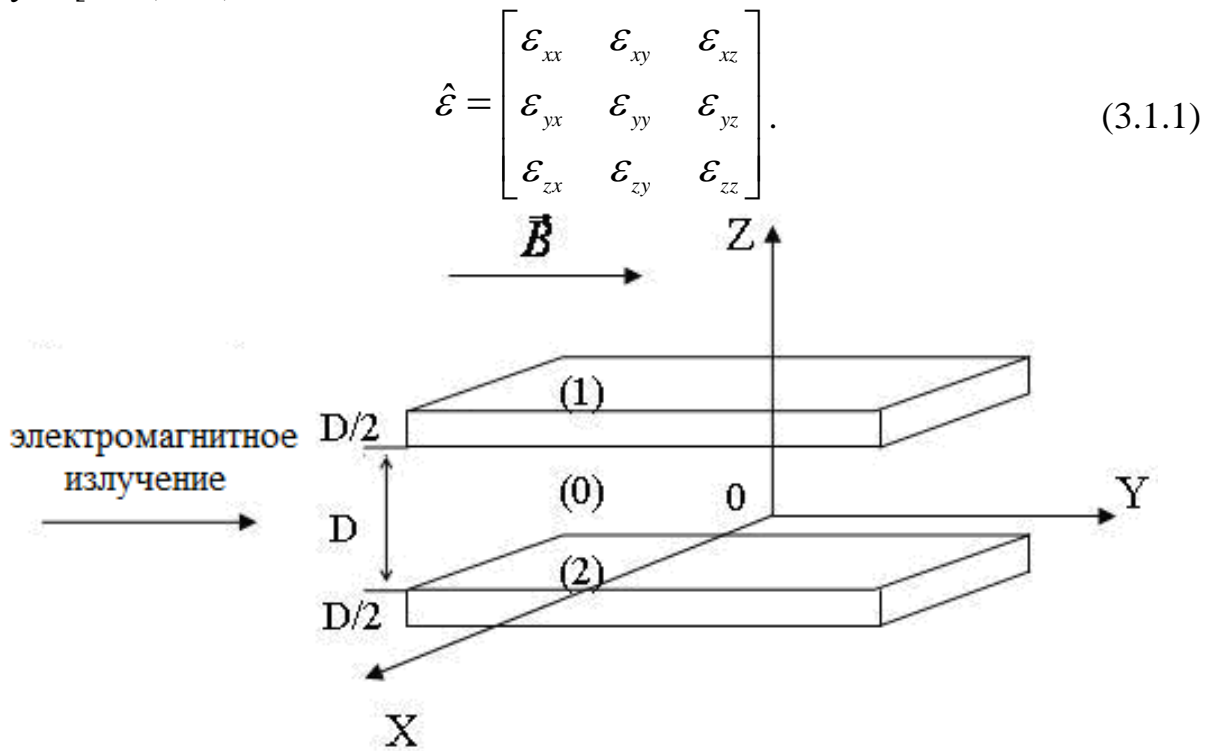


Рис. 3.1.1. Взаимное расположение вектора индукции магнитного поля, волнового вектора электромагнитного излучения и исследуемого монокристалла относительно выбранной системы координат D – расстояние между стенками планарного волновода; $Z = +D/2$ – координата поверхности верхнего образца; $Z = -D/2$ – координата поверхности нижнего образца.

Исследование волновых процессов в замагниченной плазме анизотропного кристалла возможно моделированием экспериментальных данных, которыми, как правило, является зависимость интенсивности излучения, провзаимодействовавшего с образцом, от какого-нибудь параметра: частоты, величины электрического или магнитного поля, направления и т.д. Мы имеем в рас-

порядке информации о зависимости интенсивности электромагнитного излучения, прошедшего через планарный волновод, от величины магнитного поля, в котором находится вся рассматриваемая система. В эксперименте использовалось излучение CN лазера с длиной волны $\lambda=337$ мкм. Поэтому все оценки будут привязаны к излучению данной длины волны. Следуя эксперименту, мы должны получить выражение для коэффициента пропускания планарного волновода в зависимости от величины магнитного поля. Что мы сейчас и сделаем.

Уравнения Максвелла (1.1.1)- (1.1.4) в системе СИ имеют вид:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (3.1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho. \quad (3.1.5)$$

К уравнениям Максвелла добавляются материальные соотношения (1.1.5) – (1.1.6):

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \epsilon_0 \vec{E}, \quad (3.1.6)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (3.1.7)$$

где $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ – зависящие от времени векторы напряжённости и индукции электрического и магнитного полей, $\vec{\nabla}$ – оператор градиента.

В планарном волноводе внешних зарядов и токов нет, поэтому в системе уравнений (3.1.2) – (3.1.5) $\rho=0$, а индуцированные токи учитываем стандартным образом введением комплексного тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$. Далее, используя материальные соотношения (3.1.6) и (3.1.7), получаем векторное волновое уравнение для волн, распространяющихся в планарном волноводе:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \mu_0 \hat{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.1.8)$$

Учитывая в (3.1.8), что $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, $\mu \approx 1$ для висмута, $\mu=1$ для вакуума, приходим к векторному волновому уравнению:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1.9)$$

где c – скорость света в вакууме.

Действуя, как предложено в работах [31, 32], будем искать решение данного уравнения для среды (1) в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}^{(1)} \exp(-az) \exp(i(\omega t - q_y y)), \quad (3.1.10)$$

где \vec{E} – напряжённость электрического поля электромагнитной волны, ω – круговая частота электромагнитной волны, α – поперечное волновое число, q_y – продольное волновое число (рис. 3.1.2), индекс ⁽¹⁾ означает, что комплексная амплитуда относится к среде (1) (рис. 3.1.1).

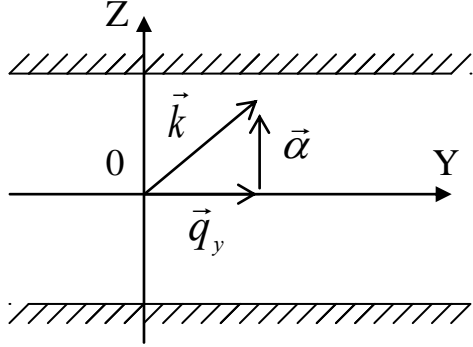


Рис. 3.1.2. \vec{k} – волновой вектор; α – поперечное волновое число; q_y – продольное волновое число.

Такой вид решения определяется электрическим полем волны, распространяющейся вдоль оси Y и экспоненциально затухающей вглубь среды (1) вдоль оси Z (рис. 3.1.1) [33].

Введём обозначение

$$\eta = \exp(i(\omega t - q_y y)) , \quad (3.1.11)$$

Подставляя решение (3.1.10) в уравнение (3.1.9), учитывая что

$$\frac{\partial^2 \vec{E}^{(1)}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}^{(1)} , \quad (3.1.12)$$

приходим к следующему виду волнового уравнения:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}^{(1)} - k_0^2 \hat{\varepsilon} \vec{E}^{(1)} = 0 , \quad (3.1.13)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ – волновое число.

Уравнение (13) в координатной форме представляет собой систему трёх однородных линейных уравнений относительно компонент вектора напряжённости электрического поля $E_x^{(1)}, E_y^{(1)}, E_z^{(1)}$:

$$\begin{cases} (k_o^2 \cdot \varepsilon_{xx} - q_y^2 + \alpha^2) \cdot E_x^{(1)} + k_o^2 \cdot \varepsilon_{xy} \cdot E_y^{(1)} + k_o^2 \cdot \varepsilon_{xz} \cdot E_z^{(1)} = 0 \\ k_o^2 \cdot \varepsilon_{yx} \cdot E_x^{(1)} + (k_o^2 \cdot \varepsilon_{yy} + \alpha^2) \cdot E_y^{(1)} + (k_o^2 \cdot \varepsilon_{yz} - i \cdot q_y \cdot \alpha) \cdot E_z^{(1)} = 0 \\ k_o^2 \cdot \varepsilon_{zx} \cdot E_x^{(1)} + (k_o^2 \cdot \varepsilon_{zy} - i \cdot q_y \cdot \alpha) \cdot E_y^{(1)} + (k_o^2 \cdot \varepsilon_{zz} - q_y^2) \cdot E_z^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Известно, что для того, чтобы однородная линейная система уравнений имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы детерминант ее коэффициентов равнялся нулю. Это требование дает дисперсионное уравнение волны, распространяющейся вдоль поверхности образца, которое аналогично уравнению, полученному в [32]:

$$\varepsilon_{zz} \cdot \alpha^4 + a(q, \omega) \cdot \alpha^3 + b(q, \omega) \cdot \alpha^2 + c(q, \omega) \cdot \alpha + d(q, \omega) = 0, \quad (3.1.15)$$

где $a(q, \omega) = i \cdot q_y \cdot (\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy})$,

$$b(q, \omega) = k_o^2 \cdot ((\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \cdot \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zx} \cdot \varepsilon_{xz} - \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{zy}) - q_y^2 \cdot (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}),$$

$$c(q, \omega) = i \cdot q_y^3 \cdot (\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy}) + i \cdot k_o^2 \cdot q_y \cdot (\varepsilon_{xx} \cdot (\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy}) - \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{zx} - \varepsilon_{xz} \cdot \varepsilon_{yx})$$

$$d(q, \omega) = q_y^4 \cdot \varepsilon_{yy} + k_o^2 \cdot q_y^2 \cdot (\varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{zy} - \varepsilon_{yy} \cdot (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})) +$$

$$+ k_o^4 \cdot \left[\begin{array}{l} \varepsilon_{yx} (\varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{zy}) + \varepsilon_{xy} \cdot (\varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{zx} - \varepsilon_{yx} \cdot \varepsilon_{zz}) + \\ + \varepsilon_{xz} \cdot (\varepsilon_{yx} \cdot \varepsilon_{zy} - \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{zx}) \end{array} \right]$$

Данное уравнение четвертой степени имеет в общем случае четыре корня. Так как распространяющаяся вдоль поверхности твердого тела электромагнитная волна, проникая вглубь материала, затухает в нем в направлении оси OZ, то коэффициент поглощения α для такой волны должен иметь положительную действительную часть. Только два корня α_1 и α_2 из четырех корней данного уравнения будут удовлетворять этому условию [25], два других корня будут иметь отрицательные реальные части, и, следовательно, не будут удовлетворять условию затухания электрического поля волны вдоль оси OZ. Таким образом, линейную систему уравнений нужно решить два раза: для $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$. Пусть \vec{E}_1 и \vec{E}_2 – решения, соответственно, для α_1 и α_2 . Следовательно, волна, распространяющаяся вдоль поверхности твердого тела (1), будет представлять собой суперпозицию двух волн [34]:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = & (\vec{E}_1^{(1)} \cdot \exp(-\alpha_1 \cdot z) + \vec{E}_2^{(1)} \cdot \exp(-\alpha_2 \cdot z)) \times \\ & \times \exp(i \cdot (\omega \cdot t - q_y \cdot y)), \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

где $z \geq \frac{D}{2}$, D – расстояние между стенками планарного волновода.

Таким образом, в среде (1) поле экспоненциально убывает от границы раздела: говорят, что рассматриваемый процесс имеет характер поверхностной волны [1].

Рассмотрим первые два уравнения системы (3.1.14). Введём в этих уравнениях обозначения:

$$S_n = k_o^2 \varepsilon_{xx} - q_y^2 + \alpha_n^2, \quad (3.1.17)$$

$$T_n = k_o^2 \varepsilon_{yy} + \alpha_n^2, \quad (3.1.18)$$

здесь и далее $n = 1, 2$.

Умножим первое уравнение системы (3.1.14) на $k_o^2 \varepsilon_{yx}$, а второе на S_n , и затем, вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$-(S_n T_n - k_o^4 \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yx}) E_{ny}^{(1)} - (S_n (k_o^2 \varepsilon_{yz} - i \alpha_n q_y) - k_o^4 \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yx}) E_{nz}^{(1)} = 0. \quad (3.1.19)$$

В (3.1.19) введём обозначения:

$$A_n = S_n T_n - k_0^4 \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yx}, \quad (3.1.20)$$

$$B_n = (k_0^2 \varepsilon_{yz} - i \alpha_n q_y) S_n - k_0^4 \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yx}. \quad (3.1.21)$$

С учётом (3.1.20) и (3.1.21), выражение (3.1.19) приобретает вид:

$$-A_n E_{ny}^{(1)} = B_n E_{nz}^{(1)}, \quad (3.1.22)$$

или

$$-\frac{E_{ny}^{(1)}}{B_n} = \frac{E_{nz}^{(1)}}{A_n} = K_n^{(1)}, \quad (3.1.23)$$

где $K_n^{(1)}$ величины, определяемые из граничных условий.

Из (3.1.23) видно, что

$$E_{ny}^{(1)} = -B_n K_n^{(1)}, \quad (3.1.24)$$

$$E_{nz}^{(1)} = A_n K_n^{(1)}. \quad (3.1.25)$$

Если (3.1.24) и (3.1.25) подставить в (3.1.22), то получим тождество

$$A_n B_n K_n^{(1)} \equiv A_n B_n K_n^{(1)}.$$

Далее, подставляя в первое уравнение системы (3.1.14) соотношения (3.1.24)

и (3.1.25), а, также учитывая (3.1.17) получаем

$$S_n E_{nx}^{(1)} = k_0^2 K_n^{(1)} (\varepsilon_{xy} B_n - \varepsilon_{xz} A_n). \quad (3.1.26)$$

В последнее выражение подставляем (3.1.20) и (3.1.21) соответственно и в результате приходим к соотношению:

$$E_{nx}^{(1)} = k_0^2 K_n^{(1)} (\varepsilon_{xy} (k_0^2 \varepsilon_{yz} - i \alpha_n q_y) - \varepsilon_{xz} T_n). \quad (3.1.27)$$

Вводя в (3.1.27) обозначение

$$C_n = k_0^2 (\varepsilon_{xy} (k_0^2 \varepsilon_{yz} - i \alpha_n q_y) - \varepsilon_{xz} T_n), \quad (3.1.28)$$

получим

$$E_{nx}^{(1)} = C_n K_n^{(1)}. \quad (3.1.29)$$

Так как трансляционно-симметричные половинки монокристалла изготовлены из одного и того же материала, то все вышеприведенные рассуждения справедливы и для среды (2) (рис.3.1.1). Чтобы получить выражение для \vec{E} для среды (2), аналогичное вышеприведенному выражению (3.1.16), необходимо заменить верхний индекс (1) на (2) и сменить знак перед α_n на противоположный. Тогда уравнение волны, распространяющейся вдоль поверхности среды (2) будет иметь вид [34]:

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (\vec{E}_1^{(2)} \exp(\alpha_1 z) + \vec{E}_2^{(2)} \exp(\alpha_2 z)) \exp(i(\omega t - q_y y)). \quad (3.1.30)$$

Решение волнового уравнения для вакуума (0) (рис.3.1.1) будем искать в виде:

$$\vec{E}^{(0)} = \vec{E}^{(0)} \exp(-\alpha_0 z) \exp(i(\omega t - q_y y)). \quad (3.1.31)$$

Подставив это предполагаемое решение в волновое уравнение (3.1.13), получим систему из трех однородных линейных уравнений относительно $E_x^{(o)}, E_y^{(o)}, E_z^{(o)}$:

$$\begin{cases} (k_o^2 - q_y^2 + \alpha_o^2) \cdot E_x^{(o)} = 0 \\ (k_o^2 + \alpha_o^2) \cdot E_y^{(o)} - i \cdot q_y \cdot \alpha_o \cdot E_z^{(o)} = 0 \\ -i \cdot q_y \cdot \alpha_o \cdot E_y^{(o)} + (k_o^2 - q_y^2) \cdot E_z^{(o)} = 0 \end{cases} . \quad (3.1.32)$$

Для того чтобы данная система уравнений имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы детерминант её коэффициентов был равен нулю.

$$\Delta_{(3.1.32)} = \begin{vmatrix} k_o^2 - q_y^2 + \alpha_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_o^2 + \alpha_o^2 & -i q_y \alpha_o \\ 0 & -i q_y \alpha_o & k_o^2 - q_y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель $\Delta_{(3.1.32)}$, получаем

$$k_o^2 (k_o^2 - q_y^2 + \alpha_o^2) = 0,$$

откуда, ввиду того, что $k_o^2 \neq 0$, имеем

$$k_o^2 - q_y^2 + \alpha_o^2 = 0,$$

или

$$\alpha_o^2 = q_y^2 - k_o^2, \quad (3.1.33)$$

из последнего условия получаем:

$$\alpha_o = \pm \sqrt{q_y^2 - k_o^2}. \quad (3.1.34)$$

Таким образом, систему можно решить дважды, и, соответственно, волна, распространяющаяся в вакууме (0) между стенками планарного волновода, представляет собой суперпозицию двух волн [34]:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(o)} = & (\vec{E}_+^{(o)} \cdot \exp(\alpha_{o1} \cdot z) + \vec{E}_-^{(o)} \cdot \exp(-\alpha_{o2} \cdot z)) \times \\ & \times \exp(i \cdot (\omega \cdot t - q_y \cdot y)), \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

где $-\frac{D}{2} < z < \frac{D}{2}$.

