

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

Е. В. Игонина

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ
КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ**

Учебное пособие

Елец – 2020

УДК 004.942

ББК 22.161

И 26

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 28.01.2020 г., протокол № 1

Рецензенты:

М.А. Крутиков, кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики, информационных технологий и защиты информации ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского,

А.В. Сидоров, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, радиотехники и электроники ЕГУ им. И.А. Бунина.

Е.В. Игонина

И 26 Исследование устойчивости динамических моделей с помощью систем компьютерной математики: учебное пособие. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2020. – 83 с.

ISBN 978-5-00151-167-0

Учебное пособие посвящено вопросам исследования устойчивости динамических моделей с помощью системы компьютерной математики Maxima. В нем представлены основные аспекты теории устойчивости движения в смысле А.М. Ляпунова, дано подробное описание метода построения фазового портрета динамической системы и его компьютерная реализация с применением функциональных возможностей среды Maxima. Рассмотрены примеры использования систем компьютерной математики в исследованиях конкретных динамических моделей: модель брюсселяратора, модель Лотки-Вольтерры, модель системы управления перевернутым маятником.

Предназначено для студентов направлений подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.02 Информационные системы и технологии.

УДК 004.942

ББК 22.161

ISBN 978-5-00151-167-0

© Елецкий государственный
университет им. И.А. Бунина, 2020

ВВЕДЕНИЕ

Важным аспектом проектирования моделей системной динамики является проведение процедур компьютерного моделирования и оценки устойчивости моделей по отношению к внешним возмущающим факторам. Требование устойчивости является одним из главных требований, предъявляемых к моделируемой системе.

Компьютерное моделирование представляет собой один из эффективных методов изучения сложных систем. Компьютерные модели отличаются простотой и удобством в исследовании из-за их возможности проведения вычислительных экспериментов и получения графического представления. Если реальные эксперименты невозможны или затруднены в силу физических препятствий или же обнаруживается непредсказуемый результат, тогда компьютерные модели становятся особенно актуальны. Такие характеристики компьютерных моделей, как логичность и формализованность позволяют выявить основные факторы, которые определяют свойства изучаемого объекта-оригинала, в частности, исследовать отклик моделируемой динамической системы на изменения ее параметров и начальных условий.

Для проведения компьютерного моделирования используют различные программные среды, математические и инженерные прикладные пакеты или системы компьютерной математики (СКМ). Наиболее известными и лидерами в этой области являются Maple, Deive, MatLab, Mathematica, Maxima, MathCad. Учитывая разнообразие программных сред возникает вопрос о правильности целесообразного выбора программной среды, позволяющей провести моделирование и адекватные исследования проектируемой системы.

Стоит также отметить, что дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы, решаются аналитически в явном виде редко. Использование ЭВМ дает приближенное решение дифференциальных уравнений на конечном временном отрезке, что не позволяет понять поведение фазовых траекторий в целом. Поэтому важную роль приобретают методы качественного исследования дифференциальных уравнений.

Ответ на вопрос о том, какие режимы поведения могут устанавливаться в данной системе, можно получить из так называемого фазового портрета системы – совокупности всех ее траекторий, изображенных в пространстве фазовых переменных (фазовом пространстве). Среди этих траекторий имеется некоторое число основных, которые и определяют качественные свойства системы. К ним относятся, прежде всего, точки равновесия, отвечающие стационарным режимам системы, и замкнутые траектории (предельные циклы), отвечающие режимам периодических колебаний. Будет ли режим устойчив или нет, можно судить по поведению соседних траекторий: устойчивое равновесие или цикл притягивает все близкие траектории, неустойчивое отталкивает хотя бы некоторые из них.

Таким образом, «фазовая плоскость, разбитая на траектории, дает легко обозримый «портрет» динамической системы, она дает возможность сразу, од-

ним взглядом охватить всю совокупность движений, могущих возникнуть при всевозможных начальных условиях» (А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин Теория колебаний).

Данное учебное пособие посвящено вопросам исследования устойчивости динамических моделей с помощью системы компьютерной математики *Mathia*. В нем представлены основные аспекты теории устойчивости движения в смысле А.М. Ляпунова, дано подробное описание метода построения фазового портрета динамической системы и его компьютерная реализация с применением функциональных возможностей среды *Mathia*. Рассмотрены примеры использования систем компьютерной математики в исследованиях конкретных динамических моделей: модель брюсселятора, модель Лотки-Вольтерры, модель системы управления перевернутым маятником.

В первой части пособия описываются основные понятия и методы исследования теории устойчивости динамических систем в смысле А.М. Ляпунова. Дано понятие фазовой плоскости, фазового портрета, приведена классификация типов точек покоя. Представлены алгоритмы построения фазовых портретов однородной и неоднородной линейных систем дифференциальных уравнений и приведены примеры их реализации. Даны упражнения для самостоятельного решения.

Во второй части данного учебного пособия проведен сравнительный анализ современных компьютерных систем. Дано краткое описание инструментария и функциональные возможности программной среды *Mathia*. Описано построение фазовых траекторий и поля направлений дифференциальных уравнений в *Mathia*. Приведены примеры использования *Mathia* в исследованиях устойчивости моделей динамических систем: модель брюсселятора, модель Лотки-Вольтерры, модель системы управления перевернутым маятником. Предложены итоговые тестовые задания.

Пособие предназначено для студентов направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, также данное пособие будет интересно и полезно студентам IT-направлений: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.02 Информационные системы и технологии.

ЧАСТЬ 1. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ

1.1. Основные понятия и методы исследования устойчивости динамических систем

Динамическая система – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени. Динамические системы представляются динамическими моделями, которые содержат информацию о поведении системы и ее составных частей. Для описания поведения обычно используются записанные в виде формул, схем или компьютерных программ соотношения, позволяющие вычислить параметры системы и ее объектов, как функции времени. Зачастую динамическая модель представляется в виде системы автономных дифференциальных уравнений. Эволюцию динамической системы можно наблюдать в пространстве состояний системы.

Способность динамической системы возвращаться в прежнее состояние равновесия после окончания ее действия возмущающего воздействия, нарушившего это равновесие, называется **устойчивостью**. Если при отсутствии влияния на систему возмущающих факторов ошибка регулирования стремится к нулю, то система находится в состоянии равновесия. Устойчивость модели является одним из главных ее свойств, характеризующим ее способность обеспечить результаты расчетов (выходные данные), отклоняющиеся от идеальных данных на допустимо малую величину. При этом в качестве идеальных подразумеваются выходные данные, получаемые в таких условиях, когда модель реализует записанные в ней математические зависимости абсолютно без помех; соответственно, реальные выходные данные получают в условиях определенных возмущающих воздействий. Подробно об устойчивости рассмотрено в работах [2-4].

Рассмотрим понятие устойчивости для динамических систем, описываемых дифференциальными линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Основы современного математического аппарата теории устойчивости заложены А.М. Ляпуновым в его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.) [3]. Именно А.М. Ляпунов дал строгое определение устойчивости решения. Отсутствие такого определения часто приводило к недоразумениям, так как решение могло оказаться устойчивым в смысле одного определения и неустойчивым в смысле другого. Определение А.М. Ляпунова оказалось настолько удачным, что оно принято всеми как основное.

Приведем примеры определений устойчивости для линейных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами из работы [2].

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

Теорема 1 (Об устойчивости линейной системы). Линейная однородная система (1.1) с постоянной матрицей A устойчива тогда и только тогда, когда:

- все собственные значения матрицы A лежат в замыкании левой полуплоскости: $Re \lambda_j \leq 0, j = 1, \dots, m$;
- размерность всех клеток Жордана, отвечающих лежащим на мнимой оси собственным значениям $\lambda_k (Re \lambda_k = 0)$, равна единице.

Теорема 2 (Об асимптотической устойчивости линейной системы). Линейная однородная система (1) с постоянной матрицей A асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A лежат строго в левой полуплоскости: $Re \lambda_j < 0, j = 1, \dots, m$.

Теорема 3 (Об экспоненциальной неустойчивости линейной системы). Линейная однородная система (1) с постоянной матрицей A экспоненциально неустойчива тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно собственное значение λ_* матрицы A , лежащее в правой полуплоскости: $Re \lambda_* > 0$.

Теорема 4 (О степенной неустойчивости линейной системы). Линейная однородная система (1.1) с постоянной матрицей A имеет степенную неустойчивость тогда и только тогда, когда

- все собственные значения матрицы A лежат в замыкании левой полуплоскости: $Re \lambda_j \leq 0, j = 1, \dots, m$;
- существует хотя бы одно собственное значение λ_* , лежащее на мнимой оси ($Re \lambda_* = 0$), которому отвечает клетка Жордана размерности ≥ 2 .

Приведем список самых распространённых методов анализа устойчивости динамических систем [2]:

- 1) метод показателей Ляпунова (первый метод Ляпунова);
- 2) метод функций Ляпунова (второй метод Ляпунова);
- 3) метод фазового пространства;
- 4) метод бифуркаций (метод робастности системы);
- 5) метод анализа устойчивости В.М. Попова (критерий В.М. Попова);
- 6) круговой метод анализа устойчивости (критерий Я.З. Цыпкина);
- 7) метод анализа устойчивости на основе свойств векторных полей состояний;
- 8) метод конусности;
- 9) методы, базирующиеся на понятии вход-выходной устойчивости;
- 10) методы, базирующиеся на понятии гиперустойчивости в Смысле В.М. Попова;
- 11) эвристические методы анализа устойчивости системы;
- 12) эвристический метод Ванга анализа устойчивости системы;
- 13) метод Такаги-Суджено анализа устойчивости системы;
- 14) метод нечетких функций Ляпунова анализа устойчивости;

15) методы, базирующиеся на понятиях индекса А. Пуанкаре и дивергенции векторного поля.

Из выше перечисленных методов не менее эффективным является метод исследования устойчивости системы с помощью фазового пространства (построения фазовых портретов). Сущность указанного метода заключается в том, что по дифференциальным уравнениям отдельных участков нелинейного элемента строят соответствующие фазовые портреты на плоскости. Данный метод позволяет изучить свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений без нахождения самих решений.

Метод фазового пространства является точным и наглядным для получения качественных выводов об анализе систем линейных дифференциальных уравнений. Однако дифференциальные уравнения, задающие математические модели динамических систем, обычно бывают нелинейными. В таком случае для исследования устойчивости их решений проводят линеаризацию уравнений [2]. В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что возмущения координат и скоростей во все время движения остаются малыми, и поэтому в дифференциальных уравнениях удерживаются только члены первого порядка малости. Членами второго и более высоких порядков малости пренебрегают. Таким образом, линеаризованные дифференциальные уравнения являются линейными относительно возмущений координат и скоростей. Линеаризованные уравнения называют также уравнениями первого приближения.

Следует также отметить, что метод исследования устойчивости систем, основанный на построении фазовых портретов, применим только к системам дифференциальных уравнений 2-го порядка. Хотя в настоящее время имеют место работы, в которых данный метод используется для исследования систем 3-го и 4-го порядка [5]. Для уравнений более высокого порядка этот метод применяется очень редко, так как теряется наглядность.

Рассмотрим кратко математическую составляющую данного метода. В следующем виде обычно берутся уравнения исследуемой системы:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Метод фазового пространства заключается в исследовании характера свободных движений нелинейных динамических систем типа (1.2) путем построения их фазовых траекторий на фазовой плоскости [6].

Ненулевыми начальными условиями называются свободные движения динамических систем. Обозначим, что $x_0 = [x_{10} \ x_{20}]^T$ – вектор начальных условий.

Это означает, что $x(t)|_{t=0} = x_0$, где $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

В общем случае, фазовое пространство, или пространство состояний – это линейное n -мерное пространство, где компоненты вектора состояний являются координатами.

Фазовая точка плоскости, или изображающая точка соответствует состоянию равновесия в некоторый момент времени t . При изменении времени t от 0 до ∞ след изображающей точки на фазовой плоскости называется **фазовой траекторией**.

Точка называется начальной, если она соответствует определенным начальным условиям или моменту времени $t = t_0$. **Фазовой скоростью** называется вектор $v = [\dot{x}_1 \dot{x}_2]^T$, который определяет направление движения изображающей точки в каждый момент времени. Особой точкой называется такая точка фазовой плоскости, в которой фазовая скорость равна нулю.

Различают два типа фазовых траекторий: **замкнутые** (соответствуют периодическим движениям системы) и **разомкнутые** (соответствуют непериодическим движениям системы). Разомкнутые фазовые траектории начинаются в начальной точке и уходят либо в бесконечность, либо к некоторой особой точке, либо к замкнутой траектории [6].

Фазовым портретом системы называется совокупность фазовых траекторий и других элементов фазовой плоскости, которые отражают свойства нелинейной системы. С помощью фазовых портретов, без дополнительных выкладок, можно произвести следующие выводы о таких свойствах системы, как [6]:

- 1) количество положений равновесия системы;
- 2) характер движений системы в окрестности каждого положения равновесия;
- 3) устойчивость положений равновесия;
- 4) наличие или отсутствие периодических движений системы;
- 5) наличие или отсутствие областей с различным характером фазовых траекторий и т.д.

В зависимости от соотношения коэффициентов линейной дифференциальной системы второго порядка имеют место различные типы фазовых портретов, соответствующих различным видам свободного движения.

1.2. Фазовые портреты линейных динамических систем

Линейная автономная однородная динамическая система

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (1.3)$$

Координатную плоскость xOy называют ее *фазовой плоскостью*. Через любую точку плоскости проходит одна и только одна фазовая кривая (траектория). В системе (1.3) возможны три типа фазовых траекторий:

- точка,
- замкнутая кривая,
- незамкнутая кривая.

Точка на фазовой плоскости соответствует стационарному решению (положению равновесия, точке покоя) системы (1.3), замкнутая кривая – периодическому решению, а незамкнутая – непериодическому.

Положения равновесия динамической системы

Положения равновесия системы (1.3) найдем, решая систему:

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Система (1.3) имеет единственное нулевое положение равновесия, если определитель матрицы системы:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0.$$

Если же $\det A = 0$, то, кроме нулевого положения равновесия, есть и другие, так в этом случае система (1.4) имеет бесконечное множество решений.

Качественное поведение фазовых траекторий (тип положения равновесия) определяется собственными числами матрицы системы.

Классификация точек покоя

Собственные числа матрицы системы найдем, решая уравнение:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (1.5)$$

Заметим, что $a + d = \text{tr } A$ (след матрицы) и $ad - bc = \det A$.

Классификация точек покоя в случае, когда $\det A \neq 0$, приведена в таблице:

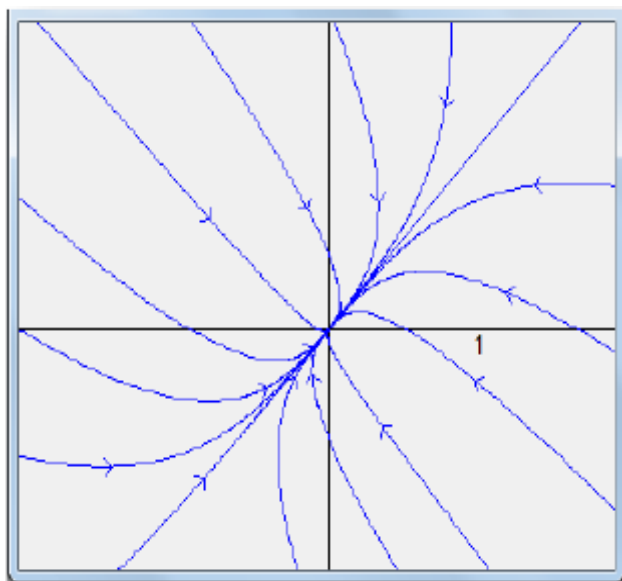
Корни уравнения (1.5)	Тип точки покоя
λ_1, λ_2 – вещественные, одного знака ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$)	Узел
λ_1, λ_2 – вещественные, разного знака ($\lambda_1, \lambda_2 < 0$)	Седло
λ_1, λ_2 – комплексные, $\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 \neq 0$	Фокус
λ_1, λ_2 – комплексные, $\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 0$	Центр

Собственные значения матрицы системы (1.3) однозначно определяют характер устойчивости положений равновесия:

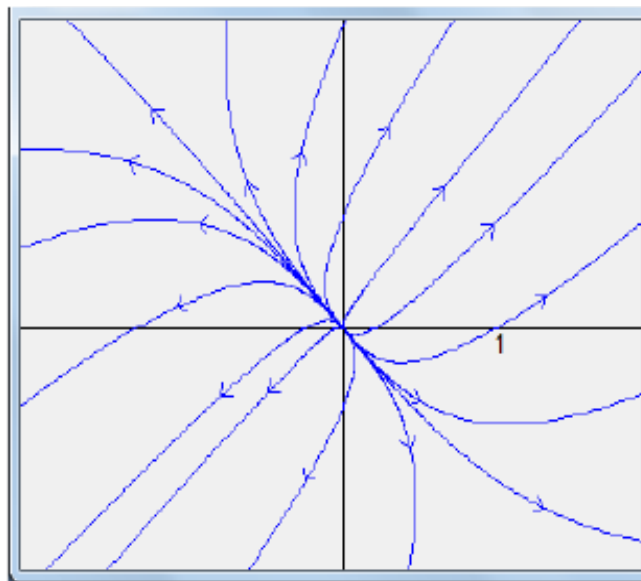
Условие на вещественную часть корней уравнения (1.5)	Тип точки и характер устойчивости
Если вещественные части всех корней уравнения (1.5) отрицательны, то точка покоя системы (1.3) асимптотически устойчива.	Устойчивый узел, устойчивый фокус
Если вещественная часть хотя бы одного корня уравнения (1.5) положительна, то точка покоя системы (1.3) неустойчива.	Седло, неустойчивый узел, неустойчивый фокус
Если уравнение (1.5) имеет чисто мнимые корни, то точка покоя системы (1.3) устойчива, но не асимптотически.	Центр

Фазовые портреты

Устойчивый узел
 $\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 < 0; \lambda_2 < 0$

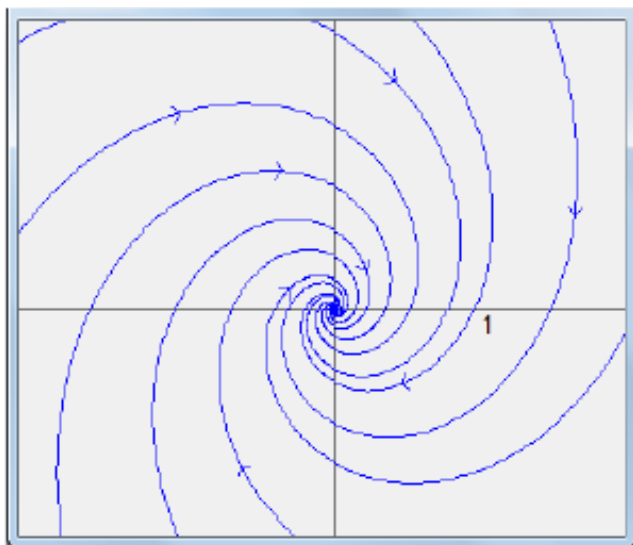


Неустойчивый узел
 $\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$

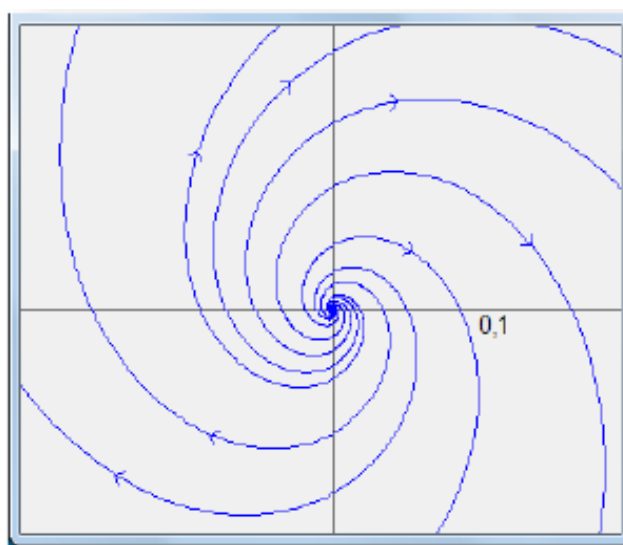


Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Устойчивый фокус
 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0, \beta \neq 0$

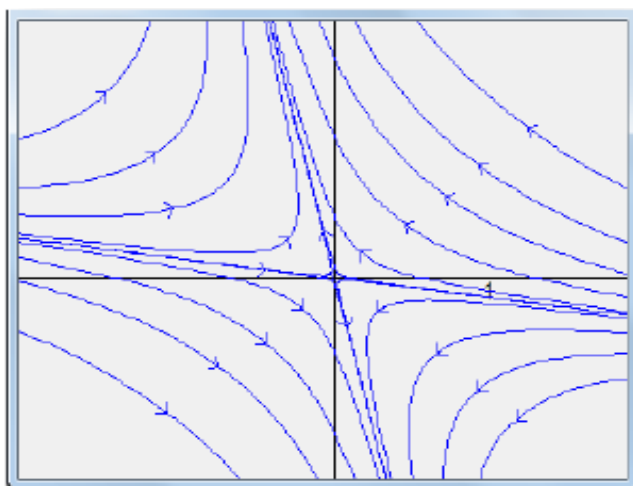


Неустойчивый фокус
 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0, \beta \neq 0$

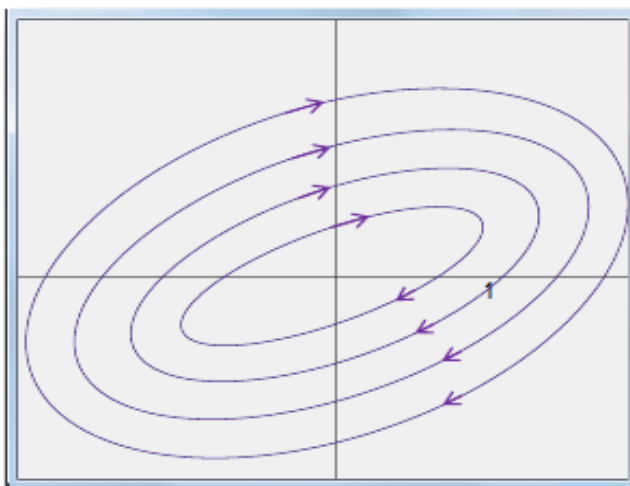


Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Седло
 $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$



Центр
 $\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \beta \neq 0$



Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Дикритический узел

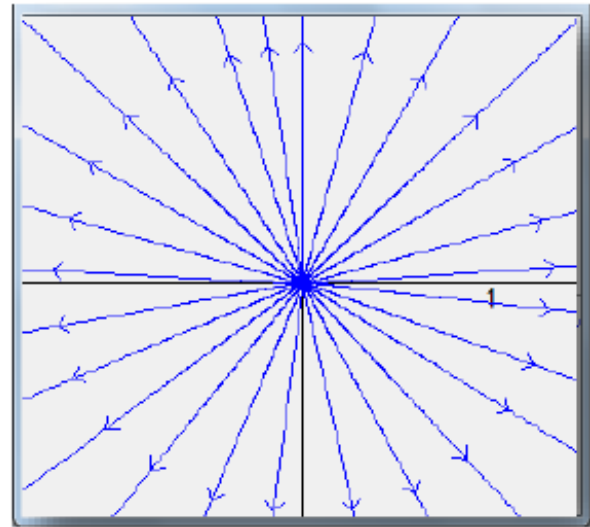
имеет место для систем вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax, \\ \frac{dy}{dt} = ay, \end{cases}$$

когда $a \neq 0$. При этом $\lambda_1 = \lambda_2 = a$.

Если $a < 0$, то узел асимптотически устойчив, если $a > 0$, то – неустойчив.

Неустойчивый дикритический узел

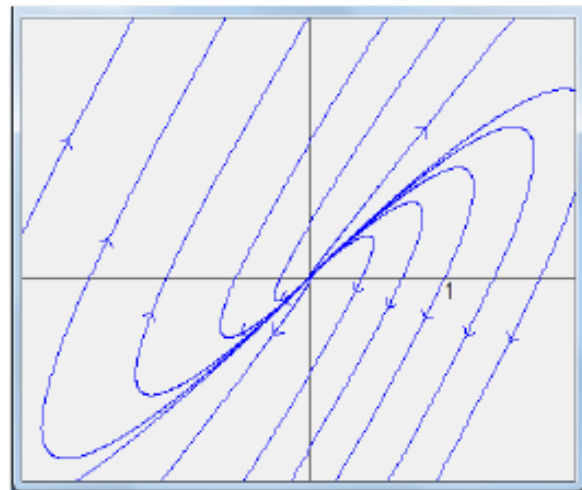
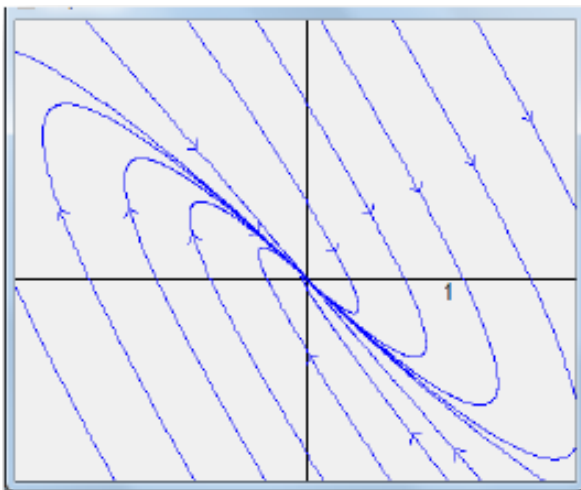


Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Вырожденный узел, если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ и в системе (1) $b^2 + c^2 \neq 0$.

