Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

|  |
| --- |
|  |

ПРОГРАММА

вступительного испытания по научной специальности программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

**1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика**

Елец – 2022

**I. ВВЕДЕНИЕ**

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по научной специальности 1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика составлена в соответствии с федеральными государственными требованиями и включает основные разделы теории дифференциальных уравнений и математической физики, необходимые для последующего освоения программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по данной специальности.

Проведение экзамена позволяет выявить уровень подготовленности абитуриентов к научно-исследовательской деятельности, способность к анализу и оценке современных научных достижений, умение применять методы решения исследовательских и практических задач, навыки системного и критического мышления, необходимые для обучения в аспирантуре. Абитуриент должен показать профессиональное владение теорией в предметной области, продемонстрировать умение вести научную дискуссию.

Вступительные испытания предполагают ответ абитуриента на вопросы билета. В программе приведен примерный перечень вопросов.

**II. СОДЕРЖАНИЕ**

**Раздел 1. Дифференциальные уравнения**

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (Пикара). Теорема Пеано (без доказательства). Теорема о продолжении решения. Случай линейных уравнений.

Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и параметрам. Уравнения в вариациях.

Линейные системы. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля для уравнений 2-го порядка. Метод вариации постоянных.

Решение систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Решение задачи Коши для уравнения 1-го порядка с частными производными.

Уравнения с частными производными. Порядок системы уравнений. Характеристики систем уравнений 1-го порядка. Нормальные системы уравнений и задача Коши. Теорема Коши — Ковалевской (без доказательства). Классификация линейных уравнений 2-го порядка и их приведение к каноническому виду.

Основные уравнения математической физики. Постановки начально-краевых задач.

Решение смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом разделения переменных (метод Фурье).

Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Функция Грина задачи Дирихле и ее свойства.

Гармонические функции и их свойства: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимости особенности.

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Единственность решения и условия разрешимости.

Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение задачи Коши в различных классах начальных функций.

Решение задачи Коши для волнового уравнения методом преобразования Фурье. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа, их физический смысл.

Пространства Соболева и их свойства.

Обобщенные решения краевых и начально-краевых задач для линейных уравнений 2-го порядка общего вида: эллиптического, гиперболического и параболического. Применение метода Галёркина.

Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: Эйлера, Рунге — Кутта, Адамса, стрельбы, прогонки.

Численные методы решения задач математической физики: бегущего счета (гиперболические уравнения), явные и неявные схемы (параболические уравнения), итерационные методы (уравнение Лапласа).

**Раздел 2. Динамические системы и оптимальное управление**

Общие свойства динамических систем. Особые точки линейных систем на плоскости. Устойчивость по Ляпунову.

Простейшие задачи вариационного исчисления. Задача Лагранжа. Достаточные условия слабого экстремума. Принцип максимума Понтрягина.

**Раздел 3. Математическая физика**

Предел числовой последовательности и функции; критерий Коши существования предела. Непрерывные функции: локальные свойства непрерывных функций; свойства функций, заданных на отрезке.

Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Рол-ля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях; формула Тейлора. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций правила Лопиталя.

Неопределенный и определенный интеграл, формула Ньютона – Лейбница. Основные приемы интегрирования.

Функции многих переменных: пределы, непрерывность; дифференциал и частные производные функции многих переменных; производная по направлению; дифференцирование сложных функций; условный экстремум; теорема о неявном отображении.

Числовые ряды: критерий Коши; признаки сходимости; абсолютная и условная сходимость; теорема Римана. Функциональные последовательности и ряды: теоремы о предельном переходе; о непрерывности, почленном интегрировании и дифференцировании.

Степенные ряды, формула Коши – Адамара; непрерывность суммы степенного ряда; почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

Несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра; непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру; ряд Фурье и интеграл Фурье, преобразование Фурье.

Двойной интеграл и интегралы высшей кратности, замена переменных в кратном интеграле; несобственные кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Остроградского, Стокса.

