ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ: МОЛОДЕЖНАЯ ПАРАДИГМА

Сборник научных статей
молодых исследователей

Елец – 2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ: МОЛОДЕЖНАЯ ПАРАДИГМА

СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ МОЛОДЫХ ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ

Елец – 2024

УДК 51:37
ББК 74.262.21
И 66

*Размещено в РИНЦ по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 29.02.2024 г., протокол №1*

И 66 Инновационные технологии в математическом образовании: молодежная парадигма: сборник научных статей молодых исследователей. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2024. – 154 с.
ISBN 978-5-00151-426-8

Издание сборника трудов молодых исследователей призвано способствовать развитию научно-исследовательских навыков студентов, а также быть своеобразной «площадкой» для апробации результатов научно-исследовательской деятельности, предусмотренной учебными программами всех форм обучения студентов. В сборнике представлены статьи молодых исследователей, принявших участие в заседании межвузовского научно-методического семинара «Инновационные технологии в математическом образовании: молодежная парадигма», проводимого совместно с Государственным университетом просвещения, Ярославским государственным педагогическим университетом имени К.Д. Ушинского, Тамбовским государственным техническим университетом. Общим для опубликованных статей является стремление молодых ученых отразить современные тенденции математического образования.

Сборник адресуется всем, кто интересуется проблемами математики, информатики, методики обучения математики и цифровизации образования.

УДК 51:37
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-00151-426-8

СОДЕРЖАНИЕ

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДИКИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

ЦИФРОВИЗАЦИЯ И ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ЦИФРОВЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА

ПОПУЛЯРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДИКИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

РОЛЬ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ В РАЗВИТИИ КРЕАТИВНОГО МЫШЛЕНИЯ

Алексеева У.И.[1]
Научный руководитель: к. п. н., доцент Сафронова Т.М.[2]

[1, 2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]ulyaalekseeva.02@mail.ru, [2]stm657@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается актуальная проблема использования нестандартных задач для развития креативного мышления школьников. Отмечается, что такие задачи способствуют формированию навыков анализа, логического мышления и поиска нестандартных подходов к решению проблем. Кроме того, работа с нестандартными задачами способствует формированию у учащихся умения видеть математику в повседневной жизни. В частности, использование нестандартных задач стимулирует развитие гибкого мышления, способности к творческим решениям. В статье приводятся примеры некоторых задач, которые направлены на развитие умений поиска необычных решений и применения математических концепций в новых контекстах. Всё это позволит учащимся не только углубить свои знания в математике, но и развить креативное мышление, что способствует формированию комплексного и гибкого мышления, которое необходимо для успешной дальнейшей деятельности.

Ключевые слова: нестандартные задачи, креативное мышление, математика в школе, математическое образование.

THE ROLE OF NON-STANDARD TASKS IN THE DEVELOPMENT OF CREATIVE THINKING

Abstract. The article deals with the actual problem of using non-standard tasks for the development of creative thinking. It is noted that such tasks contribute to the formation of analytical skills, logical thinking and the search for non-standard approaches to solving problems. In addition, working with non-standard tasks contributes to the formation of students' ability to see mathematics in everyday life. In particular, the use of non-standard tasks stimulates the development of flexible thinking and the ability to make creative decisions. The article provides examples of some tasks that are aimed at developing the skills of finding unusual solutions and applying mathematical concepts in new contexts. All this will allow students not only to deepen their knowledge in mathematics, but also to develop creative thinking, which contributes to the formation of integrated and flexible thinking, which is necessary for successful further activities.

Keywords: non-standard tasks, creative thinking, mathematics at school, mathematical education.

«Воображение важнее знаний, ибо знание ограничено. Воображение же охватывает все на свете, стимулирует прогресс и является источником его эволюции.»

Альберт Эйнштейн

Введение. Современное образование реализует не только формирование у школьников базовых знаний, умений и навыков, но и развитие их мыслительных способностей, воображения, в том числе и креативного мышления.

«Мышление – это опосредованное и обобщенное познание предметов и явлений реальной действительности в их общих и существенных признаках и свойствах, в их связях и отношениях, а также на основе полученных обобщенных знаний – познание и творческое построение новых единичных предметов и явлений действительности» (Шардаков, 1963).

Развитие мыслительных способностей у школьников – это процесс формирования у детей навыков и умений, которые позволяют им анализировать информацию, делать выводы, решать задачи, принимать решения, а еще творчески мыслить. Развитие мышления у детей происходит постепенно, что обязательно нужно учитывать при работе с ними. Проходит оно через различные стадии, начиная с простого восприятия и заканчивая более сложными формами мышления.

Современный окружающий нас мир требует от нас не только обладания определенных знаний, но умения мыслить критически, аналитически, логически и творчески. Ни для кого не секрет, что формирование основ креативного мышления у школьников начинается с возраста обучения в школе. Надо понимать, что заложенные правильные основы в будущем положительно повлияют на их образование и профессиональную деятельность. Исследование особенностей мышления школьников позволяет глубже понять процессы мышления детей в школьном возрасте и разработать подходящие методики к их развитию. При формировании мышления не стоит забывать о различных факторах, влияющих на процессы мышления детей.

Способность мыслить является венцом эволюционного и исторического развития познавательных процессов человека. Наше познание объективной действительности начинается с ощущений и восприятия. А уже потом оно переходит к мышлению.

Основная часть. К основным аспектам развития мышления у школьников можно отнести следующее:

1. Логическое мышление заключается в умении строить логические цепочки рассуждений, делать выводы на основе данной информации, использовать правила логики для решения задач.

2. Абстрактное мышление представляет собой способность оперировать конкретными понятиями, видеть связи между различными явлениями, обобщать информацию.

3. Развитие метакогнитивных навыков состоит в умении контролировать и оценивать свой процесс мышления, понимание собственных стратегий решения задач, способности планировать свои действия.

4. Структурирование информации сводится к способности организовывать информацию, выделять главное от второстепенного, строить логическую структуру текста и задачи.

5. Развитие критического мышления не обходится без способности анализировать информацию критически, выявлять противоречия, оценивать достоверность источников информации.

Чтобы мышление у школьников развивалось эффективно, своевременно, продуктивно важно пользоваться разнообразными методиками и подходами к изучению учебного материала, что будет стимулировать различные аспекты мыслительных способностей.

В ходе обучения дети овладевают приемами мыслительной деятельности, приобретают способность к рассуждению, анализу, делают самостоятельно выводы на основе полученных знаний. Развитие мышления зависит от возраста, окружающей среды и образованности ребенка. Важной задачей обучения является развитие мышления у школьников, чтобы в будущем помочь им учиться более эффективно, принимать обоснованные решения и находить способы решения проблем самостоятельно.

«Мышление – не только познавательная, но и комбинаторная, творческая деятельность, в результате которой сознаются новые предметы и явления материальной и духовной культуры людей, предвидятся и планируются пути их личной и общественной жизни» (Шардаков, 1963).

Развитие мышления происходит поэтапно, начиная от простых видов к более сложным, только в процессе обучения ребенок начнет осознавать, что он делает, и в дальнейшем начнет произвольно оперировать своими умениями. Поэтому вовремя развитое в процессе обучения мышление даст в будущем хороший результат. Мозг отвечает за каждое решение, которое мы принимаем ежедневно, он позволяет нам анализировать исходную информацию, сравнивать разные варианты, после чего мы делаем выбор.

Что значит развивать мышление? Развитие мышления у школьников – это процесс, который направлен на развитие креативности, логического мышления, аналитических способностей и других когнитивных навыков у учащихся. Важно помнить, что каждый ребенок уникален и имеет свои индивидуальные особенности мышления.

Для протекания равномерного и своевременного развития мышления у школьников нужно использовать различные методики и подходы, например:

- стимулировать креативность: предлагать творческие задания, игры, проекты, которые помогут развивать у детей способность к генерации новых идей и решению нестандартных задач;
- развивать логическое мышление: использовать логические головоломки, задачки, логические игры для тренировки умения анализировать информацию, делать выводы и принимать обоснованные решения;

- обучать критическому мышлению: поощрять учащихся к анализу информации, выявлять ложные утверждения, формулировать аргументированное мнение;
- поддерживать самостоятельность и самоконтроль: развивать у школьников навыки самостоятельного поиска информации, планировать деятельность, контроль за своими мыслями и эмоциями;
- использовать интерактивные методики: обсуждение в группе, работа в парах, обмен мнениями и идеями для стимуляции общения и обмена опытом.

Существует несколько типов мышления: наглядно-действенное, наглядно-образное, логическое, абстрактное, творческое.

В данной статье мы будем рассматривать, что такое творческое (креативное) мышление. А именно, с помощью каких задач можно развить данное мышления.