Если $\lambda_1 < 0$, то устойчивый

Если $\lambda_1 > 0$, то неустойчивый



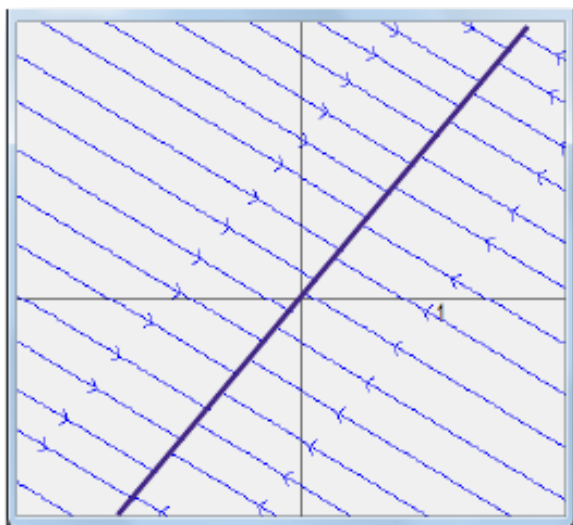
Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Если $\det A = 0$, то система (1.3) имеет бесконечное множество положений равновесия. При этом возможны три случая:

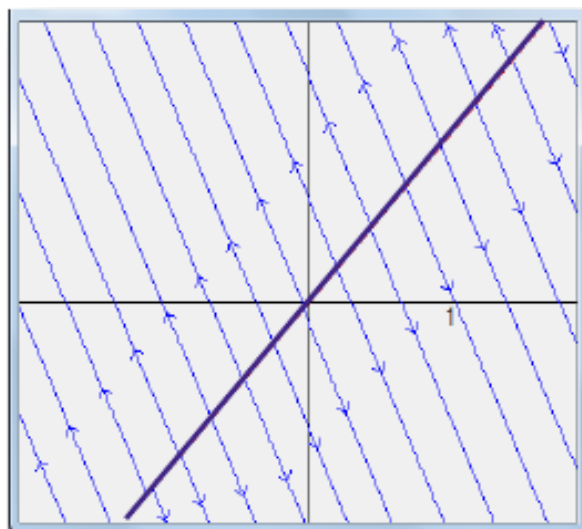
	Корни уравнения (1.5)	Определение точек покоя	Геометрическое место точек покоя
1	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$	Система (1.4) равносильна одному уравнению вида $\alpha x + \beta y = 0$	Прямая на фазовой плоскости: $\alpha x + \beta y = 0$
2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	Система (1.4) равносильна числовому равенству $0 = 0$	Вся фазовая плоскость
3	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	Система (1.4) равносильна уравнению $\alpha x + \beta y = 0$	Прямая $\alpha x + \beta y = 0$

Во втором случае любая точка покоя устойчива по Ляпунову. В первом же случае только, если $\lambda_2 < 0$.

Прямая устойчивых точек покоя
 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$



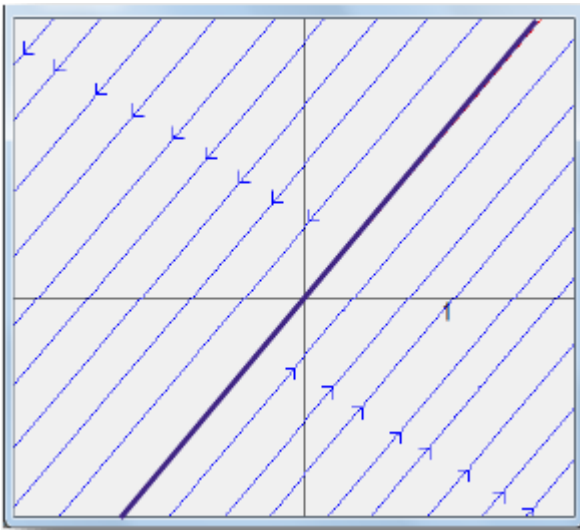
Прямая неустойчивых точек покоя
 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$



Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Прямая неустойчивых точек покоя

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$



Фазовые прямые будут параллельны прямой точек покоя ($\alpha x + \beta y = 0$), если первый интеграл уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by}$.

Имеет вид $\alpha x + \beta y = C$, где C – произвольная постоянная

Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Можно определить тип точки покоя и характер ее устойчивости, не находя собственных значений матрицы системы (1.3), а зная только ее след $tr A$ и определитель $\det A$.

Определитель матрицы	След матрицы	Тип точки покоя
$\det A < 0$		Седло
$0 < \det A < \left(\frac{tr A}{2}\right)^2$	$tr A < 0$	Устойчивый узел (УУ)
	$tr A > 0$	Неустойчивый узел (НУ)
$\det A = \left(\frac{tr A}{2}\right)^2$	$tr A < 0$	Дикритический или вырожденный УУ
	$tr A > 0$	Дикритический или вырожденный НУ
$\det A > \left(\frac{tr A}{2}\right)^2$	$tr A < 0$	Устойчивый фокус (УФ)
	$tr A = 0$	Центр
	$tr A > 0$	Неустойчивый фокус (НФ)

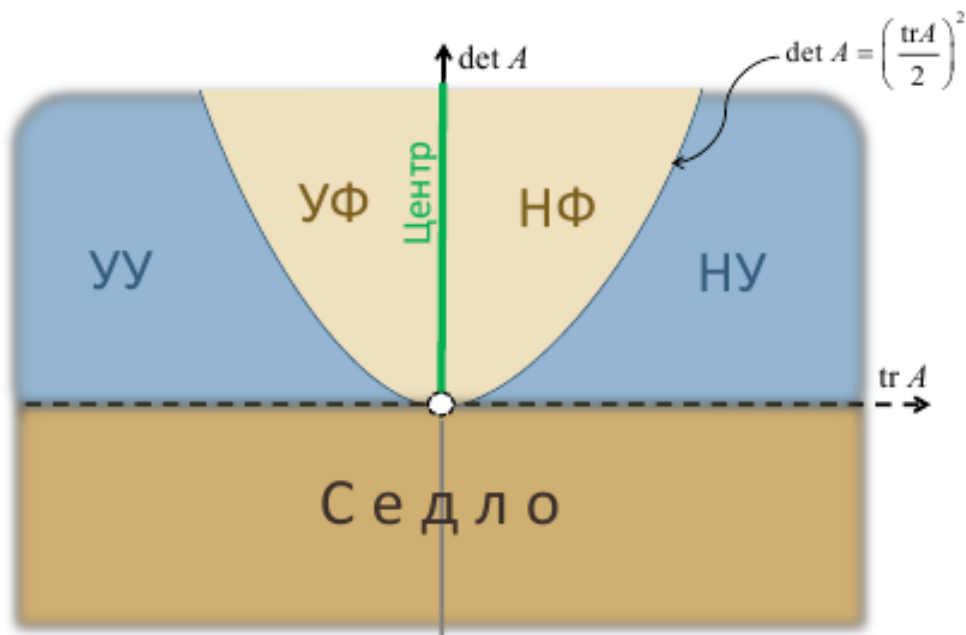


Рис. 1.1. Бифуркационная диаграмма

Алгоритм построения фазового портрета ЛДС

1. Определить положения равновесия, решив систему уравнений:

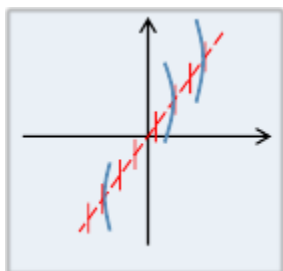
$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0, \end{cases}$$

2. Найти собственные значения матрицы системы, решив характеристическое уравнение:

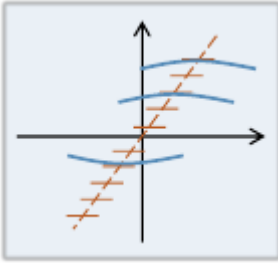
$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

3. Определить тип точки покоя и сделать вывод об устойчивости.
4. Найти уравнения главных изоклин – горизонтальной и вертикальной, и построить их на фазовой плоскости.
5. Если положение равновесия является седлом или узлом, найти те фазовые траектории, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат.
6. Нарисовать фазовые траектории.
7. Определить направление движения по фазовым траекториям, указав его стрелками на фазовом портрете.

Главные изоклины



Вертикальная изоклина (ВИ) – совокупность точек фазовой плоскости, в которых касательная, проведенная к фазовой траектории, параллельна вертикальной оси. Так как в этих точках фазовых траекторий $x'(t) = 0$, то для ЛДС (1) уравнение ВИ имеет вид: $ax + by = 0$.



Горизонтальная изоклина (ГИ) – совокупность точек фазовой плоскости, в которых касательная к фазовой траектории параллельна горизонтальной оси. Так как в этих точках фазовых траекторий $y'(t) = 0$, то для ЛДС (1) уравнение ГИ имеет вид: $cx + dy = 0$.

Заметим, что точка покоя на фазовой плоскости – это пересечение главных изоклин. Вертикальную изоклину на фазовой плоскости будем помечать вертикальными штрихами, а горизонтальную – горизонтальными.

Фазовые траектории

Если положение равновесия является **седлом** или **узлом**, то существуют фазовые траектории, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат.

Уравнения таких прямых можно искать в виде $y = kx$. Подставляя $y = kx$ в уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

для определения k получим:

$$k = \frac{c + kd}{a + bk} \Leftrightarrow bk^2 + (a - d)k - c = 0. \quad (1.6)$$

Дадим описание фазовых траекторий в зависимости от количества и кратности корней уравнения (1.6).

Корни уравнения (1.6)	Тип точки покоя	Описание фазовых траекторий
$k_1 \neq k_2$	Седло	Прямые $y = k_1x$ и $y = k_2x$ называют сепаратрисами . Остальные фазовые траектории – это гиперболы, для которых найденные прямые являются асимптотами
	Узел	Прямые $y = k_1x$ и $y = k_2x$. Остальные фазовые траектории образуют параболы, которые касаются в начале координат одной из найденных прямых. Фазовые траектории касаются той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине λ (корень уравнения (3))

¹ Уравнения прямых содержащих фазовые траектории, можно искать в виде $x = ky$. Тогда для нахождения коэффициентов следует решить уравнение $k = \frac{ak+b}{ck+d}$.

$k_1 = k_2$	Вырожденный узел	Прямая $y = k_1x$. Остальные фазовые траектории – это ветви парабол, которые касаются в начале координат этой прямой
$\exists! k_1$	Седло	Прямые* ² $y = k_1x$ и $x = 0$ – это сепаратрисы . Остальные фазовые траектории – гиперболы, для которых найденные прямые являются асимптотами
	Узел	Прямые* ³ $y = k_1x$ и $x = 0$. Остальные фазовые траектории образуют параболы, которые касаются в начале координат одной из найденных прямых.
$\forall k \in R$	Дикритический узел	Все фазовые траектории лежат на прямых $y = kx, \forall k \in R$.

Если положение равновесия является **центром**, то фазовые траектории являются эллипсами.

Если положение равновесия является **фокусом**, то фазовые траектории являются спиралями.

В случае, когда ЛДС имеет **прямую точек покоя**, то можно найти уравнения всех фазовых траекторий, решив уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

Его первый интеграл $ax + by = C$ и определяет семейство фазовых прямых.

Направление движения

Если положение равновесия является **узлом** или **фокусом**, то направление движения по фазовым траекториям определяется однозначно его устойчивостью (к началу координат) или неустойчивостью (от начала координат).

Правда, в случае **фокуса** требуется установить еще и направление закручивания (раскручивания) спирали – по часовой или против часовой стрелки. Это можно сделать, например, так. Определить знак производной $y'(t)$ в точках оси x .

Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx > 0$, если $x > 0$, то ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает.

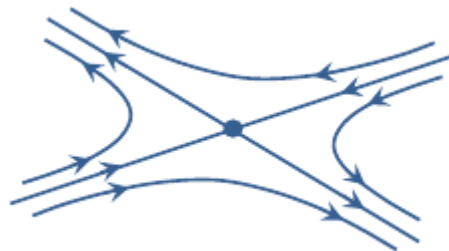
Значит, «закручивание (раскручивание)» траекторий происходит против часовой стрелки.

Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx < 0$, если $x > 0$, то «закручивание (раскручивание)» траекторий происходит по часовой стрелке.

² Если уравнения прямых ищутся в виде $x = ky$, тогда это будут прямые $x = k_1y$ и $y = 0$.

Если положение равновесия является **центром**, то направление движения по фазовым траекториям (по часовой стрелке или против) можно определить так же, как устанавливается направление «закручивания (раскручивания)» траектории в случае фокуса.

В случае «**седла**» движение по одной из его сепаратрис происходит в направлении начала координат, по другой – от начала координат. По всем остальным фазовым траекториям движение происходит в соответствии с движением по сепаратрисам.



Следовательно, если положение равновесия – **седло**, то достаточно установить направление движения по какой-нибудь траектории. И далее можно однозначно установить направление движения по всем остальным траекториям.

Направление движения (седло)

Чтобы установить направление движения по фазовым траекториям в случае **седла**, можно воспользоваться одним из следующих способов:

1 способ.

Определить, какая из двух сепаратрис соответствует отрицательному собственному значению. Движение по ней происходит к точке покоя.

2 способ.

Определить, как изменяется абсцисса движущейся точки по любой из сепаратрис. Например, для $y = k_1x$ имеем:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=k_1x} = ax + bk_1x = (a + bk_1)x, \quad x(t) = x(0)e^{(a+bk_1)t}.$$

Если $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то движение по сепаратрисе $y = k_1x$ происходит к точке покоя.

Если $x(t) \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то движение происходит от точки покоя.

3 способ:

Если ось x не является сепаратрисой, определить, как изменяется ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении оси x .

Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx > 0$, если $x > 0$, то ордината точки возрастает и, значит, движение по фазовым траекториям, пересекающим положительную часть оси x , происходит снизу вверх. Если же ордината убывает, то движение будет происходить сверху вниз.

Если определять направление движение по фазовой траектории, пересекающей ось y , то лучше анализировать изменение абсциссы движущейся точки.

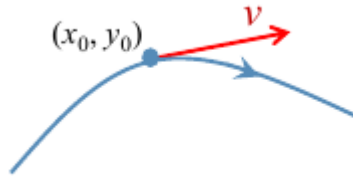
Направление движения

4 способ*⁴

Построить в произвольной точке (x_0, y_0) фазовой плоскости (отличной от положения равновесия) вектор скорости:

$$v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{x_0, y_0} = (ax_0 + by_0, cx_0 + dy_0).$$

Его направление и укажет направление движения по фазовой траектории, проходящей через точку (x_0, y_0) :

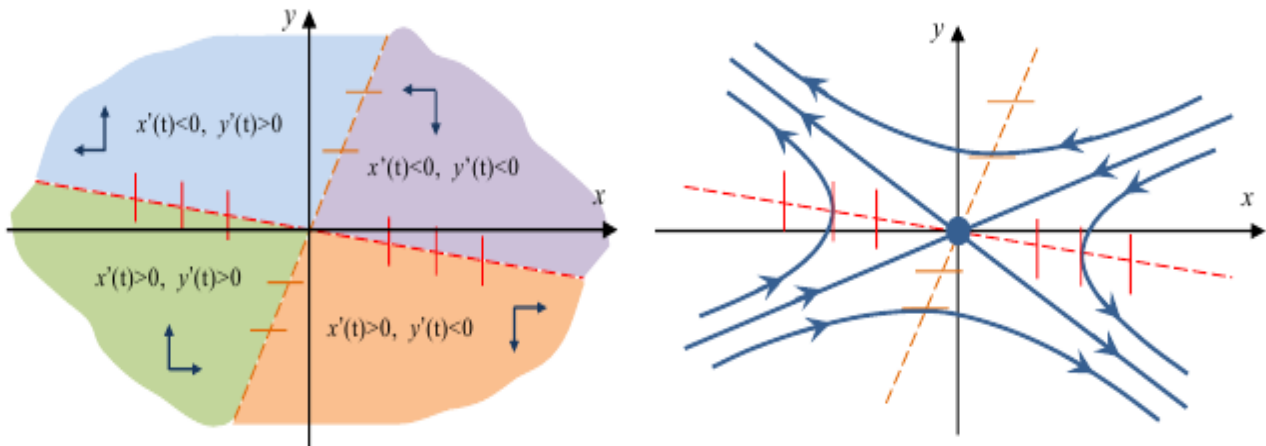


5 способ*⁵

Определить области «знакопостоянства» производных:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy.$$

Границами этих областей будут главные изоклины. Знак производной укажет на то, как изменяется ордината и абсцисса движущейся точки по фазовой траектории в различных областях.



Пример 1.1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

⁴ Этот способ может быть использован при определении направления движения по фазовым траекториям для любого типа точки покоя.

⁵ Этот способ может быть использован при определении направления движения по фазовым траекториям для любого типа точки покоя.

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = -6 \neq 0$.

2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6 = 0$, найдем его корни $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$. Корни вещественные и разного знака. Следовательно, положение равновесия – **седло**.

3. *Сепаратрисы* седла ищем в виде $y = kx$.

$$k = \frac{-1 + 2k}{-2 - 2k} \Leftrightarrow 2k^2 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}, k_1 \approx -2,22, k_2 \approx 0,22$$

4. Вертикальная изоклина: $x + y = 0$.

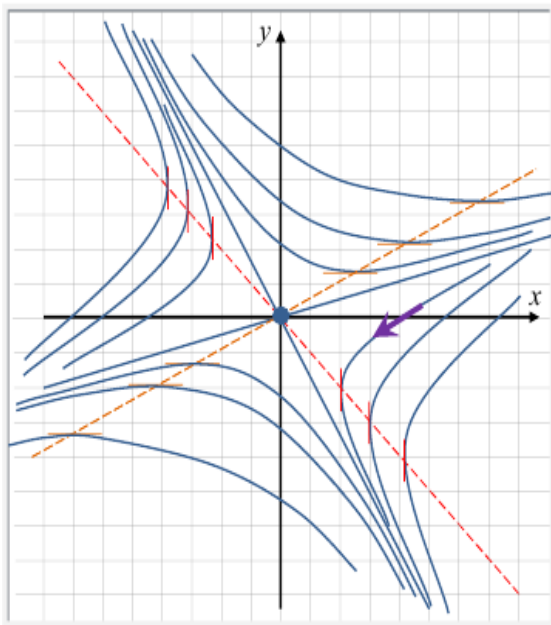
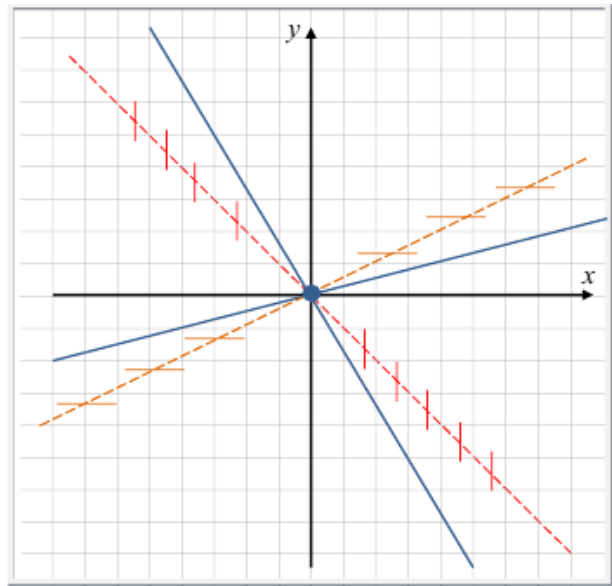
Горизонтальная изоклина: $x - 2y = 0$.

Нарисуем на фазовой плоскости сепаратрисы $y = k_1x$ и $y = k_2x$ и главные изоклины.

Остальную часть плоскости заполняют траектории – гиперболы, для которых сепаратрисы являются асимптотами.

Найдем направление движения по траекториям. Для этого можно определить знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = -x < 0, \text{ если } x > 0.$$



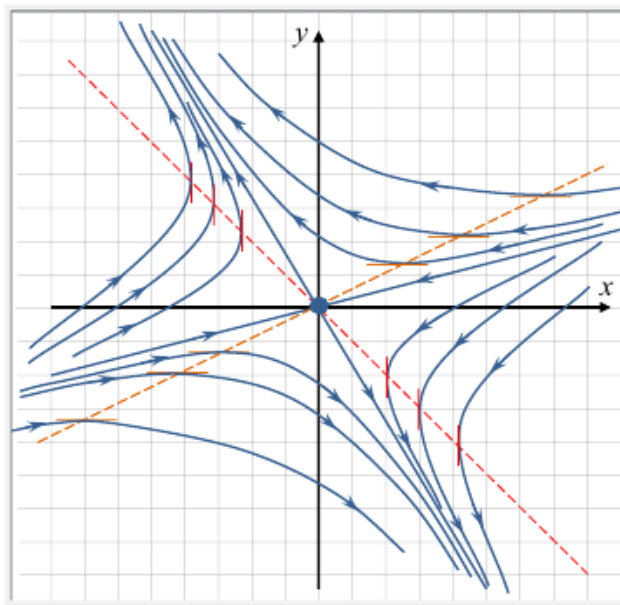
Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » убывает. Значит движение по фазовым траекториям, пересекающим положительную часть оси x , происходит сверху вниз.

Теперь легко установить направление движения по другим траекториям.

Пример 1.2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 10 \neq 0$.



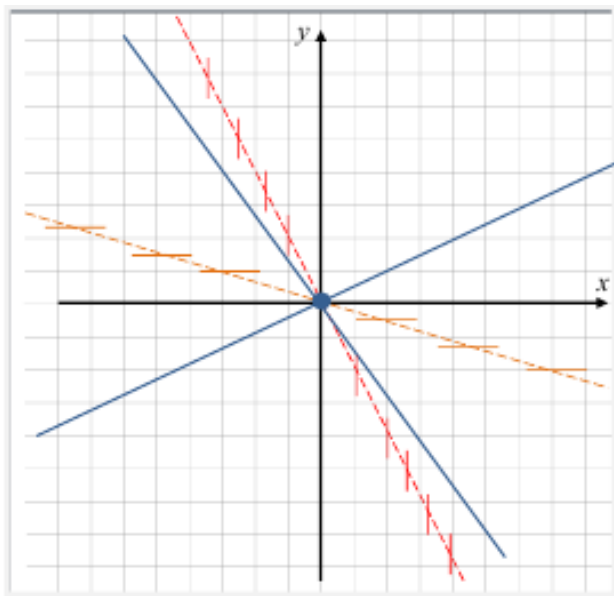
2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, найдем его корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$. Следовательно, положение равновесия – **неустойчивый узел**.

3. Прямые: $y = kx$.

$$k = \frac{1 + 3k}{4 + 2k} \Leftrightarrow 2k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -1.$$

4. Вертикальная изоклина: $2x + y = 0$.

Горизонтальная изоклина: $x + 3y = 0$.



Так как $\lambda_1 = 2$ является меньшим по абсолютной величине, то, найдя соответствующий ему собственный вектор

$$\gamma = (a_1, a_2)^T \wedge \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 + a_2 = 0,$$

$\gamma = (1, -1)^T$, установим, что остальные фазовые траектории, образующие параболы, касаются в начале координат прямой $y = -x$.

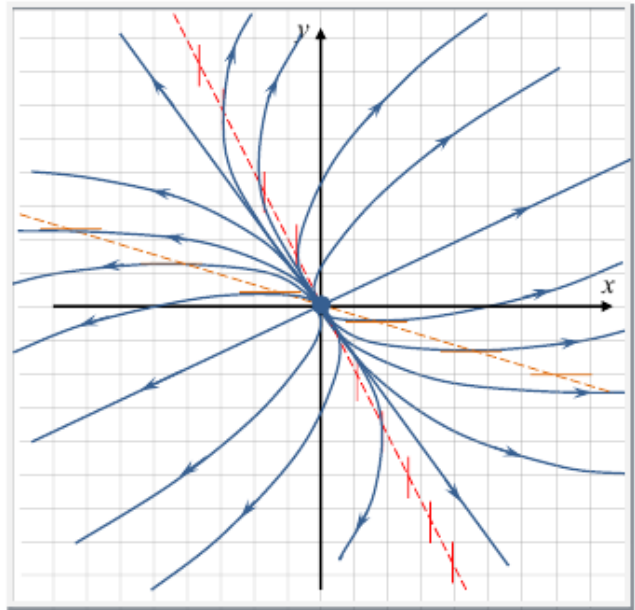
Неустойчивость положения равновесия однозначно определяет направление движения – от точки покоя.

Так как $\lambda_1 = 2$ является меньшим по абсолютной величине, то, найдя соответствующий ему собственный вектор $\gamma = (a_1, a_2)^T$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 + a_2 = 0,$$

$\gamma = (1, -1)^T$, установим, что остальные фазовые траектории, образующие параболы, касаются в начале координат прямой $y = -x$.

Неустойчивость положения равновесия однозначно определяет направление движения – от точки покоя.



Пример 1.3.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 18 \neq 0$.

2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda + 18 = 0$, найдем его дискриминант $D = -63$. Так как $D < 0$, то корни уравнения комплексные, причем $Re \lambda_{1,2} = -\frac{3}{2}$. Следовательно, положение равновесия – **устойчивый фокус**.

3. Вертикальная изоклина: $x + 4y = 0$.