Системы линейных уравнений, ранг матрицы; определители, их свойства. Векторные пространства; базис и размерность; подпространства; сумма и пересечение подпространств; прямые суммы.

Билинейные и квадратичные формы; приведение квадратичной формы к нормальному виду; закон инерции; положительно определенные квадратичные формы; критерий Сильвестра.

Линейные операторы; собственные векторы и собственные значения; понятие о жордановой нормальной форме. Евклидовы векторные пространства, ортонормированные базисы; процесс ортогонализации; ортогональные матрицы; линейный оператор, сопряженный к данному, приведение квадратичной формы к главным осям; ортогональные и унитарные линейные операторы; канонический базис для них.

Аффинные и евклидовы аффинные пространства. Движения евклидова пространства; классификация движений трехмерного пространства; группа невырожденных аффинных преобразований и группа движений.

Векторы: скалярное, векторное и смешанное произведение. Прямая линия и плоскость. Линии второго порядка: эллипс, гипербола и парабола. Поверхности второго порядка: эллипсоид; гиперболоид; параболоид; цилиндр; конические сечения.

Понятие дифференциального уравнения; поле направлений, решения; интегральные кривые, векторное поле; фазовые кривые. Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейное уравнение.

Задача Коши: теорема существования и единственности решения задачи Коши (для системы уравнений, для уравнения любого порядка). Фундаментальные системы и общее решение линейной однородной системы (уравнения); неоднородные линейные системы (уравнения).

Метод вариации постоянных; решение однородных линейных систем и уравнений с постоянными коэффициентами. Решение неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида.

**III. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ**

1. Основные понятия и определения, относящиеся к дифференциальным уравнениям первого порядка.

2. Уравнения с разделяющими переменными.

3. Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним.

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

5. Уравнение Бернулли.

6. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

7. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнения Клеро и Лагранжа.

8. Основные понятия и определения, относящиеся к дифференциальным уравнениям высших порядков. Уравнения, допускающие понижение порядка.

9. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Общие свойства решений.

10. Понятие линейной зависимости и независимости системы функций. Определитель Вронского. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.

11. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

12. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

13. Метод вариации произвольных постоянных.

14. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

16. Понятие о краевых задачах. Задача Штурма - Лиувилля.

17. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений методом исключения.

18. Системы линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных.

19. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

20. Основные понятия и определения, относящиеся к дифференциальным уравнениям в частных производных.

21. Постановка задач для основных уравнений математической физики.

22. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка.

23. Задача Коши для уравнения колебания струны. Формула Даламбера.

24. Метод Фурье для колебания струны.

25. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье.

26. Решение задачи Дирихле для круга. Формула Пуассона.

27. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов.

**IV. ОРГАНИЗАЦИЯ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ**

**Форма проведения вступительного испытания**: устная с фиксацией ответа в листе опроса.

Максимально возможное количество баллов за ответ: 5 баллов.

**Пороговое значение** – 3 балла.

**V. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

**Основная литература**

1. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. для студентов мат. специальностей ун-тов. М.: Наука, 1982. 331 с.
2. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 350 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1999.
4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Наука, 1961.
5. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1963.
6. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
7. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 428 с.
8. Никольский С. М. Курс математического анализа. В 2 т. / С. М. Никольский. — М.: Физматлит, 2001.

**Дополнительная литература**

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
2. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики: [учебн. для студентов вузов]. М.: Физматлит, 2008. 400 с.
3. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных: [учебн. пособие для мех.-мат. и физ. специальностей вузов]. М.: Наука, 1983. 424 с.
4. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. 5-е изд., доп. - М.: Наука, 1988. - 512 с.
6. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. - 2-е изд., исправл. и доп. - М.: Наука, 1979. - 318 с.
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 2001. –331 c.
8. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учеб. пособие для мех.-мат. и физ. спец. вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1983. - 424 с.