Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

|  |
| --- |
|  |

ПРОГРАММА

вступительного испытания по научной специальности программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

**1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ**

Елец – 2022

**I. ВВЕДЕНИЕ**

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ составлена в соответствии с федеральными государственными требованиями и включает основные разделы теории математического моделирования, необходимые для последующего освоения программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по данной специальности.

Проведение экзамена позволяет выявить уровень подготовленности абитуриентов к научно-исследовательской деятельности, способность к анализу и оценке современных научных достижений, умение применять методы решения исследовательских и практических задач, навыки системного и критического мышления, необходимые для обучения в аспирантуре. Абитуриент должен показать профессиональное владение теорией и практикой в предметной области, продемонстрировать умение вести научную дискуссию.

Вступительные испытания предполагают ответ абитуриента на вопросы билета. В программе приведен примерный перечень вопросов.

**II. СОДЕРЖАНИЕ**

**Раздел 1. Математическое моделирование**

Понятие математической модели. Классификация математических моделей.Детерминированные и стохастические математические модели. Математическое моделирование как метод описания и исследования сложных систем. Основные этапы математического моделирования. Предварительное исследование проблемной области. Постановка задачи и определение типа модели. Обоснование корректности модели. Основы теории подобия и верификации моделей. Применение математических моделей в вычислительных экспериментах. Этапы вычислительного эксперимента. Построение математической, алгоритмической и программной модели исследуемой системы. Экспериментальные исследования, интерпретация результатов.

**Раздел 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения**

Геометрическая интерпретация и механическое толкование нормальной системы дифференциальных уравнений и ее решения. Задача Коши. Единственность решения. Общее, частное и особое решения системы дифференциальных уравнений. Однородные линейные системы и свойства их решений. Понятие фундаментальной системы и ее общий вид. Качественное поведение траекторий на плоскости линейной стационарной системы. Нахождение частного решения. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка. Канонические формы линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными с постоянными коэффициентами, характеристические уравнения.

**Раздел 3. Устойчивость математических моделей**

Состояние равновесия автономной математической модели. Устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость, асимптотическая устойчивость в большом, асимптотическая устойчивость в целом состояния равновесия. Область притяжения. Знакоопределенная, знакопостоянная и знакопеременная функции. Функции Ляпунова, теорема Ляпунова об устойчивости, теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Теорема Барбашина–Красовского. Теорема Четаева. Линеаризованная система. Характеристическое уравнение. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Критерий Гурвица. Метод D-разбиений. Состояния равновесия нелинейных автономных математических моделей. Типы и устойчивость состояний равновесия: устойчивый узел, неустойчивый узел, седло, устойчивый фокус, неустойчивый фокус, центр. Изолированная и неизолированная замкнутые фазовые траектории. Предельный цикл. Орбитно-устойчивый предельный цикл. Неустойчивый предельный цикл. Неизолированные замкнутые фазовые траектории.

**Раздел 4. Вариационное исчисление и оптимальное управление**

Классическая задача вариационного исчисления. Первая вариация функционала. Уравнение Эйлера. Необходимые условия. Вторая вариация функционала. Уравнение Якоби. Достаточные условия экстремума. Необходимые и достаточные условия экстремума для негладких экстремалей. Постановка общей задачи оптимального управления. Принцип максимума Л.С. Понтрягина для задачи с фиксированными концами. Принцип максимума в задачах на быстродействие. Условие трансверсальности. Теорема о числе переключений в линейных системах. Проблема синтеза оптимальных управлений. Достаточное условие оптимальности и уравнение Р. Беллмана. Связь между уравнением Беллмана и принципом максимума Понтрягина. Глобальная параметрическая оптимизация. Алгоритм имитации отжига. Генетические алгоритмы. Гармонический поиск. Метод роя частиц. Муравьиный алгоритм.

**Раздел 5. Численные методы**

Решение линейных алгебраических уравнений. Прямые и итерационные методы. Задача интерполяции, интерполяция полиномами. Численное интегрирование. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Одношаговые и многошаговые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Явные и неявные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Устойчивость методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения экстремальных задач. Методы нулевого, первого и второго порядков.

Разностные методы решения уравнений математической физики. Явные и неявные схемы. Основные понятия (аппроксимация, сходимость, устойчивость). Теория устойчивости разностных схем. Разностные схемы для уравнения Пуассона, теплопроводности, переноса и волнового уравнения. Метод прогонки.

**Раздел 6. Математическое программирование**

Задача линейного программирования. Основные теоремы для двойственных линейных задач. Методы решения задач линейного программирования. Транспортные задачи и методы их решения. Задача квадратичного программирования. Функция Лагранжа и двойственность. Седловые точки и условия оптимальности. Многошаговые задачи оптимизации, постановка и существование решения. Метод динамического программирования.