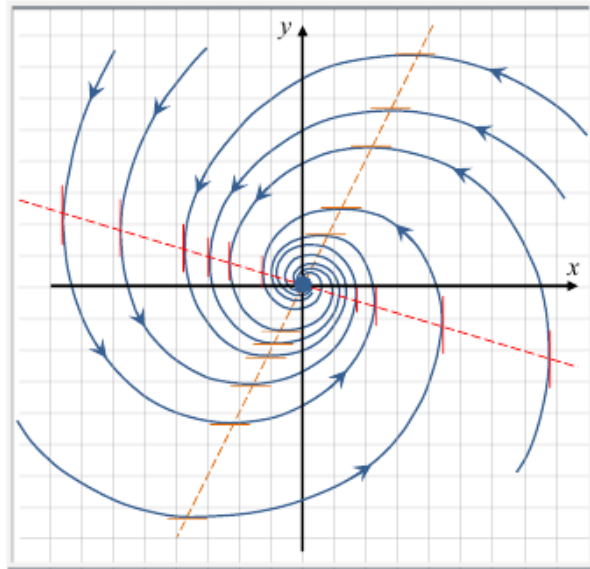
Горизонтальная изоклина: $2x - y = 0$.

Фазовые траектории являются спиралями, движение по которым происходит к началу координат. Направления «закручивания траекторий» можно определить следующим образом.

Определим знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = 4x > 0, \text{ если } x > 0.$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает. Значит, «закручивание» траекторий происходит против часовой стрелки.



Пример 1.4.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dx}{dt} = x - y \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 3 \neq 0$.

2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3 = 0$, найдем его корни $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$. Следовательно, положение равновесия – **центр**.

3. Вертикальная изоклина: $x - 4y = 0$.

Горизонтальная изоклина: $x - y = 0$.

Фазовые траектории системы – эллипсы.

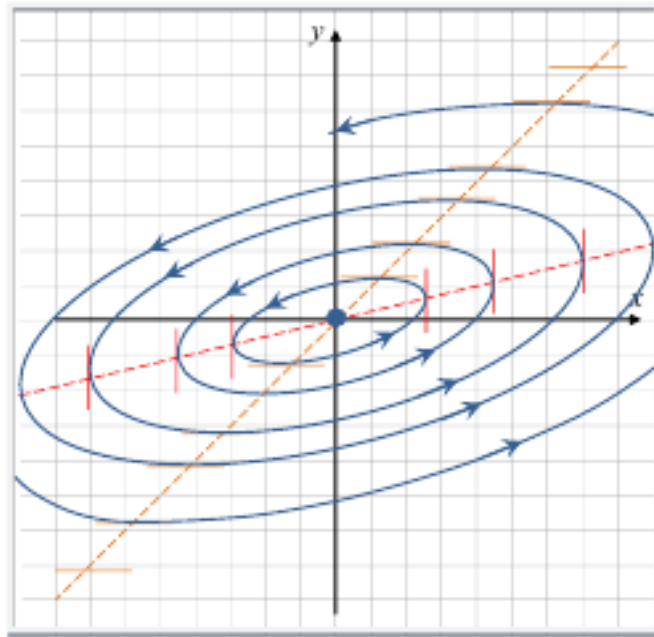
Направление движения по ним можно установить, например, так.

Определим знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = x > 0, \quad \text{если } x > 0.$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает.

Значит, движение по эллипсам происходит против часовой стрелки.



Пример 1.5 (вырожденный узел).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 4 \neq 0$.

2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, найдем его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Следовательно, положение равновесия – **устойчивый вырожденный узел**.

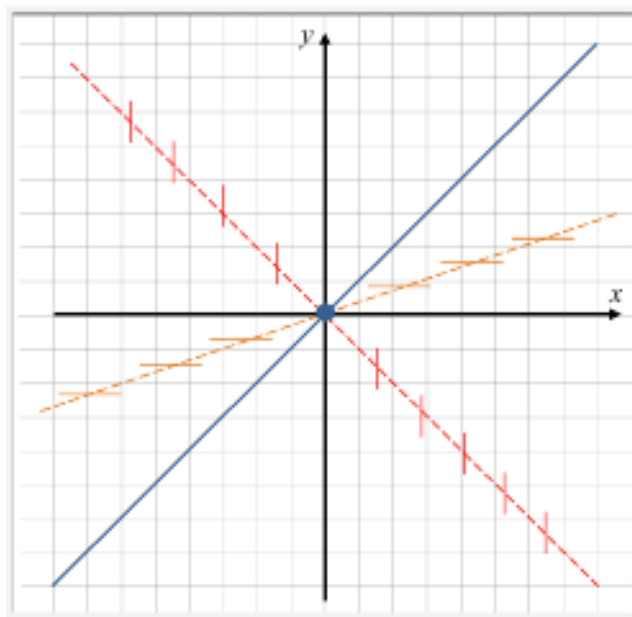
3. Прямая $y = kx$.

$$k = \frac{1 - 3k}{-1 - k} \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1.$$

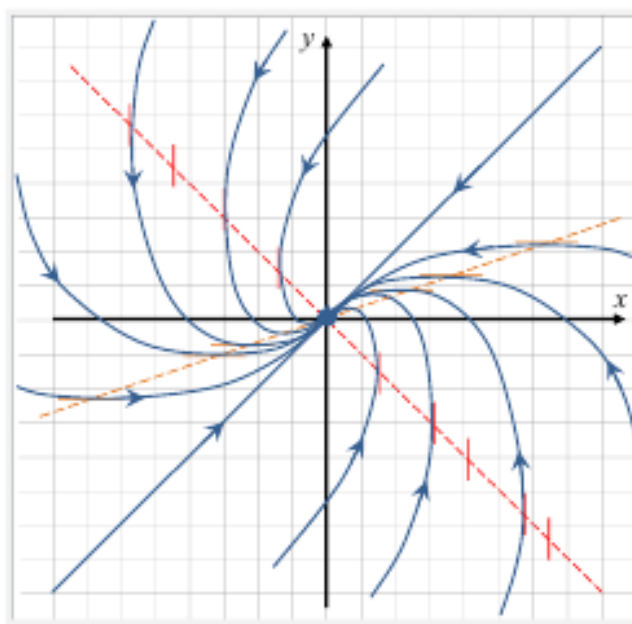
4. Вертикальная изоклина: $x + y = 0$.

Горизонтальная изоклина: $x - 3y = 0$.

Нарисуем на фазовой плоскости изоклины и прямую, содержащую фазовые траектории. Остальная часть плоскости заполняется траекториями, которые лежат на ветвях парабол, касающихся прямой $y = x$.



Устойчивость положения равновесию однозначно определяет направление движения – к началу координат.



Пример 1.6.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

Так как определитель матрицы системы $\det A = 0$, то система имеет бесконечно много положений равновесия. Все они лежат на прямой $y = 2x$.

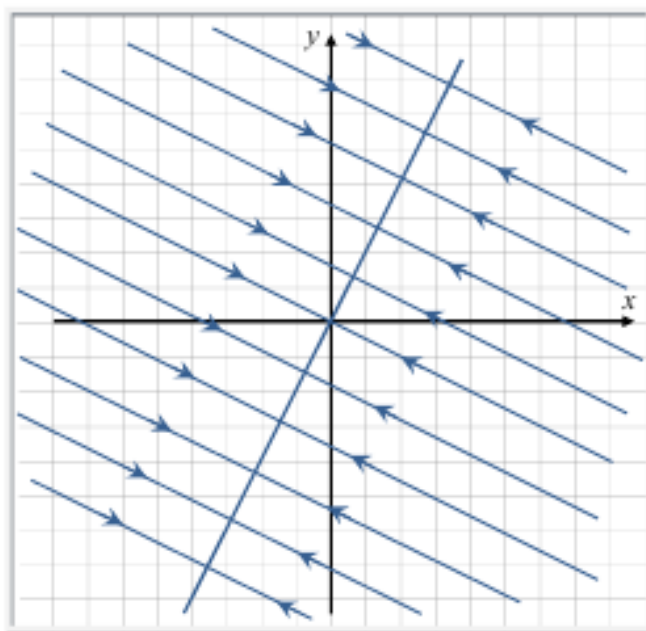
Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 5\lambda = 0$, найдем его корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5$. Следовательно, все положения равновесия устойчивы по Ляпунову.

Построим уравнения остальных фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{-4x + 2y} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}x + C.$$

Таким образом, фазовые траектории лежат на прямых $y = -\frac{1}{2}x + C, C = \forall const.$

Направление движения однозначно определяется устойчивостью точек прямой $y = 2x$.



Пример 1.7.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$$

Так как определитель матрицы системы $\det A = 0$, то система имеет бесконечно много положений равновесия. Все они лежат на прямой $y = 2x$.

Так как и след матрицы системы $tr A = 0$, то корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Следовательно, все положения равновесия неустойчивы.

Построим уравнения остальных фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 2y}{2x - y}, \quad \frac{dy}{dx} = 2, \quad y = 2x + C.$$

Таким образом, фазовые траектории лежат на прямых $y = 2x + C, C = \forall const$, и параллельны прямой точек покоя.

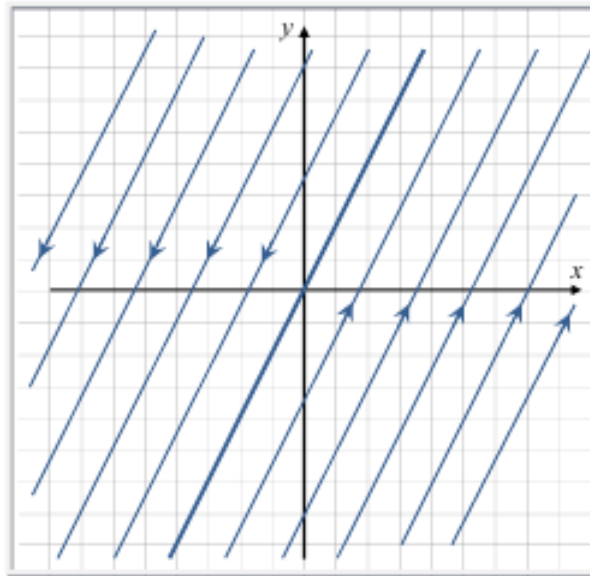
Установим направление движения по траекториям следующим образом.

Определим знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = 4x \begin{cases} > 0, & \text{если } x > 0, \\ < 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x» возрастает, а «отрицательного» – убывает

Значит движение по фазовым траекториям правее прямой точек покоя будет снизу вверх, а левее – сверху вниз.



1.3. Исследование устойчивости неоднородных динамических систем

Рассмотрим линейную неоднородную систему (НЛДС) с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + \gamma \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + \beta, \end{cases} \quad (1.7)$$

когда $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

Решив систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = -\gamma, \\ cx + dy = -\beta, \end{cases}$$

ответим на вопрос, имеет ли система (1.7) положения равновесия.

Если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное положение равновесия $P(x_0, y_0)$.

Если $\det A = 0$, то система, либо имеет бесконечно много положений равновесия – точки прямой, определяемой уравнением $ax + by + \gamma = 0$ (или $cx + dy + \delta = 0$), либо вообще не имеет положений равновесия.

Преобразование НЛДС

Если система (1.7) имеет положения равновесия, то выполнив замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = x - x_0, \\ \eta = y - y_0, \end{cases}$$

где, в случае, когда система (1.7) имеет бесконечно много положений равновесия, x_0, y_0 – координаты любой точки, принадлежащей прямой точек покоя, получим однородную систему:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \end{cases} \quad (6)$$

Введя на фазовой плоскости xOy новую систему координат с центром в точке покоя P , построим в ней фазовый портрет системы (6). В результате на плоскости xOy получим фазовый портрет системы (5).

Пример 1.8.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 2y + 12, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y - 3 \end{cases}$$

Так как

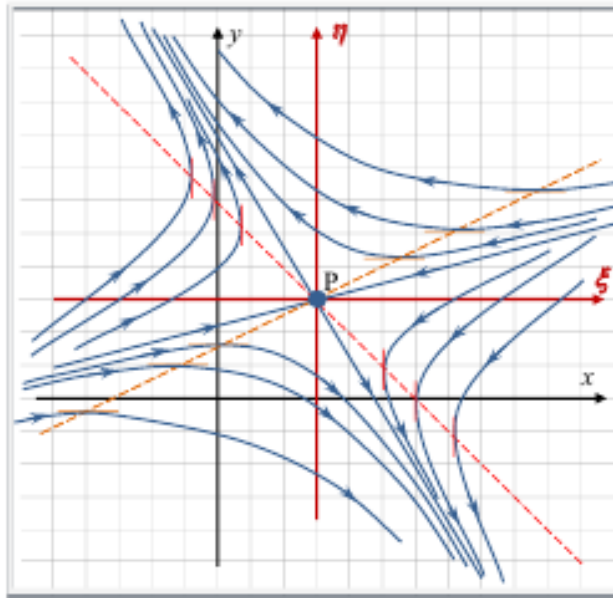
$$\begin{cases} -2x - 2y + 12 = 0, \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 3, \end{cases}$$

то ДС имеет единственное положение равновесия $P(3;3)$. Выполнив замену переменных $x = \xi + 3$, $y = \eta + 3$, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -2\xi - 2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = -\xi + 2\eta, \end{cases}$$

нулевое положение которой неустойчиво и является седлом (см. пример 1).

Построив фазовый портрет на плоскости ξP_η , совместим ее с фазовой плоскостью xOy , зная, какие координаты имеет в ней точка P .



Фазовые портреты НЛДС

При построении фазовых портретов в случае, когда система (1.7) не имеет положений равновесия, можно использовать следующие рекомендации:

1. Найти первый интеграл уравнения

$$\frac{dx}{ax + by + \gamma} = \frac{dy}{cx + dy + \delta'}$$

и таким образом определить семейство всех фазовых траекторий.

2. Найти главные изоклины: $ax + by + \gamma = 0$ (ВИ), $cx + dy + \delta = 0$ (ГИ).

3. Найти прямые, содержащие фазовые траектории, в виде $y = kx + \omega$.

4. При этом для нахождения коэффициентов k и ω , учитывая, что

$$c : a = d : b = \alpha,$$

построить уравнение:

$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=kx+\omega} = \left. \left(\frac{\alpha(ax + by) + \delta}{ax + by + \gamma} \right) \right|_{y=kx+\omega} = \alpha + \frac{\delta - \alpha\gamma}{(a + kb)x + b\omega + \gamma}.$$

Так как выражение

$$\alpha + \frac{\delta - \alpha\gamma}{(a + kb)x + b\omega + \gamma}$$

не зависит от x , если $a + kb = 0$, то получим следующие условия для нахождения k и ω :

$$a + kb = 0, \quad k = \alpha + \frac{\delta - \alpha\gamma}{b\omega + \gamma}.$$

Уравнение прямой можно искать в виде $x = ky + \omega$. Условия для определения k и ω строятся аналогично.

Если существует только одна прямая, то она является асимптотой для остальных траекторий.

2. Для определения направления движения по фазовым траекториям определить области «знакопостоянства» правых частей системы (5).

3. Для определения характера выпуклости (вогнутости) фазовых траекторий построить производную $y''(x)$ и установить области ее «знакопостоянства».

Различные приемы построения фазовых портретов рассмотрим на примерах.

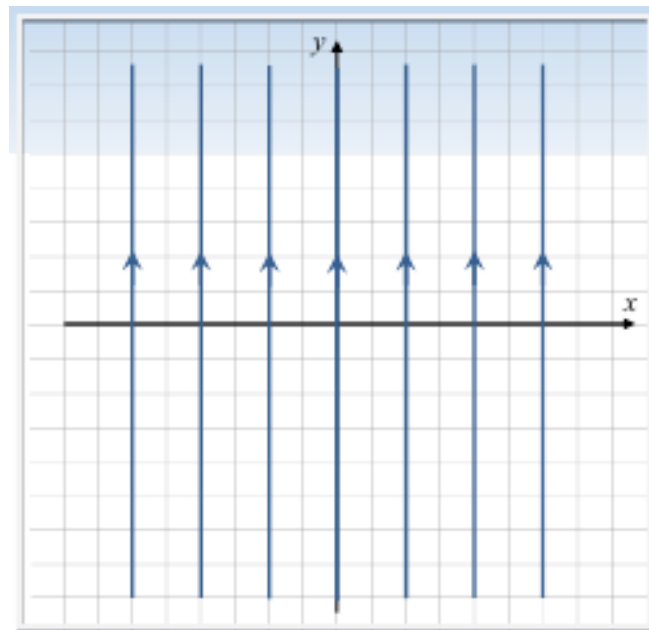
Пример 1.9.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 1. \end{cases}$$

Решив уравнение: $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{1} = 0$, получим, что все фазовые траектории лежат на прямых

$$x = C, \forall C \in R.$$

Так как $y'(t) = 1 > 0$, то ордината движущейся точки по любой фазовой траектории возрастает. Следовательно, движение по фазовым траекториям происходит снизу вверх.



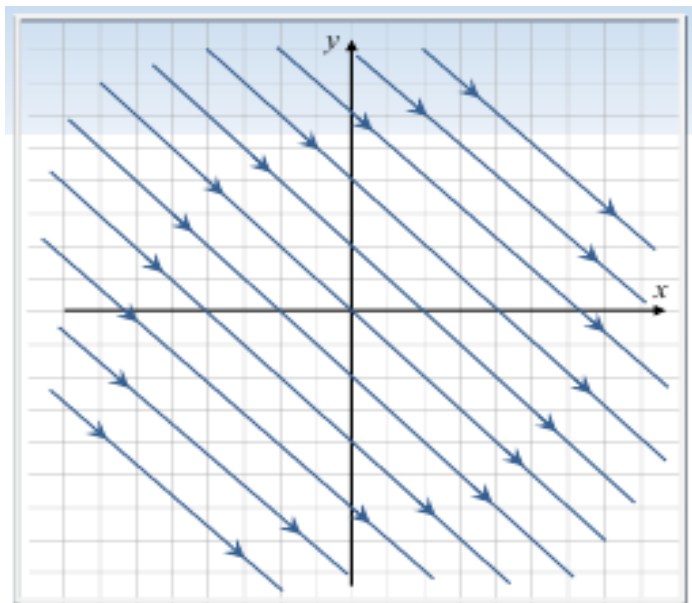
Пример 1.10.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2, \\ \frac{dy}{dt} = -2. \end{cases}$$

Решив уравнение: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{2} = -1$, получим, что все фазовые траектории лежат на прямых

$$y = x + C, \forall C \in R.$$

Так как $y'(t) = -2 < 0$, то ордината движущейся точки по любой фазовой траектории убывает. Следовательно, движение по фазовым траекториям происходит сверху вниз.



Пример 1.11.

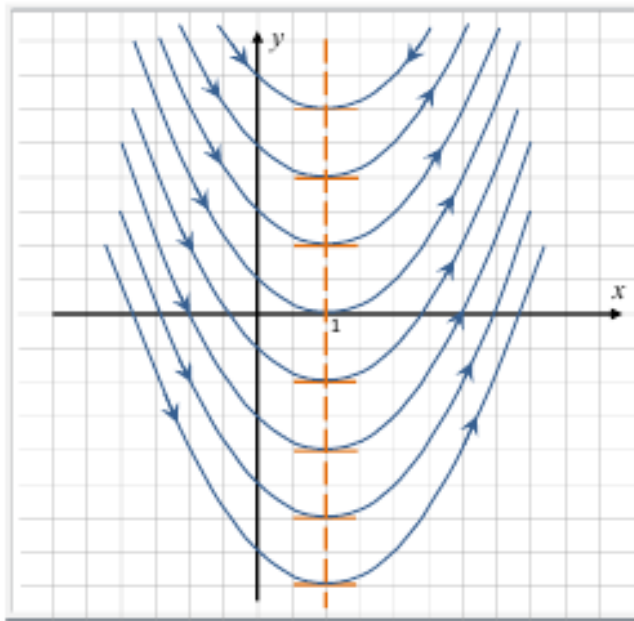
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy}{dt} = x - 1. \end{cases}$$

Решив уравнение: $\frac{dy}{dx} = x - 1$, получим, что фазовыми траекториями системы являются параболы:

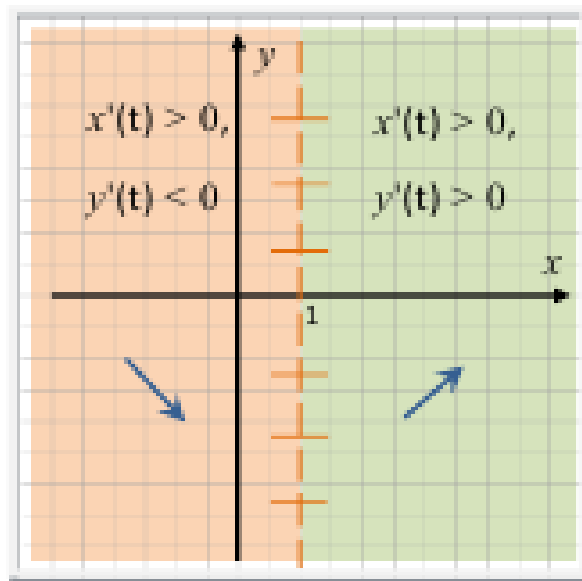
$$y = \frac{(x - 1)^2}{2} + C, \forall C \in R,$$

оси которых лежат на горизонтальной изоклине $x - 1 = 0$, а ветви направлены вверх.

Так как $x'(t) = 1 > 0$, то абсцисса движущейся точки по любой фазовой траектории возрастает. Следовательно, движение по левой ветви параболы происходит сверху вниз до пересечения с прямой – горизонтальной изоклиной, а далее – снизу вверх.



Определить направление движения по фазовым траекториям можно было бы и установив области «знакопостоянства» правых частей системы.



Пример 1.12.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 1. \end{cases}$$

Вертикальная изоклина $y = 0$; горизонтальная изоклина $y - 1 = 0$.

Выясним, существуют ли прямые, которые содержат фазовые траектории.

Уравнения таких прямых будем искать в виде $y = kx + b$. Так как

$$y = \frac{dy}{dx} \Big|_{y=kx+b} = \frac{y-1}{y} \Big|_{y=kx+b} = 1 - \frac{1}{y} \Big|_{y=kx+b} = 1 - \frac{1}{kx+b},$$

то последнее выражение не зависит от x , если $k = 0$. Тогда для нахождения b получим

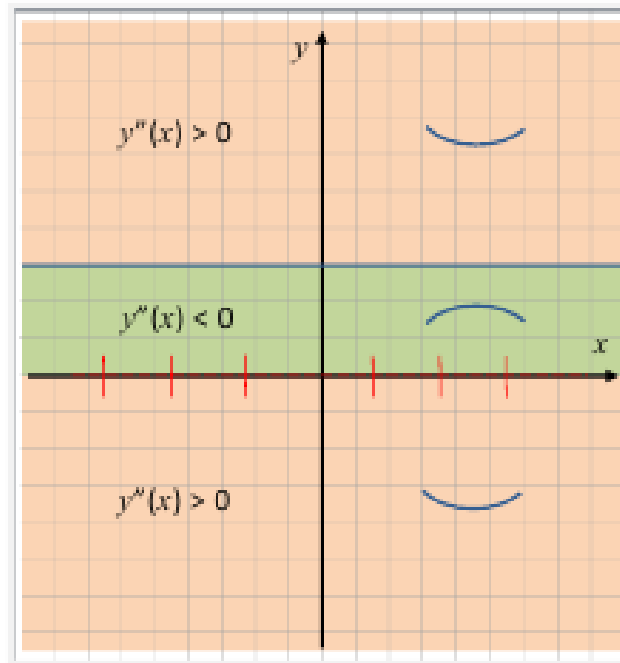
$$0 = 1 - \frac{1}{b} \Leftrightarrow b = 1.$$

Таким образом, на прямой $y = 1$ лежат фазовые траектории. Эта прямая является асимптотой на фазовой плоскости.

Установим, какой характер выпуклости (вогнутости) имеют фазовые траектории относительно оси x . Для этого найдем производную $y''(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y-1}{y} \right) = \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{1}{y} \right) = \frac{y'(x)}{y^2} = \frac{y-1}{y^3},$$

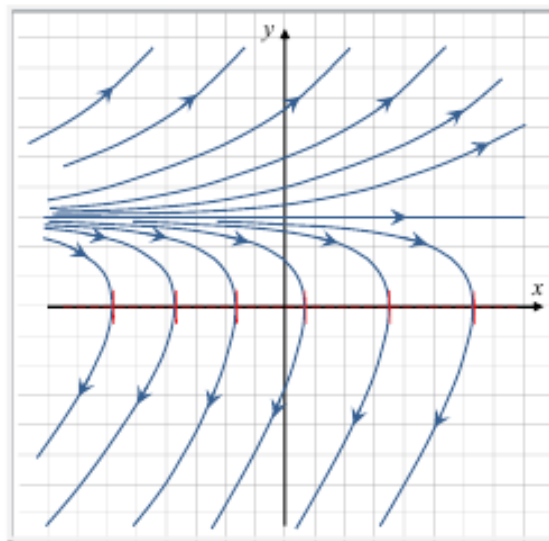
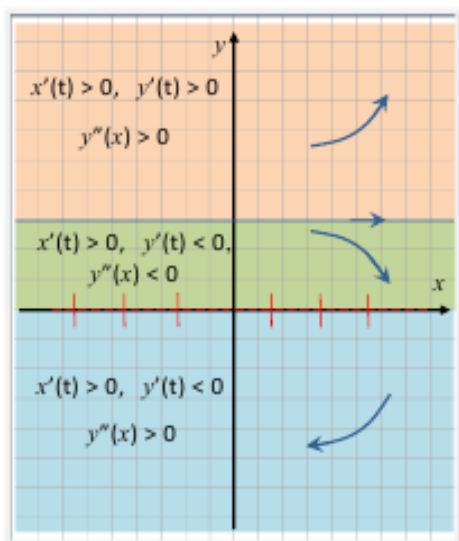
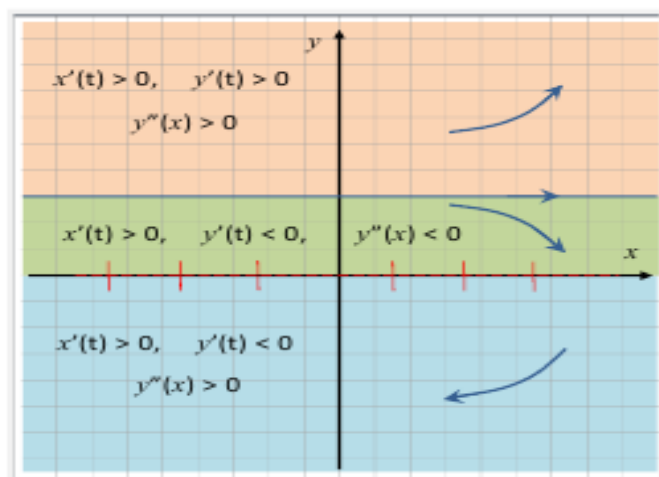
И определим области «знакопостоянства» полученного выражения. В тех областях, где $y''(x) > 0$, фазовые траектории имеют выпуклость «вниз», а где $y''(x) < 0$, – выпуклость «вверх».