Креативное мышление – это способность генерировать новые идеи, находить нестандартные решения проблем, а также создавать что-то оригинальное и инновационное. Что, в свою очередь, предполагает гибкость ума, способность видеть вещи с разных точек зрения, а также умение сочетать различные концепции и идеи для создания чего-то нового. Креативное мышление может проявляться в различных областях жизни: искусстве, науке, бизнесе и т.д.

Как люди приходят к новым идеям? Какие факторы способствуют или мешают творчеству? Как более эффективно развивать данную способность? На все эти вопросы психологи пытаются найти ответы, изучая креативное мышление. Но не стоит забывать, что креативное мышление часто связано с интуицией, воображением, а также способностью видеть решение проблем с нестандартной точки зрения.

Процесс создания и внедрения новых идей, технологий или методов играет важную роль в развитии образования, культуры и общества в целом. Таким образом, развитие креативности дает человеку разностороннее видение окружающего мира. В конце концов, изучение тенденций, анализ поведения людей и исследование новых технологий могут послужить источником вдохновения для создания чего-то нового. Общение с другими людьми также играет важную роль, поскольку в ходе обсуждения происходит обмен мнениями и возникает коллективное творчество. Также стоит обратить внимание на изучение новой информации: чтение книг, просмотр видеороликов, участие в образовательных программах.

Связь творческого мышления с воображением – не последний аспект в процессе творчества и инноваций. Ведь с помощью этого мы видим мир по-новому, находим нестандартные решения. Воображение помогает разуму выходить за рамки обыденного, видеть возможности там, где другие видят ограничения. Воображение служит основой для развития творческого мышления.

В данной статье хочется затронуть связь между креативного мышлением и математикой, поскольку именно она непосредственно служит инструментом развития креативности и умения находить решения задач. Находя нестандартные подходы к решению задач, математика стимулирует развитие креативности у школьников. Например, решение математических задач иногда требует мысленных экспериментов, поиска альтернативных решений или применения неожиданных моментов. Такие упражнения могут способствовать развитию творческого мышления и способности к инновациям.

Главное – не просто дать ответ на вопрос, а направить его на путь самостоятельного исследования, саморазвития и самопознания. Когда учащиеся сталкиваются с вопросами, которые кажутся им неразрешимыми, важно научить их не бежать за готовыми решениями, а обращаться к собственным мыслям и идеям. Самостоятельный поиск ответов помогает им выйти за рамки стандартных шаблонов и найти нестандартные решения. Поэтому не нужно бояться задавать вопросы, идти напролом и искать ответы самостоятельно – в этом суть настоящих знаний.

Учителю необходимо проводить уроки с элементами заданий по развитию мышления, использовать игры, задачи на логику, творческие проекты и многое другое для активизации мыслительных процессов у детей.

Существует большое количество различных подходов, методик и разработок, которые способствуют расширению мышления учащихся. Современная педагогика уже не сомневается в том, что учить творчеству возможно. Вопрос, по словам И.Я. Лернера, состоит лишь в том, чтобы найти оптимальные условия для такого обучения (Сластенин, 2002).

Математика – это и самая безупречная логика, и объективная доказательность, и наиболее совершенный способ мышления. Развитие аналитического мышления важный аспект для умения применять различные методы при решении задач. Такие задачи как нестандартные помогают активизировать мыслительную деятельность учащихся, так как они требуют нестандартного подхода к решению и могут быть наиболее сложными и запутанными, чем обычные задачи. Для успешного решения подобных задач важно придерживаться ряда рекомендаций.

Одной из весьма важных предпосылок для успешного решения задач является уверенность учащихся в том, что он сможет решить предложенную ему задачу.

Во-первых, успешное решение задачи исходит из четкого понимания её условия, умения внимательно анализировать его. Важно учитывать, что в условии могут содержаться скрытые подсказки или ловушки, которые помогают учащимся найти правильное решение. Стоит приучать учащихся обращать внимание на ключевой смысл задачи и выделять ключевые моменты.

Во-вторых, необходимо помогать учащимся осознавать и использовать всевозможные способы, приемы, общие подходы к решению нестандартных задач. Необходимо проявлять гибкость мышления и экспериментировать при решении данных задач, так как именно они часто требуют креативного подхода к решению.

В-третьих, учащиеся не должны бояться совершать ошибки, так как страх совершить её отрицательно влияет на поиск решения задачи и на учебный процесс в целом. Поиск решения может привести к неограниченному количеству ошибок, прежде чем ученик найдет правильный ответ.

Не стоит также забывать о коллективном сотрудничестве на основе малых групп, которое может быть очень полезным учащимся при освоении учебного материала. Обсуждение задачи в сотрудничестве с детьми помогает рождению новых идей и креативных мыслей, которые в дальнейшем помогают в нахождении решения. Объединение усилий и обмен идеями в группе может значительно ускорить процесс.

Системное применение задач такого типа способствует развитию мыслительных операций, формированию математических представлений и самостоятельной работы учащихся.

Приведу несколько примеров нестандартных задач:

1. «Геометрическая фигура из предметов»

Задание: Каждому учащемуся раздается набор предметов из повседневной жизни (карандаши, кубики, линейка и др.). Задача учащихся – использовать эти предметы для создания геометрической фигуры.

Примеры: 1) соберите из предметов треугольник; 2) постройте из предметов прямоугольник; 3) создайте из предметов круг; 4) сложите из предметов квадрат; 5) постройте из предметов ромб; 6) используйте предметы для создания фигуры, которая не имеет названия в классической геометрии.

Подобные задания помогают развивать творческое мышление, улучшить навыки работы с геометрическими фигурами и вдохновить школьников к использованию предметов в нестандартных целях.

2. «Математический кроссворд»

По горизонтали:

1. Сумма длин всех сторон многоугольника (8 букв);
2. Число, которое при умножении на себя дает 64 (6 букв);
3. Количество граней у куба (5 букв);
4. Результат умножения числа на взаимно обратное (7 букв).

По вертикали:

1. Разность чисел 14 и 5 (6 букв);
2. Площадь прямоугольника со сторонами 3 и 5 (10 букв);
3. Произведение какого числа на 10 даст 80 (6 букв);
4. Инструмент для измерения длины (7 букв).

Ответы:

По горизонтали:

1. Периметр;
2. Восемь;
3. Шесть;
4. Единица.

По вертикали:

1. Девять;
2. Пятнадцать;
3. Восемь;
4. Линейка.

Решение математических кроссвордов способствует развитию у учащихся умения решать простые арифметические примеры, анализировать, а также формируют интерес к изучению математики, развивают память, наблюдательность, находчивость и самостоятельность.

3. «Математический рисунок»

Для построения графика кусочной функции в программе *GeoGebra* используют команду *«if [условие, функция]»*.

Зонтик

1) $y = -\frac{1}{18}x^2 + 12, x \in [-12; 12];$

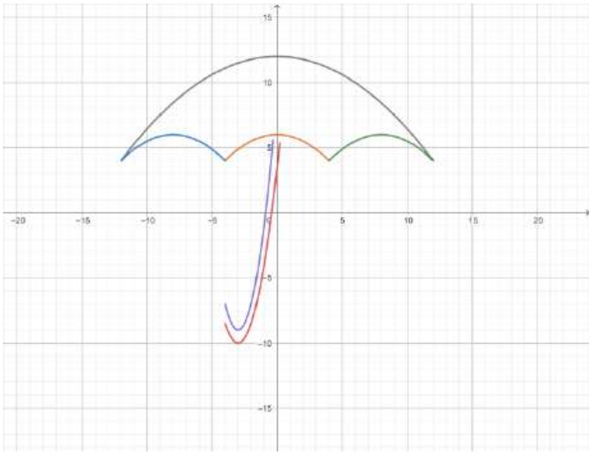
2) $y = -\frac{1}{8}x^2 + 6, x \in [-4; 4];$

3) $y = -\frac{1}{8}(x+8)^2 + 6, x \in [-12; -4];$

4) $y = -\frac{1}{8}(x-8)^2 + 6, x \in [4; 12];$

5) $y = 2(x+3)^2 - 9, x \in [-4; -0{,}3];$

6) $y = \frac{3}{2}(x+3)^2 - 10, X \in [-4; 0{,}2].$



Школьникам предлагается создать рисунок, используя только математические фигуры и шаблоны (например, используя окружности, треугольники, квадраты и т.д.).

4. «Математическая история»

Ученикам предлагается создать историю или сказку, где главные герои решают математические задачи или проблемы.

Данная задача помогает ученикам на уроках математики креативно мыслить, тем самым повышает их интерес к предмету.

Заключение. Развитие креативности школьников важно не только для успешной учебы, но и для формирования ключевых навыков, которые пригодятся им в будущей жизни и карьере. Важно поддерживать и стимулировать креативность у учащихся, предоставляя им возможности для самовыражения, экспериментов и творчества.

Список литературы

Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: учеб. пособие для учащихся 7-11 кл. Челябинск: Взгляд, 2005.