**Раздел 7. Теория вероятностей и математическая статистика**

Вероятностное пространство. Формула полной вероятности и формула Байеса. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли. Слу-чайные величины и их характеристики. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия. Ковариация и корреляция случайных величин. Случайные величины с равномерным, экспоненциальным, нормальным, биномиальным, пуассоновским распределениями и их применения. Выборочный метод и проверка статистических гипотез. Оценивание параметров распределений (методы моментов, минимума хи-квадрат, максимального правдоподобия). Доверительные области. Линейный и нелинейный регрессионный анализ.

**Раздел 8. Случайные процессы**

Марковские случайные процессы с дискретным и непрерывным временем. Простейшие цепи Маркова. Классификация состояний Марковской цепи. Пуассоновский случайный процесс и его приложения. Финальные вероятности состояний системы. Случайный процесс рождения и гибели. Система уравнений Колмогорова. Решение для случая линейного процесса рождения и гибели. Марковские модели систем массового обслуживания (СМО). Полумарковские модели СМО: метод вложенных цепей Маркова.

**Раздел 9. Математические основы информатики**

Алгебра множеств. Алгебра отношений. Бинарные отношения и их свойства. Отношения эквивалентности, отношение порядка. Графы: виды, способы представления, маршруты в графах, операции над графами, изоморфизм графов. Деревья и их свойства. Понятие формальной системы, исчисление, формальный вывод. Полнота, непротиворечивость, разрешимость формальной системы. Исчисление высказываний, исчисление предикатов. Булева алгебра. Логика предикатов: свободные и связанные переменные, эквивалентные преобразования. Методы оптимального кодирования информации. Формальные алгоритмические модели.

**Раздел 10. Искусственный интеллект и машинное обучение**

Нейронные сети. Основные элементы структуры. Алгоритмы обучения. Приложения нейронных сетей. Машинное обучение. Методы машинного обучения (обучение с учителем, обучение без учителя, обучение с подкреплением). Классические задачи, решаемые с помощью машинного обучения. Задачи классификации, регрессии, кластеризации. Линейные классификаторы. Метод главных компонент. Алгоритм k-средних, алгоритм c-средних. Понижение размерности данных. Нечеткие и нейронечеткие алгоритмы машинного обучения.

**Раздел 11. Технологии создания программного обеспечения, пакеты прикладных программ, языки программирования высокого уровня**

Принципы технологии разработки программного обеспечения. Жизненный цикл программного обеспечения, планирование и управление разработкой программных проектов, управление коллективами программистов. Пакеты прикладных программ, их классификация. Структура пакета, его основные функциональные блоки. Пакеты вычислительного назначения. Пакеты для автоматизированного проектирования. Пакеты прикладных программ и программные системы, применяемые в вычислительном эксперименте, численном и имитационном моделировании. Высокоуровневые языки программирования. Операторы, конструкции, модули, основные принципы составления программ на языке программирования высокого уровня. Программное обеспечение для тензорных вычислений. Векторизация программного кода, использование потоков и процессов. Технологии GPGPU и TPU. Критерии эффективности разработанного программного обеспечения.