Выясним направления движения по фазовым траекториям, определив области «знакопостоянства» правых частей системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 1. \end{cases}$$

Границами этих областей будут вертикальная и горизонтальная изоклины. Полученной информации достаточно для построения фазового портрета.



Пример 1.13.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Горизонтальная изоклина: $2x - y = 0$.

Выясним, существуют ли прямые, которые содержат фазовые траектории. Уравнения таких прямых будем искать в виде $y = kx + b$. Так как

$$k = \frac{dy}{dx} \Big|_{y=kx+b} = \frac{2x - y}{2} \Big|_{y=kx+b} = \frac{(2 - k)x - b}{2},$$

то последнее выражение не зависит от x , если $k = 2$. Тогда для нахождения b получим

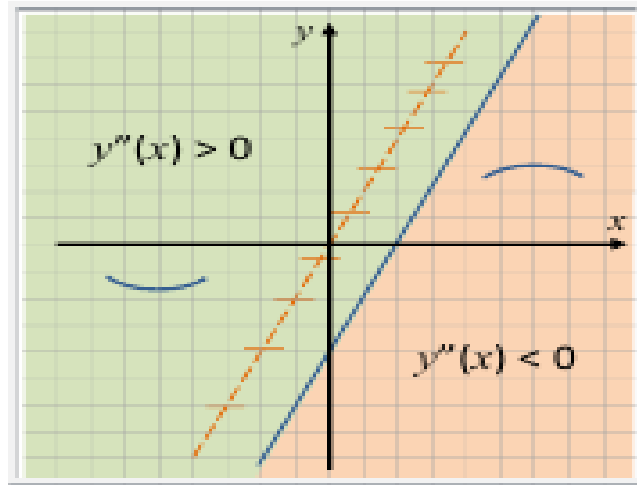
$$2 = -\frac{b}{2} \Leftrightarrow b = -4.$$

Таким образом, на прямой $y = 2x - 4$ лежат фазовые траектории. Эта прямая является асимптотой на фазовой плоскости.

Установим, какой характер выпуклости (вогнутости) имеют фазовые траектории относительно оси x . Для этого найдем производную $y''(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2x - y}{2} \right) = \frac{2 - y'(x)}{2} = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2x - y}{2} \right) = \frac{y - 2x + 4}{4}.$$

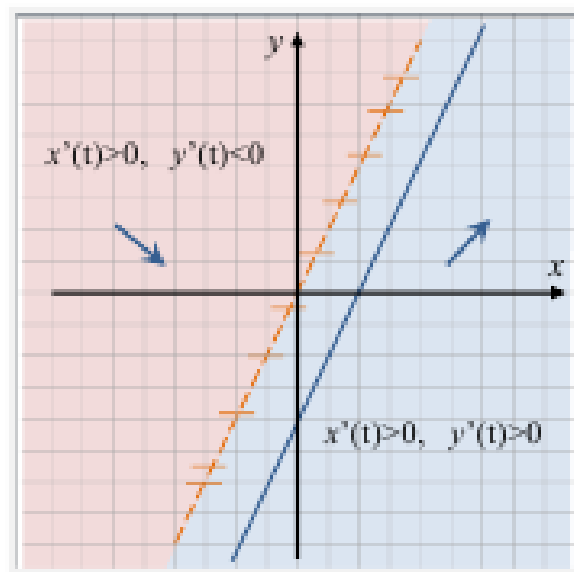
Определим области «знакопостоянства» полученного выражения. В тех областях, где $y''(x) > 0$, фазовые траектории имеют выпуклость «вниз», а где $y''(x) < 0$, – выпуклость «вверх».



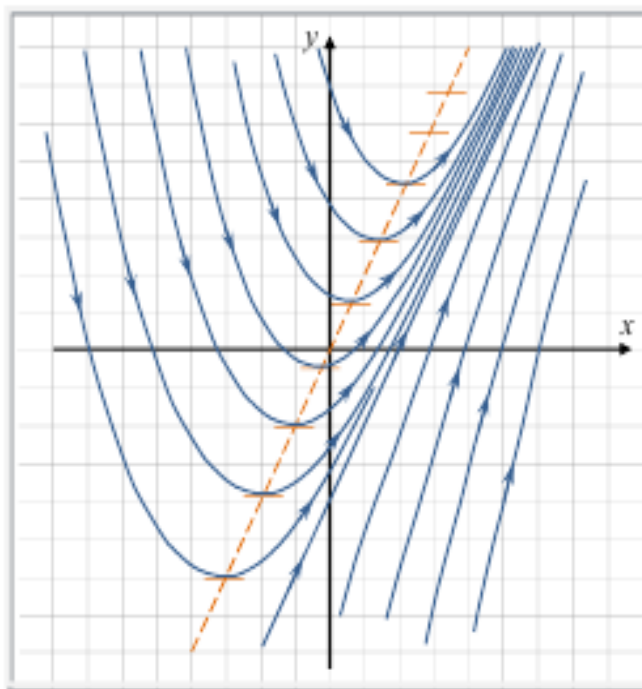
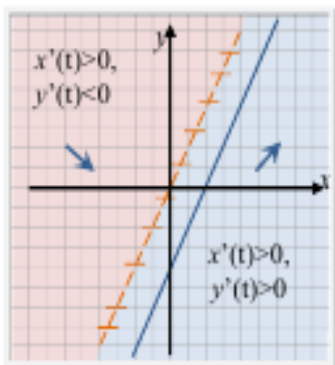
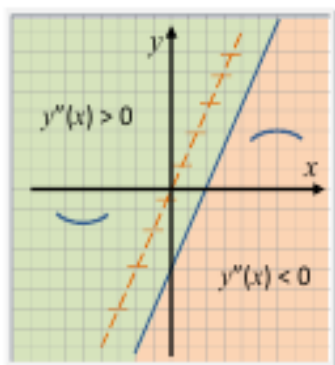
Выясним направление движения по фазовым траекториям, определив области «знакопостоянства» правых частей системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Границей этих областей будет горизонтальная изоклина.



Полученной информации достаточно для построения фазового портрета.



Пример 1.14.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2(x - y) + 2. \end{cases}$$

Вертикальная изоклина: $x - y = 0$; горизонтальная изоклина: $x - y + 1 = 0$.

Выясним, существуют ли прямые, которые содержат фазовые траектории. Уравнения таких прямых будем искать в виде $y = kx + b$. Так как

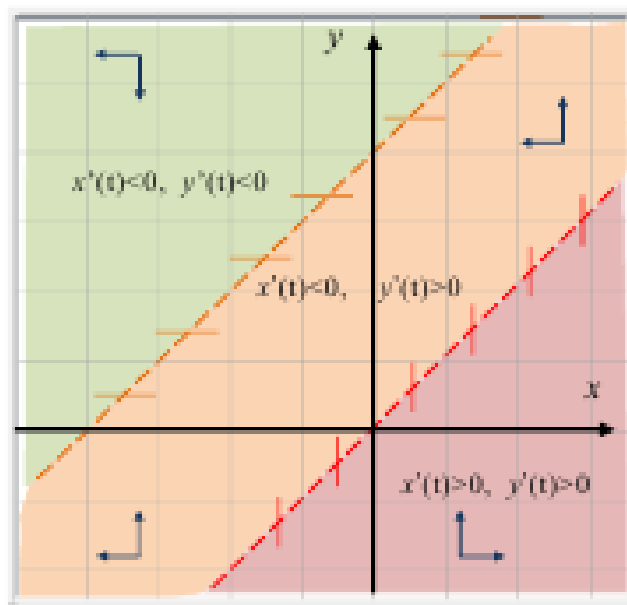
$$\begin{aligned} k &= \frac{dy}{dx} \Big|_{y=kx+b} = \left(\frac{2(x-y) + 2}{x-y} \right) \Big|_{y=kx+b} = \left(2 - \frac{2}{x-y} \right) \Big|_{y=kx+b} \\ &= 2 + \frac{2}{(1-k)x - b} \end{aligned}$$

то последнее выражение не зависит от x , если $k = 1$. Тогда для нахождения получим

$$1 = 2 + \frac{2}{-b} \Leftrightarrow b = 2.$$

Таким образом, на прямой $y = x + 2$ лежат фазовые траектории. Эта прямая является асимптотой на фазовой плоскости.

Определим, как изменяются абсцисса и ордината движущейся точки по фазовой траектории. Для этого построим области «знакопостоянства» правых частей системы.

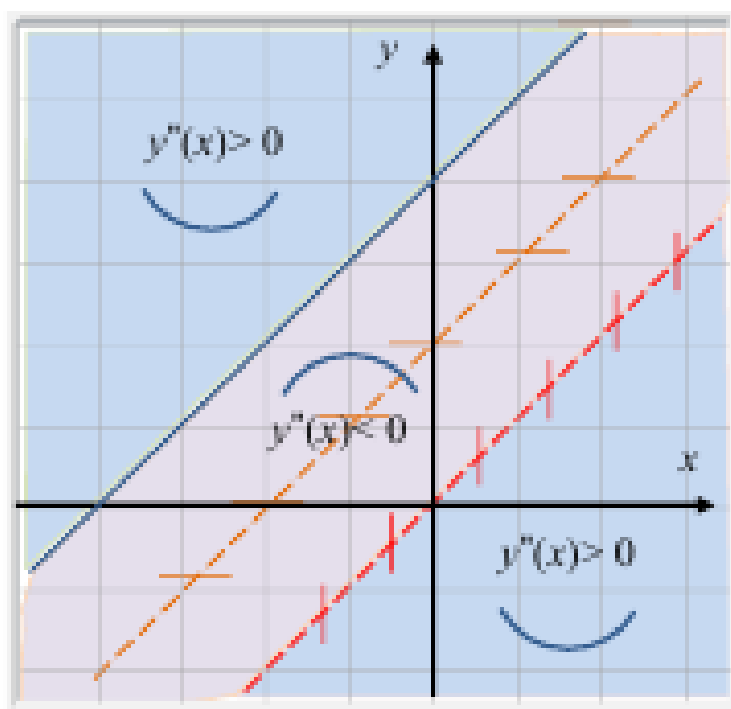


Эта информация потребуется для определения направления движения по траекториям.

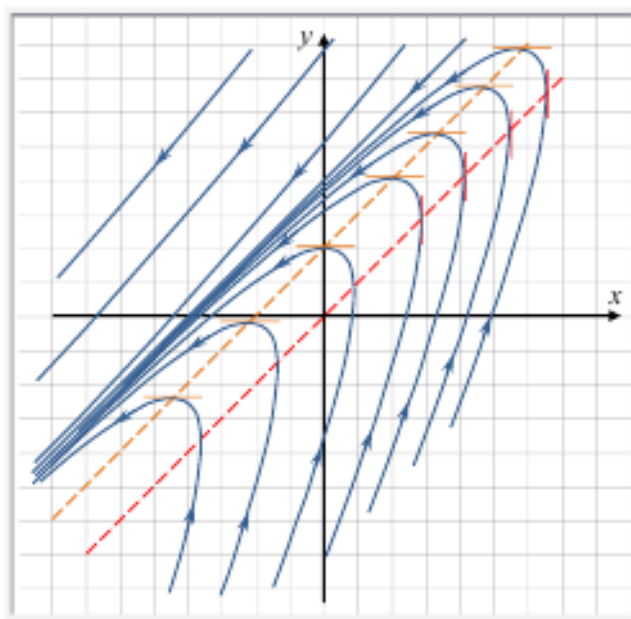
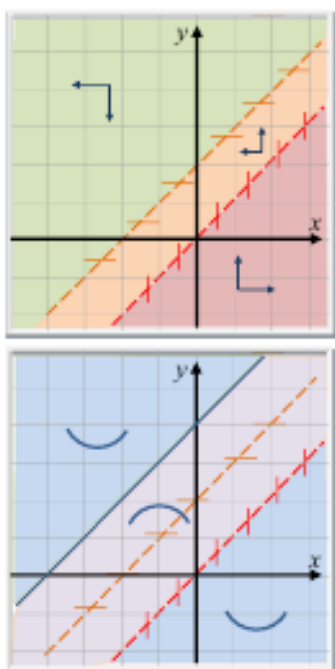
Установим, какой характер выпуклости (вогнутости) имеют фазовые траектории относительно оси x . Для этого найдем производную $y''(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2(x-y)+2}{x-y} \right) = \frac{2(y'(x)-1)}{(x-y)^2} = \frac{2 \left(\frac{2(x-y)+2}{x-y} - 1 \right)}{(x-y)^2} = \frac{2(x-y+2)}{(x-y)^3}.$$

Определим области «знакопостоянства» полученного выражения. В тех областях, где $y''(x) > 0$, фазовые траектории имеют выпуклость «вниз», а где $y''(x) < 0$, – выпуклость «вверх».



Полученной информации достаточно для построения фазового портрета.



1.4. Упражнения для самостоятельного решения

Упражнение 1. Для заданных систем определите тип и характер устойчивости положения равновесия. Построить фазовые портреты.

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 5y \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases};$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases};$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}.$$

Упражнение 2. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ система

$$\frac{dx}{dt} = 2ax + y, \quad \frac{dy}{dt} = ay - 2ax$$

имеет положение равновесия, и оно является седлом? узлом? фокусом? Какой при этом система имеет фазовый портрет?

Упражнение 3. Постройте фазовые портреты для следующих систем:

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 3, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y - 1 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 4 \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y + 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y + 1 \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases};$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2, \\ \frac{dy}{dt} = 4 \end{cases};$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2 \end{cases}.$$

ЧАСТЬ 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Анализ современных компьютерных систем

На сегодняшний день понятие «моделирование» является распространённой в научной и технической литературе. *Моделирование* – это метод познания окружающего мира, который можно отнести к общенаучным методам, применяемым как на эмпирическом, так и на теоретическом уровне познания [2]. Но оно является не единственным методом познания, существует целая область знания, которая называется *методологией* (дословно означает «учение о методах»). Эта область занимается изучением закономерностей человеческой деятельности, вырабатывая на этой основе методы ее осуществления.

Практически все проектные, инженерские, конструкторские организации используют в своей сфере понятия модели и моделирования, где моделирование имеет свои особенности, в каждой из этих областей. Под моделью понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. Процесс построения и использования модели называется моделированием.

Применение моделей наиболее распространённо и предназначено при изучении и прогнозировании поведения сложных процессов и явлений. В настоящий момент проводятся любые сложные эксперименты на моделях для исследования различных моделей явления с применением ЭВМ, с помощью которых можно разработать план натуральных экспериментов, узнать стоимость такого эксперимента, для измерительной аппаратуры выяснить требуемые и необходимые характеристики, поставить сроки проведения эксперимента, или наблюдения. Во-вторых, предназначение состоит в том, что с помощью моделей можно определить главные факторы, которые создают те или иные свойства объекта, поскольку сама модель воспроизводит все лишь некоторые основные характеристики исходного объекта. Учитывать их необходимо при изучении того или иного процесса или явления. Модель необходима для:

- понимания устройства конкретного объекта: какова его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой;
- управления объектом или процессом, определения наилучших способов управления при заданных целях и критериях;
- прогнозирования прямых и косвенных последствиях реализации способов и форм воздействия на объект.

Возможности моделирования основаны на том, чтобы модель довольно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объектов, инте-

ресующие исследователя, при этом абсолютное подобие не имеет место. Общая классификация основных видов моделирования приведена на рис. 2.1.

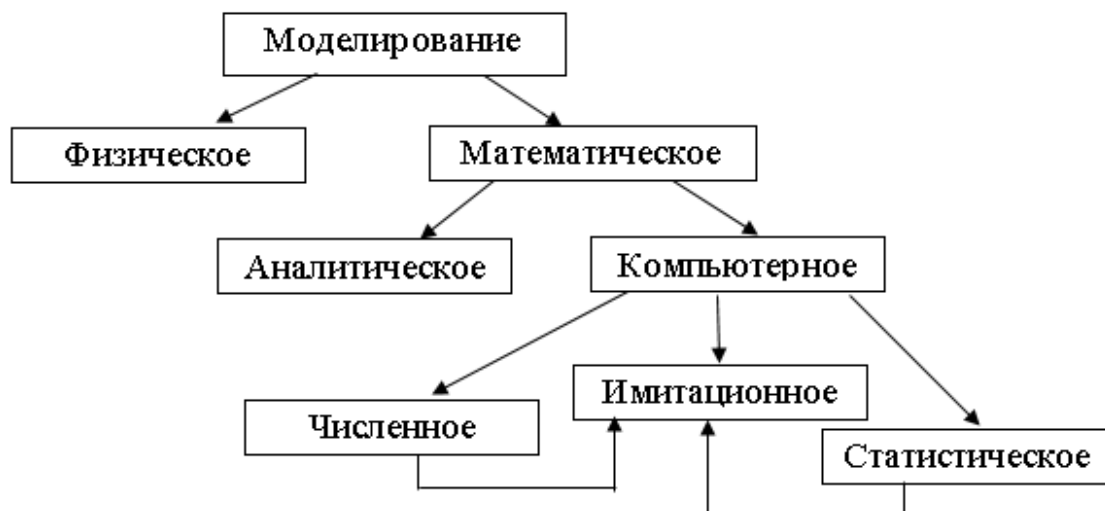


Рис. 2.1. Общая классификация основных видов моделирования

Рассмотрим более подробно следующие виды моделирования, которые применимы к техническим и естественным наукам [2]:

- физическое моделирование – модель и моделируемый объект представляют собой реальные объекты или процессы единой, или различной физической природы, причем между процессами в объекте-оригинале и в модели выполняются некоторые соотношения подобия, вытекающие из схожести физических явлений;

- концептуальное моделирование – совокупность уже известных фактов или представлений сравнительно исследуемого объекта или системы объясняется с помощью некоторых специальных знаков, символов, операций над ними или помощью естественного, или искусственного языков;

- структурно-функциональное моделирование – моделями являются схемы или блок-схемы, графики, чертежи, диаграммы, таблицы, рисунки, дополненные специальными правилами их объединения и преобразования;

- математическое или логико-математическое моделирование – моделирование осуществляется средствами математики и логики, включая построение модели;

- имитационное или компьютерное моделирование – логико-математическая модель исследуемого объекта представляет собой алгоритм функционирования объекта, исполненный в виде программного комплекса для компьютера.

Все выше обозначенные виды моделирования не являются взаимоисключающими. При исследовании сложных объектов они могут применяться одновременно, или в некоторой комбинации. Стоит отметить, что в некотором смысле концептуальное и структурно-функциональное моделирование нераз-

личимы между собой, так как блок-схемы являются специальными знаками с установленными операциями над ними.

Раньше традиционно моделирование на ЭВМ рассматривалось как имитационное моделирование. Сегодня видна полезность и необходимость использования компьютерных прикладных программ и при других видах моделирования, например, невозможно при математическом моделировании без компьютера построить математические модели по экспериментальным данным. Активное развитие компьютерного структурно-функционального моделирования дало толчок использования и привлечения компьютерных программ в концептуальном моделировании. Благодаря этому развиваются графические пакеты и интерфейс.

С учетом сегодняшних реалий понятие «компьютерное моделирование» необходимо уточнить. Оно шире традиционного определения «моделирование на ЭВМ».

Сегодня понятие «компьютерная модель» имеет несколько определений:

- условный образ объекта или некоторой системы объектов (или процессов), описанный с помощью взаимосвязанных компьютерных таблиц, блок-схем, диаграмм, графиков, рисунков, анимационных фрагментов, гипертекста и т.д. и отображающий структуру элементов объекта и взаимосвязи между ними. Такие компьютерные модели будут называться структурно-функциональными;
- программу или программный комплекс, который позволяет с помощью последовательности вычислений и графического отображения их результатов воспроизводить (имитировать) процессы функционирования объекта, системы объектов при условии воздействия на объект различных, как правило, случайных, факторов. Такие модели называются имитационными.

Компьютерное моделирование – это метод решения задачи анализа или синтеза сложной системы на основе использования ее компьютерной модели. Сутью компьютерного моделирования является получение количественных и качественных результатов по имеющейся модели. По результатам анализа получаются качественные выводы которые, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства сложной системы: ее структуру, динамику развития, устойчивость, целостность и др. Количественные выводы практически всегда имеют характер прогноза некоторых будущих или объяснения прошлых значений переменных, которые характеризуют систему.

К предмету компьютерного моделирования можно отнести: промышленное предприятие, экономическая деятельность фирмы, завода или банка, информационно-вычислительная сеть, технологический процесс, любой реальный объект или процесс, и вообще – любая сложная система. Компьютерное моделирование ставит перед собой разнообразные цели. Однако моделирование представляет собой главную процедуру системного анализа, под которым понимается совокупность методологических средств, используемых для подготовки и принятия решений различного рода характера, будь то экономического, социального организационного или технического.

Компьютерная модель сложной системы должна быть универсальной, чтобы описывать близкие по назначению объекты, но и в то же время быть достаточно простой, чтобы позволить реализовать необходимые исследования с разумными затратами, по возможности должна отображать все основные факторы и взаимосвязи, которые характеризуют реальные ситуации, критерии и ограничения.

Исходя из этого, можно сделать вывод, что моделирование систем представляет собой скорее искусство, чем сформировавшуюся науку с самостоятельным набором средств отображения явлений и процессов реального мира. Попытки классификации задач компьютерного моделирования или создания достаточно универсальных инструментальных средств компьютерного моделирования произвольных объектов являются исключительно сложными и невозможными. Но если преднамеренно уменьшить класс рассматриваемых объектов и, ограничившись задачами компьютерного моделирования при системном анализе объектов экономико-организационного управления, то можно отобрать ряд достаточно универсальных подходов и программных средств.

В создании компьютерной программы (пакета программ), которая описывает поведение элементов исследуемой системы в процессе ее функционирования, учитывающей их взаимодействие между собой и внешней средой, и проведении на ЭВМ серии вычислительных экспериментов и заключается вся сущность компьютерного моделирования системы. Все это делается с целью исследования природы и поведения объекта, его оптимизации и структурного развития, прогнозирования новых явлений. Перечислим требования, которым должна удовлетворять модель исследуемой системы:

- полнота модели, то есть возможность вычисления всех характеристик системы с требуемой точностью и достоверностью.
- гибкость модели, что позволяет воспроизводить и проигрывать различные ситуации и процессы, изменять структуру, алгоритмы и параметры изучаемой системы.
- длительность разработки и реализации, характеризующая временные затраты на создание модели.
- блочность структуры, допускающая добавление, исключение и замену некоторых частей (блоков) модели. Кроме того, информационное обеспечение, программные и технические средства должны позволять модели обмениваться информацией с соответствующей базой данных и обеспечивать эффективную машинную реализацию и удобную работу пользователя.

Основные этапы компьютерного моделирования представлены на рис. 2.2. Они представляют собой последовательные этапы, усложняющиеся при переходе с одного цикла моделирования на другой цикл.