Поясним вид решения для вакуума (3.1.35). Известно, что общее выражение для волны, представляющей собой суперпозицию двух монохроматических волн, распространяющихся в положительном направлении оси OY с растущей и убывающей амплитудой по направлению оси OZ, имеет вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (\vec{E}_1 \exp(-\alpha_{o1} z) + \vec{E}_2 \exp(-\alpha_{o2} z)) \exp(i(\omega t - q_y y)). \quad (3.1.36)$$

Применительно к нашему случаю

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_+^{(o)} \quad \text{и} \quad \alpha_{o1} = \alpha_o < 0, \quad (3.1.37)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_-^{(o)} \quad \text{и} \quad \alpha_{o2} = \alpha_o > 0, \quad (3.1.38)$$

С учётом (3.1.37), (3.1.38) выражение (3.1.36) принимает вид (3.1.35).

Смысл знаков «+» и «-» в (3.1.37) и (3.1.38) становится ясным из рис. 3.1.3.

Таким образом, между стенками планарного волновода распространяется плоская неоднородная волна в направлении оси OY. В плоскости фронта волны $y = \text{const}$ распределение поля имеет вид стоячей волны [1].

Рассмотрим третье уравнение системы (3.1.32)

$$-iq_y \alpha_0 E_y^{(0)} + (k_0^2 - q_y^2) E_z^{(0)} = 0. \quad (3.1.32-3)$$

Из (3.1.34) следует

$$k_0^2 - q_y^2 = -\alpha_0^2. \quad (3.1.39)$$

Подставляя (3.1.39) в (3.1.32-3), получаем:

$$-iq_y \alpha_0 E_y^{(0)} = \alpha_0^2 E_z^{(0)},$$

откуда

$$E_z^{(0)} = -\frac{iq_y}{\alpha_0} E_y^{(0)}. \quad (3.1.40)$$

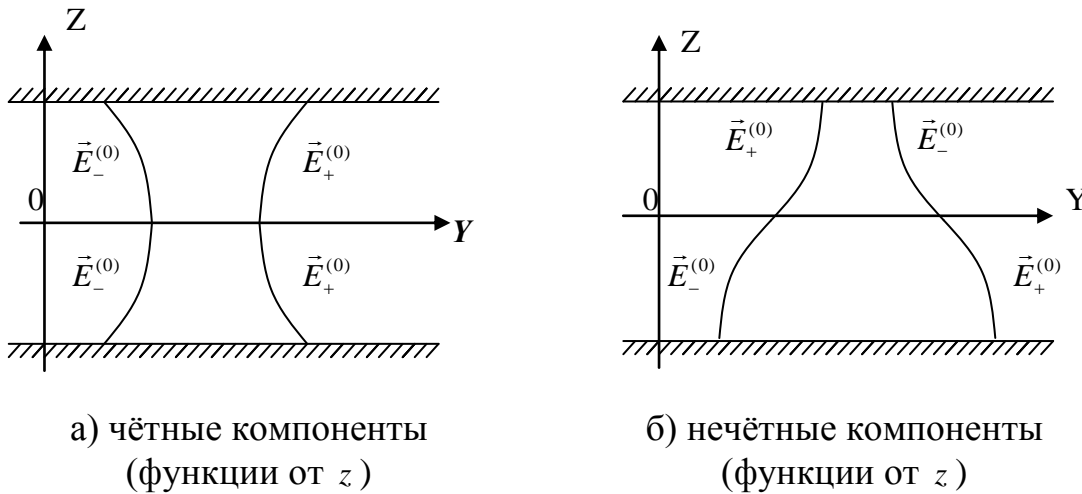


Рис. 3.1.3. Распределение продольной компоненты вектора напряжённости электрического поля E_y , как функции от z в плоскости фронта направляемой волны.

Проведём анализ формулы (3.1.40). Из (3.1.34) следует, что α_0 может быть как положительным, так и отрицательным. Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha_0 < 0$. В этом случае у нас увеличивается амплитуда волны и тогда, как следует из (3.1.37):

$$E_z^{(0)} = E_{+z}^{(0)} \quad \text{и} \quad E_y^{(0)} = E_{+y}^{(0)}. \quad (3.1.41)$$

Учитывая (3.1.41) и учитывая, что $\alpha_0 < 0$ из (3.1.40) получаем

$$E_{+z}^{(0)} = \frac{iq_y}{\alpha_0} E_{+y}^{(0)}. \quad (3.1.42)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha_0 > 0$. Амплитуда волны уменьшается и, как следует, из (3.1.38),

$$E_z^{(0)} = E_{-z}^{(0)} \text{ и } E_y^{(0)} = E_{-y}^{(0)}. \quad (3.1.43)$$

Учитывая (3.1.43) и то, что $\alpha_0 > 0$ из (3.1.40) получаем

$$E_{-z}^{(0)} = -\frac{iq_y}{\alpha_0} E_{-y}^{(0)}. \quad (3.1.44)$$

Объединяя формулы (3.1.42) и (3.1.43) в одну, получим

$$E_{\pm z}^{(0)} = \pm \frac{iq_y}{\alpha_0} E_{\pm y}^{(0)}. \quad (3.1.45)$$

В (3.1.45) введём обозначение

$$S = \frac{iq_y}{\alpha_0}, \quad (3.1.46)$$

и (3.1.45) приобретает вид

$$E_{\pm z}^{(0)} = \pm S E_{\pm y}^{(0)}, \quad (3.1.47)$$

где «+» означает, что амплитуда данной волны увеличивается; «-» означает, что амплитуда данной волны уменьшается.

Восемь независимых компонент амплитуд электрических полей на границе вакуум – твёрдое тело при $z = +\frac{D}{2}$ и $z = -\frac{D}{2}$ связаны восемью граничными условиями, которые получаются из условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} [1]. С помощью уравнений Максвелла эти условия можно свести к системе уравнений, которую необходимо записать для каждой границы раздела ($z = \pm \frac{D}{2}$). Получим эту систему.

Из уравнений Максвелла можно получить граничные условия для тангенциальных компонент вектора напряжённости электрического поля \vec{E} на границе двух сред (n) и (0) (n=1,2) [2]

$$E_{\tau}^{(n)} = E_{\tau}^{(0)}. \quad (3.1.48)$$

В случае нашего эксперимента тангенциальными компонентами в общем случае являются компоненты по x и по y , т. е.

$$E_x^{(n)} = E_x^{(0)}, \quad (3.1.49)$$

$$E_y^{(n)} = E_y^{(0)}. \quad (3.1.50)$$

Так как в нашем эксперименте на границе раздела сред (0) и (n) отсутствует внешний поверхностный ток, то для вектора напряжённости магнитного поля \vec{H} , из уравнений Максвелла также можно получить граничные условия:

$$H_{\tau}^{(n)} = H_{\tau}^{(0)}, \quad (3.1.51)$$

и по аналогии с (3.1.49) и (3.1.50):

$$H_x^{(n)} = H_x^{(0)}, \quad (3.1.52)$$

$$H_y^{(n)} = H_y^{(0)}. \quad (3.1.53)$$

Вернёмся к уравнению (3.1.2), а также к материальным соотношениям (3.1.6) и (3.17). Подставим (3.1.7) в (3.1.2). В результате получим:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.1.54)$$

Выражения для \vec{E} и \vec{H} имеют стандартный вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - q_y t)), \quad (3.1.55)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp(i(\omega t - q_y y)), \quad (3.1.56)$$

где \vec{E} и \vec{H} комплексные амплитуды.

Подставляем (3.1.55) и (3.1.56) в (3.1.54) и учитывая, что

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega \vec{H},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right),$$

$$-\mu_0 i\omega \vec{H} = -\mu_0 i\omega H_x \vec{i} - \mu_0 i\omega H_y \vec{j} - \mu_0 i\omega H_z \vec{k}.$$

Приравняем составляющие по y (коэффициенты при \vec{j} из правой и левой частей (3.1.54) для среды (n) и вакуума (0)):

$$-\left(\frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(n)}}{\partial z} \right) = -\mu_0 i\omega H_y^{(n)},$$

$$-\left(\frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial z} \right) = -\mu_0 i\omega H_y^{(0)}.$$

Учитывая (3.1.53), из последних двух равенств получаем:

$$\frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(n)}}{\partial z} = \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial z}.$$

В направлении оси X свойства среды, в которой распространяются электромагнитные волны, не меняются, поэтому E_z от x не зависит, следовательно,

$$\frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial x} = \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial x} = 0 \text{ и предыдущее равенство приобретает вид}$$

$$\frac{\partial E_x^{(n)}}{\partial z} = \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial z}. \quad (3.1.57)$$

Приравняем составляющие по x (коэффициенты при \vec{i} из правой и левой частей (3.1.54) для среды (n) и вакуума (0)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(n)}}{\partial z} &= -\mu_0 i \omega \omega_x^{(n)}, \\ \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial z} &= -\mu_0 i \omega H_x^{(0)}. \end{aligned}$$

Учитывая (3.1.52), из последних двух равенств получаем

$$\frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(n)}}{\partial z} = \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial z}. \quad (3.1.58)$$

Группируя уравнения (3.1.49), (3.1.50), (3.1.57) и (3.1.58), получаем систему уравнений, выражающую граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов напряжённости электрического поля \vec{E} и магнитного поля \vec{H} на границе сред (0) и (n):

$$\begin{cases} E_x^{(n)} = E_x^{(0)}, \\ E_y^{(n)} = E_y^{(0)}, \\ \frac{\partial E_x^{(n)}}{\partial z} = \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial z}, \\ \frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(n)}}{\partial z} = \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial z}, \end{cases} \quad (3.1.59)$$

где $n = 1, 2$.

Так как планарный волновод находится в магнитном поле, направленном вдоль оси Y, то сам планарный волновод и электрическое поле волны, распространяющейся в нём, будет иметь симметрию вращения вокруг оси

второго порядка, направленную вдоль оси Y . Иными словами, при повороте планарного волновода на 180° вокруг вышеназванной оси, все уравнения, записанные для планарного волновода, должны оставаться неизменными. Следовательно, граничные условия на двух границах вакуум – твердое тело при $z = +\frac{D}{2}$ и $z = -\frac{D}{2}$ оказываются идентичными. Поэтому, для вывода дисперсионного уравнения волны, распространяющейся в планарном волноводе, достаточно рассмотреть граничные условия, например, при $z = +\frac{D}{2}$. Поэтому далее будем везде рассматривать среды (1) и (0) (рис. 3.1.1), т. е. будем считать, что $n=1$.

В планарном волноводе, электромагнитное поле, представляет собой так называемые E – и H – волны (TE – и TH – моды) [7]. Это значит, что в нашей системе координат (рис.3.1.1) у E –волны (TH –моды) существует продольная составляющая E_y , а у H –волны (TE –моды) существует продольная составляющая H_y . Продольные составляющие являются причиной того, что вектор потока энергии Умова-Пойтинга \vec{S} для E и H волн в силу правила правого винта имеет составляющую вдоль оси Z . Следовательно, часть потока энергии электромагнитной волны разворачивается на 90° и уходит в нижнюю или верхнюю стенку планарного волновода.

Таким образом, ось вращения второго порядка, направленная по оси OY , позволяет классифицировать компоненты амплитуд электрического поля волны, распространяющейся в планарном волноводе, на четные и нечетные функции от z [35]:

1) волна со следующей симметрией

$$E_y - \text{нечётная } (E_x, E_z - \text{четные}) \text{ функции от } z.$$

2) волна с

$$E_y - \text{чётная } (E_x, E_z - \text{нечетные}) \text{ функции от } z.$$

Условия четности (нечетности) компонент электрического поля волны, распространяющейся в планарном волноводе, позволяет связать компоненты амплитуд $E_+^{(0)}$ и $E_-^{(0)}$, входящих в выражение для $\vec{E}^{(0)}$ (3.1.35), следующим образом:

$$E_{+i}^{(0)} = \pm E_{-i}^{(0)}, \quad (i = x, y, z) \quad (3.1.60)$$

где знак «+» соответствует четной функции от z (рис 3.1.3а); знак «-» соответствует нечетной функции от z (рис. 3.1.3б); индексы $+i$, $-i$ соответствуют верхнему и нижнему полупространству относительно плоскости $z=0$ для соответствующих компонент вектора напряжённости электрического поля.

Займёмся выводом дисперсионного уравнения для случая

1) E_y – чётная (E_x, E_z – нечетные) функции от z .

Для этого, учитывая (3.1.60), подставим в систему (3.1.59) выражения (3.1.16) и (3.1.35), спроецированные на оси Y или X для границы раздела $z = +\frac{D}{2}$.