**III. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ**

1. Понятие математической модели. Классификация математических моделей.Детерминированные и стохастические математические модели.
2. Математическое моделирование как метод описания и исследования сложных систем. Основные этапы математического моделирования.
3. Обоснование корректности модели. Основы теории подобия и верификации моделей.
4. Применение математических моделей в вычислительных экспериментах. Этапы вычислительного эксперимента.
5. Построение математической, алгоритмической и программной модели исследуемой системы. Экспериментальные исследования, интерпретация результатов.
6. Геометрическая интерпретация и механическое толкование нормальной системы дифференциальных уравнений и ее решения. Задача Коши. Единственность решения.
7. Общее, частное и особое решения системы дифференциальных уравнений.
8. Однородные линейные системы и свойства их решений.
9. Понятие фундаментальной системы и ее общий вид. Нахождение частного решения.
10. Состояние равновесия автономной математической модели. Устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость, асимптотическая устойчивость в большом, асимптотическая устойчивость в целом состояния равновесия. Область притяжения.
11. Знакоопределенная, знакопостоянная и знакопеременная функции. Функция Ляпунова, теорема Ляпунова об устойчивости, теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.
12. Теорема Барбашина–Красовского. Теорема Четаева.
13. Линеаризованная система. Характеристическое уравнение.
14. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
15. Критерий Гурвица. Метод D-разбиений.
16. Типы и устойчивость состояний равновесия: устойчивый узел, неустойчивый узел, седло, устойчивый фокус, неустойчивый фокус, центр.
17. Изолированная и неизолированная замкнутые фазовые траектории. Предельный цикл. Орбитно-устойчивый предельный цикл. Неустойчивый предельный цикл. Неизолированные замкнутые фазовые траектории.
18. Классическая задача вариационного исчисления.
19. Первая вариация функционала. Уравнение Эйлера. Необходимые условия.
20. Вторая вариация функционала. Уравнение Якоби. Достаточные условия экстремума.
21. Необходимые и достаточные условия экстремума для негладких экстремалей.
22. Постановка общей задачи оптимального управления. Принцип максимума Л. С. Понтрягина.
23. Условие трансверсальности. Теорема о числе переключений в линейных системах.
24. Проблема синтеза оптимальных управлений. Достаточное условие оптимальности и уравнение Р. Беллмана.
25. Глобальная параметрическая оптимизация. Алгоритм имитации отжига. Генетические алгоритмы. Гармонический поиск. Метод роя частиц. Муравьиный алгоритм.
26. Решение линейных алгебраических уравнений. Прямые и итерационные методы.
27. Задача интерполяции, интерполяция полиномами.
28. Численное интегрирование. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
29. Численные методы решения экстремальных задач. Методы нулевого, первого и второго порядков.
30. Разностные методы решения уравнений математической физики. Явные и неявные схемы. Основные понятия (аппроксимация, сходимость, устойчивость). Теория устойчивости разностных схем.
31. Разностные схемы для уравнения Пуассона, теплопроводности, переноса и волнового уравнения.
32. Задача линейного программирования. Основные теоремы для двойственных линейных задач. Методы решения задач линейного программирования.
33. Транспортные задачи и методы их решения.
34. Задача нелинейного программирования. Функция Лагранжа и двойственность.
35. Многошаговые задачи оптимизации, постановка и существование решения. Метод динамического программирования.
36. Глобальная параметрическая оптимизация. Алгоритм стаи птиц. Генетические алгоритмы. Алгоритм имитации отжига. Гравитационный поиск.
37. Вероятностное пространство. Формула полной вероятности и формула Байеса. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли.
38. Случайные величины и их характеристики. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия. Ковариация и корреляция случайных величин.
39. Случайные величины с равномерным, экспоненциальным, нормальным, биномиальным, пуассоновским распределениями и их применения.
40. Выборочный метод и проверка статистических гипотез. Оценивание параметров распределений (методы моментов, минимума хи-квадрат, максимального правдоподобия).
41. Линейный и нелинейный регрессионный анализ.
42. Марковские случайные процессы с дискретным и непрерывным временем.
43. Простейшие цепи Маркова. Классификация состояний Марковской цепи.
44. Пуассоновский случайный процесс и его приложения.
45. Финальные вероятности состояний системы. Система уравнений Колмогорова.
46. Марковские модели систем массового обслуживания (СМО). Полу-марковские модели СМО: метод вложенных цепей Маркова.
47. Алгебра множеств. Алгебра отношений. Бинарные отношения и их свойства. Отношения эквивалентности, отношение порядка.
48. Графы: виды, способы представления, маршруты в графах, операции над графами, изоморфизм графов. Деревья и их свойства.
49. Понятие формальной системы, исчисление, формальный вывод. Полнота, непротиворечивость, разрешимость формальной системы.
50. Исчисление высказываний, исчисление предикатов. Булева алгебра. Логика предикатов: свободные и связанные переменные, эквивалентные преобразования. Методы оптимального кодирования информации. Формальные алгоритмические модели.
51. Нейронные сети. Основные элементы структуры. Алгоритмы обучения. Приложения нейронных сетей.
52. Машинное обучение. Методы машинного обучения (обучение с учителем, обучение без учителя, обучение с подкреплением).
53. Классические задачи, решаемые с помощью машинного обучения. Задачи классификации, регрессии, кластеризации. Линейные классификаторы.
54. Метод главных компонент. Алгоритм k-средних, алгоритм c-средних. Понижение размерности данных. Нечеткие и нейронечеткие алгоритмы машинного обучения.
55. Принципы технологии разработки программного обеспечения. Жизненный цикл программного обеспечения, планирование и управление разработкой программных проектов, управление коллективами программистов.
56. Пакеты прикладных программ, их классификация. Структура пакета, его основные функциональные блоки. Пакеты вычислительного назначения.
57. Пакеты прикладных программ и программные системы, применяемые в вычислительном эксперименте, численном и имитационном моделировании.
58. Высокоуровневые языки программирования. Операторы, конструкции, модули, основные принципы составления программ на языке программирования высокого уровня.
59. Программное обеспечение для тензорных вычислений. Векторизация программного кода, использование потоков и процессов.
60. Технологии GPGPU и TPU. Критерии эффективности разработанного программного обеспечения.