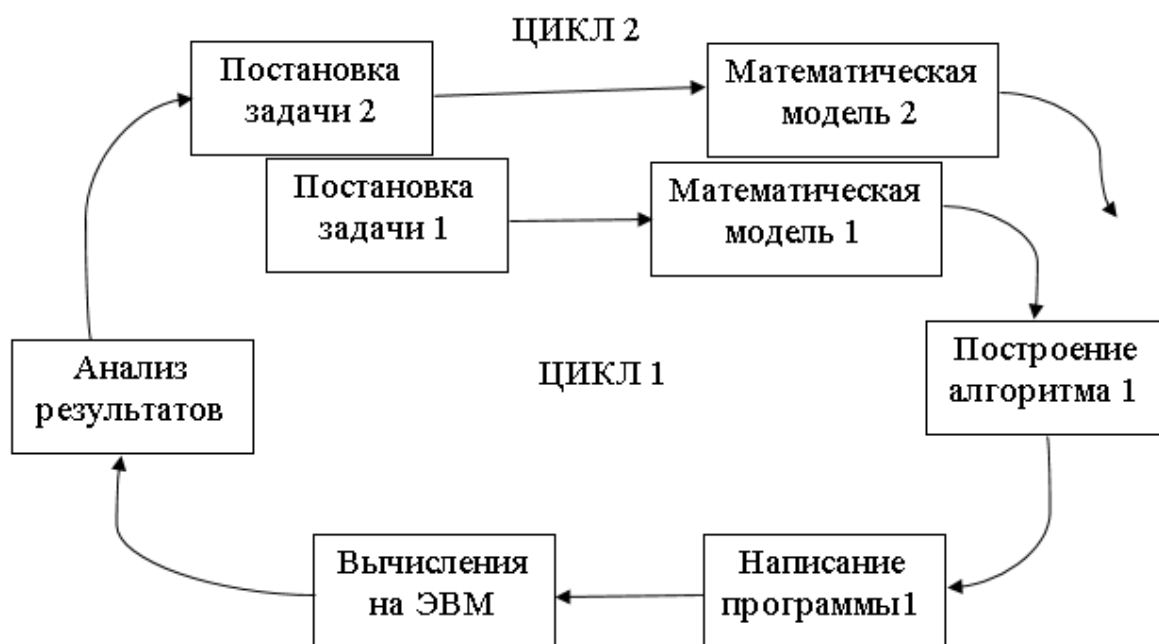


Рис. 2.2. Основные этапы компьютерного моделирования

Рассмотрим каждый этап более подробно. Первый этап – постановка задачи. Он связан с описанием исследуемой системы и выявлением ее компонентов и элементарных актов взаимодействия. На втором этапе происходит создание математической модели, которая представляет собой систему уравнений и отражает сущность исследуемого объекта, то есть формализация. Затем следует третий этап, на котором происходит разработка алгоритма. Его реализация должна способствовать решению поставленной задачи. Четвертый этап представляет собой непосредственное написание программы на конкретном языке программирования. Планирование и выполнение вычислений на ЭВМ, доработка программы и получение результатов происходит в ходе пятого этапа. Далее переходим к анализу и интерпретации результатов, их сопоставлению с эмпирическими данными. На следующем циклическом уровне происходит повторение.

Возрастающая роль компьютерного моделирования как альтернативы физическим испытаниям и современное развитие компьютерной техники и привели к созданию нового направления – компьютерной математики [1]. Это повлияло на широкое распространение и огромный спрос комплексов программ.

Компьютерная математика – это новое направление в науке и образовании, возникшее на стыке фундаментальной математики, информационных и компьютерных технологий [1].

Системой компьютерной математики (СКМ) называют комплекс программ, обеспечивающий автоматизированную, технологически единую и замкнутую обработку задач математической направленности при задании условия на специально предусмотренном языке.

Современные системы компьютерной математики представляют собой программы, которые чаще всего многооконные, с графическим интерфейсом,

развитой системой помощи, что безусловно помогает в их освоении и использовании.

Сегодня СКМ применяются во многих сферах: для проведения компьютерного моделирования и исследования систем, для решения научных, инженерных, учебных задач, для более наглядного представления данных и результатов вычислений, а также в качестве удобных математических справочников.

Среди СКМ можно выделить семь классов:

- табличные процессоры;
- системы для численных расчетов;
- системы для аналитических расчетов;
- системы для статистических расчетов;
- системы для специальных расчетов;
- матричные системы;
- универсальные системы.

Наиболее известных мировых лидеров среди универсальных СКМ можно выделить следующие: Derive, Maple, Mathcad, Mathematica, Matlab, Maxima. Перечисленные системы обладают рядом следующих признаков и преимуществ:

- объединение аналитических и численных методов вычислений;
- визуализация результатов вычислений;
- применение высокоуровневых языков программирования;
- обмен информацией между собой с применением различных форматов.

В своей архитектуре каждая СКМ имеет нюансы, но, не смотря на это, можно выделить типовую структуру класса современных универсальных систем, представленную на рис. 2.3.

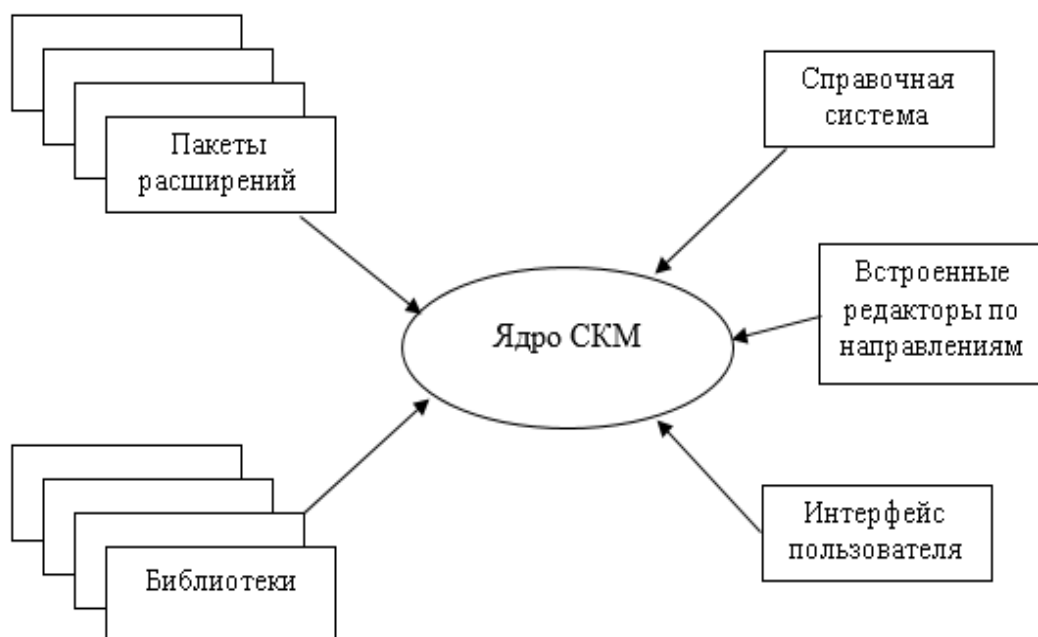


Рис. 2.3. Архитектура обобщенной СКМ

В состав основы СКМ входит ядро системы и является представительным набором базовых функций и алгоритмов – встроенные функции. С помощью подготовленных программ выполняются быстрые вычисления всех функций ядра. Количество встроенных функций основных систем компьютерной математики представлено на рис. 2.4.

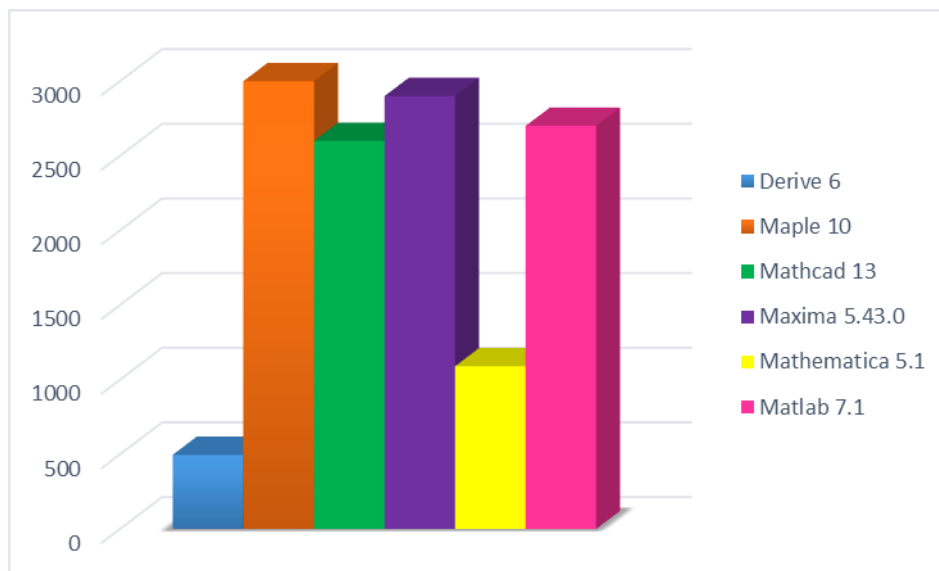


Рис. 2.4. Объем встроенных функций

Для вычислений редких процедур и функций используются библиотеки. С помощью пакетов расширения увеличиваются вычислительные возможности системы, так как пользователь сам может писать такие пакеты с помощью языка программирования СКМ, а это бесспорно позволяет расширить круг решаемых задач. Чтобы увидеть результаты решения на экране дисплея после обращения к ядру системы, пользователю помогает интерфейс.

Любой СКМ состоит из определенного набора редакторов: текстового, формульного, графического, средств поддержки работы в сети, HTML (XML) – средств, пакетов для воспроизведения анимации и аудиосредства.

СКМ могут выполнить и решить большой спектр задач, например, задачи графической визуализации результатов вычислений, построение различных графиков. Для лучшего восприятия и усвоения исследования систем способствует графика СКМ.

Приведем краткий анализ, востребованных в настоящее время программ математического моделирования, выделим их общие черты, определим различия, преимущества и недостатки.

Maple

Программа Maple – это пакет символьной математики, который является одним из лидеров среди универсальных систем символьных вычислений. Maple предоставляет собой удобную интеллектуальную среду для математических исследований любого уровня. В научной среде система очень популярна. Наибо-

лее сильной частью этого программного обеспечения является символьный анализатор.

Преимущества программы: пакет имеет удобный графический интерфейс, продвинутые инструменты визуализации и построения как двумерных, так и трехмерных графиков, а также дополнительные средства программирования; Maple использует процедурный язык 4-го поколения

Недостатки программы: пакет является платным.

Derive

Пакет Derive является маленькой коммерческой математической системой. При решении задач небольшой сложности показывает высокое быстродействие и большую надежность решения. Конкурировать системе Derive с другими системами трудно, как по обилию функций и правил аналитических преобразований, так и по возможностям машинной графики, и по удобству пользовательского интерфейса. Сегодня Derive – это учебная система компьютерной алгебры начального уровня.

Несмотря на то, что новейшая версия Derive 6 под Windows обладает современным и удобным в использовании интерфейс, он во многом уступает интерфейсу известных конкурентов. Возможности графического представления результатов вычислений Derive очень далеко отстает от конкурентов. Подробное описание среды Derive дано в работе.

Преимущества программы: маленькая и простая в использовании программа.

Недостатки программы: не имеет больших возможностей.

MatLab

Система MatLab является одной из старейших, детально проработанных и проверенных временем систем автоматизации математических расчетов. Построение системы основано на расширенном представлении и применении матричных операций, существуют широкие возможности для программирования.

На сегодняшний день MatLab широко используется в технике, науке и образовании, но больше всего она подходит для анализа данных и организации вычислений, нежели для чисто математических выкладок.

Преимущества программы: простота в использования, высокая скорость и экономичность осуществления операций над изображениями.

Недостатки программы: невысокую интегрированность среды; не очень понятную справочную систему; специфический редактор кода MatLab-программ.

MathCad

MathCad является простой, не сложной средой, а тоже продвинутым редактором математических текстов, которые имеют широкий спектр возможностей символьных вычислений и хороший, удобный интерфейс. Программа имеет простой интерфейс и богатые возможности представления.

На сегодняшний день среду MathCad апробируют, осваивают и используют многие школьники, поэтому она действительно является международным стандартом для технических вычислений.

Преимущества программы: вычисления осуществляются на уровне визуальной записи выражений в принятой математической форме; владеет хорошими подсказками, имеет подробную документацию, функцию обучения использованию и целый ряд дополнительных модулей, и хорошую техническую поддержку производителя.

Недостатки программы: среда не имеет языка программирования; язык заимствован из пакета Maple.

Однако на сегодняшний момент математические возможности MathCad в области компьютерной математики намного уступают системам Maple, Maxima, Mathematica, MatLab и даже маленькой программе Derive.

Mathematica

Пакет компьютерной математики Mathematica применяется повсеместно при различных расчетах в современных научных исследованиях и имеет широкую известность, как в научной, так и в образовательной среде. Mathematica занимает центральное место в системах класса машинно-независимое ядро математических операций, которое позволяет переносить систему на разнообразные компьютерные платформы.

Преимущества программы: пакет имеет широчайшие функции, которые в свою очередь не перегружают интерфейс и не замедляют вычисления; объединяет в единое целое числовое и символьное вычислительное ядро, графическую систему, язык программирования, систему документации и возможность взаимодействия с другими приложениями.

Недостатки программы: необычный язык программирования.

Maxima

Пакет Maxima является более простым аналогом программы Mathematica. Система Maxima является некоммерческим проектом с открытым кодом. В программе используется язык, сходный с языком в пакете Mathematica для математической работы, а графический интерфейс построен по аналогичным принципам. Первое название программа получила Xmaxima и создавалась для UNIX-систем.

Сегодня система Maxima имеет более мощный, эффективный и дружелюбный графический интерфейс, который называется Wxmaxima. Математический пакет является универсальным, позволяющий решать математические задачи без использования программирования.

Maxima – это система компьютерной математики, которая используется для выполнения математических расчетов – символьных и численных:

- упрощение выражений;
- графическая визуализация вычислений;
- решение уравнений и их систем;

- решение обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем;
- решение задач линейной алгебры;
- решение задач дифференциального и интегрального исчисления;
- решение задач теории чисел и комбинаторных уравнений и др.

Преимуществами программы: возможность свободного использования пакета; широкий класс решаемых задач, имеется справка и инструкция по работе с программой.

Для системы характерно большое количество встроенных команд и функций, наличие своего собственного языка и встроенного языка программирования высокого уровня. Еще одно из преимуществ – возможность пользователю самому создавать новые функции. Все эти плюсы способствуют решению новых задач и созданию отдельных модулей и подключению их к системе для решения некоторого круга задач.

2.2. Инструментарий и функциональные возможности программной среды Maxima

Программная среда Maxima является потомком DOE Macsyma. Среда была создана в конце 1960 года. Создателем компьютерной алгебры стала Macsyma, она же дала толчок и основу к развитию таких программ, как Maple и Mathematica. Вильям Шелтер разрабатывал первоначальный и главный вариант среды Maxima в период с 1982 по 2001 год. В 1998 году было получено разрешение на реализацию открытого кода на GPL.

С официального сайта <http://maxima.sourceforge.net> возможно свободно скачать и посмотреть типы и виды интерфейсов СКМ Maxima. В настоящей работе использована последняя версия 19.05.7. Система небольшого размера, многоплатформенная, проста в установке.

Дистрибутив является консольной программой, где математические формулы прописываются стандартными текстовыми символами.

xMaxima, wxMaxima, TexMacs – графические русифицированные интерфейсы системы Maxima. На сегодняшний день графический интерфейс wxMaxima самый популярный, так как простой и понятный в использовании. После запуска системы Maxima перед нами – рабочее окно программы (рис. 2.5).

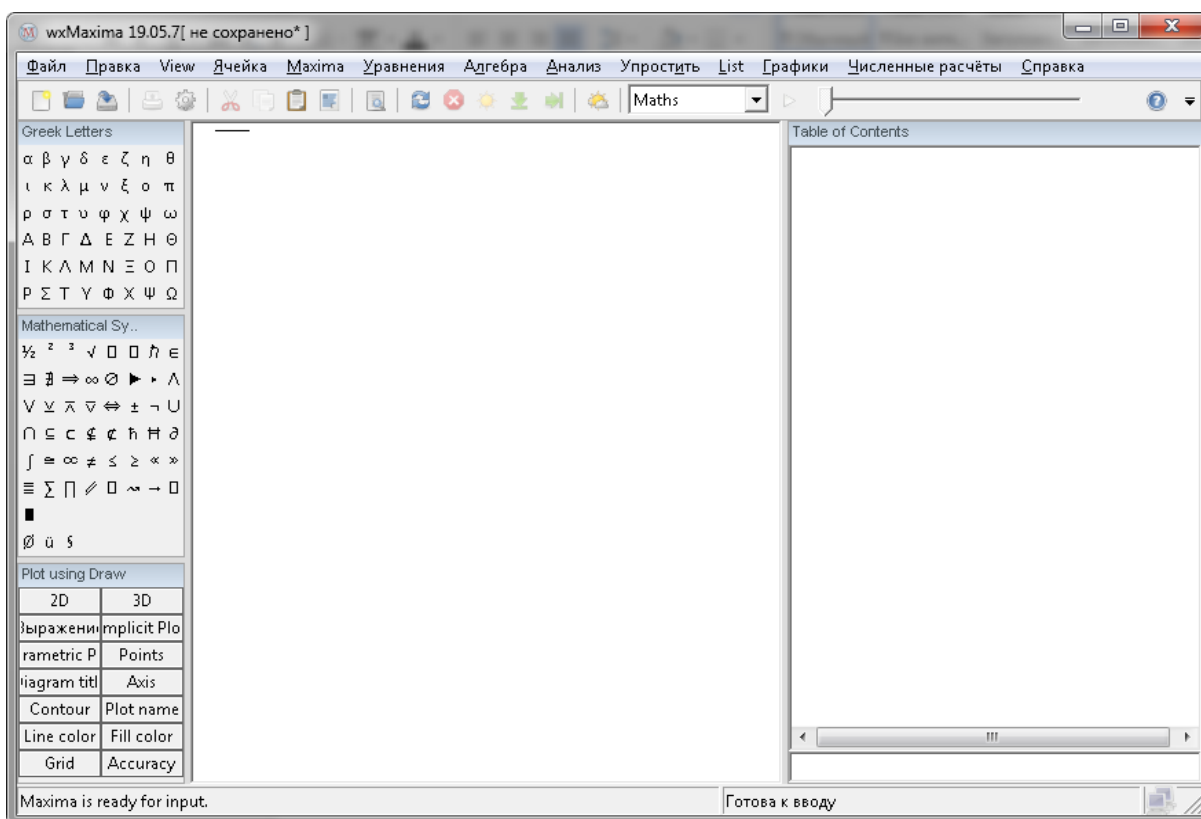


Рис. 2.5. Вид рабочего окна системы Maxima

Из рис. 2.5 видно, что структура окна системы Maxima имеет стандартный вид:

- в строке состояния располагается: название программы и информация сохранен документ или нет;
- панель меню программы – это доступ к основным функциям и настройкам программы, на панели находятся: функции для решения большого количества типовых математических задач, разделенные по группам: уравнения, алгебра, анализ, упростить, графики, численные вычисления;
- кнопки: для создания нового документа, быстрого сохранения документа, вызова окна справки, создания ячеек ввода, прерывания вычислений, кнопки для работы с буфером обмена и др. находятся на панели инструментов;
- рабочая область – это документ, в котором формируются ячейки ввода и выводятся результаты выполненных команд;
- строка состояния;
- набор кнопок для быстрого вызова некоторых команд, быстрый ввод математических символов – панель с кнопками.

Абсолютно любая комбинация встроенных функций или математических выражений, заканчивающаяся символом «;» в среде Maxima называется командой. Если пропущен символ «;», система автоматически добавит его. Также для обозначения конца ввода команды можно вместо «;» использовать символ «\$».

Для ввода команды, необходимо активировать ячейку ввода. В данной версии активация происходит автоматически при вводе данных. Чтобы увидеть результат необходимо нажать сочетание клавиш «Ctrl» + «Enter».

Таким образом, в документе были сформированы две строки:

- (%i1) – ячейка ввода;
- (%o1) – ячейка вывода.

Каждая ячейка имеет свою метку, заключенную в скобки имя ячейки. Ячейками ввода называют ячейки, в которых размещаются входные данные: формулы, команды, выражения. Они обозначаются %iChislo, где Chislo – номер ячейки ввода. Ячейками вывода называются ячейки, в которых размещаются выходные данные: списки значений, выражения. Они обозначаются %oChislo, где Chislo – номер ячейки вывода.

Синтаксис стандартных функций в системе Maxima.

- Арифметические операторы: +, -, *, /, ^.
- Операторы сравнения: <, >, <=, =>.
- Функция нахождения факториала числа: !.
- Логические операторы: and, or, not.
- Функция нахождения полуфакториала: !!.
- Функция, возвращающая знак числа x : `signum(x)`.
- Функция отрицания синтаксического равенства: #.
- Функция нахождения модуля числа x : `abs(x)`.
- Функции, возвращающие наибольшее и наименьшее значения из заданных действительных чисел: `max(x1,...,xn)` и `min(x1,...,xn)`.
- Некоторые встроенные математические функции: `sqrt(x)`, `acos(x)`, `acosh(x)`, `acot(x)`, `acoth(x)`, `acsc(x)`, `acsch(x)`, `asec(x)`, `asech(x)`, `asin(x)`, `asinh(x)`, `atan(x)`, `atanh(x)`, `cosh(x)`, `coth(x)`, `csch(x)`, `sec(x)`, `sech(x)`, `sin(x)`, `sinh(x)`, `tan(x)`, `tanh(x)`, `log(x)`, `exp(x)` [16].

Для решения линейных и нелинейных уравнений в системе Maxima используется встроенная функция `solve`, которая имеет следующий синтаксис:

- `solve(expr, x)` – решает алгебраическое уравнение `expr` относительно переменной `x`;
- `solve(expr)` – решает алгебраическое уравнение `expr` относительно неизвестной переменной, входящей в уравнение.

С помощью внешних программ реализованы графические возможности Maxima. Программа Gnuplot идет по умолчанию, для построения графиков в Maxima.

Для построения графиков на плоскости используется команда `plot2d`: `plot2d(выражение, [символ, начало, конец])`, где выражение задает функцию, график которой нужно построить, символ – неизвестное, входящее в выражение, начало и конец задают отрезок оси X для построения графика, участок по оси Y выбирается автоматически, исходя из минимума и максимума функции на заданном промежутке. Окно Gnuplotgraph открывается с выполненным по-

строением после вызова функции `plot2d`. Масштабировать график можно только за счет изменения размеров окна.

Для построения графиков поверхностей и кривых в пространстве предназначена функция `plot3d`. Функция `plot3d` имеет два варианта вызова:

- для явного задания функции – `plot3d(выражение, [переменная1, начало, конец], [переменная2, начало, конец]);`
- для параметрического – `plot3d([выражение1, выражение2, выражение3], [переменная1, начало, конец], [переменная2, начало, конец]).`

В обоих случаях функция принимает три аргумента.

В *Mathima* включено достаточно большое количество средств, которые могут быть использованы для решения задач моделирования и исследования систем. Поскольку большинство динамических систем описывается в виде системы дифференциальных уравнений, то в настоящей работе будут рассмотрены и использованы следующие команды СКМ *Mathima* для нахождения решений дифференциальных уравнений и их систем в символьном виде:

- `desolve (eqn, x)` – ищет частные решения линейных дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков;
- `desolve ([eqn_1, ..., eqn_n], [x_1, ..., x_n])` (сокращенно от слов «differential»;
- `equationsolve») – используется для нахождения частных решений систем линейных дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков.`

Следует заметить, что дифференциальные уравнения решаются аналитически в явном виде редко. Использование СКМ дает приближенное решение дифференциальных уравнений на конечном временном отрезке, что не позволяет понять поведение траекторий в целом. Поэтому важную роль приобретают методы качественного исследования дифференциальных уравнений.

Ответ на вопрос о том, какие режимы поведения могут устанавливаться в данной системе, можно получить из так называемого фазового портрета системы – совокупности всех ее фазовых траекторий, изображенных в пространстве фазовых переменных (фазовом пространстве). Среди этих траекторий имеется некоторое число основных, которые и определяют качественные свойства системы. К ним относятся прежде всего точки равновесия, отвечающие стационарным режимам системы, и замкнутые траектории (предельные циклы), отвечающие режимам периодических колебаний. Будет ли режим устойчив или нет, можно судить по поведению соседних траекторий: устойчивое равновесие или цикл притягивает все близкие траектории, неустойчивое отталкивает хотя бы некоторые из них.

Таким образом, «фазовая плоскость», разбитая на траектории, дает легко обозримый «портрет» динамической системы, она дает возможность сразу, одним взглядом охватить всю совокупность движений, которые могут возникнуть при всевозможных начальных условиях.

Для построения фазовых портретов в *Mathima* используются следующие команды:

- для выполнения построений дополнительно в системе Maxima есть пакет **Draw**, который загружается с помощью команды `load(draw)`;
- **draw2d** – функция предназначена для построения графиков на плоскости с применением большого количества дополнительных опций: **xrange**, **yrange** – для определения промежутков изменения значений переменной по осям Ox и Oy ; **title** – выводит заголовок к графику функции; **grid** – если `grid=true`, то на координатной плоскости выводятся линии сетки;
- **points** – построение точек с координатами.

Подробное описание всех функциональных возможностей пакета Maxima дано в работе [1].

2.3. Построение фазовых траекторий и поля направлений дифференциальных уравнений

Рассмотрим реализацию метода фазового пространства, а именно проведем построение фазовых портретов динамических систем ($n=2$) на основе применения СКМ.

Пример 2.1. Построить интегральную кривую дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = e^{-x} + y$, проходящую через точку $(2, -0.1)$, и поле направлений.

Решение. Для этого необходимо использовать пакет `plotdf`, а именно команду `load(plotdf)$`. Зададим команду для построения интегральной кривой уравнения и поля направлений.

В результате образуются две ячейки ввода с именами `(%i1)` и `(%i2)`.

```
(%i1) load(plotdf)$
(%i2) plotdf(exp(-x)+y, [trajectory_at,2,-0.1])$
```

После оценивания ячейки ввода `%i2` откроется окно программы OpenMath с результатом выполнения команды.

Как видно, окно имеет несколько пунктов меню для работы с графическим изображением. «Меню» «Масштабировать» позволяет увеличивать и уменьшать график. «Меню» «Настройка» позволяет изменять некоторые установки: решаемое уравнение, начальная точка и направление вычисляемой траектории, шаг интервала интегрирования и др. С помощью меню «Сохранить» может быть сохранен построенный график в PostScript файл (рис. 2.6).