Для первого уравнения системы (3.1.59) имеем

$$E_x^{(1)} = E_x^{(0)}, \quad (3.1.61)$$

$$\vec{E}_x^{(1)} = (\vec{E}_{1x}^{(1)} \exp(-\alpha_1 z) + \vec{E}_{2x}^{(1)} \exp(-\alpha_2 z)) \eta, \quad (3.1.62)$$

$$\vec{E}_x^{(0)} = (\vec{E}_{+x}^{(0)} \exp(\alpha_0 z) + \vec{E}_{-x}^{(0)} \exp(-\alpha_0 z)) \eta. \quad (3.1.63)$$

Подставляя (3.1.62), (3.1.63) в (3.1.61) и учитывая, что

$$E_{+x}^{(0)} = -E_{-x}^{(0)},$$

получаем

$$E_{1x}^{(1)} \exp\left(-\frac{\alpha_1 D}{2}\right) + E_{2x}^{(1)} \exp\left(-\frac{\alpha_2 D}{2}\right) = E_{+x}^{(0)} \left[\exp\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_0 D}{2}\right) \right]. \quad (3.1.64)$$

Вводя в (3.1.64) обозначения:

$$\exp\left(-\frac{\alpha_1 D}{2}\right) = a, \quad (3.1.65)$$

$$\exp\left(-\frac{\alpha_2 D}{2}\right) = b, \quad (3.1.66)$$

$$\exp\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_0 D}{2}\right) = f, \quad (3.1.67)$$

приходим к уравнению

$$aE_{1x}^{(1)} + bE_{2x}^{(1)} - fE_{+x}^{(0)} = 0. \quad (3.1.68)$$

Для второго уравнения системы (3.1.59) имеем

$$E_y^{(1)} = E_y^{(0)}, \quad (3.1.69)$$

$$\vec{E}_y^{(1)} = (\vec{E}_{1y}^{(1)} \exp(-\alpha_1 z) + \vec{E}_{2y}^{(1)} \exp(-\alpha_2 z)) \eta, \quad (3.1.70)$$

$$\vec{E}_y^{(0)} = (\vec{E}_{+y}^{(0)} \exp(\alpha_0 z) + \vec{E}_{-y}^{(0)} \exp(-\alpha_0 z)) \eta. \quad (3.1.71)$$

Поступая так же, как и ранее, т.е. подставляем (3.1.70), (3.1.71) в (3.1.69) и учитываем, что

$$E_{-y}^{(0)} = E_{+y}^{(0)},$$

получаем

$$E_{1y}^{(1)} \exp\left(-\frac{\alpha_1 D}{2}\right) + E_{2y}^{(1)} \exp\left(-\frac{\alpha_2 D}{2}\right) = E_{+y}^{(0)} \left[\exp\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_0 D}{2}\right) \right]. \quad (3.1.72)$$

Вводим в (3.1.72) обозначение:

$$\exp\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\alpha_0 D}{2}\right) = l, \quad (3.1.73)$$

а также учитываем обозначения (3.1.66) и (3.1.67), в результате чего приходим к уравнению

$$aE_{1y}^{(1)} + bE_{2y}^{(1)} - lE_{+y}^{(0)} = 0. \quad (3.1.74)$$

Далее, рассмотрим третье уравнение системы (3.1.59)

$$\frac{\partial E_x^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial z}. \quad (3.1.75)$$

Берём производные по z от (3.1.62) и от (3.1.63), после чего, учитывая (3.1.75), а также учитывая:

$$E_{+x}^{(0)} = -E_{-x}^{(0)},$$

получаем

$$\begin{aligned} & -\alpha_1 E_{1x}^{(1)} \exp\left(-\frac{\alpha_1 D}{2}\right) - \alpha_2 E_{2x}^{(1)} \exp\left(-\frac{\alpha_2 D}{2}\right) = \\ & = \alpha_0 E_{+x}^{(0)} \left[\exp\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\alpha_0 D}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.76)$$

В выражение (3.1.76) вводим обозначения (3.1.65), (3.1.66) и (3.1.73), после чего получаем

$$\alpha_1 a E_{1x}^{(1)} + \alpha_2 b E_{2x}^{(1)} + \alpha_0 l E_{+x}^{(0)} = 0. \quad (3.1.77)$$

И, наконец, используем четвёртое уравнение системы (3.1.59)

$$\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial z}. \quad (3.1.78)$$

Имеем

$$\vec{E}_z^{(1)} = \left(\vec{E}_{1z}^{(1)} \exp(-\alpha_1 z) + \vec{E}_{2z}^{(1)} \exp(-\alpha_2 z) \right) \eta, \quad (3.1.79)$$

$$\vec{E}_z^{(0)} = \left(\vec{E}_{+z}^{(0)} \exp(\alpha_0 z) + \vec{E}_{-z}^{(0)} \exp(-\alpha_0 z) \right) \eta. \quad (3.1.80)$$

Берём производные по y от (3.1.79) и (3.1.80), по z от (3.1.70) и (3.1.71), а также используем обозначения (3.1.65), (3.1.66), (3.1.67) и в результате получаем

$$\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial y} = (-iq_y) (aE_{1z}^{(1)} + bE_{2z}^{(1)}) \eta, \quad (3.1.81)$$

$$\frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial y} = (-iq_y) f E_{+z}^{(0)} \eta, \quad (3.1.82)$$

$$\frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial z} = (-\alpha_1 a E_{1y}^{(1)} - \alpha_2 b E_{2y}^{(1)}) \eta, \quad (3.1.83)$$

$$\frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial z} = \alpha_0 f E_{+y}^{(0)} \eta. \quad (3.1.84)$$

Подставляя (3.1.81), (3.1.82), (3.1.83) и (3.1.84) в выражение (3.1.78) приходим к уравнению

$$\alpha_1 a E_{1y}^{(1)} + \alpha_2 b E_{2y}^{(1)} - iq_y a E_{1z}^{(1)} - iq_y b E_{2z}^{(1)} + iq_y E_{+z}^{(0)} f + \alpha_0 f E_{+y}^{(0)} = 0. \quad (3.1.85)$$

Используя формулы (3.1.32), (3.1.45) преобразуем последние два члена уравнения (3.1.85):

$$\begin{aligned} iq_y E_{+z}^{(0)} f + \alpha_0 f E_{+y}^{(0)} &= iq_y \frac{iq_y}{\alpha_0} E_{+y}^{(0)} f + \alpha_0 f E_{+y}^{(0)} = \\ &= f E_{+y}^{(0)} \frac{(-q_y^2 + \alpha_0^2)}{\alpha_0} = -\frac{k_0^2}{\alpha_0} f E_{+y}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.1.86)$$

С учётом (3.1.86), выражение (3.1.85), умноженное на α_0 , приобретает вид

$$\alpha_0 \alpha_1 a E_{1y}^{(1)} + \alpha_0 \alpha_2 b E_{2y}^{(1)} - i \alpha_0 q_y a E_{1z}^{(1)} - i \alpha_0 q_y b E_{2z}^{(1)} - k_0^2 f E_{+y}^{(0)} = 0. \quad (3.1.87)$$

Таким образом, после вышеприведённых преобразований система уравнений (3.1.59) принимает вид:

$$\begin{cases} a E_{1x}^{(1)} + b E_{2x}^{(1)} - f E_{+x}^{(0)} = 0, \\ a E_{1y}^{(1)} + b E_{2y}^{(1)} - l E_{+y}^{(0)} = 0, \\ \alpha_1 a E_{1x}^{(1)} + \alpha_2 b E_{2x}^{(1)} + \alpha_0 l E_{+x}^{(0)} = 0, \\ \alpha_0 \alpha_1 a E_{1y}^{(1)} + \alpha_0 \alpha_2 b E_{2y}^{(1)} - i \alpha_0 q_y a E_{1z}^{(1)} - i \alpha_0 q_y b E_{2z}^{(1)} - k_0^2 f E_{+y}^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (3.1.88)$$

Подставляем в систему (3.1.88) соотношения (3.1.24), (3.1.25) и (3.1.29). Учитывая, что $n=1,2$ приходим к следующему виду системы (3.1.88):

$$\begin{cases} a C_1 K_1^{(1)} + b C_2 K_2^{(1)} - f E_{+x}^{(0)} = 0, \\ a B_1 K_1^{(1)} + b B_2 K_2^{(1)} + l E_{+y}^{(0)} = 0, \\ \alpha_1 a C_1 K_1^{(1)} + \alpha_2 b C_2 K_2^{(2)} + \alpha_0 l E_{+x}^{(0)} = 0, \\ \alpha_0 a (\alpha_1 B_1 + i q_y A_1) K_1^{(1)} + \alpha_0 b (\alpha_2 B_2 + i q_y A_2) K_2^{(1)} + k_0^2 f E_{+y}^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (3.1.89)$$

Для того чтобы данная система уравнений имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы её детерминант был равен нулю, т. е.

$$\Delta_{(102)} = \begin{vmatrix} a C_1 & b C_2 & -f & 0 \\ a B_1 & b B_2 & 0 & l \\ \alpha_1 a C_1 & \alpha_2 b C_2 & \alpha_0 l & 0 \\ \alpha_0 a L_1 & \alpha_0 b L_2 & 0 & k_0^2 f \end{vmatrix} = 0, \quad (3.1.90)$$

где

$$L_n = \alpha_n B_n + i q_y A_n, \quad n = 1, 2. \quad (3.1.91)$$

Раскрывая детерминант (3.1.90), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \Delta_{(102)} &= C_2 (\alpha_0 l + \alpha_2 f) (\alpha_0 l L_1 - k_0^2 f B_1) - \\ &- C_1 (\alpha_0 l + \alpha_1 f) (\alpha_0 l L_2 - k_0^2 f B_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.92)$$

Подставляя в (3.1.92) выражения для l и f :

$$l = \exp\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\alpha_0 D}{2}\right) = 2ch\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right), \quad (3.1.93)$$

$$f = \exp\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_0 D}{2}\right) = 2sh\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right), \quad (3.1.94)$$

и учитывая, что

$$\frac{ch\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right)}{sh\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right)} = cth\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right), \quad (3.1.95)$$

приходим к дисперсионному уравнению для случая 1), когда E_y — чётная, E_x, E_z — нечётные функции от z [30]:

$$\begin{aligned} & C_2 \left(\alpha_2 + \alpha_o cth\left(\frac{\alpha_o D}{2}\right) \right) \left(\alpha_o L_1 cth\left(\frac{\alpha_o D}{2}\right) - k_o^2 B_1 \right) - \\ & - C_1 \left(\alpha_1 + \alpha_o cth\left(\frac{\alpha_o D}{2}\right) \right) \left(\alpha_o L_2 cth\left(\frac{\alpha_o D}{2}\right) - k_o^2 B_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.96)$$

Теперь получим дисперсионное уравнение для случая 2), когда E_y — нечётная, E_x, E_z — чётные функции от z . Поступаем так же, как при выводе уравнения (3.1.96)

Продельвая то же самое, что и при выводе уравнения (3.1.68), учитывая, что

$$\begin{aligned} E_{-x}^{(0)} &= E_{+x}^{(0)}, \\ \exp\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\alpha_0 D}{2}\right) &= f, \end{aligned} \quad (3.1.97)$$

(следует обратить внимание на отличие (3.1.97) от (3.1.67))
получаем уравнение

$$aE_{1x}^{(1)} + bE_{2x}^{(1)} - fE_{+x}^{(0)} = 0. \quad (3.1.98)$$

Далее, поступая так же, как при выводе уравнения (3.1.74), однако, с тем отличием, что теперь

$$\begin{aligned} E_{+y}^{(0)} &= -E_{-y}^{(0)}, \\ \exp\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_0 D}{2}\right) &= l, \end{aligned} \quad (3.1.99)$$

(следует обратить внимание на отличие (3.1.99) от (3.1.73))
получаем уравнение

$$aE_{1y}^{(1)} + bE_{2y}^{(1)} - lE_{+y}^{(0)} = 0. \quad (3.1.100)$$

Далее, поступая по аналогии с выводом уравнения (3.1.77), с той лишь разницей, что в данном случае используется обозначение (3.1.99) и учитывается, что

$$E_{-x}^{(0)} = E_{+x}^{(0)},$$

приходим к уравнению

$$\alpha_1 a E_{1x}^{(1)} + \alpha_2 b E_{2x}^{(1)} + \alpha_0 l E_{+x}^{(0)} = 0. \quad (3.1.101)$$

И, наконец, поступая по аналогии с выводом уравнения (3.1.87), с тем лишь отличием, что теперь используется обозначение (3.1.97) и учитывается, что

$$\begin{aligned} E_{-z}^{(0)} &= E_{+z}^{(0)}, \\ E_{-y}^{(0)} &= -E_{+y}^{(0)}, \end{aligned}$$

приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \alpha_0 \alpha_1 a E_{1y}^{(1)} + \alpha_0 \alpha_2 b E_{2y}^{(1)} - i \alpha_0 q_y a E_{1z}^{(1)} - \\ - i \alpha_0 q_y b E_{2z}^{(1)} - k_0^2 f E_{+y}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.102)$$

Как легко видеть, внешний вид уравнений (3.1.68) и (3.1.98), (3.1.74) и (3.1.100), (3.1.77) и (3.1.101), (3.1.87) и (3.1.102) идентичен. Разница состоит лишь в смысле, вкладываемом в обозначения l и f .

Учтём, что аналогично случаю 1),

$$l = 2sh\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right), \quad (3.1.103)$$

$$f = 2ch\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right), \quad (3.1.104)$$

$$\frac{sh\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right)}{ch\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right)} = th\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right). \quad (3.1.105)$$

В результате получаем дисперсионное уравнение для случая 2), когда E_y — нечётная, E_x, E_z — чётные функции от z [30]:

$$\begin{aligned} C_2 \left(\alpha_2 + \alpha_0 th\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) \right) \left(\alpha_0 L_1 th\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) - k_0^2 B_1 \right) - \\ - C_1 \left(\alpha_1 + \alpha_0 th\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) \right) \left(\alpha_0 L_2 th\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) - k_0^2 B_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.106)$$

Таким образом, мы получили два аналогичных дисперсионных уравнения (3.1.96) и (3.1.106), соответственно для случаев 1) и 2). В итоге, в планарном волноводе будут распространяться две волны с дисперсионными уравнениями (3.1.96) и (3.1.106) вида (3.1.35) с векторами электрического поля, определяемыми из граничных условий (3.1.59).

Решая дисперсионное уравнение отдельно, каким-либо численным методом, можно получить значения составляющих комплексного волнового вектора q_y . Дело в том, что величина комплексного волнового вектора вдоль оси ОУ, т. е. вдоль направления вектора индукции внешнего магнитного поля

играет решающую роль в определении величины коэффициента пропускания планарного волновода, расчетом которой теперь непосредственно займемся.

Найдём коэффициент пропускания планарного волновода для случая 1), т.е. когда E_y — чётная, E_x, E_z — нечетные функции от z .

Воспользовавшись соотношениями (3.1.60), (3.1.93) и (3.1.94) приведём выражения (3.1.63), (3.1.71) и (3.1.80) к виду

$$E_x^{(0)} = 2E_{+x}^{(0)} sh(\alpha_0 z) \eta, \quad (3.1.107)$$

$$E_y^{(0)} = 2E_{+y}^{(0)} ch(\alpha_0 z) \eta, \quad (3.1.108)$$

$$E_z^{(0)} = 2E_{+z}^{(0)} sh(\alpha_0 z) \eta, \quad (3.1.109)$$

Рассчитаем энергию волны, прошедшую через планарный волновод. Интенсивность волны в направлении оси Y определяется как среднее значение y -компоненты вектора Умова – Пойтинга. Выражения для вектора Умова – Пойтинга и его среднего значения, соответственно имеют вид:

$$\vec{S} = [\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{(0)}], \quad (3.1.110)$$

$$\vec{S}_{cp} = \frac{I}{2} [\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{*(0)}]. \quad (3.1.111)$$

Найдём

$$S_{cp_y} = \bar{S}_y.$$

Имеем

$$\begin{aligned} [\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{*(0)}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x^{(0)} & E_y^{(0)} & E_z^{(0)} \\ H_x^{(0)*} & H_y^{(0)*} & H_z^{(0)*} \end{vmatrix} = \\ & \vec{i} (E_y^{(0)} H_z^{(0)*} - E_z^{(0)} H_y^{(0)*}) - \vec{j} (E_x^{(0)} H_z^{(0)*} - E_z^{(0)} H_x^{(0)*}) + \\ & + \vec{k} (E_x^{(0)} H_y^{(0)*} - E_y^{(0)} H_x^{(0)*}). \end{aligned} \quad (3.1.112)$$

Из (3.1.112) находим

$$\bar{S}_y = \frac{I}{2} Re(E_z^{(0)} H_x^{(0)*} - E_x^{(0)} H_z^{(0)*}). \quad (3.1.113)$$

Далее с помощью уравнений (3.1.2) и (3.1.7) получаем

$$-rot \vec{E}^{(0)} = \mu_0 \frac{\partial \vec{H}^{(0)}}{\partial t}. \quad (3.1.114)$$

Будем искать решение уравнения (3.1.114) в виде:

$$\vec{H} = \vec{H}_0^{(0)} exp(-\alpha z) exp(i(\omega t - q_y y)). \quad (3.1.115)$$

Из (3.1.115) следует

$$\frac{\partial \vec{H}^{(0)}}{\partial t} = i\omega \vec{H}^{(0)}. \quad (3.1.116)$$

Как следует из (3.1.113), решая уравнение (3.1.114) нам необходимо найти, $H_x^{*(0)}$ и $H_z^{*(0)}$. Займёмся этим.