**IV. ОРГАНИЗАЦИЯ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ**

**Форма проведения вступительного испытания**: устная с фиксацией ответа в листе опроса.

Максимально возможное количество баллов за ответ: 5 баллов.

**Пороговое значение** – 3 баллов.

**V. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

**Основная литература**

1. Балдин К. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. 4-е изд., стер. М.: Дашков и К°, 2021.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей вузов/ Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. 6-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.
3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория). М.: Высшая школа, 2001.
4. Боев В.Д., Сыпченко Р.П. Компьютерное моделирование. 2-е изд. М.: НОУ "Интуит", 2016.
5. Влацкая И. В. Проектирование и реализация прикладного программного обеспечения: учебное пособие / И.В. Влацкая, Н.А. Заельская, Н.С. Надточий. Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2015.
6. Данилов Н.Н. Математическое моделирование: учебное пособие. Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2014.
7. Рашка С. Python и машинное обучение. М.: ДМК Пресс, 2017.
8. Саймон Д. Алгоритмы эволюционной оптимизации. М.: ДМК Пресс, 2020.
9. Самарский А.А. Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
10. Сотников С.Л. Проектирование систем искусственного интеллекта М.: ИНТУИТ, 2016.
11. Филатов А.Н. Теория устойчивости. Курс лекций. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
12. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: URSS, 2004.
13. Хайкин С. Нейронные сети. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006.

**Дополнительная литература**

1. Аверченков В.И., Федоров В.П., Хейфец М.Л. Основы математического моделирования технических систем: учебное пособие. М.: Флинта, 2015.
2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987.
3. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 2003.
4. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
5. Биркгоф Дж. Динамические системы. Ижевск: ИД «Удмуртский университет»,1999.
6. Вержбицкий В.М. Численные методы. М.: Высшая школа, 2000.
7. Гильмутдинов Р.Ф., Хабибуллина К.Р. Численные методы: учебное пособие. Казань: Казанский научно-исследовательский технологический университет, 2018.
8. Головко В.А. Нейронные сети. Обучение, организация и применение. Книга 4. М.: ИПРЖР, 2001.
9. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. Учебное пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001.
10. Гусева Е.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. 7-е изд., стер. М.: ФЛИНТА, 2021.
11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
12. Дружинина О.В., Масина О.Н. Методы анализа устойчивости динамических систем интеллектного управления. М.: ЛЕНАНД \ URSS, 2015.
13. Зубов В.И. Методы А.М. Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.
14. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
15. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
16. Масина О.Н., Дружинина О.В., Рапопорт Л.Б. Элементы теории устойчивости математических моделей управляемых систем. Учебное пособие. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2019.
17. Масина О.Н., Петров А.А., Дружинина О.В., Рапопорт Л.Б. Моделирование и стабилизация нелинейных управляемых систем. Учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2020.
18. Масина О.Н., Петров А.А., Дружинина О.В., Рапопорт Л.Б. Моделирование управляемых систем с применением методов стабилизации и алгоритмов поиска оптимальных траекторий. Учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2021.
19. Математическое моделирование: учебное пособие / сост. Д.В. Арясова, М.А. Аханова, С.В. Овчинникова. Тюмень: Тюменский индустриальный университет, 2018.
20. Матросов В.М., Васильев С.Н., Москаленко А.И. Нелинейная теория управления и ее приложения: динамика, управление, оптимизация. М.: Физматлит, 2003.
21. Орлов С.А. Технологии разработки программного обеспечения: Учебник для вузов. СПб: Питер, 2004.
22. Осипов Г.С. Методы искусственного интеллекта. М.: Физматлит, 2011.
23. Пименов В.Г. Численные методы: учебное пособие: в 2 частях / В.Г. Пименов, А.Б. Ложников. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2014.
24. Сергеев Н.Е. Системы искусственного интеллекта: учебное пособие. Таганрог: Южный федеральный университет, 2016.
25. Флах П. Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных. Москва: ДМК Пресс, 2015.
26. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
27. Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. 2-е изд. М.: Издательский дом "Вильямс", 2015.
28. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики. М.: Физматлит, 2000.
29. Шелудько В. М. Основы программирования на языке высокого уровня Python: учебное пособие. Ростов-на-Дону; Таганрог: Южный федеральный университет, 2017.
30. Шелудько В. М. Язык программирования высокого уровня Python: функции, структуры данных, дополнительные модули: учебное пособие. Ростов-на-Дону; Таганрог: Южный федеральный университет, 2017.
31. Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: УРСС, 2007.