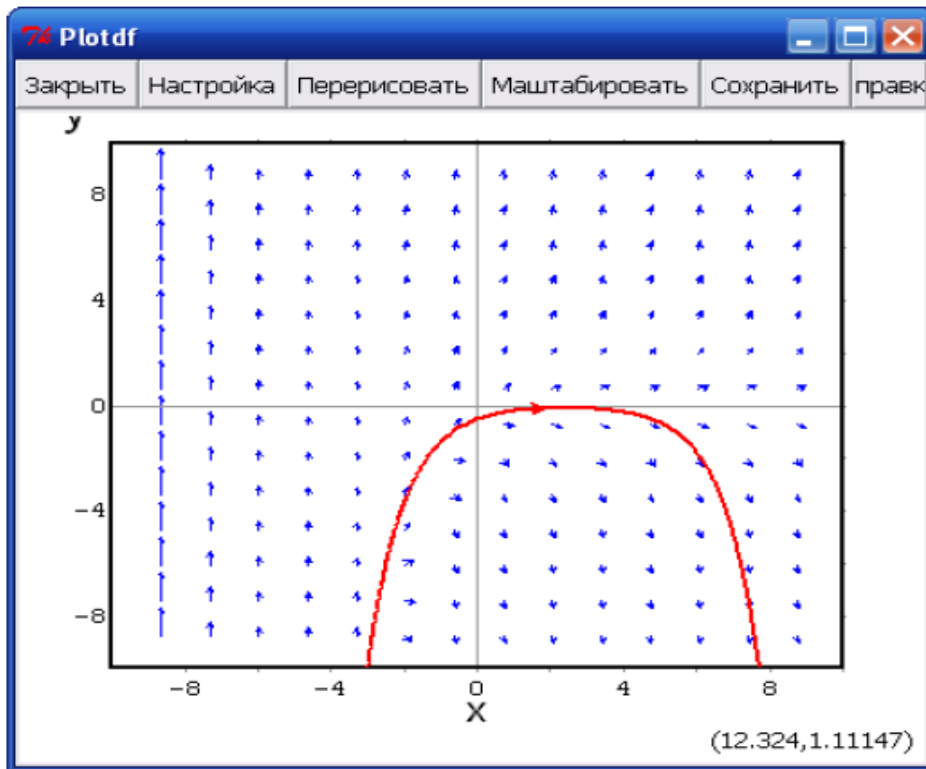


Рис. 2.6. Результат выполнения команды

Пример 2.2. Построить интегральную кривую и поле направлений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{-2 * z}{m} \end{cases}$$

Решение. Построим интегральную кривую, которая определена этими двумя уравнениями и проходит через точку $(z, v) = (6, 0)$. Установим начальные значения параметра m второго уравнения системы равным 2. С помощью опции `slider`, которая позволит нам изменять значения параметра m в интерактивном режиме с помощью бегунка в левом нижнем углу графического окна.

Вывод двух команд:

```
(%i1) load(plotdf)$
(%i2) plotdf([v, -2*z/m],[z,v],[parameters, "m=2"],
            [sliders, "m=1:5"],[trajectory_at,6,0])$
```

В результате получаем (рис. 2.7):

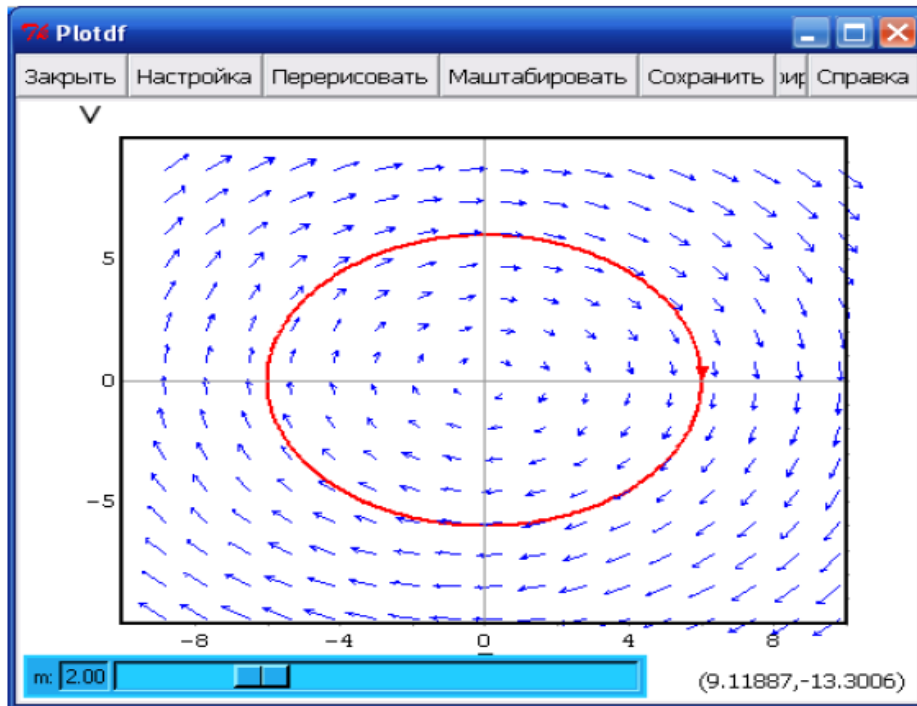


Рис. 2.7. Результат выполнения команды

Как видно из построения, начальное значение параметра m установлено равным 2. С помощью бегунка полосы прокрутки можно менять задание исходной системы (ее параметр m). Соответственно изменяется фазовый портрет системы (рис. 2.8): Направление синих стрелочек на фазовой плоскости указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t . Положение равновесия является центром, а фазовые траектории представляют собой эллипсы. Точка покоя системы устойчива, но не асимптотически.

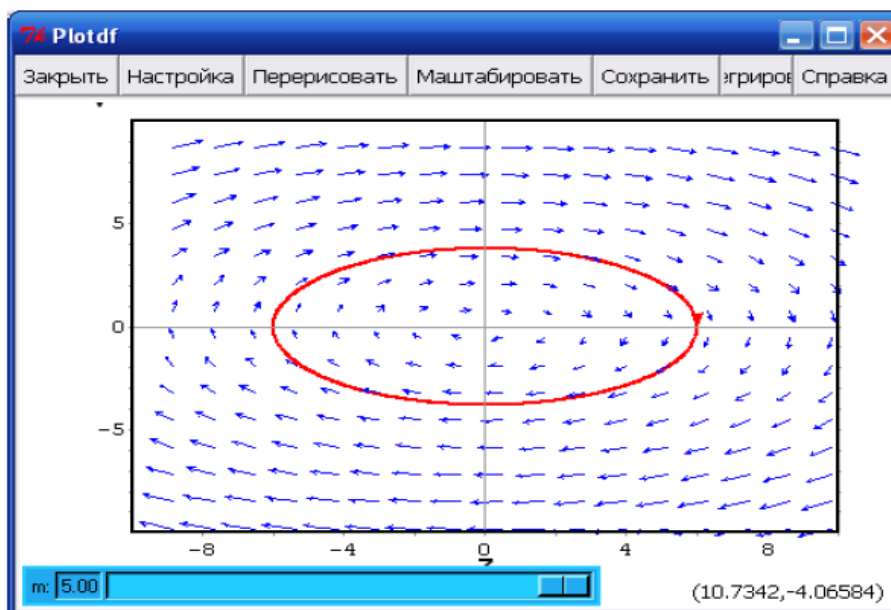


Рис. 2.8. Фазовый портрет

Пример 2.3. При каких значениях параметра a особая точка системы $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = ax - 6y \end{cases}$ только одна и является седлом? узлом? фокусом? Дать чертеж траекторий при $a=8$.

Решение. Для начала необходимо составить характеристическое уравнение основной матрицы системы и найти его корни. Зададим матрицу – пункт меню «Алгебра» – «Ввести матрицу...». Далее появится диалоговое окно, которое запрашивает размерность матрицы и вводим размер 2x2 (рис. 2.9).

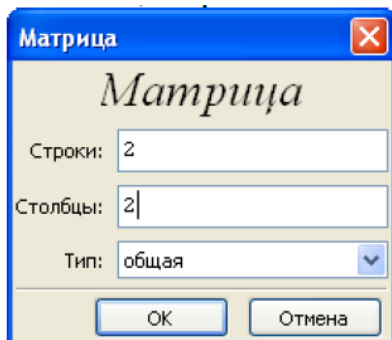


Рис. 2.9. Диалоговое окно

После задания размерности нажимаем ОК и в следующем диалоговом окне вводим элементы матрицы (рис. 2.10):

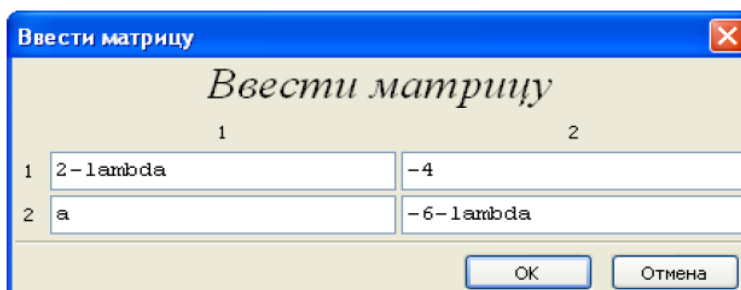


Рис. 2.10. Ввод элементов матрицы

При нажатии на кнопке ОК создаются ячейки ввода и вывода с матрицей.

```
(%i1) matrix(
      [2-lambda, -4],
      [a, -6-lambda]
    );
(%o1) [ 2 - lambda      - 4
        a      - lambda - 6 ]
```

Вычислим определитель матрицы и найдем собственные значения матрицы.


```
(%i2) d:determinant(%);
(%o2) (-lambda - 6)(2 - lambda) + 4 a

(%i3) solve([%=0], [lambda]);
(%o3) [ lambda = -2*sqrt(4 - a) - 2 , lambda = 2*sqrt(4 - a) - 2 ]
```

Вычислим произведение собственных значений матрицы $\lambda_1 \lambda_2$:

```
(%i4) expand((-2*sqrt(4-a)-2)*(2*sqrt(4-a)-2));
(%o4) 4 a - 12
```

Среда Maxima не умеет решать неравенства в символьном виде. Поэтому необходимо определить графически знак полученного произведения $\lambda_1 \lambda_2$ при различных значениях параметра a . Для этого нажимаем пункт меню «Графики» – «График 2D» и введем в появившемся диалоговом окне значения полей (рис. 2.11).

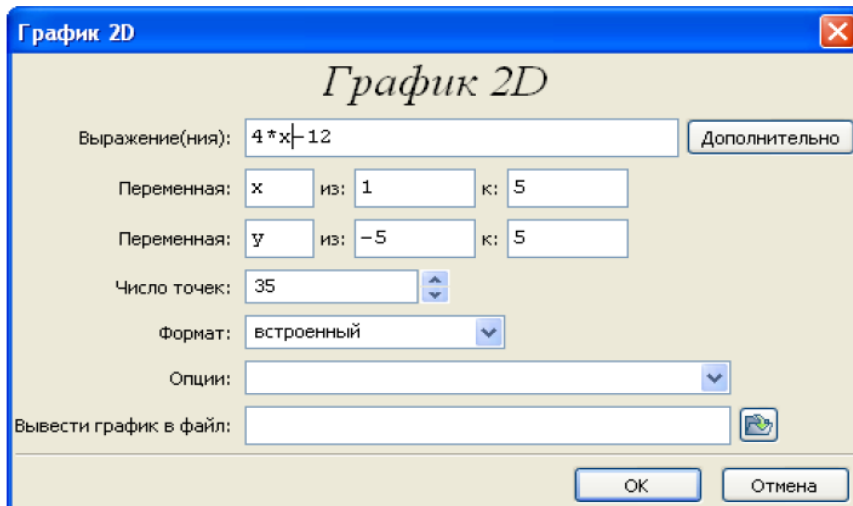


Рис. 2.11. Заполнение полей

В результате получим следующее построение (рис. 2.12).

```
(%i5) wxplot2d([4*x-12], [x,1,5], [y,-5,5],
[nticks,50])$
```

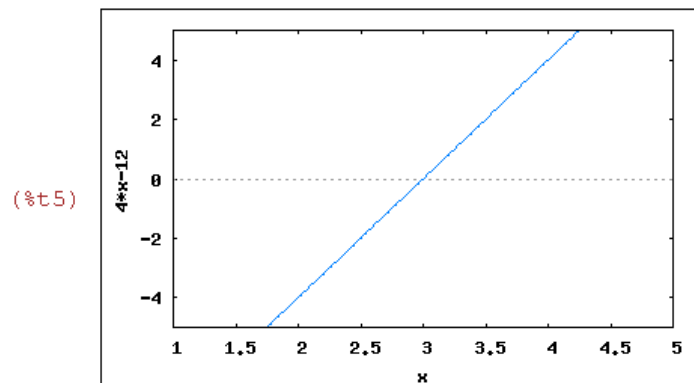


Рис. 2.12. Построение

Из графика видно, что $\lambda_1 \lambda_2 = 4a - 12 = \begin{cases} < 0 \text{ при } a < 3, \\ = 0 \text{ при } a = 3, \\ > 0 \text{ при } a > 3. \end{cases}$

Далее необходимо определить при каких значениях a собственные значения являются действительными, а при каких комплексными числами, для этого необходимо вычислить дискриминант d выражения, предварительно представив его в виде квадратного трехчлена:

```
(%i7) expand(d);
(%o7) lambda^2 + 4 lambda + 4 a - 12

(%i8) dis:16-4*(4*a-12);
(%o8) 16 - 4(4 a - 12)

(%i9) radcan(%);
(%o9) 64 - 16 a
```

Определим знак дискриминанта при различных значениях параметра a (рис. 2.13).

```
(%i10) wxplot2d([64-16*x], [x,1,5], [y,-5,5],
[nticks,29])$
```

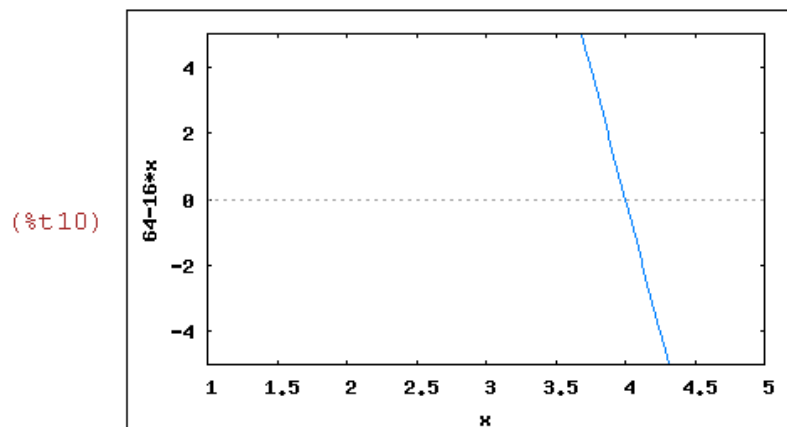


Рис. 2.13. Определение знака дискриминанта

Получим, что

$$dis = 64 - 16a = \begin{cases} < 0 \text{ при } a < 4, \lambda_1, \lambda_2 - \text{комплексные} \\ = 0 \text{ при } a = 4, \lambda_1 = \lambda_2 = -2 \\ > 0 \text{ при } a > 4, \lambda_1, \lambda_2 - \text{вещественные различные} \end{cases}$$

Тогда, согласно классификации особых точек, которая представлена в приложении 1 настоящей работы, получаем:

1. При $a < 3$ имеем $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, следовательно, особая точка – седло.
2. При $a = 3$ имеем $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4$, следовательно, особых точек много.

3. При $3 < a \leq 4$ корни вещественные, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, следовательно, особая точка – устойчивый узел (при $a = 4$ – вырожденный узел).

4. При $a > 4$ корни комплексные, следовательно, особая точка – устойчивый фокус.

Подтвердим аналитические рассуждения построениями. Построим поле направлений для исходной системы уравнений, положив, что значение параметра a меняется от -8 до 10, тем самым сможем, изменяя положение бегунка полосы прокрутки, просмотреть все возможные варианты особых точек. За начальное значение параметра a возьмем значение равное 8 (согласно условию задачи). Задаем команду для построения поля направлений:

```
(%i12) load("plotdf")$
```

```
(%i21) plotdf([2*x-4*y, a*x-6*y], [x, y],  
[parameters, "a=8"], [trajectory_at, 2, 1],  
[tstep, 0.01], [x, -10, 10], [y, -10, 10],  
[direction, forward], [nsteps, 300],  
[sliders, "a=-8:10"], [versus_t, 1])$
```

В результате получим два графических окна: одно с изображением поля направлений и траекторией, проходящей через точку (2; 1) (рис. 2.14), второе – с изображением значений функций $x[t]$ и $y[t]$ параметра t (чтобы это окно убрать, необходимо из строки для построения поля направлений удалить команду [versus_t,1]).

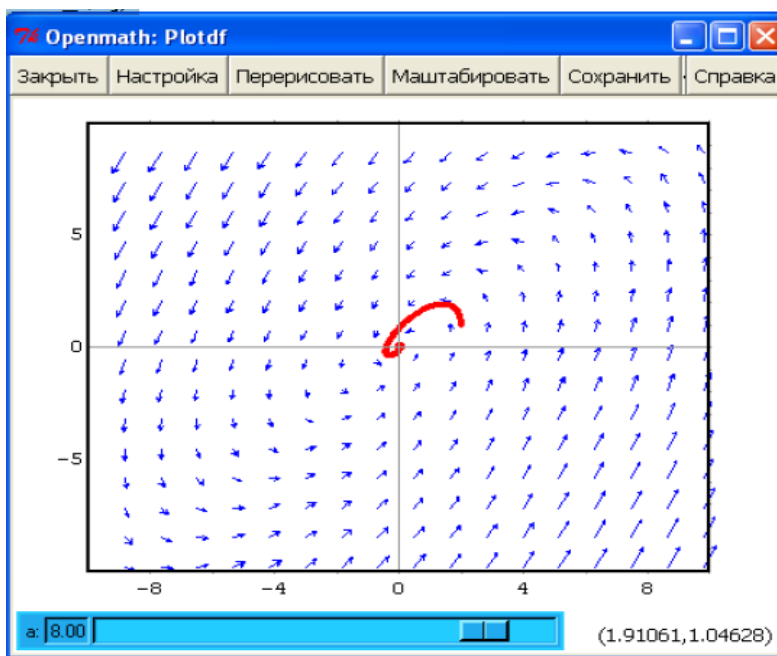


Рис. 2.14 Окно с изображением поля направлений и траекторией, проходящей через точку (2; 1)

Для большей наглядности добавим еще несколько траекторий в окне поля направлений (щелкая левой кнопкой мыши в поле направлений) и тем самым убедимся в том, что особая точка является устойчивым фокусом, а фазовые траектории представляют собой закручивающиеся по часовой стрелке спирали, что говорит об абсолютной устойчивости динамической системы. Полученный фазовый портрет на рис. 2.15 согласуется с условием 4, полученным в ходе аналитического исследования системы примера 2.3.

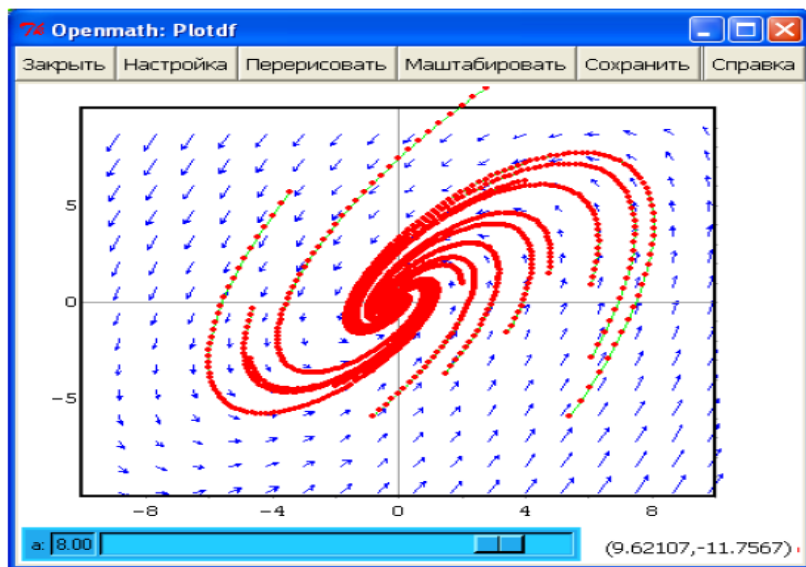


Рис. 2.15. Добавление траекторий

Передвинем бегунок полосы прокрутки в позицию меньше 3 ($a < 3$). Получим геометрическую картину, называемую седлом (рис. 2.16). Фазовые траектории представляют собой ветви гиперболы, точка покоя системы неустойчива.

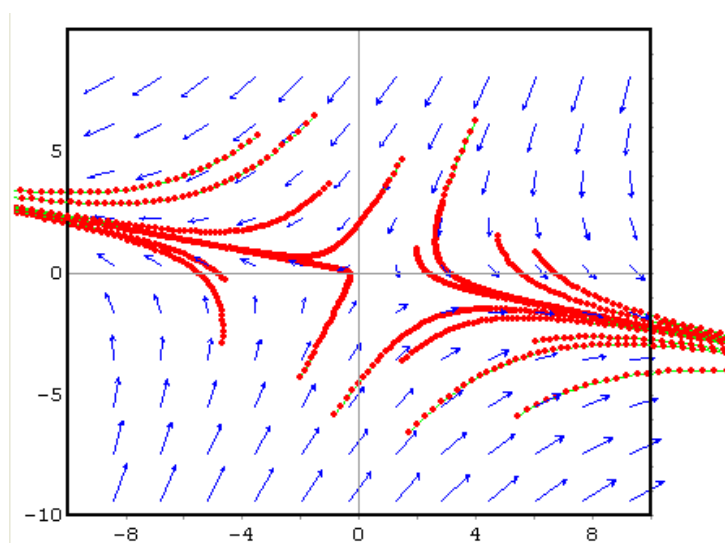


Рис. 2.16. Седло

При a , изменяющемся от 3 до 4, имеем устойчивый узел (рис. 2.17). Точка покоя системы асимптотически устойчива, фазовые траектории направлены к началу координат.

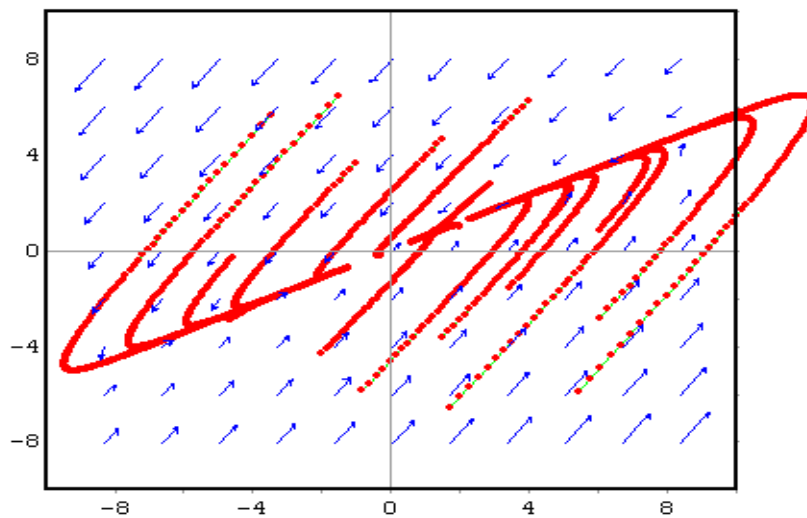


Рис. 2.17. Устойчивый узел

При $a=4$ имеем устойчивый фокус (рис. 2.18), фазовые траектории направлены к началу координат.