Сластенин В.А., Исаев И.Ф., Шиянов Е.Н. Педагогика: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений; под ред. В.А. Сластенина. М.: Издательский центр «Академия», 2002.

Шардаков М.Н. Мышление школьника. М.: Учпедгиз, 1963.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СМЫСЛА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА В ПРЕДМЕТАХ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ЦИКЛА

Барковская С.В.[1]

Научный руководитель: к.пед.н., доцент Абраменкова Ю.В.[2]

[1, 2]*Донецкий государственный университет*

e-mail: [1]Sveta.barkovskaya@yandex.ru, [2]u.abramenkova@donnu.ru

Аннотация. В статье рассмотрено изучение геометрического смысла определённого интеграла в курсе алгебры и начал математического анализа на основе метапредметного подхода. Приведены задачи практического содержания из школьного курса географии, экономики, а также из области архитектуры, которые сводятся к нахождению площади фигуры ограниченной линиями. Выделены универсальные учебные действия, формируемые у обучающихся при решении данных задач. Отмечены положительные стороны применения практико-ориентированных задач на уроках и внеурочной математической деятельности.

Ключевые слова: определённый интеграл, площадь фигуры, ограниченной линиями, приложения математики, практико-ориентированные задачи, метапредметный подход.

THE USE OF THE GEOMETRIC MEANING OF A CERTAIN INTEGRAL IN THE SUBJECTS OF THE NATURAL SCIENCE CYCLE

Abstract. The article considers the study of the geometric meaning of a certain integral in the course of algebra and the principles of mathematical analysis based on a meta-objective approach. The tasks of practical content from the school course of geography, economics, as well as from the field of architecture, which are reduced to finding the area of a figure bounded by lines, are presented. The universal educational actions formed by students in solving these problems are highlighted. The positive aspects of the application of practice-oriented tasks in lessons and extracurricular mathematical activities are noted.

Keywords: a definite integral, the area of a figure bounded by lines, applications of mathematics, practice-oriented tasks, a meta-objective approach.

Введение. Одним из факторов мотивации обучающихся общеобразовательных учреждений, особенно старшеклассников, к изучению предметов является практическая значимость получаемых знаний. Многие школьники считают математику неприменимой в практической жизни и в будущей профессии. Одной из причин такой тенденции является то, что на уроках в небольшой степени демонстрируется практическое применение математического аппарата. В программных учебниках, в частности в учебнике Ш.А. Алимова по алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов, практико-ориентированные задачи приведены в ограниченном количестве: приблизительно 11% от общего количества заданий (Алимов, 2022).

Одним из требований к результатам освоения образовательной программы по математике является осознание обучающими роли этой науки в современном мире. Однако вышеприведённый результат не будет достигнут без демонстрации на уроках и во внеурочной деятельности приложений математики в других науках. Большим потенциалом в решении этой задачи обладает метапредметный подход, так как основан на формировании универсальных учебных действий.

Основная часть. Рассмотрим изучение определённого интеграла, в частности его геометрического смысла, на основе метапредметного подхода.

Темы, касающиеся интегрального исчисления, изучаются в курсе алгебры и начал математического анализа в 11 классе, как на базовом, так и на углублённом уровне. Математическая трактовка геометрического смысла определённого интеграла такова: определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью *Ox,* прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$ (Алимов, 2022).

Хотя термины «определённый интеграл» и «криволинейная трапеция» практически не встречаются при изучении предметов естественнонаучного цикла, но применение этого математического объекта очень обширно.

Например, курс школьной географии содержит задачи, в которых имеет место вычисление площади криволинейной трапеции. Рассмотрим гидрологическую задачу.

Задача № 1. Скорость инфильтрации задана функцией $v = 15 + 5t^{-\frac{1}{2}}$ (единица измерения *v* мм/с). Вычислить общую глубину проникновения воды в почву (в мм) за период времени от 0,1 до 0,5 ч.

Для наглядности изобразим график, выражающий зависимость скорости инфильтрации от времени: по оси *Ox* отмечено время проникновения воды в почву, а по оси *Oy* – скорость инфильтрации (рис. 1).

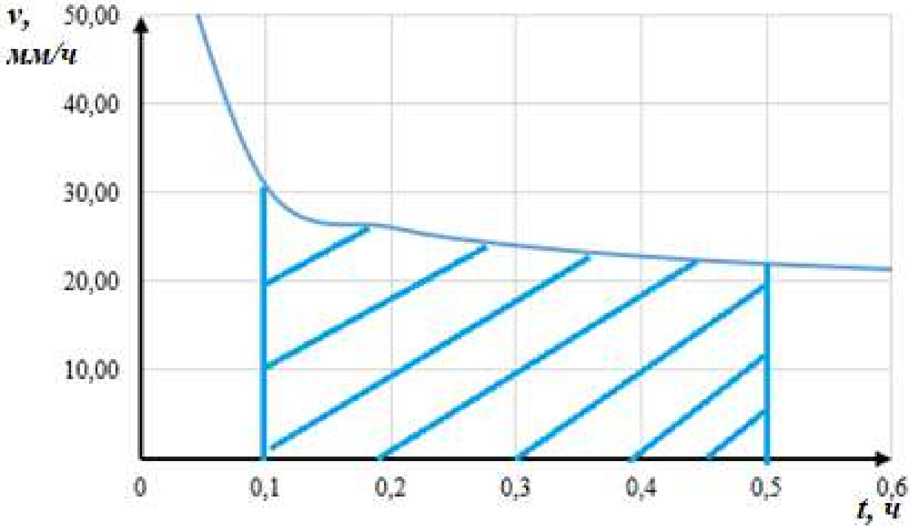


Рис. 1. Зависимость скорости инфильтрации от времени

Искомая величина является площадью заштрихованной области. Поэтому математическая интерпретация требования задачи будет такова: найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми x_1 = 0,1; x_2 = 0,5, осью Ox и графиком функции $y = 15 + 5x^{-\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим, как используется геометрический смысл определённого интеграла в экономике. Для анализа дифференциации доходов населения различных стран используют коэффициент Джини, значения которого варьируются на отрезке $[0;1]$. Для вычисления данного экономического показателя не обойтись без применения определённого интеграла.

Задача № 2. Проведённые исследования показали, что в распределении доходов в N-регионе кривая Лоренса, показывающая зависимость между долей населения (x) и долей доходов населения (y), может быть задана уравнением $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. Вычислить коэффициент Джини.

Графическое представление условия задачи показано на рисунке 2.

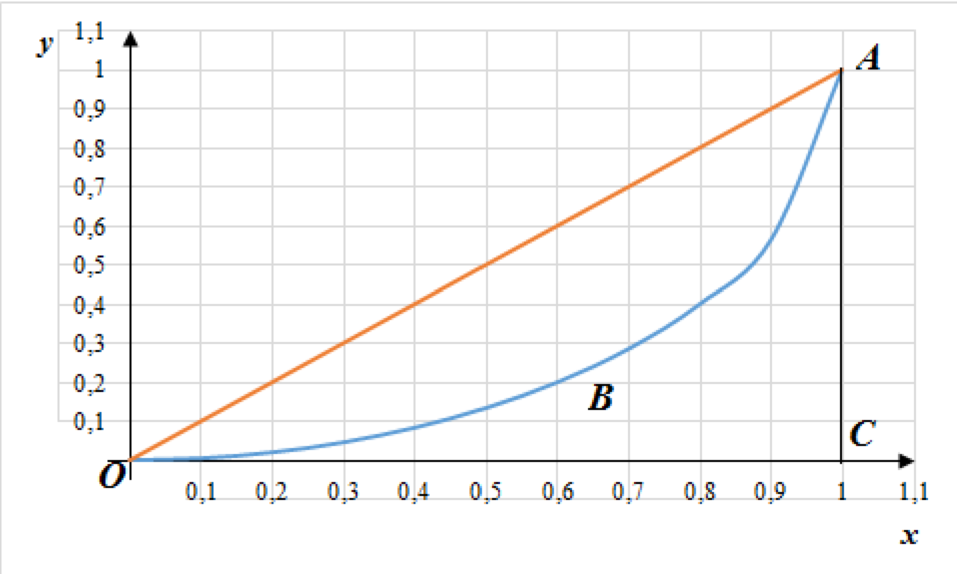


Рис. 2. Графическое представление условия задачи № 2

Исходя из графика, представленного на рис. 1 коэффициент Джини является отношением площади фигуры ограниченной линиями $y = x$ и кривой Лоренса ($y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$) к площади треугольника ACO.

Площадь фигуры, ограниченной линиями, находится с помощью определённого интеграла.

В качестве профориентации будущих выпускников школ может быть предложена следующая задача.

Задача № 3. Архитектор планирует украсить стену здания изображением цветка, состоящим из семи лепестков. Вычислите площадь, занимаемую цветком, если изображение одного лепестка приведено на рисунке 3 (единицы измерения значений на осях координат – метры).