Распишем подробно левую часть уравнения (3.1.114):

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}^{(0)} &= \vec{i} \left(\frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial y} \right) = \\ &= \vec{i} \text{rot}_x \vec{E}^{(0)} + \vec{j} \text{rot}_y \vec{E}^{(0)} + \vec{k} \text{rot}_z \vec{E}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.1.117)$$

Для нахождения \vec{S}_y достаточно найти компоненты $\text{rot}_x \vec{E}^{(0)}$ и $\text{rot}_z \vec{E}^{(0)}$, поэтому, учитывая (3.1.114), (3.1.115) и (3.1.117) получим следующие выражения

$$-\text{rot}_x \vec{E}^{(0)} = \mu_0 i \omega H_x^{(0)}, \quad (3.1.118)$$

$$-\text{rot}_z \vec{E}^{(0)} = \mu_0 i \omega H_z^{(0)}. \quad (3.1.119)$$

Далее, с помощью соотношений (3.1.107), (3.1.108), (3.1.109) и (3.1.115) находим:

$$\text{rot}_x \vec{E}^{(0)} = \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial z} = 2(-iq_y E_{+z}^{(0)} - \alpha_0 E_{+y}^{(0)}) \text{sh}(\alpha_0 z) \eta, \quad (3.1.120)$$

$$\text{rot}_z \vec{E}^{(0)} = \frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial y} = 2iq_y E_{+x}^{(0)} \text{sh}(\alpha_0 z) \eta, \quad (3.1.121)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} [\text{ch}(\alpha_0 z)] = \alpha_0 \text{sh}(\alpha_0 z) \right),$$

и из (3.1.118) и (3.1.120) получаем:

$$H_x^{(0)} = \frac{2 \text{sh}(\alpha_0 z)}{\mu_0 \omega} (q_y E_{+z}^{(0)} - i \alpha_0 E_{+y}^{(0)}) \eta, \quad (3.1.122)$$

а из (3.1.119) и (3.1.121):

$$H_z^{(0)} = -\frac{2 \text{sh}(\alpha_0 z)}{\mu_0 \omega} q_y E_{+x}^{(0)} \eta. \quad (3.1.123)$$

Комплексно сопряжённые (3.1.122) (3.1.123) выражения имеют вид:

$$H_x^{*(0)} = \frac{2 \text{sh}(\alpha_0^* z)}{\mu_0 \omega} (q_y^* E_{+z}^{*(0)} + i \alpha_0^* E_{+y}^{*(0)}) \eta^*, \quad (3.1.124)$$

$$H_z^{*(0)} = -\frac{2 \text{sh}(\alpha_0^* z)}{\mu_0 \omega} q_y^* E_{+x}^{*(0)} \eta^*. \quad (3.1.125)$$

Подставляя (3.1.107), (3.1.109), (3.1.124) и (3.1.125) в (3.1.113) и воспользовавшись формулами:

$$\text{sh}(\alpha_0 z) \text{sh}(\alpha_0^* z) = \frac{1}{2} \{ \text{ch}(2\alpha_0' z) - \cos(2\alpha_0'' z) \}, \quad (3.1.126)$$

где α_0' и α_0'' соответственно действительная и мнимая части α_0 ,

$$\eta \eta^* = \exp(2q_y'' y), \quad (3.1.127)$$

где q_y'' – мнимая часть q_y ,
получаем

$$\begin{aligned} \bar{S}_y &= \frac{ch(2\alpha'_0 z) - \cos(2\alpha''_0 z)}{\mu_0 \omega} |E_{+z}^{(0)}|^2 \times \\ &\times \operatorname{Re} \left\{ q_y^* + i\alpha_0^* \frac{E_{+y}^{*(0)} E_{+z}^{(0)}}{|E_{+z}^{(0)}|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} q_y^* \right\} \exp(2q_y'' y). \end{aligned} \quad (3.1.128)$$

Далее, делаем подстановку из (3.1.45) для $E_{+y}^{*(0)}$:

$$E_{+y}^{*(0)} = \frac{\alpha_0^*}{-iq_y^*} E_{+z}^{*(0)}, \quad (3.1.129)$$

в результате чего выражение под знаком реальной части приобретает вид принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ q_y^* + i\alpha_0^* \frac{E_{+y}^{*(0)} E_{+z}^{(0)}}{|E_{+z}^{(0)}|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} q_y^* \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{q_y^* - \alpha_0^{*2}}{q_y^*} + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} q_y^* \right\}, \\ &\left(E_{+x}^{(0)} E_{+x}^{*(0)} = |E_{+x}^{(0)}|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.1.130)$$

Из (3.1.33) следует, что

$$q_y^{*2} - \alpha_0^{*2} = k_0^2. \quad (3.1.131)$$

Подставляя (3.1.131) в (3.1.130), получим:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{q_y^{*2} - \alpha_0^{*2}}{q_y^*} + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} q_y^* \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_0^2}{q_y^*} + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} q_y^* \right\}. \quad (3.1.132)$$

Далее, умножая числитель и знаменатель первого члена в выражении (3.1.132) на q_y получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_0^2}{q_y^*} + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} q_y^* \right\} &= \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_0^2}{|q_y|^2} q_y' + i \frac{k_0^2}{|q_y|^2} q_y'' + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} q_y' - i \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} q_y'' \right\} \\ &= q_y' \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_0^2}{|q_y|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} \right\} = q_y' \left\{ \frac{k_0^2}{|q_y|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.133)$$

$$(q_y q_y^* = |q_y|^2).$$

Таким образом, в случае 1), когда E_y — чётная, E_x, E_z — нечётные функции от z , с учётом (3.1.133), получаем выражение для \bar{S}_y :

$$\begin{aligned} \bar{S}_y &= \frac{ch(2\alpha'_0 z) - \cos(2\alpha''_0 z)}{\mu_0 \omega} |E_{+z}^{(0)}|^2 \times \\ &\times \left\{ \frac{k_0^2}{|q_y|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} \right\} q'_y \exp(2q''_y L), \end{aligned} \quad (3.1.134)$$

где $y = L$ — длина планарного волновода.

Энергию W волны, прошедшей в единицу времени через поперечное сечение планарного волновода размером xD (x изменяется от 0 до x , z изменяется от $-\frac{D}{2}$ до $+\frac{D}{2}$), находим из выражения:

$$W = \iint_{xz} \bar{S}_y dx dz. \quad (3.1.135)$$

В расчетах удобно сравнивать энергию $W(B)$, переносимую волной при некотором значении магнитного поля B , с энергией $W(0)$, переносимой волной при $B=0$, т. е. определять коэффициент пропускания планарного волновода

$$T(B) = \frac{W(B)}{W(0)}. \quad (3.1.136)$$

$$\begin{aligned} T(B) &= \frac{\int_0^x \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} \frac{ch\{2\alpha'_0(B)z\} - \cos\{2\alpha''_0(B)z\}}{\mu_0 \omega} |E_{+z}^{(0)}(B)|^2 \times \\ &\times \left\{ \frac{k_0^2}{|q_y(B)|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}(B)|^2}{|E_{+z}^{(0)}(B)|^2} \right\} q'_y(B) \exp\{2q''_y(B)L\} dx dz}{\int_0^x \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} \frac{ch\{2\alpha'_0(0)z\} - \cos\{2\alpha''_0(0)z\}}{\mu_0 \omega} |E_{+z}^{(0)}(0)|^2 \times \\ &\times \left\{ \frac{k_0^2}{|q_y(0)|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}(0)|^2}{|E_{+z}^{(0)}(0)|^2} \right\} q'_y(0) \exp\{2q''_y(0)L\} dx dz} = \\ &= \frac{\left\{ \frac{sh\{\alpha'_0(B)D\}}{\alpha'_0(B)} - \frac{sin\{\alpha''_0(B)D\}}{\alpha''_0(B)} \right\} |E_{+z}^{(0)}(B)|^2 \times}{\left\{ \frac{sh\{\alpha'_0(0)D\}}{\alpha'_0(0)} - \frac{sin\{\alpha''_0(0)D\}}{\alpha''_0(0)} \right\} |E_{+z}^{(0)}(0)|^2 \times} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{k_0^2}{|q_y(B)|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}(B)|^2}{|E_{+z}^{(0)}(B)|^2} \right\} q'_y(B) \\ & \frac{\exp\{2L[q_y''(B) - q_y''(0)]\}}{\times \left\{ \frac{k_0^2}{|q_y(0)|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}(0)|^2}{|E_{+z}^{(0)}(0)|^2} \right\} q'_y(0)} \end{aligned} \quad (3.1.137)$$

Теперь рассмотрим случай 2), когда электромагнитная волна, распространяющаяся в планарном волноводе, имеет следующую чётность: E_y — нечётная, E_x, E_z — чётные функции z .

Поступая также как в случае 1), учитывая только другую чётность в соотношении (3.1.60), запишем в этом случае выражения для компонент электрического поля $E_x^{(0)}, E_y^{(0)}, E_z^{(0)}$:

$$E_x^{(0)} = 2E_{+x}^{(0)} ch(\alpha_0 z) \eta, \quad (3.1.138)$$

$$E_y^{(0)} = 2E_{+y}^{(0)} sh(\alpha_0 z) \eta, \quad (3.1.139)$$

$$E_z^{(0)} = 2E_{+z}^{(0)} ch(\alpha_0 z) \eta, \quad (3.1.140)$$

Далее, по аналогии со случаем 1), с помощью выражений (3.1.138), (3.1.139), (3.1.140) и (3.1.117) находим

$$rot_x \vec{E}^{(0)} = 2(-iq_y E_{+z}^{(0)} - \alpha_0 E_{+y}^{(0)}) ch(\alpha_0 z) \eta, \quad (3.1.141)$$

$$rot_z \vec{E}^{(0)} = 2iq_y E_{+x}^{(0)} ch(\alpha_0 z) \eta, \quad (3.1.142)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} [sh(\alpha_0 z)] = \alpha_0 ch(\alpha_0 z) \right).$$

Далее из (3.1.118) и (3.1.141) имеем:

$$H_x^{(0)} = \frac{2ch(\alpha_0 z)}{\mu_0 \omega} (q_y E_{+z}^{(0)} - i\alpha_0 E_{+y}^{(0)}) \eta, \quad (3.1.143)$$

а из (3.1.119) и (3.1.142):

$$H_x^{(0)} = -\frac{2ch(\alpha_0 z)}{\mu_0 \omega} q_y E_{+x}^{(0)} \eta. \quad (3.1.144)$$

Далее из (3.1.143) и (3.1.144) находим H_x^* и H_z^* :

$$H_x^{*(0)} = \frac{2ch(\alpha_0^* z)}{\mu_0 \omega} (q_y^* E_{+z}^{*(0)} + i\alpha_0^* E_{+y}^{*(0)}) \eta^*, \quad (3.1.145)$$

$$H_x^{*(0)} = -\frac{2ch(\alpha_0^* z)}{\mu_0 \omega} q_y^* E_{+x}^{*(0)} \eta^*. \quad (3.1.146)$$

И, наконец, по аналогии со случаем 1), с той лишь разницей, что теперь используется формула

$$ch(\alpha_0 z)ch(\alpha_0^* z) = \frac{1}{2} \{ch(2\alpha_0' z) + cos(2\alpha_0'' z)\}, \quad (3.1.147)$$

находим выражение для \bar{S}_y в случае 2), когда E_y — нечётная, E_x, E_z — чётные функции z :

$$\begin{aligned} \bar{S}_y &= \frac{ch(2\alpha_0' z) + cos(2\alpha_0'' z)}{\mu_0 \omega} |E_{+z}^{(0)}|^2 \times \\ &\times Re \left\{ \frac{k_0^2}{|q_y|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}|^2}{|E_{+z}^{(0)}|^2} \right\} q_y' exp(2q_y'' L), \end{aligned} \quad (3.1.148)$$

Таким образом, для случая 2) выражение для $T(B)$ (3.1.136) приобретает вид:

$$\begin{aligned} T(B) &= \frac{\left\{ \frac{sh\{\alpha_0'(B)D\}}{\alpha_0'(B)} + \frac{sin\{\alpha_0''(B)D\}}{\alpha_0''(B)} \right\} |E_{+z}^{(0)}(B)|^2 \times}{\left\{ \frac{sh\{\alpha_0'(0)D\}}{\alpha_0'(0)} + \frac{sin\{\alpha_0''(0)D\}}{\alpha_0''(0)} \right\} |E_{+z}^{(0)}(0)|^2 \times} \\ &\times \frac{\left\{ \frac{k_0^2}{|q_y(B)|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}(B)|^2}{|E_{+z}^{(0)}(B)|^2} \right\} q_y'(B)}{\left\{ \frac{k_0^2}{|q_y(0)|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}(0)|^2}{|E_{+z}^{(0)}(0)|^2} \right\} q_y'(0)} exp\{2L[q_y''(B) - q_y''(0)]\} \end{aligned} \quad (3.1.149)$$

Выражения (3.1.137), (3.1.149) мало полезны для практического применения, поскольку неизвестны квадраты модулей комплексных амплитуд компонент вектора напряжённости электрического поля вдоль осей OX и OZ: $|E_{+x}^{(0)}(B)|^2$, $|E_{+z}^{(0)}(B)|^2$. Поэтому необходимо упростить эти выражения и попытаться избавиться от величин непосредственно не определяемых экспериментально. Для этого рассмотрим дисперсионные уравнения электромагнитных волн, распространяющихся в планарном волноводе в отсутствии магнитного поля $\vec{B} = 0$. Найдём в этом случае выражения для α_1 и α_2 .

Рассмотрим систему уравнений (3.1.14). В отсутствие магнитного поля тензор диэлектрической проницаемости имеет диагональный вид:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.1.150)$$

С учётом (3.1.150), система (3.1.14) приобретает вид:

$$\begin{cases} (k_0^2 \varepsilon_{xx} - q_y^2 + \alpha^2) E_x^{(l)} = 0, \\ (k_0^2 \varepsilon_{yy} + \alpha^2) E_y^{(l)} - i q_y \alpha E_z^{(l)} = 0, \\ -i q_y \alpha E_y^{(l)} + (k_0^2 \varepsilon_{zz} - q_y^2) E_z^{(l)} = 0. \end{cases} \quad (3.1.151)$$

Чтобы система (3.1.151) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы детерминант её коэффициентов был равен нулю, т. е.

$$\Delta_{(166)} = \begin{vmatrix} k_0^2 \varepsilon_{xx} - q_y^2 + \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_0^2 \varepsilon_{yy} + \alpha^2 & -i q_y \alpha \\ 0 & -i q_y \alpha & k_0^2 \varepsilon_{zz} - q_y^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1.152)$$

Раскрывая (3.1.152) получаем:

$$k_0^2 (k_0^2 \varepsilon_{xx} - q_y^2 + \alpha^2) (k_0^2 \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - q_y^2 \varepsilon_{yy} + \alpha^2 \varepsilon_{zz}) = 0. \quad (3.1.153)$$

Так как $k_0^2 \neq 0$, следовательно

$$k_0^2 \varepsilon_{xx} - q_y^2 + \alpha^2 = 0, \quad (3.1.154)$$

откуда

$$\alpha_1 = \sqrt{q_y^2 - k_0^2 \varepsilon_{xx}}, \quad (3.1.155)$$

с другой стороны из (3.1.153) следует

$$k_0^2 \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yy} q_y^2 + \alpha^2 \varepsilon_{zz} = 0, \quad (3.1.156)$$

откуда

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}} (q_y^2 - k_0^2 \varepsilon_{xx})}. \quad (3.1.157)$$

Из (3.1.151) и (3.1.154) можно сделать вывод, что корень α_1 соответствует только тем волнам, где есть составляющая напряжённости электрического поля вдоль оси X, т.е. α_1 соответствует *TE* – моде. А из (3.1.151) и (3.1.156) следует, что корень α_2 соответствует *TM* – моде, так как в ней есть соответствующие составляющие вектора напряжённости электрического поля. В (3.1.155) и (3.1.157) взяты положительные корни, так как отрицательные – не удовлетворяют условию затухания электромагнитных волн в средах (1) или (2) (см. (3.1.16)).

Так как мы рассматриваем планарный волновод, поэтому в нём могут распространяться *E* – и *H* – волны. Таким образом, необходимо рассмотреть два случая:

а) Волна может быть поляризована так, что вектор напряжённости электрического поля волны \vec{E} будет перпендикулярен плоскости падения (пер-

пендикулярная поляризация). В этом случае в планарном волноводе возникает TE – мода или H – волна, для которой выполняются условия:

$$E_x \neq 0, \quad E_y = E_z = 0. \quad (3.1.158)$$

б) Волна может быть поляризована так, что вектор напряжённости электрического поля волны \vec{E} будет параллелен плоскости падения (параллельная поляризация). В этом случае в планарном волноводе возникает TH – мода или E – волна, для которой выполняются условия:

$$E_x = 0, \quad E_y \neq 0, \quad E_z \neq 0. \quad (3.1.159)$$

Рассмотрим случаи а) и б) для электромагнитных волн, распространяющихся в планарном волноводе, имеющих, как и ранее, следующую чётность:

- 1) E_y – чётная (E_x, E_z – нечётные функции z),
- 2) E_y – нечётная (E_x, E_z – чётные функции z).