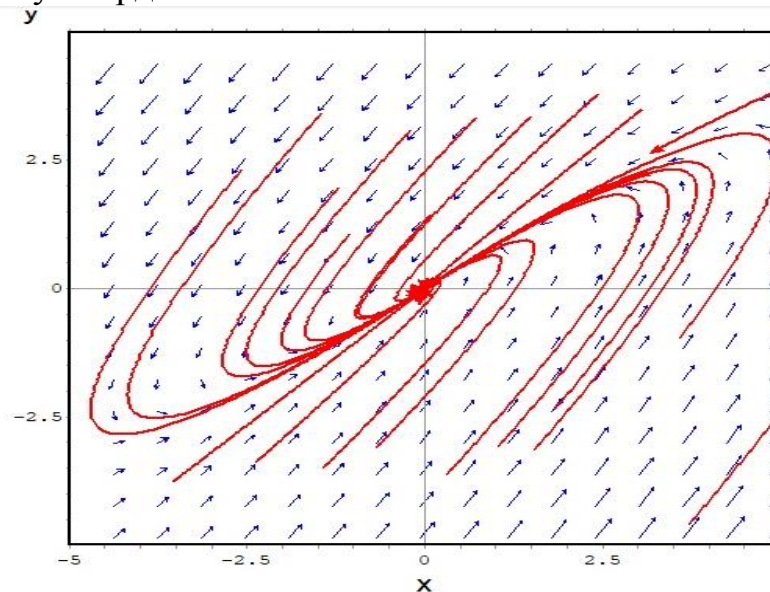


Рис. 2.18 Устойчивый фокус

Для значения параметра $a = 3$ изменим команду `plotdf` следующим образом (рис. 2.19).

```
(%i17) plotdf([2*x-4*y, a*x-6*y], [x, y],
[parameters, "a=3"],
[tstep, 0.01], [x, -5, 5], [y, -5, 5],
[direction, forward], [nsteps, 300],
[sliders, "a=1:5"])$
```

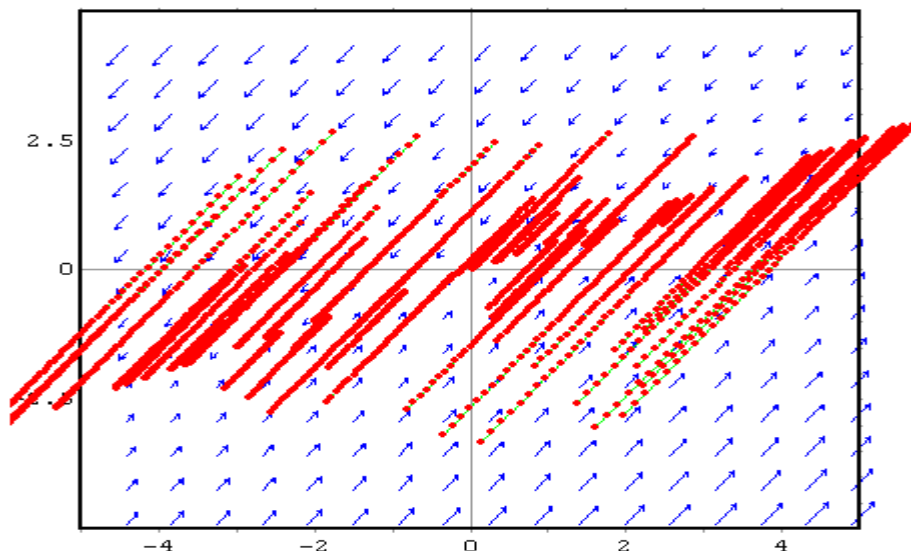


Рис. 2.19. Результат выполнения команды

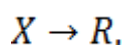
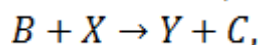
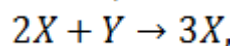
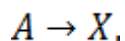
На рис. 2.19 видно, что система дифференциальных уравнений действительно имеет множество особых точек. Система устойчива по Ляпунову.

2.4. Примеры использования *Maxima* в исследованиях устойчивости динамических систем

Модель брюсселятора

Классическим примером существования автоколебаний в системе химических реакций является модель брюсселятора (или трехмолекулярная модель), предложенная в 1968 г. Пригожиным И.Р. и Лефевром Р. Главная цель этой модели – определение качественных типов поведения, которые совместимы с фундаментальными законами химической и биологической кинетики. С помощью данной модели можно выявить условия возникновения типов самоорганизации в биологических и химических системах, в этом смысле брюсселятор играет роль базовой исходной модели.

Схема гипотетических химических реакций брюсселятора имеет вид:



где A, B – это исходно заданные вещества, распределенные равномерно; R, C – продукты, X, Y – промежуточные вещества. При этом считается, что все стадии реакций необратимы. Концентрации веществ X и Y меняются в ходе химических превращений, и они являются переменными системы. Концентрации веществ A и B являются постоянными параметрами.

Исходя из этого система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = A + x^2 y - (B + 1)x + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = Bx - x^2 y + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}. \end{cases} \quad (2.1)$$

В бюсселяторе возникают устойчивые пространственные структуры, когда соотношение параметров соответствует наличию предельного цикла в точечной системе.

Фазовым пространством системы (2.1) является множество:

$$R_+^2 = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Рассмотрим построение фазового портрета бюсселятора в зависимости от значений параметров, входящих в уравнение модель.

1. Определение положение равновесия:

$$\begin{cases} A - (B + 1)x + x^2 y = 0, \\ Bx - x^2 y = 0, \\ A, B > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = A, \\ y = \frac{B}{A}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что система имеет одно положение равновесия при $P\left(A, \frac{B}{A}\right)$ любых допустимых значениях параметров.

2. Исследование на устойчивость положений равновесия

В окрестности положения равновесия $P\left(A, \frac{B}{A}\right)$ системе (2.1) соответствует линеаризованная система:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (B - 1)u + A^2 v, \\ \frac{dv}{dt} = -Bu - A^2 v, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $u(t) = x(t) - A, v(t) = y(t) - \frac{B}{A}$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + (A^2 + 1 - B)\lambda + A^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(A^2 + 1 - B) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - B)((A - 1)^2 - B)}$.

Исходя из этого, сделаем вывод, что положение равновесия является асимптотически устойчивым, если $A^2 + 1 - B > 0$. Если же $A^2 + 1 - B < 0$, то положение равновесия становится неустойчивым, и у системы (2.2) появляется предельный цикл. Значения параметров A и B для которых $A^2 + 1 - B = 0$, являются бифуркационными. Положение равновесия имеет тип «узел», если $((A + 1)^2 - B)((A - 1)^2 - B) \geq 0$. Положение равновесия имеет тип «фокус», если $((A + 1)^2 - B)((A - 1)^2 - B) < 0$.

Описание исследования модели брюсселятора в Maxima приведено в следующем командном файле при $B=0,5$

```
load("dynamics"); //загрузка расширения dynamics
load("draw"); // загрузка расширения draw
B:0.5; //задаем значение параметра
eq1:-(B+1)*y0+y0^2*y1+1; //задаем первое дифференциальное уравнение
eq2:B*y0-y0^2+1; //задаем второе дифференциальное уравнение
t_range:[t,0,10,0.1]; //диапазон изменений
sol: rk([eq1,eq2],[y0,y1],[1,1],t_range)$ //ввод данных из файла
len:length(sol);
t:makelist(sol[k][1],k,1,len)$ //создание списка на основе заданного выражения
//из исходного списка
y0:makelist(sol[k][2],k,1,len)$
y1:makelist(sol[k][3],k,1,len)$
draw2d(title="Brusselator",xlabel="t",ylabel="y0,y1", //построение графика с
заданием заголовка графика и подписями осей
grid=true,points_joined = true, //на координатной плоскости выводятся линии
сетки
points(t,y0),points(t,y1),terminal=eps); //построение точек с координатами
```

Описание модели брюсселятора в Maxima при $B=2,5$:

```
load("dynamics");
load("draw");
B:2.5;
eq1:-(B+1)*y0+y0^2*y1+1;
eq2:B*y0-y0^2+1;
t_range:[t,0,10,0.1];
sol: rk([eq1,eq2],[y0,y1],[1,1],t_range)$
len:length(sol);
t:makelist(sol[k][1],k,1,len)$
y0:makelist(sol[k][2],k,1,len)$
y1:makelist(sol[k][3],k,1,len)$
draw2d(title="Brusselator",xlabel="t",ylabel="y0,y1",
grid=true,points_joined = true,
points(t,y0),points(t,y1),terminal=eps)
```

Автоколебательный режим в системе представлен на рис. 2.20, фазовые портреты при $B=0,5$ (рис. 2.21), при $B=2,5$ (рис. 2.22).

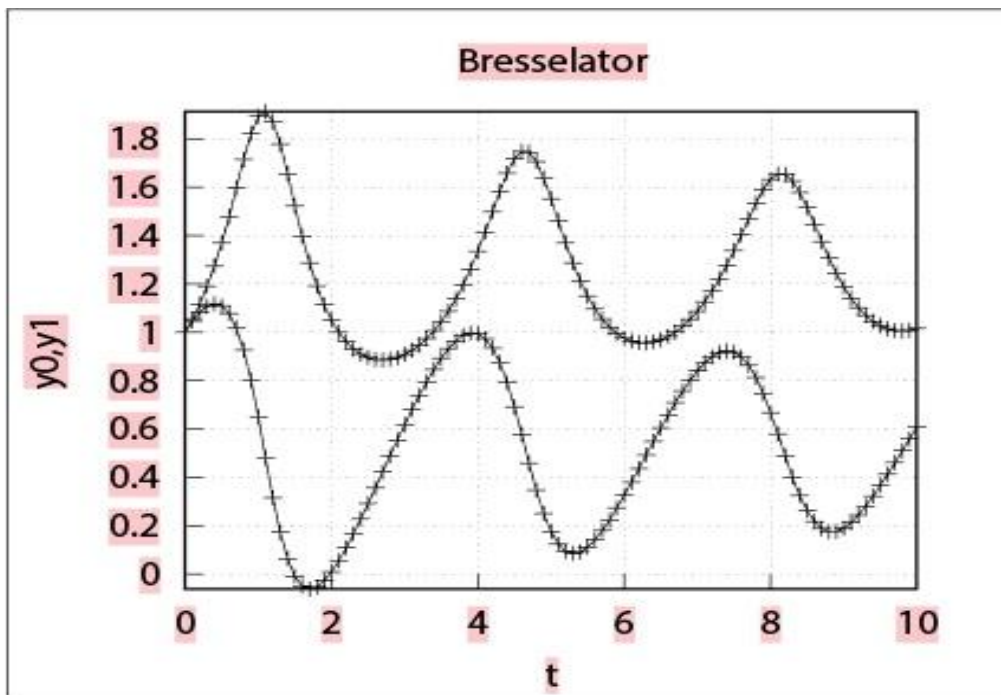


Рис. 2.20. Изменение при моделировании автоколебательной химической реакции – брюсселятора

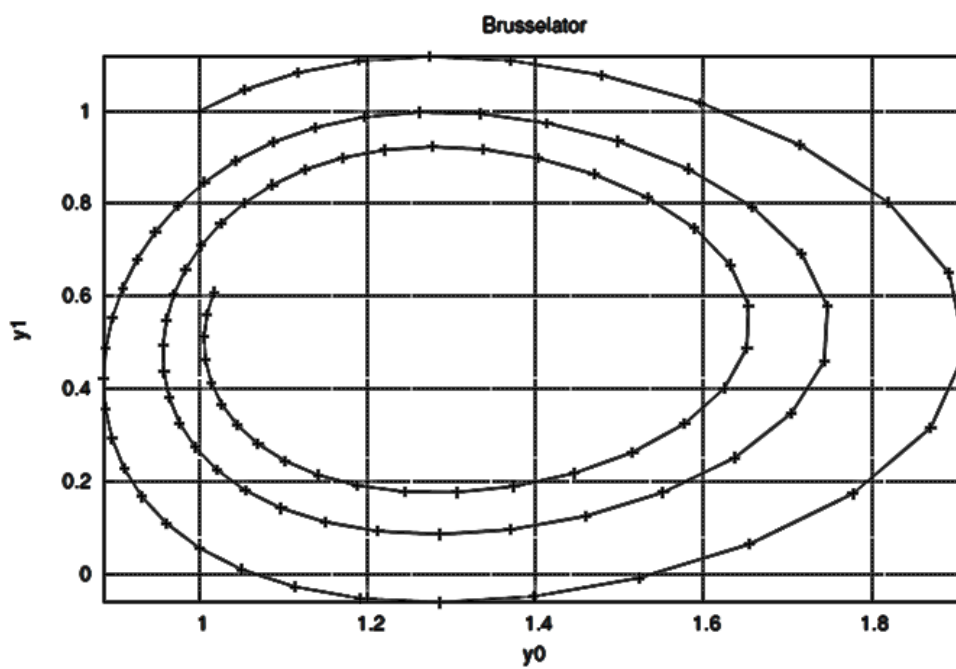


Рис. 2.21. Фазовый портрет для брюсселятора при $V=0.5$

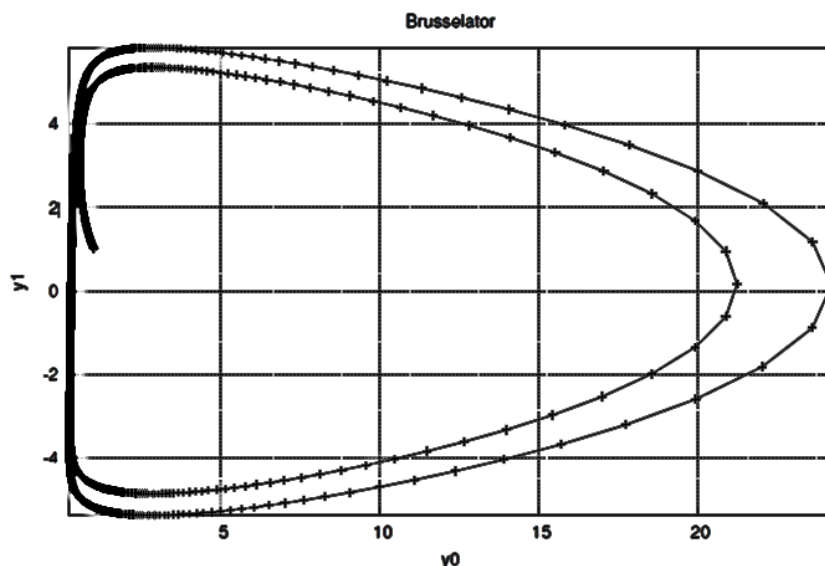


Рис. 2.22. Фазовый портрет для брюсселятора при $B=2.5$

Графики, представленные на рис. 2.21–2.22, демонстрируют зависимость свойства устойчивости системы от изменения значений ее параметров.

Модель Лотки-Вольтерры

В 1931 году американец Альфред Лотка и итальянец Вито Вольтерра разработали модель, позволяющую описывать, как будет меняться поголовье хищников и их травоядных жертв в зависимости от множества происходящих условий. Созданная учеными модель получила название модель Лотки-Вольтерры.

Модель Лотки-Вольтерры является первоначальной и простейшей системой для описания модели «хищник-жертва», то есть популяции хищников и популяции жертв, взаимодействующих в какой-то среде: жертвы едят растительность, хищники – жертв. Модель Лотки-Вольтерры представляется системой вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta y)x \\ \dot{y} = (-\gamma + \delta x)y \end{cases} \quad (2.3)$$

где x – численность жертв (травоядных); y – численность хищников; α – вероятность того, что травоядные размножатся; β – вероятность того, что травоядное будет съедено хищником; γ – вероятность того, что хищник умрет от голода; δ – вероятность того, что хищнику хватит еды на дальнейшее размножение.

Из модели (2.3) следует, что если жертв нет ($x = 0$), то хищники будут вымирать экспоненциально с неким начальным коэффициентом (γ согласно уравнению): $\dot{y} = -\gamma \cdot y \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{-\gamma t}, C_1 \in R$.

Схожую ситуацию получаем при полном отсутствии хищников ($y = 0$): $\dot{x} = \alpha \cdot x \Rightarrow x = C_2 \cdot e^{\alpha t}, C_2 \in R$.

Рост жертв получается экспоненциальным с некой заранее заданной константой α . Стоит отметить, что в данной модели принимаются несколько допущений:

- количество пищи для травоядных не ограничено;
- ни жертвы, ни хищники не эмигрируют из среды;
- никакие другие животные не мигрируют в среду;
- данная модель не учитывает вымирание животных по причине старения и прочих внешних воздействий.

Два дифференциальных уравнения системы (2.3) моделируют временную динамику численности двух биологических популяций жертв x и хищников y . Имеется в виду, что жертвы размножаются с постоянной скоростью, а их численность убывает вследствие поедания хищниками. В свою очередь хищники размножаются со скоростью, пропорциональной количеству пищи, и умирают естественным образом.

Найдем особые точки, которыми обладает система:

$$\begin{cases} (\alpha - \beta y)x = 0 \\ (-\gamma + \delta x)y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha x = \beta xy \\ \gamma y = \delta xy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(0) = \frac{\alpha}{\beta} \\ x(0) = \frac{\gamma}{\delta} \end{cases}$$

Понятно, что при $x(0) = 0, y(0) = 0$ особой точкой будет как раз $(0, 0)$, но этот случай не интересен, так как в нулевой момент времени животные обоих видов отсутствуют и, что логично, дальше не появляются.

Более интересный вариант происходит в ненулевом случае. В зависимости от начальных параметров будет меняться *особая точка* – такое значение размеров популяции животных, когда обе популяции остаются неизменными и сбалансированными. Если же начальное условие не попадает в особую точку, фазовые кривые будут идти вокруг нее, образуя бесконечное циклическое колебание, о котором как раз и говорили Лотка и Вольтерра. То есть количество особей одного вида будет расти, другого – уменьшаться, затем наоборот, и так в течение неограниченного количества времени.

Данная модель была создана для биологических систем, но с определенными корректурами она может применяться к моделированию реальных ситуаций: изучение конкуренции фирм, строительство финансовых пирамид, исследование динамики роста народонаселения или экологической проблематике и др. Подробное описание применения модели Лотки-Вольтерры дано в работе [5].

Модель Лотки-Вольтерры (2.3) с логистической поправкой описывается следующей системой уравнений с условиями заданной численности «жертв» и «хищников» в начальный момент $t = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= y(t)(a - bz(t)) - \alpha y(t),^2 \\ \frac{d}{dt}z(t) &= (-c + dy(t))z(t) - \alpha z(t)^2. \end{aligned}$$

Если $\alpha = 0$, то получаем особую точку типа центр, иначе – фокус, причем, если $\alpha < 0$, то точка будет устойчивой, если $\alpha > 0$, то неустойчивой.

Для исследования динамических систем вида (2.3) используется численный метод Рунге-Кутты из пакета `dynamics`.

Определяем параметры задачи:

a:4\$ b:2.5\$ c:2\$ d:1\$ alpha=0\$ // задание переменных

eq1:'diff(y(t),t)=(a-b*z(t))*y(t)-alpha*y(t)^2; // ввод 1-го дифференциального уравнения

eq2:'diff(z(t),t)=(-c+d*y(t))*z(t)-alpha*y(t)^2; // ввод 2-го дифференциального уравнения

atvalue(y(t),t=0,3); atvalue(z(t),t=0,1); // задание начальных значений

desolve([eq1,eq2],[y(t),z(t)]); // решение системы дифференциальных уравнений с начальными условиями.

rat: replaced -2.5 by -5/2 = -2.5 // преобразование рационального выражения к так называемой канонической форме

rat: replaced -2.5 by -5/2 = -2.5

rat: replaced -2.5 by -5/2 = -2.5

rat: replaced 2.5 by 5/2 = 2.5

При значениях $\alpha = 0$, $\alpha = 0,02$ – получаем фазовый портрет (рис. 2.22).

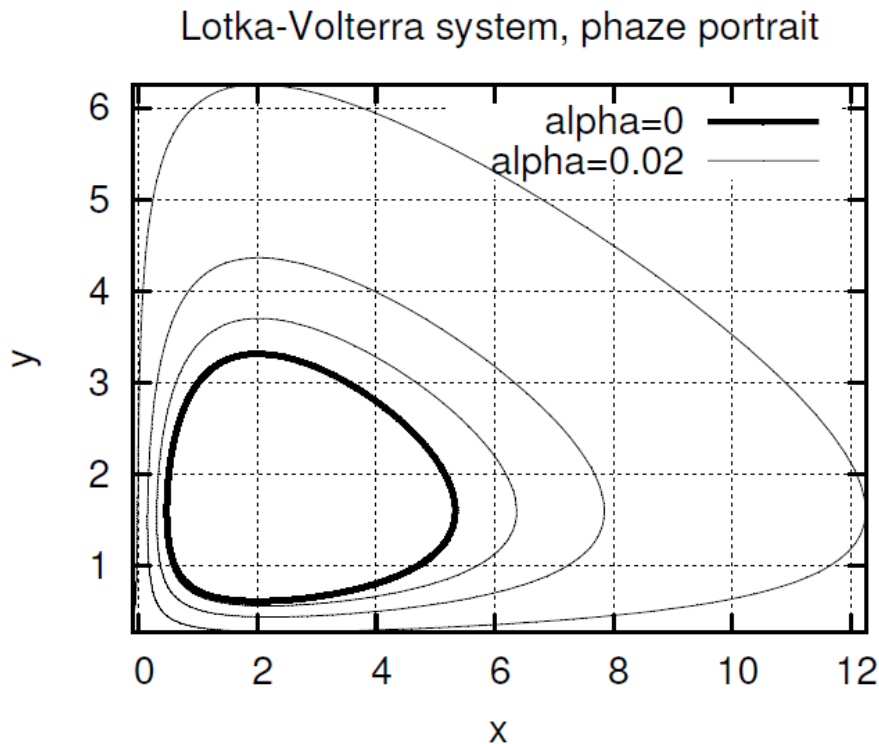


Рис. 2.23. Фазовый портрет модели Лотки-Вольтерры

Форма траекторий имеет неэллиптический вид, что говорит о негармоническом характере колебаний численности популяций. Это явно заметно на рис. 2.23.

Как видно на рис. 2.23, характер изменения состояния модели определяется значениями параметров x , y . Изменяя данные параметры и решая систему уравнений, описывающих модель, можно исследовать закономерности изменения состояния экологической системы.

Полный командный файл моделирования системы Лотки-Вольтерры в Maxima:

```

a:4; b:2.5; c:2; d:1; alpha1:0;
ode1:(a-b*x)*y-alpha1*x^2$ ode2:(-c+d*y)*x-alpha1*y^2$
alpha2:0.02;
ode3:(a-b*x)*y-alpha2*x^2$ ode4:(-c+d*y)*x-alpha2*y^2$
load("dynamics");
t1:[]$ xg1:[]$ yg1:[]$ t2:[]$ xg2:[]$ yg2:[]$
l1:rk([ode1,ode2],[y,x],[1,3],[t,0,9,0.01])$
l2:rk([ode3,ode4],[y,x],[1,3],[t,0,9,0.01])$
for i:1 thru length(l1) do(t1:append(t1,[l1[i][1]]),
xg1:append(xg1,[l1[i][2]]),yg1:append(yg1,[l1[i][3]]));
for i:1 thru length(l2) do(t2:append(t2,[l2[i][1]]),
xg2:append(xg2,[l2[i][2]]),yg2:append(yg2,[l2[i][3]]));
load("draw");
draw2d(terminal='eps, file_name="lotka1",grid=true,xlabel = "x",
ylabel = "y", title="Lotka-Volterra system, phaze portrait",
key= "alpha=0",points_joined = true, point_type = none,
line_width = 4,color = black, points(xg1,yg1),
points_joined = true, color = black,point_type = none,
line_width = 1,key="alpha=0.02", points(xg2,yg2))$
draw2d(terminal='eps, file_name="lotka2",grid=true,xlabel = "t",
ylabel = "x,y", title="Lotka-Volterra system, alpha=0",
key= "x(t)",points_joined = true, line_width = 1,
color = black,point_type = none, points(t1,xg1),
points_joined = true, line_width = 4, point_type = none,
color = black, key= "y(t)", points(t1,yg1))$
draw2d(terminal='eps, file_name="lotka3",grid=true,xlabel = "t",
ylabel = "x,y", title="Lotka-Volterra system, alpha=0.02",
key= "x(t)",points_joined = true, point_type = none,
line_width = 1, color = black, points(t2,xg2),
points_joined = true, line_width = 4, point_type = none,
color = black, key= "y(t)", points(t2,yg2))$

```

Моделирование системы управления перевернутым маятником

В данном разделе рассмотрен вопрос синтеза устойчивой модели перевернутого маятника с помощью построения линейного регулятора и использования обратной связи по состоянию, получены условия устойчивости с помощью первого метода Ляпунова. Указанный метод позволил определить значения коэффициентов усиления регулятора по свойствам корней характеристического уравнения линейной модели маятника. Показана согласованность результатов компьютерного моделирования (построение фазовых портретов системы) с условиями устойчивости, полученных аналитическим способом.

Рассмотрим перевернутый маятник на каретке (рис. 2.24). Введем следующие обозначения: t – время; $u(t)$ – управляющая сила, приложенная к каретке массой M ; l – длина стержня маятника; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – гравитационная постоянная. Каретка должна двигаться таким образом, чтобы маятник массой m всегда занимал вертикальное положение. В качестве переменных состояния примем угол отклонения маятника $\theta(t)$.

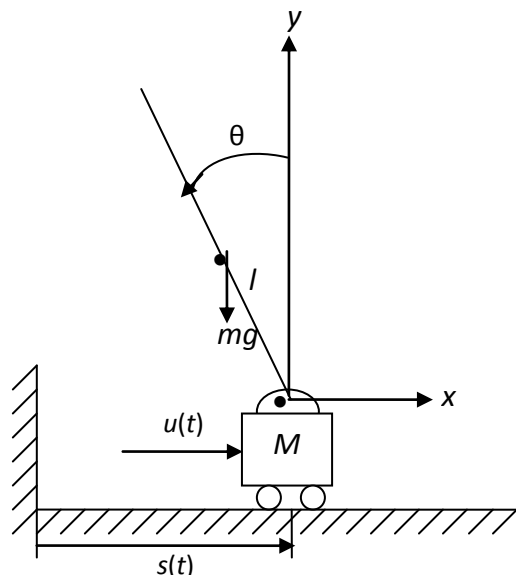


Рис. 2.24. Перевернутый маятник на каретке

Как известно [2], дифференциальные уравнения, описывающие динамику маятника, можно получить, записав выражения для суммы сил, действующих в горизонтальном направлении, и суммы моментов относительно точки вращения. Примем, что $M > m$ и угол отклонения от вертикали θ является малым.