Данная задача моделирует работу архитекторов и также сводится к нахождению площади фигуры ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ на отрезке [0; 1] посредством определённого интеграла.

Решение практико-ориентированных задач способствует не только формированию умений математического моделирования, но и достижению обучающимися метапредметных результатов. Например, решение вышеприведённых задач позволяет формировать у обучающихся следующие универсальные учебные действия:

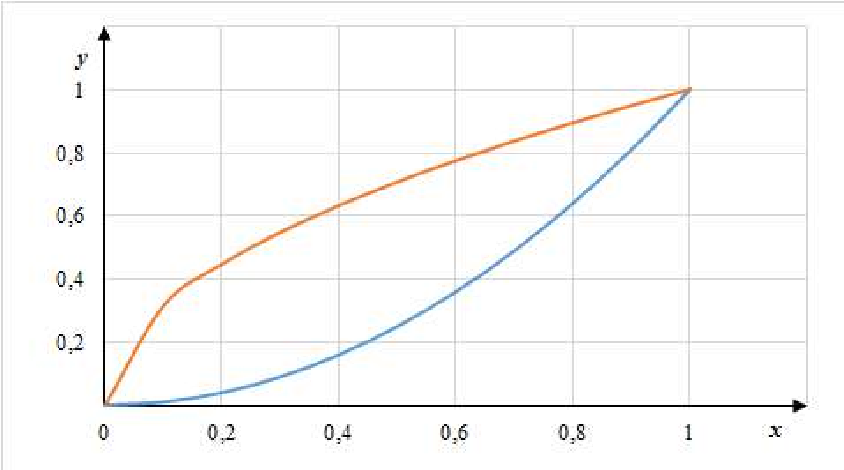


Рис. 3. Изображение одного лепестка

– *познавательные* – выявлять математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других школьных предметах, выдвигать гипотезы и понимать необходимость их проверки при решении задачи, оценивать и интерпретировать информацию (накладывать ограничения на значения некоторых величин из предметов естественнонаучного цикла);

– *коммуникативные* – грамотно выдвигать гипотезы и аргументировать свою точку зрения, участвовать в обсуждении хода решения задачи;

– *регулятивные* – самостоятельно определять требование задачи и составлять алгоритм её решения, давать оценку приобретённому опыту.

Заключение. Приложения математики очень обширны, поэтому для понимания обучающимися практической значимости этой науки необходима их демонстрация, как в других школьных предметах, так и в практической деятельности. Использование рассмотренных задач в рамках урочной и внеурочной деятельности будет способствовать развитию умений математического моделирования, достижению метапредметных результатов обучения, профориентации будущих выпускников.

Список литературы

Федеральная образовательная программа среднего общего: утверждена приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2023 г. № 372. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://publication.pravo.gov.ru/document/ 0001202307130044 (дата обращения: 14.05.2024).

Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика (базовый уровень) для 10-11 классов образовательных организаций. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/19_ФРП-Математика-10-11-классы_база.pdf (дата обращения: 14.05.2024).

Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика (углублённый уровень) для 10-11 классов образовательных организаций. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/19_ФРП-Математика-10-11-классы_база.pdf (дата обращения: 14.05.2024).

Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и углублённый уровни. М.: Просвещение, 2022.

ПРОЕКТНО-МОДУЛЬНЫЙ ПОДХОД К ОБУЧЕНИЮ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Дейнега С.А.[1]
Научный руководитель: д.пед.н., доцент Сотникова О.А.[2]

[1] *Ухтинский государственный технический университет*
[2]*Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина*

e-mail: [1]deynega07@mail.ru, [2]sotnol@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается проектно-модульный подход к организации учебной деятельности студентов технического вуза при изучении начертательной геометрии. Комплексное использование метода проектов и технология модульного обучения позволяют формировать геометро-графическую компетенцию студентов с познавательно-созидательной составляющей, ориентированной на формирование созидательных качеств инженера, т.е. на его готовность созидать, внедрять и совершенствовать новый «продукт», что в современных условиях является актуальным требованием. В статье обосновывается, что сформированная геометро-графическая компетенция с познавательно-созидательной составляющей у студентов технического вуза будет проявляться в выполнении действий по самостоятельной постановке учебных задач, в организационно-аналитических действиях при их решении, в конструктивном использовании студентами методов геометро-графического моделирования (построение геометрических моделей, решение задач на основе разработанного алгоритма).

Ключевые слова: проектно-модульный подход, познавательно-созидательная составляющая, геометро-графическая компетенция, начертательная геометрия.

PROJECT-MODULAR APPROACH TO TEACHING DESCRIPTION GEOMETRY AT A TECHNICAL UNIVERSITY

Abstract. The article discusses a design-modular approach for organizing the educational activities of students of a technical university when studying descriptive. The integrated use of the project method and the technology of modular training make it possible to form the geometric-graphic competence of students with a cognitive and creative component, focused on the formation of the creative qualities of an engineer, i.e. on his readiness to create, implement and improve a new “product”, which in modern conditions is current requirement. The article substantiates that the formed geometric-graphic competence with a cognitive and creative component among students of a technical university will be manifested in the implementation of actions to independently set educational tasks, in organizational and analytical actions in solving them, in the constructive use by students of geometric-graphic modeling methods (construction of geometric models, problem solving based on the developed algorithm).

Keywords: design-modular approach, cognitive-creative component, geometric-graphic competence, descriptive geometry.

Введение. Современные требования к выпускнику технического вуза в нашей стране связаны с изменениями производственной сферы России и в концепции технологического развития России на период до 2030 года определена главная задача – «обеспечить технологический суверенитет», и основные механизмы достижения: отечественные разработки технологий, ключевых узлов и комплектующих с опорой на новые организационные формы взаимодействия науки и образования. В этих условиях деятельность инженера должна базироваться на его потребностях в поиске новых инженерных решений, постановке инженерных задач и конструировании решений, т.е. на готовности инженера созидать, внедрять и совершенствовать новый «продукт». Для этого необходимо наличие в его компетенциях «созидательных составляющих», которые выражены способностью к созданию нового (знания, технологии, задачи, варианта решения проблемы и т.д.).

В связи с этим расширяется спектр применяемых образовательных ресурсов для подготовки инженеров в техническом вузе, среди которых выделяют метод проектов и технологию модульного обучения как наиболее эффективные в развитии «созидательных» качеств личности. Отмечено, что метод проектов позволяет сформировать такие качества, которые составляют «основу для развития созидательной деятельности» (Г.В. Жеребятникова, Е.А. Игумнова, И.Ю. Сорока и др.), а технология модульного обучения способствует обретению качеств, необходимых для «созидательной активности» (И.Б. Сенновский, П.И. Третьяков, М.А. Чошанов, Т.И. Шамова и др.). Таким образом, использование метода проектов и технологии модульного обучения способствуют формированию компетенций с созидательными составляющими.

С учетом того, что в процессе обучения необходимые компетенции находятся в стадии формирования, развитие которых проходит в познавательной деятельности, то их составляющую, выраженную способностью к созданию нового, мы называем *познавательно-созидательной составляющей* (ПСС) компетенции. Она отвечает за *стремление* к постановке новых задач и разработке нестандартных (субъективно неизвестных) методов решения задач. Система концептуальных положений по использованию метода проектов и технологии модульного обучения в их комплексной реализации с общим подбором методов и средств рассматривается как *проектно-модульный подход* к обучению.

Одним из основных факторов для продуктивной творческой деятельности инженера, направленной на созидание новых продуктов, является теория геометрического моделирования реальных объектов, теоретические основы которой изучаются в разделе начертательной геометрии цикла графических дисциплин, где формируется геометро-графическая компетенция (ГГК). Формирование ПСС необходимо начинать на начальных этапах обучения, т.к. чем раньше будет запущен этот механизм, тем лучше будут развиты созидательные составляющие. И в этом плане курс начертательной геометрии имеет необходимые условия для этого, т.к. изучение проходит в самом начале профессиональной подготовки, составляет базу других профессиональных дисциплин и по своему содержанию отвечает проектно-модульному подходу.

Современное состояние геометро-графической подготовки в технических вузах, как показывает анализ научно-педагогической литературы, недостаточно обеспечивает формирование геометро-графической компетенции, имеющей в своем составе ПСС. Поэтому, необходимо решить методическую задачу формирования геометро-графической компетенции с познавательно-созидательной составляющей в процессе обучения начертательной геометрии, развитие которой связано с учебно-познавательной деятельностью. Учитывая, что в формировании познавательно-созидательных составляющих геометро-графической компетенции имеют потенциал метод проектов и технология модульного обучения, необходимо разработать систему их комплексного использования при изучении начертательной геометрии в техническом вузе.