Рассмотрим последовательно все возможные случаи.

1а) TE – мода (H – волна);

E_y – чётная, $E_y \neq 0$ (E_x, E_z – нечётные, $E_z = 0$) функции от z .

С учётом условий (3.1.158), система уравнений (3.1.89) приобретает вид:

$$\begin{cases} aE_{1x}^{(1)} + bE_{2x}^{(1)} - fE_{+x}^{(0)} = 0, \\ \alpha_1 aE_{1x}^{(1)} + \alpha_2 bE_{2x}^{(1)} + \alpha_0 lE_{+x}^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (3.1.160)$$

Когда мы говорим о H – волне, то имеем в виду наличие у данной волны продольной составляющей напряжённости магнитного поля волны H_y и поперечной составляющей напряжённости электрического поля волны E_x . Оси координат направлены в соответствии с рис. 3.1.1. Как следует из системы уравнений (3.1.160) и из соотношения (3.1.62), в среде (1) имеются две поперечные амплитуды напряжённости электрического поля волны $E_{1x}^{(1)}$ и $E_{2x}^{(1)}$ и два поперечных волновых числа α_1 и α_2 . Однако, в силу того, что α_2 получено для TM – моды – будет существовать только одна H – волна. Аналогичные рассуждения справедливы и для среды (2).

Получим дисперсионное уравнение для H – волны. Для этого в системе (3.1.160) в силу выше сказанного приравняем к нулю $E_{2x}^{(1)}$. Получим:

$$\begin{cases} aE_{1x}^{(1)} - fE_{+x}^{(0)} = 0, \\ \alpha_1 aE_{1x}^{(1)} + \alpha_0 lE_{+x}^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (3.1.161)$$

Чтобы система (3.1.161) имела нетривиальное решение, необходимо чтобы детерминант её коэффициентов был равен нулю, т.е.

$$A_{(173)} = \begin{vmatrix} a & -f \\ \alpha_1 a & \alpha_0 l \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1.162)$$

Раскрывая (3.1.162) получаем:

$$\alpha_0 l + \alpha_1 f = 0. \quad (3.1.163)$$

Подставляя в (3.1.163) выражения для l (3.1.93) и для f (3.1.94) и учитывая (3.1.160) приходим к дисперсионному уравнению для H – волны:

$$\alpha_1 + \alpha_0 \operatorname{cth} \left(\frac{\alpha_0 D}{2} \right) = 0. \quad (3.1.164)$$

1б) TH – мода (E – волна);

E_y — чётная, E_x, E_z – нечётные функции от z ; $E_x = 0$.

С учётом условий (3.1.159), система (3.1.88) приобретает вид:

$$\begin{cases} aE_{1y}^{(1)} + bE_{2y}^{(1)} - lE_{+y}^{(0)} = 0, \\ \alpha_0 \alpha_1 aE_{1y}^{(1)} + \alpha_0 \alpha_2 bE_{2y}^{(1)} - i\alpha_0 q_y aE_{1z}^{(1)} - i\alpha_0 q_y bE_{2z}^{(1)} - k_0^2 f E_{+y}^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (3.1.165)$$

Так как z и y компоненты вектора напряжённости электрического поля независимы и мы ищем уравнение для α_i , то в системе (3.1.165) можно положить $E_{1z}^{(1)} = E_{2z}^{(1)} = 0$. Когда мы говорим о E – волне, то имеем в виду существование у данной волны продольной составляющей вектора напряжённости электрического поля волны E_y и поперечной составляющей вектора напряжённости магнитного поля волны H_x . Оси координат направлены в соответствии с рис. 3.1.1. По тем же причинам, что и в случае 1а), существует одна E – волна со следующими составляющими: $E_{2y}^{(1)}, H_{2x}^{(1)}, \alpha_2$.

Положим в системе (3.1.165) $E_{1y}^{(1)} = 0$. Учитывая, что $E_{1z}^{(1)} = E_{2z}^{(1)} = 0$, из системы (3.1.165) получим

$$\begin{cases} bE_{2y}^{(1)} - lE_{+y}^{(0)} = 0, \\ \alpha_0 \alpha_2 bE_{2y}^{(1)} - k_0^2 f E_{+y}^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (3.1.166)$$

Чтобы система (3.1.166) имела нетривиальное решение необходимо, чтобы детерминант её коэффициентов был равен нулю, т. е.

$$A_{(188)} = \begin{vmatrix} b & -l \\ \alpha_0 \alpha_2 b & -k_0^2 f \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1.167)$$

Раскрывая (3.1.167) получаем уравнение

$$\alpha_0 \alpha_2 l - k_0^2 f = 0. \quad (3.1.168)$$

Подставляя в (3.1.168) выражения для l (3.1.93) и для f (3.1.94) и учитывая (3.1.95) получаем

$$\alpha_0 \alpha_2 \operatorname{cth} \left(\frac{\alpha_0 D}{2} \right) - k_0^2 = 0. \quad (3.1.169)$$

Выразим в (3.1.169) k_0^2 через α_2 . Для этого из (3.1.157) получим

$$\alpha_2^2 = \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}} (q_y^2 - k_0^2 \varepsilon_{zz}),$$

откуда

$$k_0^2 = \frac{q_y^2}{\varepsilon_{zz}} - \frac{\alpha_2^2}{\varepsilon_{yy}}. \quad (3.1.170)$$

Подставляя (3.1.170) в (3.1.169) получаем дисперсионное уравнение для E -волны:

$$\alpha_2 + \alpha_0 \varepsilon_{yy} \operatorname{cth} \left(\frac{\alpha_0 D}{2} \right) - \frac{\varepsilon_{yy} q_y^2}{\varepsilon_{zz} \alpha_2} = 0. \quad (3.1.171)$$

2а) TE – мода (H – волна);

E_y — нечётная, $E_x E_z$ — чётные функции z ; $E_y=0$, $E_z=0$.

Поступая так же как в случае 1а), находим системы уравнений, аналогичные системам (3.1.161):

$$\begin{cases} aE_{lx}^{(1)} - fE_{+x}^{(0)} = 0, \\ \alpha_1 aE_{lx}^{(1)} + \alpha_0 lE_{+x}^{(0)} = 0, \end{cases} \quad (3.1.172)$$

Система уравнений (3.1.172) отличается от системы (3.1.161) смыслом вкладываемым в f и l . Далее, поступая так же, как в случае 1а), с той лишь разницей, что теперь для f и l используются обозначения (3.1.103) и (3.1.104), а также используется формула (3.1.105), получаем дисперсионное уравнение для H – волны:

$$\alpha_1 + \alpha_0 \operatorname{th} \left(\frac{\alpha_0 D}{2} \right) = 0, \quad (3.1.173)$$

2б) TH – мода (E – волна);

E_y — нечётная, $E_x E_z$ — чётные функции z ; $E_x=0$.

Так же как в случае 1б) находим систему уравнений, аналогичную (3.1.166):

$$\begin{cases} bE_{2y}^{(1)} - lE_{+y}^{(0)} = 0, \\ \alpha_0 \alpha_2 bE_{2y}^{(1)} - k_0^2 fE_{+y}^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (3.1.174)$$

Система уравнений (3.1.174) отличаются от системы (3.1.166) смыслом вкладываемым в f и l . Далее поступая так же как в случае 1б), с тем лишь отличием, что теперь для f и l используются обозначения (3.1.103) и (3.1.104), а так-

же используется формула (3.1.105), получаем дисперсионное уравнение для E – волны:

$$\alpha_2 + \alpha_0 \varepsilon_{yy} \operatorname{th}\left(\frac{\alpha_0 D}{2}\right) - \frac{\varepsilon_{yy} q_y^2}{\varepsilon_{zz} \alpha_2} = 0, \quad (3.1.175)$$

Проанализируем наличие решений дисперсионных уравнений (3.1.164), (3.1.171), (3.1.173), (3.1.175) в случае бесстолкновительной плазмы (компоненты диэлектрической проницаемости имеют только реальные части). Уравнения (3.1.164), (3.1.173), не имеют действительных корней q_y , так как α_l больше нуля и $\alpha_o \cdot \operatorname{th}(\alpha_o \cdot d/2) > 0$, $\alpha_o \cdot \operatorname{cth}(\alpha_o \cdot d/2) > 0$. Уравнения (3.1.171), (3.1.175) будут иметь действительный корень q_y , так как имеется третий член, который отрицателен.

Следовательно, в планарном волноводе, изготовленном из висмута, в случае бесстолкновительной плазмы будут возбуждаться только E – волны. В противном случае – q_y компонента волнового вектора станет комплексной величиной, мнимая часть которой будет описывать затухание волны, обусловленное поглощением среды. Данный вывод подтверждается численным расчётом.

Электрическое поле волны с дисперсионными уравнениями (3.1.171), (3.1.175) не имеет E_x – компоненты, поэтому выражение (3.1.149), например, можно записать в виде:

$$T(B) = \frac{\left\{ \frac{\operatorname{sh}\{\alpha'_o(B)D\}}{\alpha'_o(B)} + \frac{\sin\{\alpha''_o(B)D\}}{\alpha''_o(B)} \right\} |E_{+z}^{(o)}(B)|^2}{\left\{ \frac{\operatorname{sh}\{\alpha'_o(0)D\}}{\alpha'_o(0)} + \frac{\sin\{\alpha''_o(0)D\}}{\alpha''_o(0)} \right\} |E_{+z}^{(o)}(0)|^2} \times$$

$$\times \frac{\left\{ \frac{k_o^2}{|q_y(B)|^2} + \frac{|E_{+x}^{(o)}(B)|^2}{|E_{+z}^{(o)}(B)|^2} \right\} q'_y(B)}{\left\{ \frac{k_o^2}{|q_y(0)|^2} \right\} q'_y(0)} \exp\{2L[q''_y(B) - q''_y(0)]\}. \quad (3.1.176)$$

Для всех значений магнитного поля $q'_y > 1,92 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1}$ (рис. 3.1.4), а $|q''_y| < 100 \text{ м}^{-1}$ (рис. 3.1.5), т. е. $|q''_y(B)|^2 < 0,0001 \cdot |q'_y(B)|^2$, поэтому можно считать $(q'_y)^2 \gg (q''_y)^2$. Следовательно, сомножитель выражения (3.1.176) можно представить следующим образом:

$$\frac{\left\{ \frac{k_0^2}{|q_y(B)|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}(B)|^2}{|E_{+z}^{(0)}(B)|^2} \right\} q'_y(B)}{\left\{ \frac{k_0^2}{|q_y(0)|^2} \right\} q'_y(0)} \approx \frac{\left\{ \frac{k_0^2}{|q'_y(B)|^2} + \frac{|E_{+x}^{(0)}(B)|^2}{|E_{+z}^{(0)}(B)|^2} \right\} q'_y(B)}{\left\{ \frac{k_0^2}{|q'_y(0)|^2} \right\} q'_y(0)} \quad (3.1.177)$$

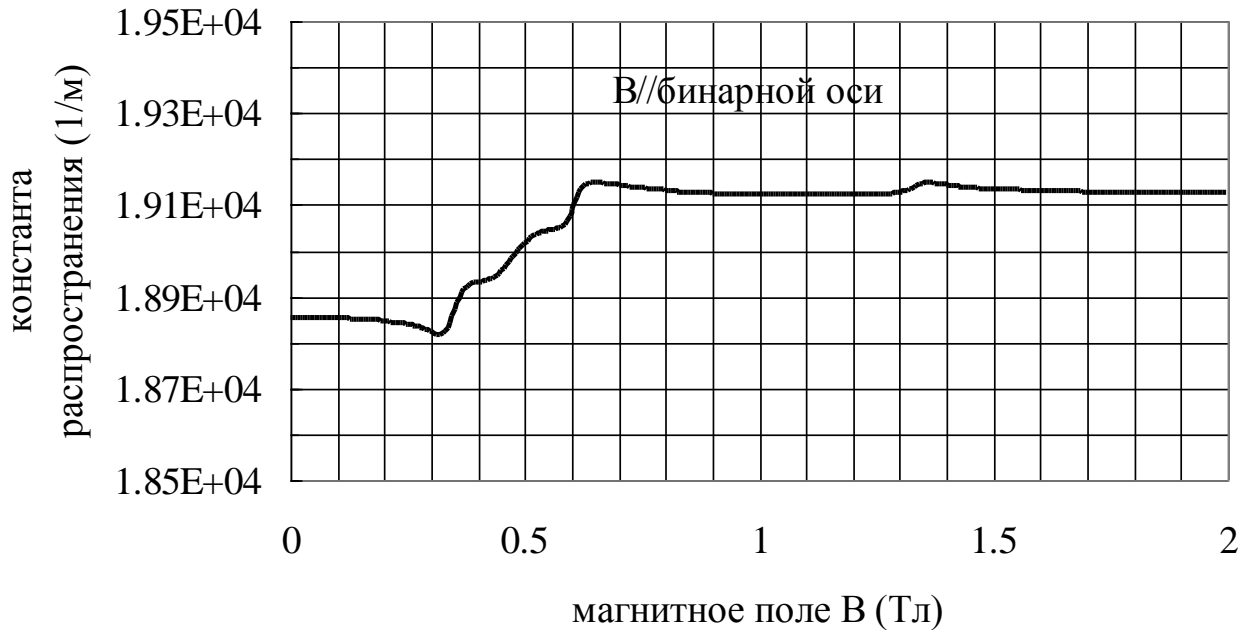


Рис. 3.1.4. Действительная часть компоненты волнового вектора вдоль оси ОУ для случая, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси.
Результат численного расчёта

Во всём интервале магнитных полей $1 > \left(\frac{k_0}{q'_y(B)} \right)^2 > 0,95$ (рис. 3.1.6), поэтому $\left(\frac{k_0}{q'_y(B)} \right)^2 \approx 1$ с точностью не хуже 5%. Аналогичную замену произведём в знаменателе выражения (3.1.177).