Сумма сил, действующих в горизонтальном направлении, равна

$$M\ddot{s} + m\ddot{\theta} - u(t) = 0. \quad (2.4)$$

Сумма моментов относительно точки вращения равна

$$ml\ddot{s} + ml^2\ddot{\theta} - ml g\theta = 0. \quad (2.5)$$

Переменные состояния для двух уравнений второго порядка выберем в виде $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\theta, \dot{\theta}, s, \dot{s})$. Тогда уравнения (2.4) и (2.5) запишутся в виде

$$M\dot{x}_4 + ml\dot{x}_2 - u(t) = 0 \quad (2.6)$$

и

$$\dot{x}_4 + l\dot{x}_2 - gx_1 = 0. \quad (2.7)$$

Выразим из уравнения (2.7) $l\dot{x}_2$ и подставим его в уравнение (2.6). Тогда будем иметь

$$M\dot{x}_4 + mgx_1 = u(t). \quad (2.9)$$

Далее, подставляя \dot{x}_4 из уравнения (2.6) в уравнение (2.7), получим

$$Ml\dot{x}_2 - Mgx_1 + u(t) = 0. \quad (2.10)$$

Следовательно, четырехмерная дифференциальная модель перевернутого маятника примет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{g}{l}x_1 - \frac{1}{Ml}u(t), \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -\frac{mg}{M}x_1 + \frac{1}{M}u(t). \quad (2.11)$$

Запишем (2.11) в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.12)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mg/M & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/Ml \\ 0 \\ 1/M \end{pmatrix}$.

Значения переменных состояния используются для построения регулятора, описываемого уравнением $u = -Kx$, где K – матрица коэффициентов обратной связи.

Предположим, что управляющий сигнал пропорционален ускорению, и что массой каретки можно пренебречь. Если $u(t)$ соответствует ускорению, то уравнение (2.7) примет вид $gx_1 - l\dot{x}_2 = \dot{x}_4 = \ddot{s} = u(t)$.

Для системы пониженного порядка, где управляющим сигналом является ускорение, скорость и положение каретки получаются последовательным интегрированием $u(t)$. Найдем часть вектора состояния с компонентами $[x_1, x_2] = [\theta, \dot{\theta}]$. Для данной подсистемы матричное дифференциальное уравнение (2.12) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -(1/Ml) \end{pmatrix} u(t). \quad (2.13)$$

В полученном уравнении (2.13) матрица A представляет собой левый верхний блок матрицы A уравнения (2.12). Характеристическое уравнение $\lambda^2 - (g/l) = 0$ имеет один корень в правой половине комплексной плоскости. Чтобы сделать модель устойчивой, сформируем управляющий сигнал в виде функции от двух переменных состояния x_1 и x_2 . Тогда получим

$$u(t) = -Kx = -(k_1 \quad k_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -k_1x_1 - k_2x_2, \quad (2.14)$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты усиления линейного регулятора.

Подставляя (2.14) в (2.13), имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (g/l) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -(1/l)(k_1x_1 + k_2x_2) \end{pmatrix}.$$

Далее объединим два слагаемых в правой части

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1/l)(g - k_1) & -(k_2/l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

С учетом последнего уравнения получим представление матрицы

$$A: A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1/l)(g - k_1) & -(k_2/l) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -(1/l)(g - k_1) & (\lambda + k_2/l) \end{pmatrix} &= \\ = \lambda \left(\lambda + \frac{k_2}{l} \right) - \frac{1}{l}(g - k_1) &= \lambda^2 + \frac{k_2}{l}\lambda + \frac{1}{l}(k_1 - g) = 0. \end{aligned}$$

На основании полученного характеристического уравнения для устойчивости модели (2.12) необходимо выполнение неравенств

$$(k_2/l) > 0, k_1 > g. \quad (2.15)$$

Таким образом, измерив переменные состояния x_1, x_2 и образовав управляющий сигнал вида (2.14) с учетом условий (2.15), модель (2.12) перевернутого маятника будет устойчивой.

Отметим, что в (2.14) выражение $k_1 x_1$ определяет управление отклонением маятника θ , при этом основание маятника нужно перемещать ускоренно в ту же сторону, что и наклон маятника. Выражение $k_2 x_2$ изменяет ускорение каретки с учетом угловой скорости вращения маятника. Если маятник движется в ту же сторону, что и его отклонение, то происходит увеличение необходимого ускорения каретки по сравнению с $k_1 x_1$. Если маятник движется в сторону, обратную по отношению к отклонению, то ускорение уменьшается и становится меньше значения $k_1 x_1$.

Описанный процесс стабилизации маятника можно изобразить схемой, показанной на рис. 2.25. Схема включает управляемый объект – перевернутый маятник, на который можно воздействовать, перемещая его опору; систему измерения угла θ и угловой скорости $\dot{\theta}$, линейный регулятор, реализующий стратегию стабилизации и силовое воздействие, передвигающее опору перевернутого маятника.

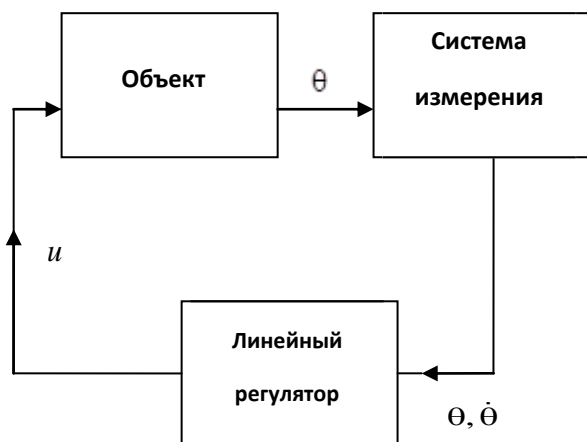


Рис. 2.25. Схема функционирования линейного регулятора

В случае неподвижной каретки перевернутый маятник описывается линеаризованным уравнением $\ddot{x}_2 - \frac{g}{l}x_1 = 0$, корни характеристического уравнения которого действительны и имеют разные знаки. В этом случае состояние равновесия является седлом, что определяет неустойчивость модели.

Синтезированная модель (2.12) является примером классической модели, которая описывает динамику перевернутого маятника в идеализированных условиях с учетом малых отклонений.

Проведем исследование устойчивости модели (2.12) практическим способом с помощью построения фазового портрета системы в программной среде *Math*. Для проведения компьютерного моделирования воспользуемся следующими значениями параметров: $l = 0.1$ м и условием (2.15). Модельные расчеты показали, что при значениях коэффициентов линейного регулятора $k_1 = 11, k_2 = 1$, система устойчива и состояние равновесия является устойчивым узлом (рис. 2.26).

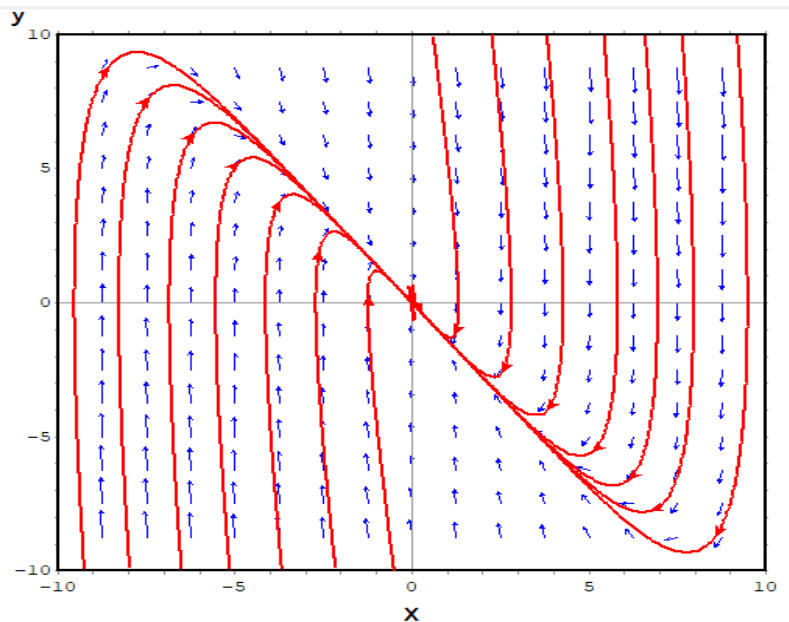


Рис. 2.26. Фазовый портрет при $k_1=11, k_2=1$

При значениях параметров управления $k_1 = 11, k_2 = -1$ система неустойчива, и состояние равновесия является неустойчивым узлом (рис. 2.27).

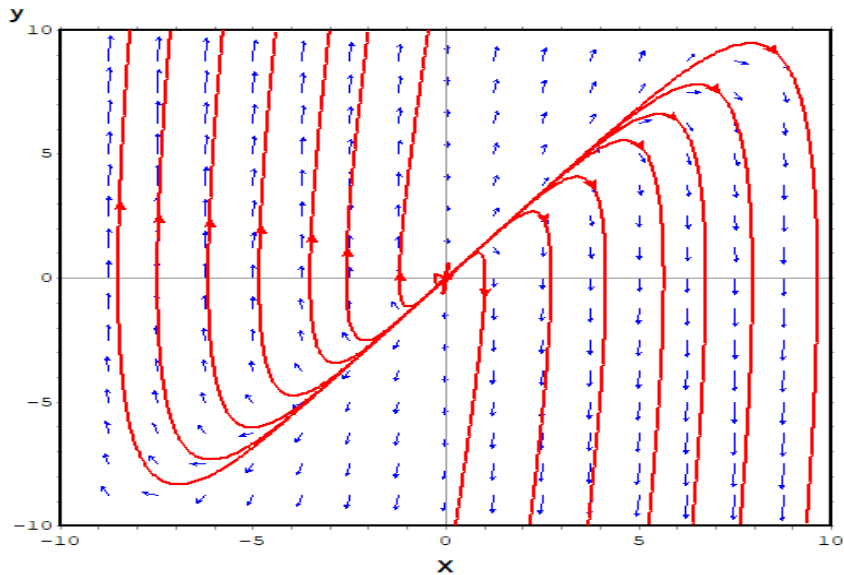


Рис. 2.27. Фазовый портрет при $k_1=11, k_2=-1$

При $k_1 = 11, k_2 = 0$ фазовый портрет системы представлен на рис. 37. Модельные расчеты показали, что в этом случае система устойчива, и состояние равновесия является центром (рис. 2.28).

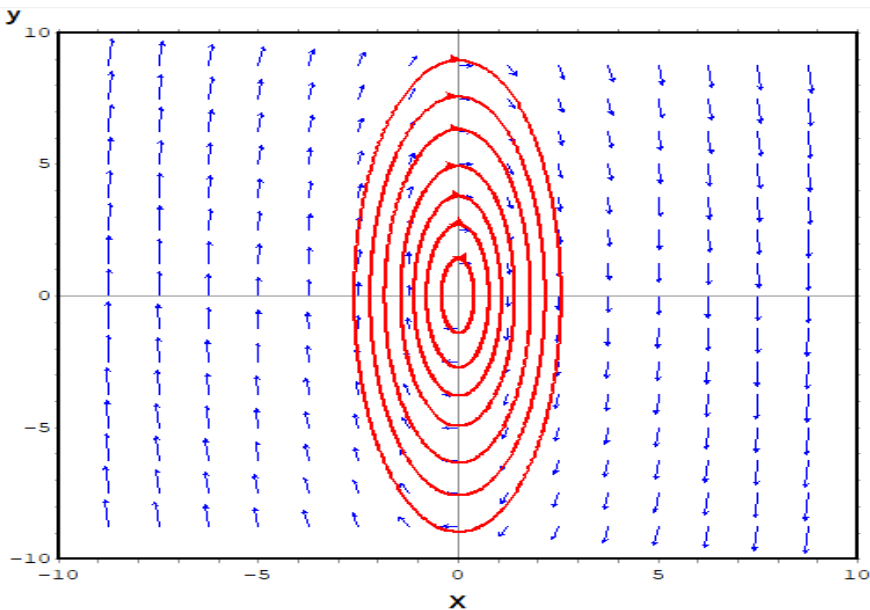


Рис. 2.28. Фазовый портрет при $k_1=11, k_2=0$

Таким образом, результаты проведенного моделирования и исследования устойчивости системы управления перевернутым маятником согласуются с анализом устойчивости, базирующимся на проверке условий (2.15) модели (2.12) перевернутого маятника.

2.5. Тестовые задания

Часть А

А1. Математической моделью объекта называют...

- 1) описание объекта математическими средствами, позволяющее вывести суждение о некоторых его свойствах при помощи формальных процедур;
- 2) любую символическую модель, содержащую математические символы;
- 3) представление свойств объекта только в числовом виде;
- 4) любую формализованную модель.

А2. Методами математического моделирования являются ...

- 1) Аналитический;
- 2) Числовой;
- 3) Аксиоматический и конструктивный;
- 4) Имитационный;

А3. Какая форма математической модели отображает предписание последовательности некоторой системы операций над исходными данными с целью получения результата:

- 1) Аналитическая;
- 2) Графическая;
- 3) Цифровая;
- 4) Алгоритмическая.

А4. Адекватность математической модели и объекта это...

- 1) правильность отображения в модели свойств объекта в той мере, которая необходима для достижения цели моделирования;
- 2) полнота отображения объекта моделирования;
- 3) количество информации об объекте, получаемое в процессе моделирования;
- 4) объективность результата моделирования.

А5. Изменение состояния объекта отображается в виде ...

- 1) статической модели;
- 2) детерминированной модели;
- 3) динамической модели;
- 4) стохастической модели.

А6. Фазовое пространство определяется ...

- 1) множеством состояний объекта, в котором каждое состояние определяется точкой с координатами эквивалентными свойствам объекта в фиксированный момент времени;
- 2) координатами свойств объекта в фиксированный момент времени;
- 3) двумерным пространством с координатами x, y ;
- 4) линейным пространством.

A7. Фазовая траектория это

- 1) вектор в полярной системе координат;
- 2) след от перемещения фазовой точки в фазовом пространстве;
- 3) монотонно убывающая функция;
- 4) синусоидальная кривая с равными амплитудами и частотой.

A8. Точка бифуркации это...

- 1) точка фазовой траектории, характеризующая изменение состояния объекта;
- 2) точка на траектории, характеризующая состояние покоя;
- 3) точка фазовой траектории, предшествующая резкому изменению состояния объекта;
- 4) точка равновесия.

A9. Свойство, при котором модели могут быть полностью или частично использоваться при создании других моделей

- 1) универсальностью;
- 2) неопределенностью;
- 3) неизвестностью;
- 4) случайностью.

A10. Какого вида устойчивости не существует в терминологии теории устойчивости?

- 1) асимптотическая устойчивость;
- 2) орбитальная устойчивость;
- 3) равномерная;
- 4) фазовая устойчивость.

Часть В

B1. Выстройте в верной последовательности этапы математического моделирования:

- 1) Качественный анализ и проверка корректности модели;
- 2) Выбор и обоснование выбора методов решения задачи;
- 3) Концептуальная и математическая постановка задачи;
- 4) Обследование объекта моделирования.

B2. Установите соответствие между определяемым понятием и определением

1) Математическая постановка задачи моделирования –

А. перечень сформулированных в содержательной (словесной) форме основных вопросов об объекте моделирования, интересующих заказчика

- 2) Содержательная постановка задачи моделирования – Б. сформулированный в терминах конкретных дисциплин перечень основных вопросов, интересующих заказчика, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.
- 3) Концептуальная постановка задачи моделирования В. совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования

В3. Одной из характеристик функционирования системы, определяющейся как способность системы возвращаться в состояние равновесия после того, как она была выведена из этого состояния под влиянием возмущающих воздействий, является _____.

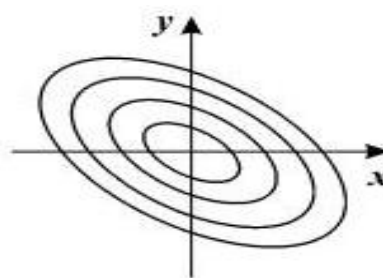
В4. Установите соответствие между названием книги и её автором.

1. Лекции по математической теории устойчивости.	А. Немыцкий В.В.
2. Знакопостоянные функции в теории устойчивости.	Б. Барбашин Е.А.
3. Теория показателей Ляпунова.	В. Демидович Б.П.
4. Функции Ляпунова	Г. Булгаков Н.Г.

В5. Определите соответствие между типом фазового портрета и его графическим представлением:

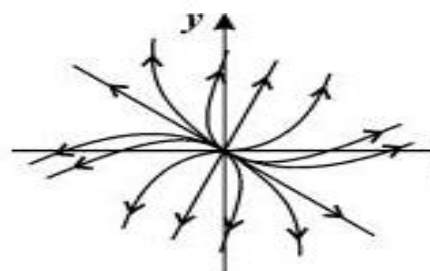
1. Центр

А

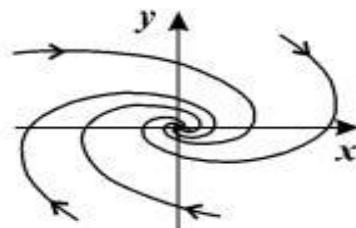


2. Устойчивый фокус

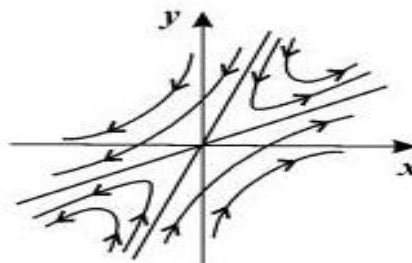
Б



3. Неустойчивый узел В



4. Седло Г



В6. Фазовым _____ системы называется совокупность фазовых траекторий и других элементов фазовой плоскости, которые отражают свойства нелинейной системы.

В7. Установите соответствие между методом исследования устойчивости и его кратким описанием

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1) Первый метод Ляпунова | А. исследование характера свободных движений нелинейных динамических систем путем построения их фазовых траекторий на фазовой плоскости |
| 2) Второй метод Ляпунова | Б. совокупность приемов и средств исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений, основанных непосредственно на анализе общих или частных решений этих систем, а также использующих определенные характеристики указанных решений |
| 3) Метод фазового пространства | В. базируется на основе теоремы о малых значениях коэффициента усиления. |
| 4) Метод конусности | Г. состоит в непосредственном исследовании устойчивости положения равновесия системы при помощи подходящим образом подобранной функции – функции Ляпунова. |

В8. Дополните теорему. Линейная однородная система (1) с постоянной матрицей A асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A _____.

В9. Дополните предложение. Для решения линейных и нелинейных уравнений в системе Махита используется встроенная функция _____

В10. Дополните предложение. Для выполнения построений дополнительно в компьютерной системе Maxima есть пакет Draw, который загружается с помощью команды _____.

Часть С

С 1. Определите тип точки покоя системы $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$

- 1) устойчивый фокус
- 2) центр
- 3) неустойчивый узел
- 4) седло

С 2. Определить при каких значениях параметра a точка покоя системы $\begin{cases} \dot{x} = -2x + ay \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ является устойчивым узлом?

- 1) $a \in (-9/4; -2)$
- 2) $a \in (-\infty; -9/4)$
- 3) $a \in (-\infty; -2)$
- 4) $a \in (-2; +\infty)$

С 3. Задана команда в Maxima для построения поля направлений:

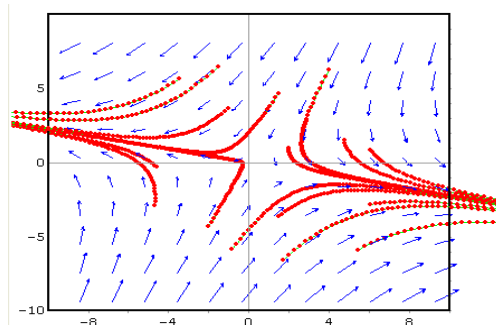
```
(%i12) load("plotdf") $

(%i21) plotdf([2*x-4*y, a*x-6*y], [x,y],
[parameters, "a=8"], [trajectory_at, 2, 1],
[tstep, 0.01], [x, -10, 10], [y, -10, 10],
[direction, forward], [nsteps, 300],
[sliders, "a=-8:10"], [versus_t, 1]) $
```

Определите соответствие фазового портрета значению параметра a .

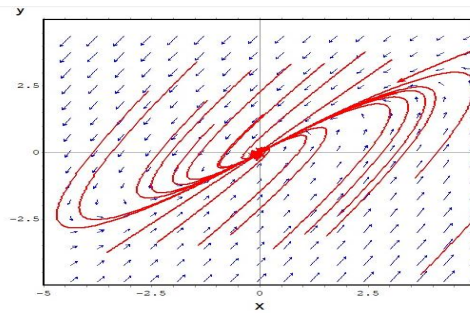
1. ($a < 3$)

A.



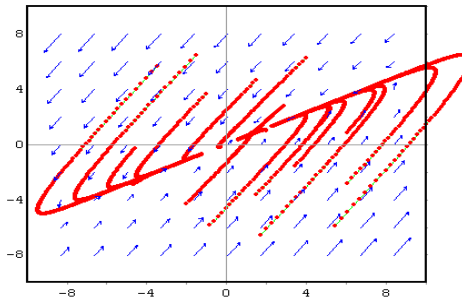
2. $a=4$

Б.



$3.3 < a \leq 4$

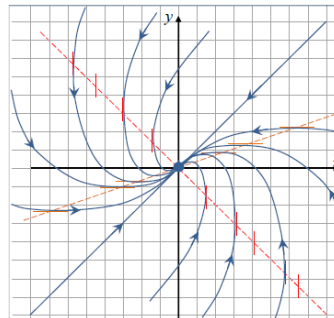
В.



С 4. Исследуйте системы на устойчивость и сопоставьте результат с фазовым портретом, полученным в Maxima.

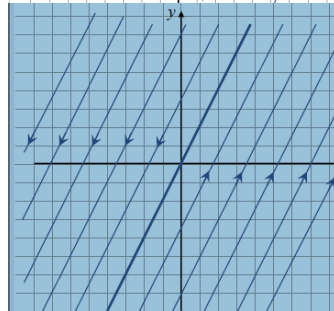
1)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$$

А.



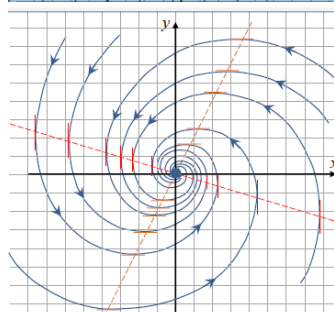
2)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$$

Б.



3)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$$

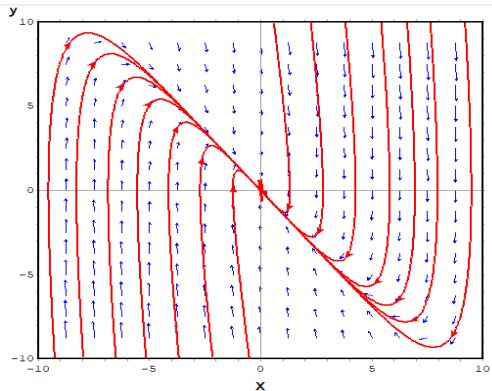
В.



С 5. Дана упрощенная модель системы управления перевернутым маятником в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1/l)(g - k_1) & -(k_2/l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

где x_1 – угол отклонения маятника от вертикали, x_2 – угловая скорость, l – длина стержня маятника ($l = 0.1$ м), $g = 9,8$ м/с² – гравитационная постоянная, k_1, k_2 – коэффициенты управления регулятора. Запишите условие для k_1, k_2 , при котором маятник стабилизируется в верхнем вертикальном положении, и определите значения этих коэффициентов, соответствующие полученному в Maxima фазовому портрету



1. $k_1 = 11, k_2 = 1$

2. $k_1 = 11, k_2 = -1$

3. $k_1 = 11, k_2 = 0$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губина, Т.Н. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики *Mathia*: учебное пособие / Т.Н. Губина, Е.В. Андропова. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2009. – 99 с. – URL: <http://fosscenter.elsu.ru> (дата обращения: 13.12.2019).
2. Игонина, Е.В. Анализ устойчивости динамических систем на основе методов интеллектуального управления и свойств линейных матричных неравенств / Е.В. Игонина, О.Н. Масина, О.В. Дружинина. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2020. – 173 с.
3. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 471 с.
4. Масина, О.Н. Элементы теории устойчивости математических моделей управляемых систем / О.Н. Масина, О.В. Дружинина, Л.Б. Рапопорт. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2019. – 143 с.
5. Тарова, Е.Д. Анализ устойчивости модели Лотки-Вольтерра с помощью математического пакета *Mathia* / Е.Д. Тарова // Материалы Международной научно-практической конференции «Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования» (25-26 апреля 2018 г.). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2018. – С. 193-198.
6. https://scask.ru/r_book_fluc.php

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Часть 1. Модели динамических систем и методы анализа устойчивости	5
1.1. Основные понятия и методы исследования устойчивости динамических систем	5
1.2. Фазовые портреты линейных динамических систем	8
1.3. Исследование устойчивости неоднородных динамических систем	27
1.4. Упражнения для самостоятельного решения	38
Часть 2. Использование систем компьютерной математики в исследованиях динамических моделей	40
2.1. Анализ современных компьютерных систем	40
2.2. Инструментарий и функциональные возможности программной среды <i>Math</i>	49
2.3. Построение фазовых траекторий и поля направлений дифференциальных уравнений	53
2.4. Примеры использования <i>Math</i> в исследованиях устойчивости динамических систем	62
2.5. Тестовые задания	75
Список литературы	82

Учебное издание

Иголина Елена Викторовна

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ
КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ**

Учебное пособие

Техническое исполнение – В. М. Гришин

Технический редактор – О.А. Ядыкина

Книга печатается в авторской редакции

Лицензия на издательскую деятельность

ИД №06146. Дата выдачи 26.10.01

Формат 60 x 84/16. Гарнитура Times. Печать трафаретная

Печ.л 5,2 Уч.-изд.л. 5,0

Тираж 300 экз. Заказ 93

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии

Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»

399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1