В научно-методических исследованиях большое количество разработок посвящено совместному использованию технологии модульного обучения и метода проектов, рассматриваемые как проектно-модульное обучение (Т.В. Альникова, Е.А. Вечканова, Е.В. Лавренева, М.И. Ситникова, Н.Е. Трофимова, Ю.А. Шитиков и др.). В теории и методике обучения начертательной геометрии не выявлены и не используются возможности комплексного применения метода проектов и технологии модульного обучения в процессе освоения нового материала на начальном этапе инженерной подготовки. *Цель исследования* состоит в теоретическом обосновании и разработке проектно-модульного подхода к обучению начертательной геометрии студентов технического вуза.

Методология исследования. Исследование проводилось в четыре этапа:

На *первом* этапе осуществлялся анализ учебно-методической и психолого-педагогической литературы по проблеме исследования, а также изучался опыт обучения начертательной геометрии в техническом вузе. Были выявлены основные направления реализации модульного обучения и метода проектов с учетом специфики инженерных вузов и наметившихся тенденций в инженерном образовании.

На *втором* этапе была обоснована необходимость и возможность использования проектно-модульного подхода к обучению начертательной геометрии в техническом вузе. Составлены серии учебно-методических разработок и материалов в поддержку курса начертательной геометрии для технических вузов.

На *третьем* этапе были разработаны основные положения проектно-модульного подхода к обучению начертательной геометрии в техническом вузе, определен методический инструментарий для его реализации, проведен констатирующий эксперимент и первый формирующий эксперимент.

На *четвертом* этапе скорректированы основные положения проектно-модульного подхода к обучению начертательной геометрии в техническом вузе, проведен формирующий эксперимент, проанализированы экспериментальные и теоретические результаты, сделаны выводы и обобщения.

Опытно-экспериментальной базой исследования явился Ухтинский государственный технический университет (г. Ухта. Общее количество участников эксперимента на разных этапах педагогического эксперимента – 141 студент первого курса очного обучения. В состав выборки заключительного этапа исследования включено 70 человек, из которых в контрольную группу вошло 36 студентов и в экспериментальную группу 34.

Для достижения поставленной цели использовались следующие методы исследования: теоретические – анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования и диссертационных исследований по изучаемой проблеме, изучение и анализ ФГОС ВО 3++ по направлениям бакалавриата и специалитета к выпускникам технических вузов, профессиональных стандартов, дидактических материалов, рабочих программ по начертательной геометрии, обобщение, моделирование, проектирование; экспериментальные – анкетирование, педагогический эксперимент, обработка и анализ результатов педагогического эксперимента, личный опыт преподавания.

Гипотеза исследования представляет собой предположение о том, что применение проектно-модульного подхода в обучении начертательной геометрии в техническом вузе позволит повысить качество изучения начертательной геометрии и сформировать у студентов геометро-графическую компетенцию с познавательно-созидательной составляющей, что будет проявляться в выполнении студентами действий по самостоятельной постановке учебных задач и организационно-аналитических действий при их решении, если:

– модульно представить учебный материал, конструируя каждый модуль на основе системообразующего фактора понятийной модели начертательной геометрии;

– организовать учебную деятельность студентов в рамках каждого модуля с выполнением учебного проектного задания, ориентирующего (в том числе) на поиск вариантов использования изучаемого понятия (метода) в смежных вопросах начертательной геометрии;

– реализовать модель обучения начертательной геометрии, в которой учебные действия по освоению материала будут ориентированы на установление связей между системой понятий и системой геометрических образов: геометро-графических на базисном этапе, познавательно-аналитических на исследовательском этапе и созидательно-конструктивных на творческом этапе.

Результаты. Проектно-модульный подход к обучению начертательной геометрии в техническом вузе понимается как организация учебной деятельности студентов по освоению модульно-структурированного предметного содержания дисциплины с направленностью на системное и последовательное выполнение в каждом модуле учебного проектного задания по установлению связей между системой понятийной модели и системой образов геометрической модели.

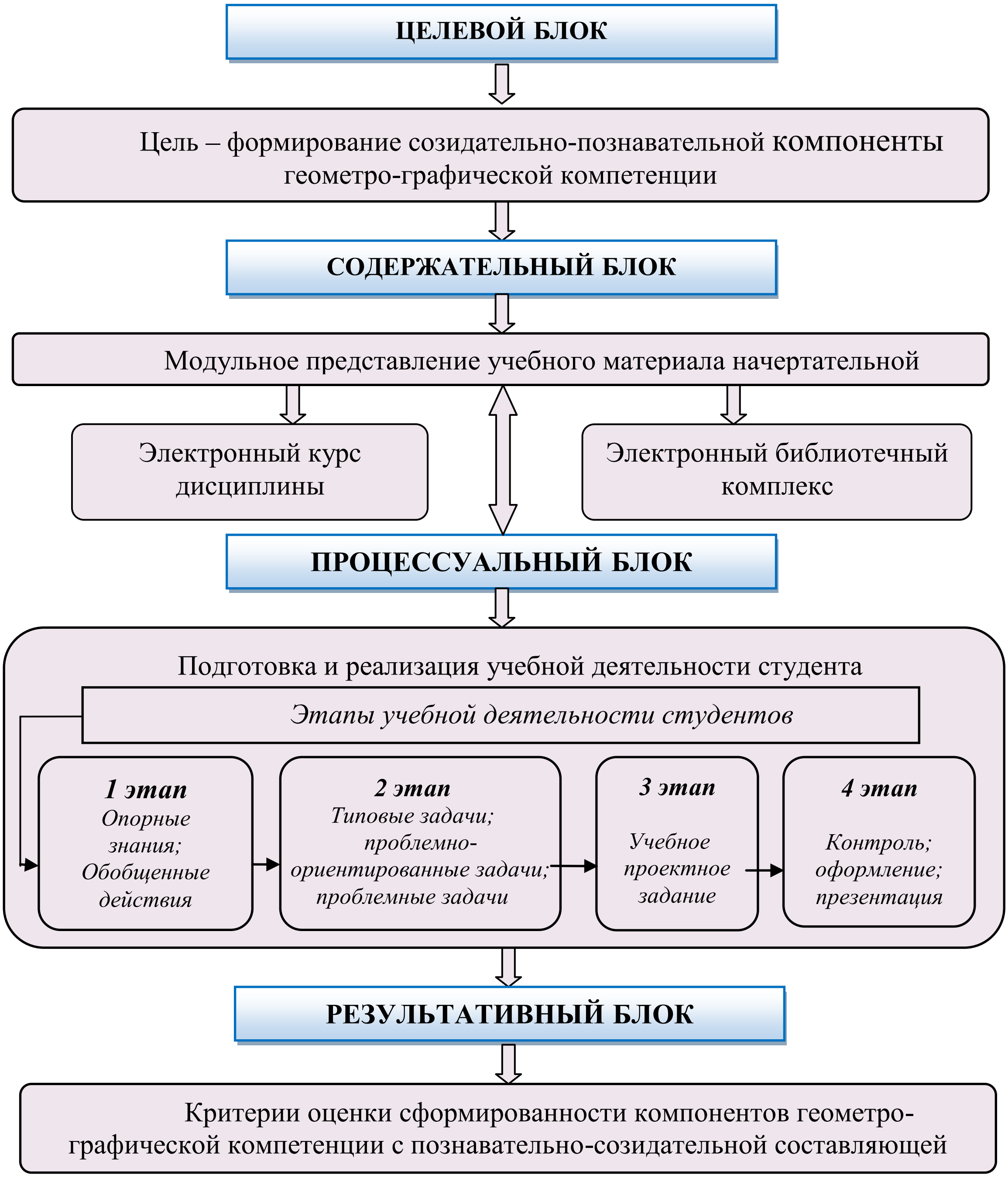


Рис. 1. Модель формирования геометро-графической компетенции с познавательно-созидательной составляющей

Основные положения проектного-модульного подхода лежат в основе построения структурно-содержательной модели формирования геометро-графической компетенции с познавательно-созидательной составляющей, представленной системой взаимосвязанных блоков (рис. 1), через организацию учебной деятельности в каждом изучаемом модуле с выполнением учебных проектных заданий, направленных на действия практической направленности в решении нестандартных проблемных задач, приближенным к технологии решения инженерной задачи средствами САПР-систем, и на использование методов геометро-графического моделирования при их решении.

Целевой блок отражает цели и задачи представленной модели, определенные в соответствии с требованиями ФГОС ВО 3++ по направлениям бакалавриата и специалитета и требованиями работодателей к выпускникам технических вузов. С учетом этих требований к графической подготовке, анализа научных работ в области компетентностного подхода в образовании, методики преподавания геометро-графических дисциплин определена структура геометро-графической компетенции, состоящая из четырех компонентов; когнитивный, операционально-деятельностный, личностный, рефлексивный. В связи с выделением познавательно-созидательной составляющей в геометро-графической компетенции студентов технического вуза в ее структурную модель следует добавить проектно-исследовательскую компоненту, связанную с постановкой задачи и самостоятельными действиями по определению количества возможных способов и ответов, отбора оптимального варианта решения проблемы. Умения поиска новых инженерных решений, постановки инженерных задач и конструирования решений направляют деятельность инженера на познание с целью создания субъективно нового «продукта» и являются познавательно-созидательной составляющей в структуре компетенций. Для достижения целей необходимо обеспечить взаимосвязанное развитие всех компонентов геометро-графической компетенции: когнитивного, операционально-деятельностного, личностного, рефлексивного и проектно-исследовательского.