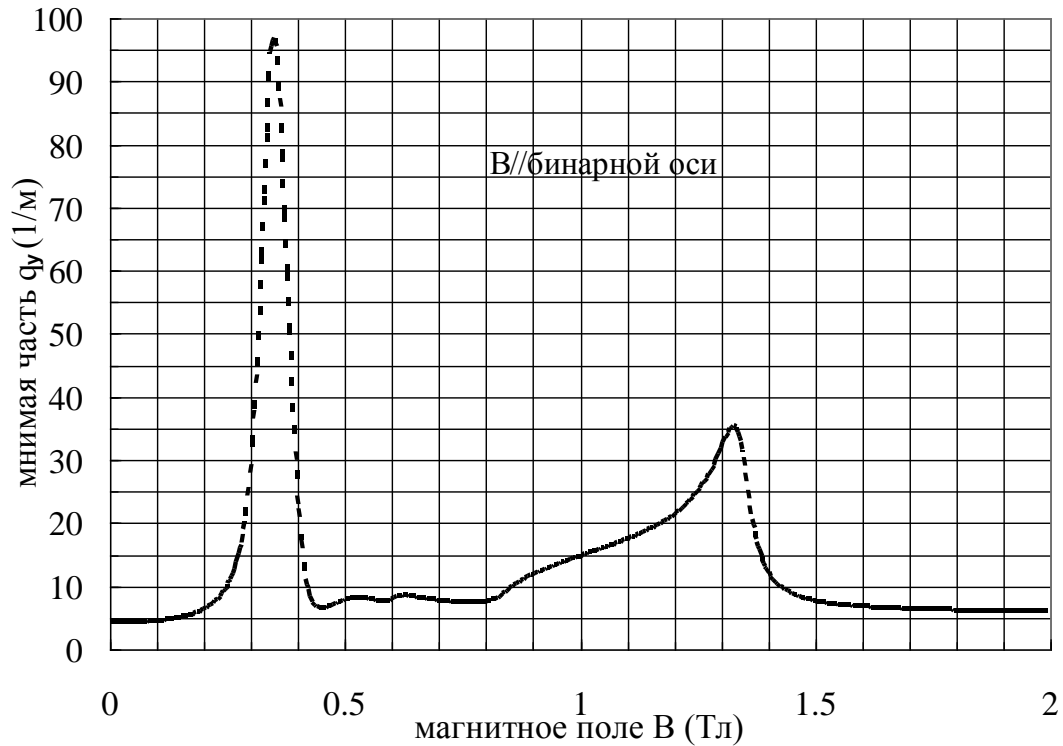


Рис. 3.1.5. Мнимая часть компоненты волнового вектора вдоль оси ОУ для случая, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси. Результат численного расчёта

Таким образом, вместо выражения (3.1.176) получим:

$$T(B) = \frac{\left\{ \frac{\text{sh}\{\alpha'_0(B)D\}}{\alpha'_0(B)} + \frac{\sin\{\alpha''_0(B)D\}}{\alpha''_0(B)} \right\} |E_{+z}^{(0)}(B)|^2}{\left\{ \frac{\text{sh}\{\alpha'_0(0)D\}}{\alpha'_0(0)} + \frac{\sin\{\alpha''_0(0)D\}}{\alpha''_0(0)} \right\} |E_{+z}^{(0)}(0)|^2} \times$$

$$\times \frac{q'_y(B) \cdot \left(\frac{|E_{+x}(B)|^2}{|E_{+z}(B)|^2} + 1 \right)}{q'_y(0)} \times \exp\{2L[q''_y(B) - q''_y(0)]\}. \quad (3.1.178)$$

Отношение $\frac{q'_y(B)}{q'_y(0)} < 1,015$ (рис. 3.1.7) для всего рассматриваемого диапазона магнитных полей, поэтому приравняем его единице. Погрешность, вносимая этим приближением, не превышает 1,5%.

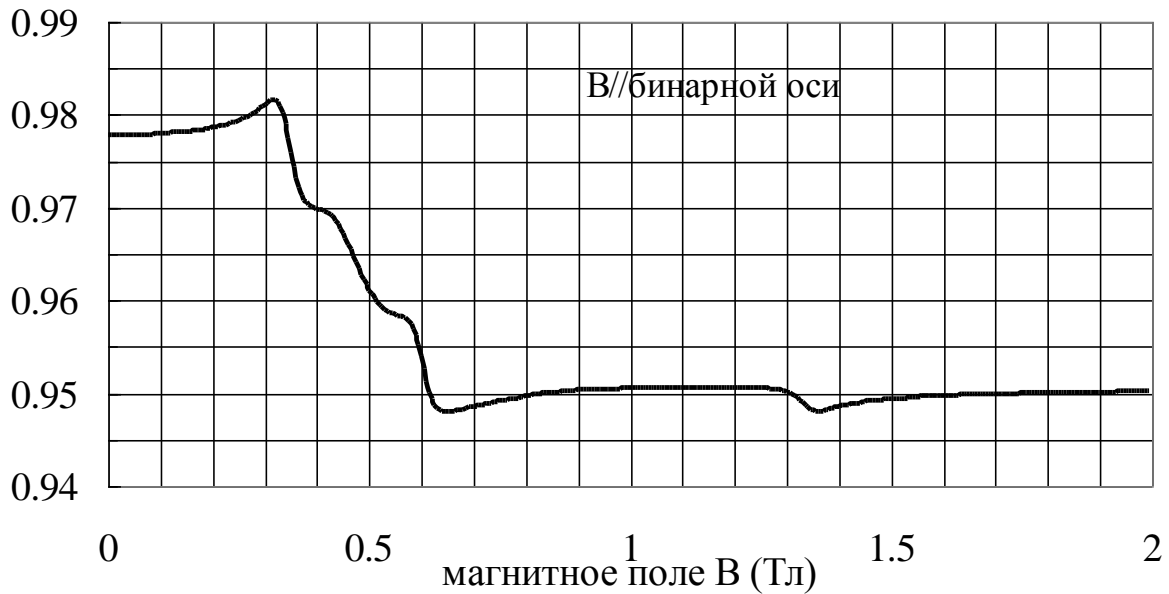


Рис. 3.1.6. Квадрат отношения волнового числа монохроматической электромагнитной волны к действительной части компоненты волнового вектора вдоль оси OY $\left(\frac{k_o}{q'_y(B)}\right)^2$ для случая, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси. Результат численного расчёта

Для того чтобы получить выражение для коэффициента пропускания, которое можно было бы рассчитать, исходя из экспериментальных данных, нужно получить значения для отношения: $\frac{|E_{+z}(B)|^2}{|E_{+z}(0)|^2}$. Рассматривается волна, распространяющаяся в планарном волноводе, которая в отсутствии магнитного поля не имеет $E_{+x}(0)$ компоненты электрического поля. Поэтому квадрат амплитуды электрического поля такой волны можно записать следующим образом:

$$|E_+(0)|^2 = |E_{+y}(0)|^2 + |E_{+z}(0)|^2. \quad (3.1.179)$$

Волна, распространяющаяся в планарном волноводе, при наличии магнитного поля будет иметь отличную от нуля $E_{+x}(B)$ компоненту электрического поля в виду того, что тензор диэлектрической проницаемости висмута в магнитном поле будет иметь отличные от нуля ϵ_{xz} , ϵ_{zx} компоненты. Следовательно, квадрат амплитуды электрического поля такой волны будет иметь вид:

$$|E_+(B)|^2 = |E_{+x}(B)|^2 + |E_{+y}(B)|^2 + |E_{+z}(B)|^2. \quad (3.1.180)$$

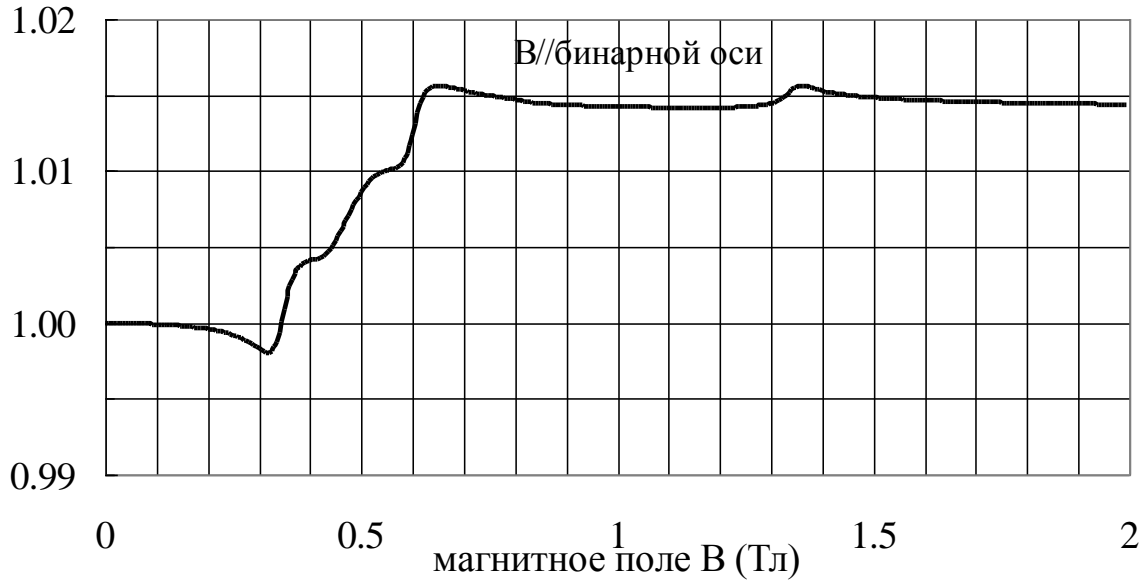


Рис. 3.1.7. Отношение действительной части компоненты волнового вектора вдоль оси ОУ при некотором значении магнитного поля к действительной части компоненты волнового вектора вдоль оси ОУ при нулевом значении

магнитного поля $\frac{q'_y(B)}{q'_y(0)}$ для случая, когда магнитное поле направлено

вдоль бинарной оси. Результат численного расчёта

Считая энергию, подводимую волной извне, постоянной величиной, получим:

$$|\vec{E}_+(B)|^2 = |\vec{E}_+(0)|^2. \quad (3.1.181)$$

Подставив в (3.1.181) выражения (3.1.179) и (3.1.180) легко получить:

$$\frac{|E_{+z}(B)|^2}{|E_{+z}(0)|^2} = \frac{1 + \frac{|E_{+y}(0)|^2}{|E_{+z}(0)|^2}}{1 + \frac{|E_{+x}(B)|^2}{|E_{+z}(B)|^2} + \frac{|E_{+y}(B)|^2}{|E_{+z}(B)|^2}}. \quad (3.1.182)$$

Из соотношения (3.1.47) следует (рис. 3.1.8):

$$\frac{|E_{+y}|^2}{|E_{+z}|^2} = \frac{(\alpha'_0)^2 + (\alpha''_0)^2}{(q'_y)^2 + (q''_y)^2} < 0,055 \quad (3.1.183)$$

во всём интервале рассматриваемых полей. Тогда из (3.1.182) с учётом (3.1.183) следует:

$$\frac{|E_{+z}(B)|^2}{|E_{+z}(0)|^2} = \frac{1,055}{1,055 + \frac{|E_{+x}(B)|^2}{|E_{+z}(B)|^2}} \quad (3.1.184)$$

Поэтому с точностью не хуже 5,5 % можно считать, что

$$\frac{|E_{+z}(B)|^2}{|E_{+z}(0)|^2} \approx \frac{1,055}{1 + \frac{|E_{+x}(B)|^2}{|E_{+z}(B)|^2}} \quad (3.1.185)$$

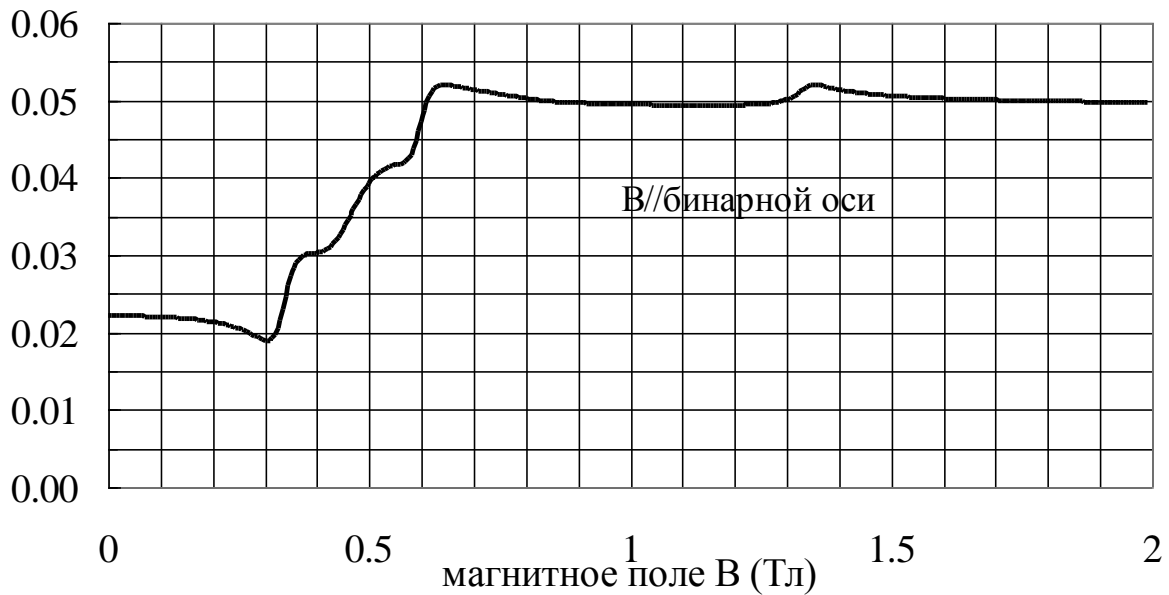


Рис. 3.1.8. Отношение квадрата модуля компоненты волнового вектора монохроматической электромагнитной волны вдоль оси OZ к квадрату модуля компоненты волнового вектора монохроматической электромагнитной волны вдоль оси OY для случая, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси. Результат численного расчёта

Подставив соотношение (3.1.185) в выражение (3.1.178) получим:

$$T(B) = \frac{\left\{ \frac{\text{sh}\{\alpha'_0(B)D\}}{\alpha'_0(B)} + \frac{\sin\{\alpha''_0(B)D\}}{\alpha''_0(B)} \right\}}{\left\{ \frac{\text{sh}\{\alpha'_0(0)D\}}{\alpha'_0(0)} + \frac{\sin\{\alpha''_0(0)D\}}{\alpha''_0(0)} \right\}} \times \quad (3.1.186)$$

$$\times 1,055 \times \exp\{2L[q''_y(B) - q''_y(0)]\}.$$

Первый множитель, в выражении (3.1.186) для коэффициента пропускания планарного волновода, во всей исследуемой области принимает

значение $1.00 \pm 0,02$ (рис. 3.1.9). Поэтому с точностью не менее 0,2% – это константа равна 1. Таким образом

$$T(B) = 1,07 \times \exp\{2L[q_y''(B) - q_y''(0)]\} \quad (3.1.187)$$

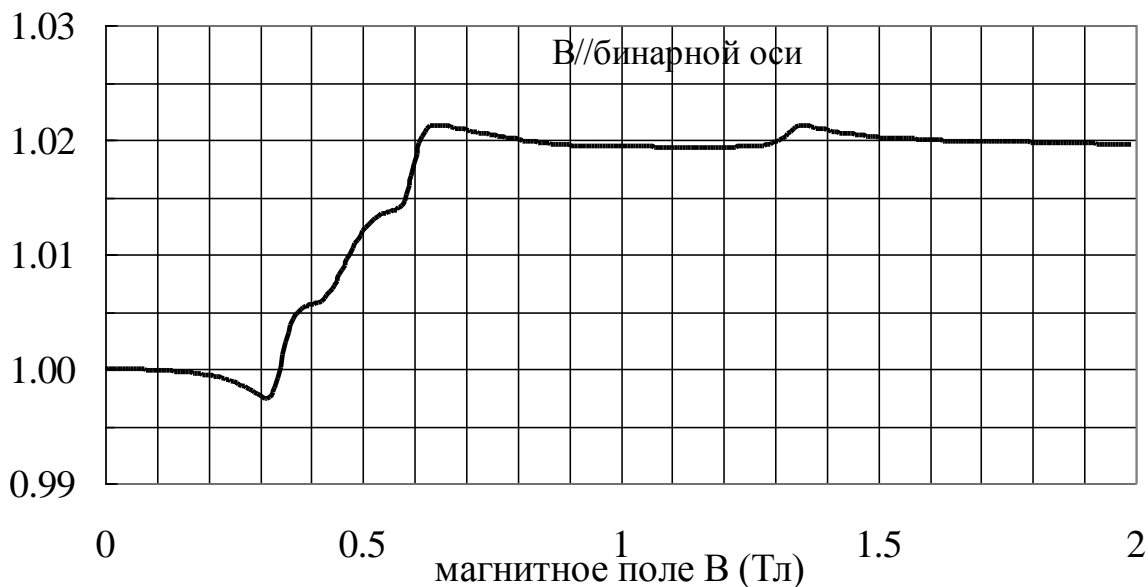


Рис. 3.1.9. Полевая зависимость первого множителя выражения (3.1.186) для случая, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси. Результат численного расчёта

Нами получено достаточно простое выражение для расчёта коэффициента пропускания планарного волновода, чтобы показать его аналитическую зависимость от волнового вектора электромагнитной волны, распространяющейся в ней.

Вопрос о погрешности нашего расчёта остаётся открытым. Однако, надо заметить, что оценки проведённые нами дают величину не более 7%.