Содержательный блок включает модульное представление учебного материала начертательной геометрии, которое определено критериями отбора: структурирование предметного содержания по модулям в соответствии с логикой его изучения; каждый модуль является логически завершенной структурной дидактической единицей (теоретический и практический материал, контроль и самоконтроль, оценивание); учитывать основной системообразующий фактор содержания обучения; обеспечить постоянный доступ к модулям учебного материала (например, используя информационную образовательную среду университета). Содержательный блок концептуально связан с процессуальным блоком модульной организацией учебной деятельности студентов в структуре учебного проектного задания.

Процессуальный блок выполняет подготовку к учебной деятельности студентов и ее реализацию, что обеспечивает формирование геометро-графической компетенции с познавательно-созидательной составляющей студентов в процессе изучения учебных модулей. Процессуальный блок включает формы, методы и средства обучения, способы взаимодействия между участниками образовательного процесса. Основной моделью организации учебной деятельности выбрано смешанное обучение, позволяющее студенту взаимодействовать с преподавателем очно и удаленно посредством информационно-образовательной среды университета.

Результативный блок модели формирования геометро-графической компетенции с познавательно-созидательной составляющей определяет критерии и уровни сформированности компонентов геометро-графической компетенции с познавательно-созидательной составляющей.

Учебная деятельность студентов в процессуальном блоке организована по этапам.

1 этап. *Мотивация и постановка учебной задачи*. Этап реализуется на лекционных и практических занятиях, где рассматривается основной понятийный аппарат с иллюстративными примерами, источники информации, обобщенные правила реализации алгоритмов и их знаково-символьная запись, комплексные чертежи геометрических моделей, стандарты конструкторской документации, основы геометрического моделирования в системе САПР.

2 этап. *Подготовка к самостоятельному выполнению учебного проектного задания*. Решение базиса типовых тематических задач, проектно-ориентированных и проблемных учебных задач модуля. На данном этапе уточняют и корректируют шаги решения задач модуля по аналогии, создают условия к самостоятельной реализации задач. Доля самостоятельности решения типовых тематических задач модуля студентами увеличивается поэтапно: аудиторная работа (совместное решение с преподавателем, решение под руководством преподавателя); внеаудиторное частично самостоятельное решение с контролем выполнения проблемно-ориентированных и проблемных задач.

3 этап. *Выполнение учебного проектного задания*. Осуществляется студентом самостоятельно с выполнением действий, приближенных к ситуациям при решении проблемных нестандартных инженерных задач: постановка задачи, выбор средств и методов его выполнения; проработка возможных путей решения; выбор и принятие решений; конструирование и создание; корректировка действий. Проектные задания построены на основе соединения теории геометрических основ и практического компьютерного 3d-моделирования, что позволяет стимулировать мыслительную деятельность студентов к познанию нового предметного материала, развивает практические навыки работы с 3d-моделью, способствует формированию новой системы знаний, дополнительных умений и навыков с опорой на имеющиеся знания. Погружение студента в проектную деятельность необходимо осуществлять постепенно с увеличением доли их самостоятельности.

4 этап. *Оформление и презентация результатов.* На данном этапе проектное задание оформляется и представляется студентом, контролируется преподавателем, оценивается.

Практика системного применения метода проектов показала, что в геометро-графической подготовке при изучении фундаментальных геометрических основ целесообразно использовать проблемно-ориентированные, проблемные и проектные задания с изучением предметного материала и приобретением опыта разрешения нестандартных проблемных ситуаций (Александрова Е.П., Носов К.Г., Столбова И.Д., 2015).

В организации учебной деятельности студентов геометро-графической подготовки определена системная последовательность выполнения проектных заданий с учетом уровня погружения студентов в проектную деятельность. Уровни погружения студентов в проектную деятельность соответствуют уровням выполнения действий по установлению связей между системой понятий и системой образов геометрических моделей с целью формирования у студентов компонентов инженерного мышления.

На 1 уровне студенты решают проблемно-ориентированные задачи (задачи с наличием ситуационных проблем, требующих нестандартного подхода, с рекомендациями и с пошаговым алгоритмом решения). При решении выполняются геометро-графические действия по установлению связей между системой понятий начертательной геометрии с системой их графических образов, распознавание видов алгоритмических предписаний и их применение при решении тематических задач. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Задача. Создать трехмерную модель прямого кругового конуса с заданными параметрами, рассеченного плоскостью по эллипсу, если известна величина малой оси эллипса и удаление ее центра от основания (рис. 2).

Реализация: Алгоритм решения базируется на основе геометрических знаний по теме «Сечение поверхностей плоскостями». Описана алгоритмическая последовательность 3D-моделирования с использованием графической САПР.

Расположение малой оси эллипса можно определить двумя дополнительными параллельными плоскостями, определяющих сечения конуса по гиперболам. Определение большой оси эллипса возможно по одновременному касанию двух гипербол на конусе.

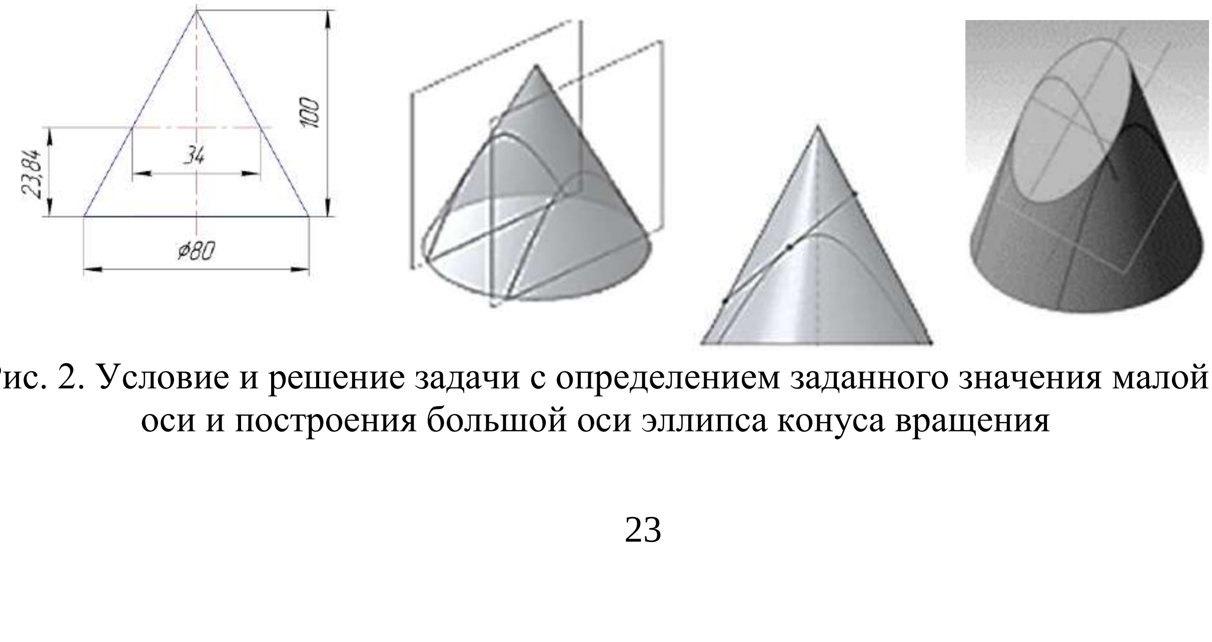


Рис. 2. Условие и решение задачи с определением заданного значения малой оси и построения большой оси эллипса конуса вращения

На 2 уровне погружения в проектную деятельность студенты решают проблемные задачи (проблемная постановка задачи и выбор рационального алгоритма ее решения из рекомендованных). В качестве примера на рисунке 3 показано условие задачи и готовый вариант решения. При решении выполняются познавательно-аналитические действия с получением промежуточных выводов и решений, переход к основному решению с 3d моделированием геометрических объектов. Студент выбирает рациональный алгоритм решения или разрабатывает его самостоятельно.

Задача. Создать модель пересекающихся конуса и сферы, если задан радиус основания, высота конуса, точка касания сферы с образующей конуса – В, удаленной от основания конуса на заданное расстояние. Пересечение конуса и сферы происходит по пространственной кривой, разделенной точкой В на две кривых петли. Записать алгоритм решения.