§ 3.2. Магнитоплазменные и циклотронные волны в висмуте

Рассмотрение волновых процессов в замагниченной плазме висмута возможно моделированием результатов эксперимента, а затем подробным рассмотрением тех волновых процессов, которые привели к решению поставленной задачи.

В качестве примера мы рассмотрим случай, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси висмута (рис. 2.1.2.). Так как на кристалл наложено магнитное поле, то при некотором магнитном поле можно ожидать циклотронный резонанс, когда частота падающего на кристалл электромагнитного излучения совпадёт с циклотронной частотой

$$\omega_c = \frac{|e|H}{m_c^* c} \quad (3.2.1)$$

где m_c^* – эффективная циклотронная масса носителей заряда.

Дело в том, что электроны вращаются вокруг вектора магнитного поля в соответствие с той изоэнергетической поверхностью, на которой они находятся. Циклотронную массу можно посчитать с помощью выражения [36]:

$$m_c^* = \left(\det \hat{m}^* / m_B^* \right)^{1/2} \cdot m_o^{3/2} \quad (3.2.2)$$

где $\det \hat{m}^*$ – означает детерминант матрицы тензора эффективных масс \hat{m}^* , B – величина индукции магнитного поля.

$m_B^* = (\vec{h} \cdot \hat{m}^* \cdot \vec{h}) \cdot m_o$ – эффективная масса носителей заряда вдоль направления вектора магнитной индукции, m_o – масса свободного электрона, \vec{h} – единичный вектор вдоль направления вектора индукции магнитного поля.

Выражения для циклотронных масс электронов в L точке зоны Бриллюэна и дырок T точке в бинарном, бисекторном и тригональном направлениях имеют вид:

$$m_{bin}^{heavy} = m_o \left(\frac{m_2 m_3 - m_4^2}{m_1 (m_2 m_3 - m_4^2)}, m_2^2 \right)^{1/2} \quad (3.2.3)$$

$$m_{bin}^{light} = 2m_o \left(\frac{m_1 (m_2 m_3 - m_4^2)}{m_1^{1/2} 3m_2} \right)^{1/2}, \quad (3.2.4)$$

$$M_{bin} = m_o (M_1 M_3)^{1/2}, \quad (3.2.5)$$

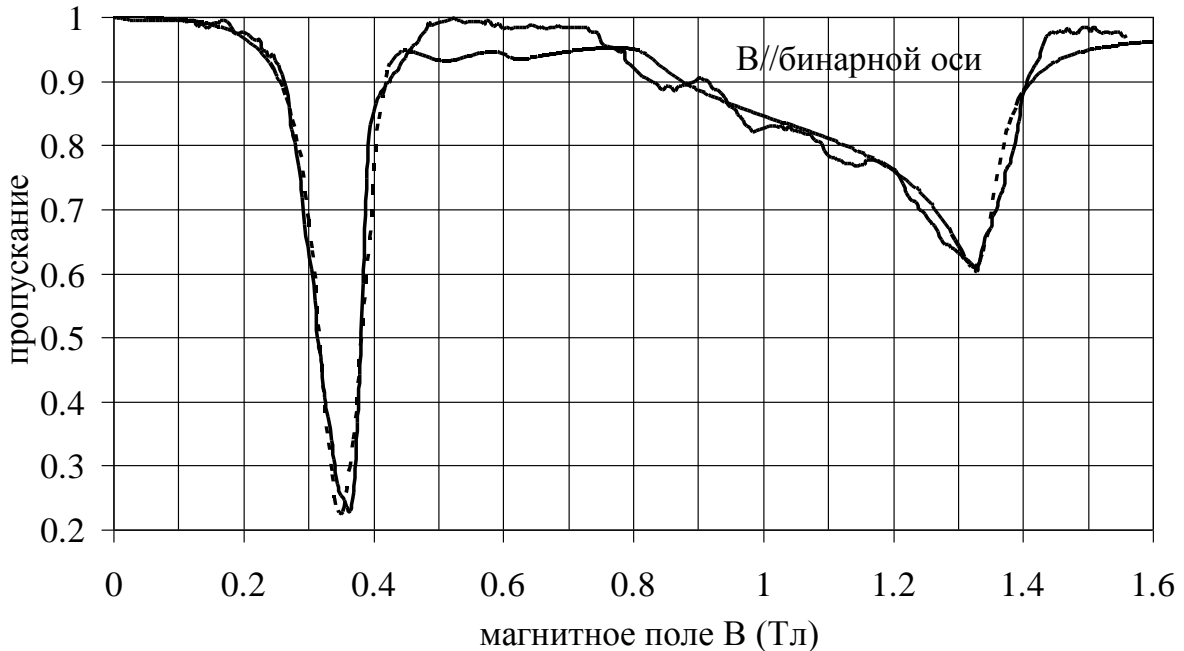


Рис. 3.2.1. Результаты моделирования формы линии магнитооптического эксперимента, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси, экспериментальные результаты (сплошная линия) и оптимальная подгонка (пунктирная линия)

Когда вектор магнитного поля параллелен бинарной оси имеются три типа носителей заряда (3.2.3)- (3.2.5). Это – электроны с эффективными массами различающиеся примерно в 10 раз друг от друга, и дырки с промежуточными эффективными массами. В соответствие с зонной структурой висмута и по результатам численного эксперимента было найдено, что наблюдается сигнал от электронов с наименьшими эффективными массами и дырок (рис. 3.2.1). Долина при $B=0.35$ Тл (рис. 3.2.1) является сигналом от легких электронов, а долина при $B=1,32$ Тл – сигнал от дырок. В численном эксперименте мы последовательно исключали различные компоненты высокочастотного тензора проводимости. Это позволило нам сделать вывод о том, что мы не наблюдаем сигнал от электронов с наибольшими эффективными циклотронными массами.

На рис. 3.2.2-3.2.4 приведены результаты численного эксперимента, когда использовалась та или другая часть компонент тензора электропроводности (2.4.26) - (2.4.33), соответствующая электронам различных экстремумов и Т-дыркам.

Как видно из рис. 3.2.2, вклад тяжёлых бинарных электронов в тензор диэлектрической проницаемости представляет собой константу в рассматриваемом диапазоне магнитных полей, и как следствие, коэффициент пропускания также константа.

Моделирование электронного вклада в тензор удельной электропроводности, представленное на рис. 3.2.2, совершенно точно указывает, что особенность в спектре пропускания планарного волновода в районе $B=0,35$ Тл представляет собой вклад лёгких бинарных электронов.

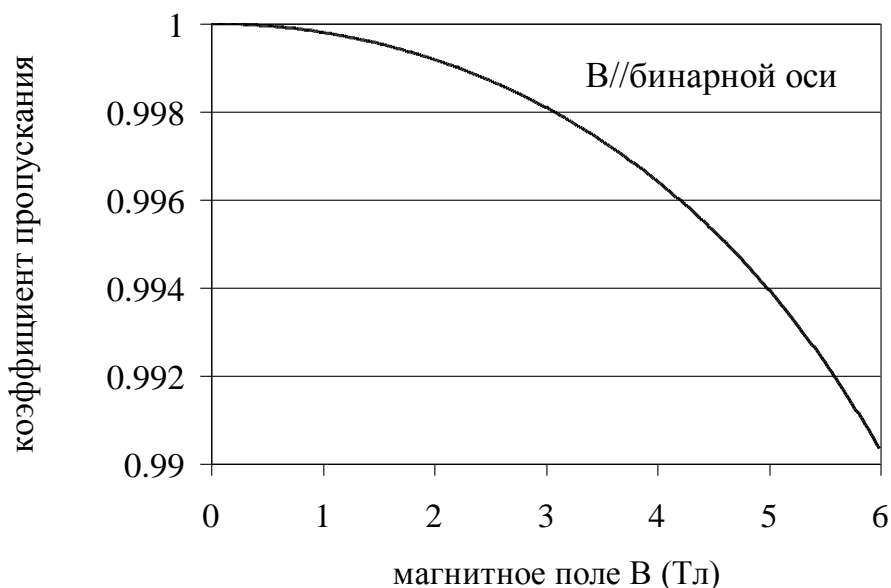


Рис. 3.2.2. Результаты моделирования формы линии магнитооптического эксперимента, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси. В расчёте принималась во внимание только наибольшая эффективная циклотронная масса (3.2.3)

Наконец, когда в расчёте (рис. 3.2.4) принимались во внимание только лёгкие электронные эффективные циклотронные массы (3.2.3) и дырочные – (3.2.5), структура спектра фактически соответствовала наблюдаемому экспериментально. Таким образом были идентифицированы особенности магнитооптического спектра.

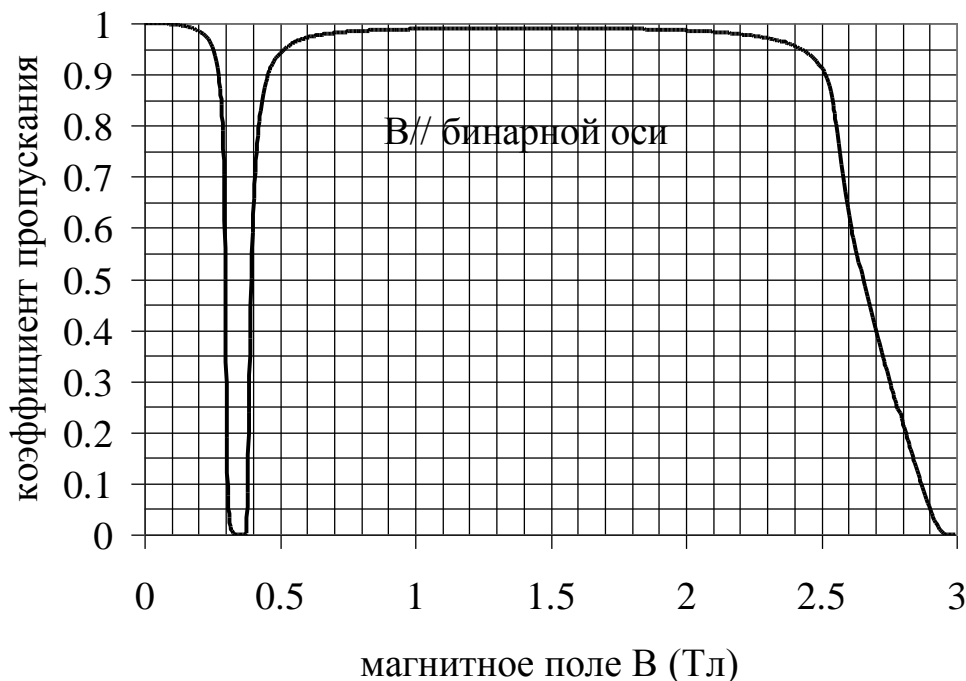


Рис. 3.2.3. Результаты моделирования формы линии магнитооптического эксперимента, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси. В расчёте принималась во внимание только электронные эффективные циклотронные массы (3.2.3), (3.2.4)

Тензор диэлектрической проницаемости для рассматриваемого случая определяется выражениями (2.4.26) - (2.4.33). Из 9 компонент имеется только 5. Дисперсионное уравнение аналогично уравнению (2.3.14). Оно имеет два решения:

$$\varepsilon_o = \varepsilon_{yy}, \quad (3.2.5)$$

где ε_o – диэлектрическая проницаемость так называемой обыкновенной волны Фойгта. По определению и смыслу диэлектрической проницаемости, если мы получили в качестве диэлектрической проницаемости у компоненту тензора диэлектрической проницаемости, это означает, что вектор напряжённости электрического поля электромагнитной волны направлен вдоль оси OY (рис. 3.1.1). При данном направлении вектора напряжённости электрического поля электромагнитной волны и с учётом вида предполагаемого решения (3.1.10), эта волна может распространяться только в OZ направлении нашей системы координат (рис. 3.1.1), т.е. в стенке планарного волновода. Волна является чисто поперечной.

Второе решение дисперсионного уравнения для рассматриваемой конфигурации имеет вид:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xz} \cdot \varepsilon_{zx} / \varepsilon_{zz}, \quad (3.2.6)$$

где ε_e – диэлектрическая проницаемость так называемой необыкновенной волны Фойгта. В соответствии с индексами компонент тензора диэлектрической проницаемости в выражении (3.2.6) эта волна поляризована в XZ плоскости нашей системы координат (рис. 3.1.1). Направление её распространения зависит от соотношений величины мнимых частей α_1 и α_2 компонент волнового вектора вдоль оси OZ с одной стороны и действительной части q_y компоненты волнового вектора вдоль оси OY (рис. 3.1.2).

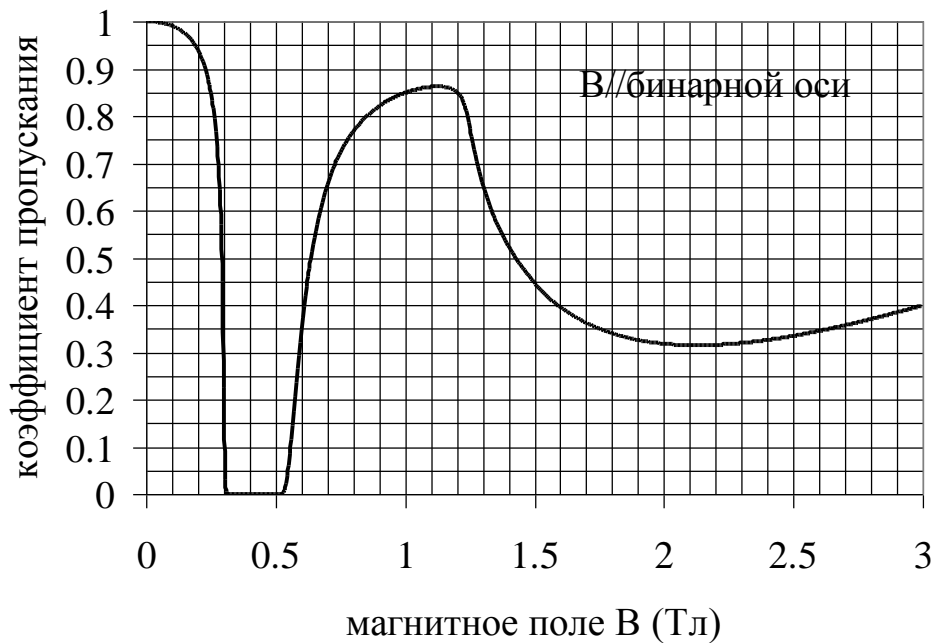


Рис. 3.2.4. Результаты моделирования формы линии магнитооптического эксперимента, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси. В расчёте принимались во внимание только лёгкие электронные эффективные циклотронные массы (3.2.3) и дырочные - (3.2.5)

Следует заметить, что обыкновенная и необыкновенная волны Фойгта аналогичны обыкновенной и необыкновенной волнам в случае двулучепреломляющих кристаллов (см. главу 1 параграф 5 данного пособия) в оптике [2].

На рис. 3.2.5. представлены результаты расчёта действительных частей диэлектрической проницаемости для обыкновенной и необыкновенной волн Фойгта. Расчёт зависимости диэлектрической проницаемости от величины магнитного поля – численная итерационная процедура с выбором двух корней α_1 и α_2 из четырёх. Поэтому, в области, где значения констант распространения вдоль оси OZ α_1 и α_2 близки друг к другу, возможен обмен ветвями расчёта. На рис. 3.2.6 мы как раз, возможно, и наблюдаем обмен ветвями расчёта в районе величины магнитного поля $V=0,43$ Тл. Тем не менее, интенсив-

ные особенности в константах распространения принадлежат одной из двух ветвей α_1 и α_2 , а другая имеет почти постоянное значение в интересующем нас диапазоне магнитных полей.