а) б) в)

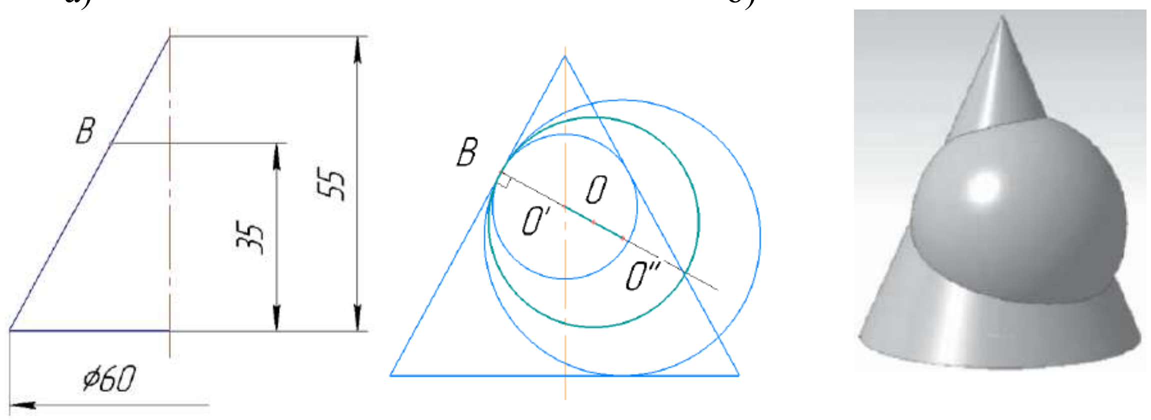


Рис. 3. Условие и решение позиционной задачи пересечения поверхностей; а) параметрическая модель; б) определение искомого радиуса сферы; в) визуализация 3D модели

Реализация: а) построение параметрической модели по заданным размерам с осью конуса и ее образующей и заданной на ней точкой касания сферы В; б) проведение перпендикуляра к образующей из точки касания В, на котором будет располагаться центр искомой сферы; в) анализ возможного диапазона значений радиуса сферы (Rmin < R < Rmax) и определение их центров. Rmin сферы касается точки В, Rmax касается помимо точки В основания. На расстоянии между центрами Rmin и Rmax будут находиться искомые центры сфер; в) вариантов решения несколько, определяемся с выбором центра сферы и строим линию пересечения.

Проектные задания выполняются на 3 уровне погружения в проектную деятельность, выполняя несложную геометрическую модель реального изделия с конструированием по самостоятельно разработанному алгоритму. Пример проектного задания показан на рисунке 4.

Проектное задание. Создать модель переходника, состоящего из соединенных под прямым углом поверхностей прямого кругового конуса и цилиндра. Даны исходные размеры. Подготовить к соединению модели конуса и цилиндра по общей кривой эллипса, которую необходимо определить методом Монжа. Записать алгоритм решения. Определить необходимые метрические характеристики по 3D модели поверхностей и построить их развертки.

Экспериментальная апробация проектно-модульного подхода к обучению начертательной геометрии в техническом вузе и результаты исследования формирования геометро-графической компетенции с познавательно-созидательной составляющей показали эффективность реализации в конструктивном использовании студентами методов геометро-графического моделирования, в приобретении навыков по самостоятельной постановке учебных задач и выполнения организационно-аналитических действий при их решении. Определены значения уровней сформированности каждого компонента геометро-графической компетенции отдельно и в целом по уровням: низкий, средний, высокий, творческий. Студенты экспериментальной группы на высоком и творческом уровнях превосходят студентов контрольной группы (37% и 8% против 19% и 3%).

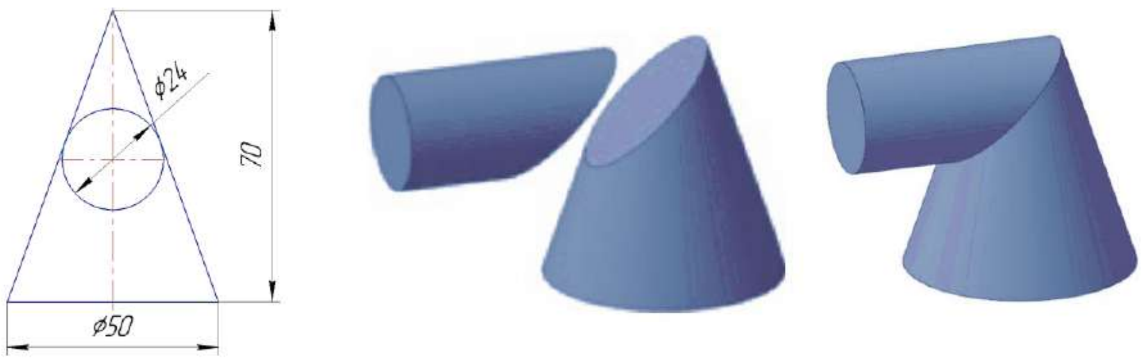


Рис. 4. Параметрическая модель для выполнения проектного задания

Анализ графических и проектных работ, выполненных в процессе эксперимента, показал, что у студентов экспериментальной группы уровень сформированности выше в умениях по постановке задачи, выборе методов и способов решения, планированию учебной деятельности, владению алгоритмами решения геометро-графических задач.

Выводы. Необходимость формирования познавательно-созидательной компоненты геометро-графической компетенции у студентов технического вуза на начальном этапе профессиональной подготовки предполагает практическую направленность обучения на достижение образовательных результатов в конструктивном использовании студентами методов геометро-графического моделирования в комплексе геометрических знаний и прикладного инструментария.

Проектно-модульный подход к обучению начертательной геометрии студентов технического вуза позволяет организовать учебную деятельность студента с формированием познавательно-созидательной составляющей в компонентах геометро-графической компетенции. На методическом уровне проектно-модульный подход реализуется модульным представлением учебного материала начертательной геометрии совместно с организацией учебной деятельности студентов в структуре учебного проекта. Организация учебной деятельности студентов должна быть ориентирована на освоение студентом субъективно нового материала при выполнении учебного проектного задания с выполнением в комплексе геометро-графических действий и действий, приближенных к ситуациям при решении проблемных нестандартных инженерных задач. Это способствует формированию познавательно-созидательной составляющей геометро-графической компетенции.

Список литературы

Александрова Е.П., Носов К.Г., Столбова И.Д. Практическая реализация проектно-ориентированной деятельности студентов в ходе графической подготовки // Открытое образование. 2015. № 5. С. 55-62.

Столбова И.Д., Александрова Е.П., Носов К.Г. Метод проектов в организации графической подготовки // Высшее образование в России. 2015. № 8-9. С. 22-31.

Якунин В.И., Гузненков В.Н. Геометро-графические дисциплины в техническом университете // Теория и практика общественного развития. 2014. № 17. С. 191-195.

Кайгородцева Н.В. Определение содержания и технологии геометро-графической подготовки будущих инженеров на основе интеграции информационных сред: дис. … д-ра пед. наук. Омск, 2015.

Гузненков В.Н. Основы формирования современного геометро-графического образования в техническом университете: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. М., 2014.

РАЗВИТИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИХ ПРИЕМОВ МЫСЛИТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ У БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ»

Ерошенко Е.В.[1]
Научный руководитель: к. п. н., доцент Гончарова И.В.[2]

[1, 2] *ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»*

e-mail: [1]yeroshenko03@internet.ru, [2]i.goncharova.dongu@mail.ru

Аннотация. В процессе изучения учебной дисциплины «Методика обучения математике» будущими учителями важно овладеть эвристическими приемами. Осуществить творческий подход к обучению возможно через включение в содержание обучения различных эвристик. Для решения указанной проблемы разработана эвристически ориентированная система задач при изучении таких тем курса общей методики, как «Математические понятия», «Методика формирования математических понятий», «Математические утверждения», «Методика изучения теорем», «Урок математики». Разработанная система задач направлена на развитие таких эвристических приемов мыслительной деятельности, как обобщение, аналогия, сравнение классификация. Для овладения студентами эвристическими приемами мыслительной предлагается использовать электронные дидактические игры. В работе приводится пример такой игры.

Ключевые слова: будущие учителя математики, эвристические приемы мыслительной деятельности, методика обучения математике, электронная дидактическая игра.

THE DEVELOPMENT OF HEURISTIC METHODS OF MENTAL ACTIVITY IN FUTURE MATHEMATICS TEACHERS WHEN STUDYING THE COURSE «METHODS OF TEACHING MATHEMATICS»

Abstract. In the process of studying the discipline «Methods of teaching mathematics» by future teachers, it is important to master heuristic techniques. It is possible to implement a creative approach to learning through the inclusion of various heuristics in the learning content. To solve this problem, a heuristically oriented system of tasks has been developed in the study of such topics of the general methodology course as «Mathematical concepts», «Methods of forming mathematical concepts», «Mathematical statements», «Methods of studying theorems», «Mathematics lesson». The developed system of tasks is aimed at developing such heuristic techniques of mental activity as generalization, analogy, comparison, classification. To help students master heuristic thinking techniques, it is proposed to use electronic didactic games. The paper provides an example of such a game.