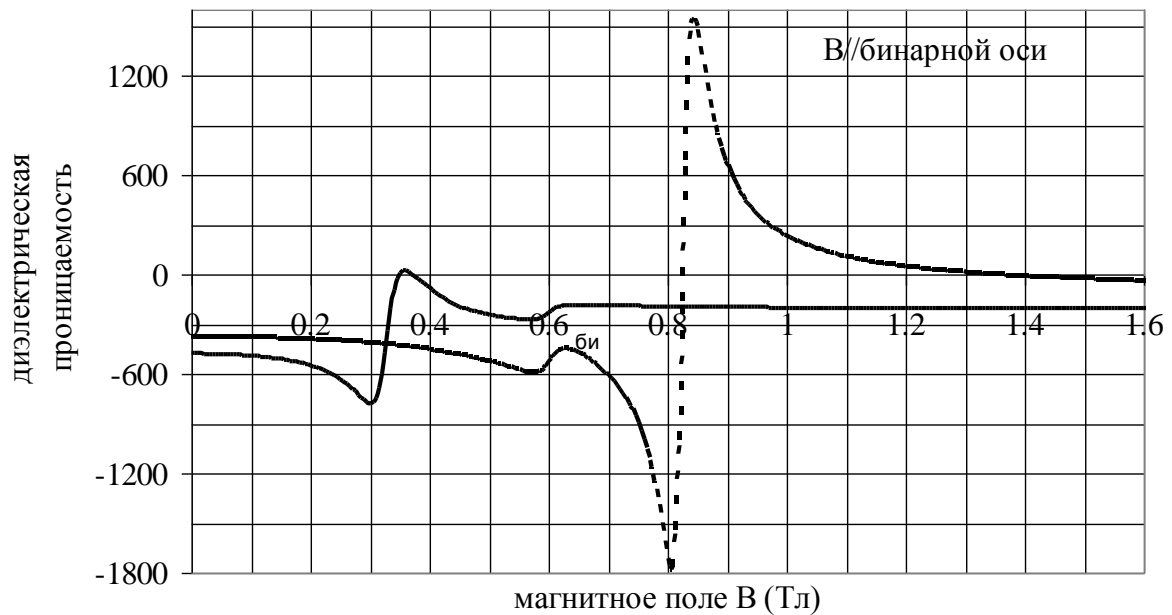


Рис. 3.2.5. Результаты моделирования формы линии магнитооптического эксперимента, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси: реальные части диэлектрической функции для обыкновенной (сплошная линия) и необыкновенной (пунктирная линия) волны Фойгта

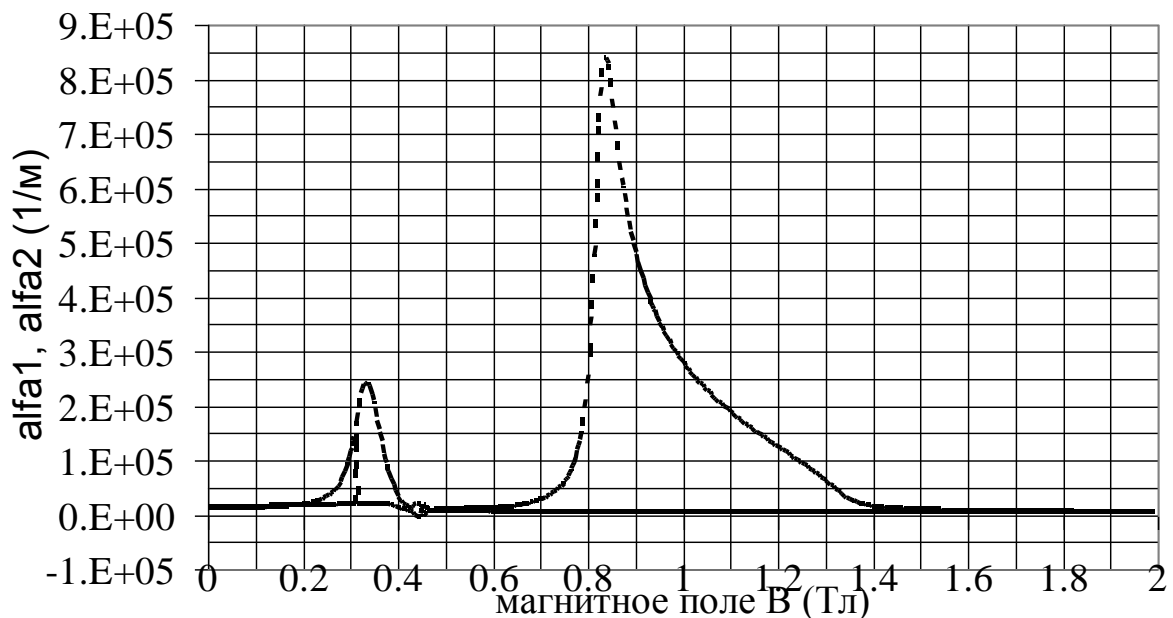


Рис. 3.2.6. Результаты моделирования формы линии магнитооптического эксперимента, когда магнитное поле направлено вдоль бинарной оси: мнимые части α_1 и α_2 компонент волнового вектора вдоль оси OZ. Сплошной линией обозначена одна из констант распространения вдоль оси OZ, а пунктирной – другая

Трудность однозначно ответить на поставленный вопрос заключается в том, что решить задачу аналитически невозможно, так как дисперсионное уравнение представляет собой трансцендентную комплексную функцию (3.1.106). Уменьшение тензора диэлектрической проницаемости (2.4.26) - (2.4.33) до 5 компонент для выбранного нами для анализа направления также не упрощает существенно процесс решения дисперсионного уравнения. Таким образом, обыкновенная волна связана с электронными экстремумами, причём, наклонными (в и с на рис. 2.1.2).

Тогда при магнитном поле в диапазоне от $B=0$ Тл до $B=0,33$ Тл диэлектрическая проницаемость обыкновенной волны отрицательна. Электромагнитная волна полностью отражается от стенок планарного волновода, и коэффициент пропускания должен быть равен единице или очень к единице, что мы и наблюдаем на рис. 3.2.1. Однако, по мере приближения к точке, когда $\epsilon_o = 0$, создаются условия для резонансного поглощения энергии электромагнитной волны, и при $B=0,33$ Тл мы наблюдаем циклотронный резонанс. Этот циклотронный резонанс характеризуется классическими наклонными орбитами прецессии электронов по поверхности постоянной энергии (рис. 2.1.2.). При увеличении магнитного поля диэлектрическая проницаемость становится положительной величиной, волна может распространяться внутрь стенок планарного волновода, и мы наблюдаем резкое уменьшение коэффициента пропускания. Далее диэлектрическая проницаемость, сохраняя положительное значение (рис. 3.2.5), уменьшается, приближаясь к нулевому значению. Наступает, так называемая, диэлектрическая аномалия. Коэффициент пропускания резко возрастает до единицы. При дальнейшем увеличении магнитного поля диэлектрическая проницаемость уменьшается и сохраняет примерно постоянное отрицательное значение. Таким образом, коэффициент пропускания должен быть равен единице. Однако, в действие вступает необыкновенная волна.

Перейдём теперь к рассмотрению необыкновенной волны. В диапазоне магнитных полей от $B=0$ Тл до $B=0,82$ Тл диэлектрическая проницаемость необыкновенной волны отрицательна (рис. 3.2.5). Таким образом, необыкновенная волна не может распространяться в кристалле. В магнитном поле $B=0,82$ Тл диэлектрическая проницаемость (3.2.6) становится равной нулю, и наступает условие циклотронного резонанса. Диэлектрическая проницаемость становится положительной. Волна может распространяться в веществе. Коэффициент пропускания уменьшается и достигает минимума при $B=1,33$ Тл. В этом магнитном поле диэлектрическая проницаемость волны становится отрицательной, волна отражается от стенок планарного волновода и коэффициент пропускания резко возрастает до максимального значения.

В данном случае волна продольно-поперечная, т.е. магнитоплазменная. Так как имеются несколько частот циклотронного резонанса, то должны появиться новые частоты, и в данном случае, резонанс называется гибридным.

Вопросы к главе 3

1. Проведите численные оценки, приводящие к упрощению выражения (3.1.176) до максимально достижимых полей с использованием сверхпроводящих соленоидов. Оцените погрешность данного расчёта.
2. Используя программное обеспечение, созданное авторами пособия, найдите область сходимости решения по первоначальному приближению.
3. Получите выражения (3.2.3) - (3.2.5) для циклотронных масс, когда вектор индукции магнитного поля направлен вдоль бинарной оси. Оцените их значения.
4. Получите выражения для циклотронных масс носителей заряда, когда вектор индукции магнитного поля направлен вдоль биссекторной оси кристаллической решётки висмута. Оцените их значения.
5. Получите выражения для циклотронных масс носителей заряда, когда вектор индукции магнитного поля направлен вдоль тригональной оси кристаллической решётки висмута. Оцените их значения.
6. Используя программное обеспечение, созданное авторами пособия, смоделируйте зависимость коэффициента пропускания планарного волновода принимая в расчёт только дырки, когда вектор индукции магнитного поля направлен вдоль бинарной оси. Интерпретируйте полученный результат.
7. Используя программное обеспечение, созданное авторами пособия, смоделируйте зависимость коэффициента пропускания планарного волновода принимая в расчёт тяжёлые бинарные электроны и дырки, когда вектор индукции магнитного поля направлен вдоль бинарной оси. Интерпретируйте полученный результат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. – М.: Высшая школа. – 1961. – 371 с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, Главн. ред. физ. – мат. лит., 1973. – 719 с.
3. Аскеров Б.М. Кинетические эффекты в полупроводниках. – Л.: Наука, 1970. – 303 с.
4. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. – М. - Л.: Физматгиз, 1962. – С. 420.
5. Fox M. Optical Properties of Solids / Oxford University Press, 2001. – 305 P.
6. Ормолт К.Ф. Структура неорганических веществ. – М. - Л.: Гос. изд. техн. – теоретич. литературы, 1950. – 968 с.
7. Mase S. Elecntonic Structure of Bismuth Type Crystals // J. Phys. Soc. Japan. – 1958. – V. 13. – P. 434–445.
8. Фальковский Л.А. Физические свойства висмута // УФН. – 1968. – Т. 94. – № 1. – С. 3–41.
9. Волков Б.А., Фальковский Л.А. Электронная структура полуметаллов группы V // ЖЭТФ. – 1983. – Т. 86. – № 6(12). – С. 2135–2147.
10. Джонс Г. Теория зон Бриллюэна и электронных состояний в кристаллах. – М.: Мир, 1969. – 264 с.
11. Дорофеев В.А., Фальковский Л.А. Электронная структура висмута. Теория и эксперимент // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 87. – № 6(12). – С. 2202–2213.
12. Эдельман В.С. Форма электронной поверхности Ферми у висмута // ЖЭТФ. – 1973. – Т. 64. – № 5. – С. 1734–1745.
13. Суровцев А.Н. Сравнение влияния олова и свинца на магнитную восприимчивость и явления переноса висмута: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ленингр. гос. педагог. ин-т. – Л., 1973. – 128 с.
14. Цидильковский И.М. Электроны и дырки в полупроводниках. – М.: Наука, 1972. – 640 с.
15. Цидильковский И.М. Зонная структура полупроводников. – М.: Наука, 1978. – 328 с.
16. Эдельман В.С. Свойства электронов в висмуте // УФН. – 1977. – Т. 123. – В. 2. – С. 257–287.
17. Ferreira L.G. Band structure calculations for bismuth, comparision with experiment // J. Phys. Chem. Sol. – 1968. – V. 29. – № 2. – P. 357–365.
18. Golin S. Band structure of bismuth: Pseudopotential approach // Phys. Rev. – 1968. – V. 166. – P. 643–651.
19. Эдельман В.С., Хайкин М.С. Исследование поверхности Ферми висмута методом циклотронного резонанса // ЖЭТФ. – 1965. – Т. 49. – № 1(7). – С. 107–116.
20. Эдельман В.С. Электроны в висмуте // Электроны проводимости. – М., 1985. – С. 229–253.

21. Smith G.E., Baraff G.A., Rowell J.M. The effective g-factor of holes in bismuth // IBM J. – 1964. – P. 228–231.
22. Smith G.E., Baraff G.A., Rowell J.M. Effective g-factor of electrons and holes in bismuth // Phys. Rev. A. – 1968. – V. 135. – № 4. – P. 1118–1124.
23. Брандт Н.Б., Гольшева Г.И., Нгуэн Минь Тху, Судакова М.В., Каширин К.Н., Пономарев Я.Г. Возникновение седловой точки в энергетическом спектре сплавов $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ при инверсии зон с изменением состава x // ФНТ. – 1987. – Т. 13. – № 11. – С. 1209 – 1212.
24. N. Miura, Infrared Magneto-optical Spectroscopy in Semiconductors and Magnetic Materials in Pulsed High Magnetic Fields.-University of Tokyo. – P. 1–150.
25. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 831 с.
26. Brown R.N., Mavroides J.G., Lax V. Magnetoreflexion in Bismuth // Phys. Rev. – 1963. – V. 129. – № 5. – P. 2055–2061.
27. Kane E.O. Band structure of Indium Antimonide // J. Phys. Chem. Sol. – 1956. – V. 1. – P. 249–261.
28. Lax V. A simple nonparabolic model for electrons in bismuth // Bull. Am. Phys. Soc. – 1960. – V. 5. – P. 167.
29. Васильев А.Н. Волны в плазме твёрдого тела // Издательство Московского университета, 1988. – 97 с.
30. Голубев В.Г., Евсеев В.Н., Иванов К.Г., Иванов-Омский В.И. Субмиллиметровая полосковая линия из висмута в магнитном поле // ЖТФ. – 1980. – Т. 50. – С. 1992–1997.
31. Chiu K.W., Quinn J.J. Magneto-Plasma Surface Waves in Solids // II Nuovo Cimento. – 1972. – V. 10. – № 1. – P. 1–20.
32. Wallis R.F., Brion J.J. Theory of surface polaritons in anisotropic dielectric media with application to surface magnetoplasmons in semiconductors // Phys. Rev. B. – 1974. – V. 9. – № 8. – P. 3424–3437.
33. Тамир Т. Волноводная оптоэлектроника. – М.: Мир, 1991. – 575 с.
34. Kanada S., Nakayama M., Tsuji M. Electromagnetic Waves Propagating along the strip Transmission Line in Magnetic Field // J. Phys. Soc. Jap. – 1976. – V. 41. – P. 1954–1961.
35. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 384 с.
36. Vecchi M.P., Pereira J.R., Dresselhaus M.S. Anomalies in the magnetoreflexion spectrum of bismuth in the low-quantum-number limit // Phys. Rev. B. – 1976. – V. 4. – № 2. – P. 298–317.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
ГЛАВА 1. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УЗКОЗОННЫХ ПОЛУ- ПРОВОДНИКОВ И ПОЛУМЕТАЛЛОВ	4
§ 1.1. Электромагнитные волны. Общие сведения	4
§ 1.2. Диэлектрическая постоянная	5
§ 1.3. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Тензор диэлек- трической проницаемости	7
§ 1.4. Металл как система ионизированных атомов и свободно дви- жущихся электронов	15
§ 1.5. Двойное лучепреломление формы	17
Вопросы к главе 1	18
ГЛАВА 2. КРИСТАЛЛ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ	20
§ 2.1. Энергетическая структура полуметалла висмута	20
§ 2.2. Анизотропия зонной структуры висмута	22
§ 2.3. Тензор диэлектрической проницаемости в магнитном поле	27
§ 2.4. Расчёт компонент тензора высокочастотной электропроводности в наиболее общем случае	35
Вопросы к главе 2	40
ГЛАВА 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАНАРНОМ ВОЛНОВОДЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ	41
§ 3.1. Волновой процесс в планарном волноводе	41
§ 3.2. Магнитоплазменные и циклотронные волны в висмуте	73
Вопросы к главе 3	80
Список литературы	81

Учебное издание

**Олег Викторович Кондаков
Елена Владимировна Кондакова**

**ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ
В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ
АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУМЕТАЛЛА**

Учебное пособие

*Технический редактор – О.А. Ядыкина
Компьютерный набор и верстка – О.В. Кондаков
Книга печатается в авторской редакции*

Лицензия на издательскую деятельность
ИД № 06146. Дата выдачи 26.10.01.

Формат 60 x 84 1/16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 5,3 Уч.-изд.л. 5,1
Тираж 300 экз. Заказ 151

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1