Keywords: future teachers of mathematics, heuristic methods of mental activity, methods of teaching mathematics, electronic didactic game.

Введение

Стратегией национальной безопасности Российской Федерации, утвержденной Указом Президента Российской Федерации в 2021 году, определены потребности современного рынка труда в квалифицированных специалистах для наукоемкого и высокотехнологичного производства (Официальный интернет-портал правовой информации). В связи с этим изменяются требования к системе образования на всех уровнях его развития. По словам Е.И. Скафы (Скафа, 2023), работа учителя, особенно учителя математики, усложняется, так как ему необходимо находить такие современные технологии обучения, которые смогли бы формировать у обучающихся не только алгоритмические приемы, обеспечивающие освоение базового учебного материала, но и прививать интерес школьников к предмету, овладевать эвристическими приемами деятельности, служащими предпосылкой формирования познавательных потребностей и творческих способностей.

Методология исследования

Чтобы будущий учитель математики смог обучать современных школьников эвристическим приемам, организовывать учебно-познавательную эвристическую деятельность, необходимо формировать у них устойчивый интерес к эвристической деятельности, развивать общие эвристические приемы умственной деятельности и вооружать их знаниями и умениями организации такой деятельности, которые позволят молодому учителю быть конкурентноспособным на рынке труда (Скафа, 2023; Тымко, 2013).

Для подготовки таких педагогов в высшей школе разрабатываются различные системы обучения будущих учителей, в том числе и учителей математики. Например, активно обсуждаются вопросы внедрения проектно-эвристической деятельности в обучение бакалавров образования (Салманова, 2020; Скафа, Евсеева, Абраменкова, Гончарова, 2021), введения системы эвристического обучения в практику работы высшей школы (Король, Китурко, 2018; Кошелева, 2022; Селякова, Мурмилова, 2018; Скафа, 2023) и др.

Однако, роль эвристических приемов в процессе изучения дисциплины «Методика обучения математике» студентами – будущими учителями математики рассмотрена недостаточно. Данная учебная дисциплина требует от студента, как умения применять эвристические приемы мыслительной деятельности при решении задач, так и умения использовать формы, методы, средства эвристического обучения для организации учебной деятельности учащихся (Тымко, 2013).

В процессе исследования были обнаружены противоречия между:

– необходимостью в учителях математики, способных организовывать и управлять эвристической деятельностью учащихся и недостаточной подготовкой выпускников педагогических вузов к этому виду деятельности;

– необходимостью формирования у будущих учителей профессионально ориентированной эвристической деятельности и сложившейся системой обучения методике обучения математике.

Поиск путей разрешения указанных противоречий позволил сформулировать проблему исследования, которая состоит в необходимости развития эвристических приемов мыслительной деятельности у будущих учителей математики при изучении дисциплины «Методика обучения математике».

Таким образом, тема исследования «Развитие эвристических приемов мыслительной деятельности у будущих учителей математики при изучении дисциплины «Методика обучения математике» является актуальной.

Целью исследования является изучение вопроса о развитии эвристических приемов мыслительной деятельности у будущих учителей математики при изучении дисциплины «Методика обучения математике» и разработке соответствующего дидактического обеспечения.

Результаты

Для решения сформулированной проблемы нами разработана эвристически ориентированная система задач для студентов 3 курса направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (Профиль: Математика и информатика) при изучении учебной дисциплины «Методика обучения математике». Задействованы такие темы, как: «Математические понятия», «Методика формирования математических понятий», «Математические утверждения», «Методика изучения теорем», «Урок математики». Разработанная нами система задач направлена на развитие эвристических приемов мыслительной деятельности (обобщение, аналогия, сравнение классификация), которые по классификации эвристических приемов Е.И. Скафы (Скафа, 2020) относятся к классу общих эвристик, применяемых практически во всех областях знаний.

Для примера рассмотрим несколько таких задач.

Тема «Математические понятия»

Пример 1 (обобщение). Вам предложены четыре термина. Три из них объединены общим признаком, четвертый к ним не подходит. Найдите лишний термин. Укажите общий признак.

треугольник	ромб	конгруэнтность	прямоугольник
а)	б)	в)	г)

Решение. Так как требуется исключить лишний термин, значит, три термина из четырех объединены каким-то общим условием, а четвертый термин к ним не подходит. Найдем то общее, что объединяет наши термины. Для этого изучим каждый термин: треугольник, ромб, прямоугольник – термины, которые в настоящее время мы постоянно употребляем, а конгруэнтность – термин, который вышел из употребления. Итак, три термина из четырех объединены общим условием – они не вышли из употребления. Значит, лишний термин – конгруэнтность, поскольку нами уже не используется в качестве математического термина. Ответ: в).

Пример 2 (обобщение).

Заглавными буквами выделены три слова. Подумайте, как связаны первые два из них и укажите в списке *а*) – г) четвертое слово, которое точно также связано с третьим.

РОМБ – ПАРАЛЛЕЛОГРАММ,
КВАДРАТ – ?

прямоугольник	треугольник	трапеция	окружность
а)	б)	в)	г)

Решение. Внимательно рассмотрев слова, расположенные в верхней строке, замечаем, что ПАРАЛЛЕЛОГРАММ – это родовое понятие определяемого понятия ромб. Значит из списка слов, заданных в нижней строке нужно выбрать родовое понятие определяемого понятия квадрат, т.е. слово «прямоугольник». Ответ: *а*).

Тема «Математические утверждения»

Пример 3 (обобщение). Вставьте пропущенное утверждение (рис. 1).

Рис. 1. Иллюстрации к примеру 3

Варианты ответов:

а). Если в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других, то этот треугольник прямоугольный.

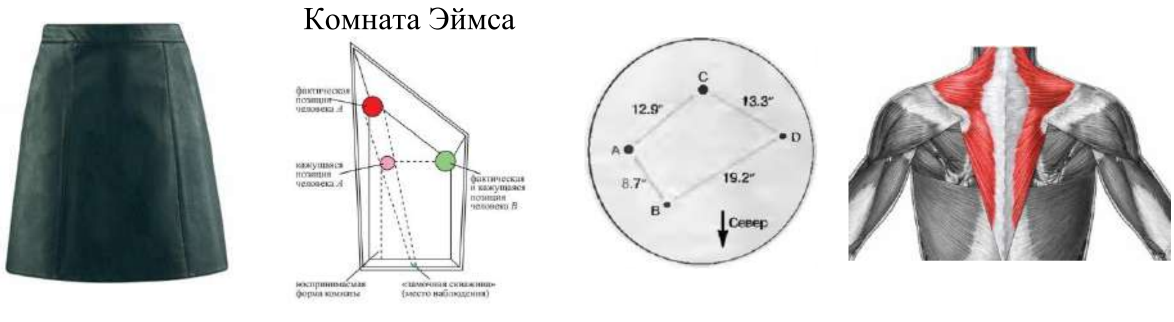
б). Если треугольник не является прямоугольным, то квадрат гипотенузы не равен сумме квадратов катетов.

в). Другой ответ.

Решение. В первой строке задания изображена белая собака, ей соответствует теорема Пифагора в условной форме. Во второй строке изображена черная собака. Следовательно, во второй строке записываем утверждение, которое является противоположным к исходному утверждению. Ответ: б).

Тема «Методика формирования математических понятий»

Пример 4 (обобщение). Посмотрите на картинки (рис. 2) и определите, каким общим признаком они связаны. Ответ обоснуйте.



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 2. Иллюстрации к примеру 4

Решение. Все изображения связаны с трапецией: первая картинка – это юбка трапециевидной формы, вторая – комната Эймса, которая имеет форму трапеции, третья – созвездие Орион (звезды образуют трапецию), четвертая – трапециевидная мышца человека. Данный материал можно использовать для мотивации введения математического понятия «трапеция».

Для овладения студентами эвристическими приемами мыслительной деятельности с помощью созданной эвристически ориентированной системы задач мы предлагаем использовать электронные дидактические игры, разрабатываемые на кафедре высшей математики и методики преподавания математики ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет».

О.Г. Карандашева электронную дидактическую игру определяет, как «разновидность дидактической игры, в которой игрок (студент) может взаимодействовать с виртуальной средой, построенной компьютером. Состояние виртуальной среды передаётся за счёт различных способов передачи данных (визуальных, звуковых, тактильных и т.д.)» (Карандашева, 2022).

С помощью сетевого образовательного ресурса iSprin Suite нами была разработана электронная дидактическая игра «Маша – будущий учитель нашего времени» по теме «Математические понятия», состоящая из 8 задач, направленных на развитие таких эвристических приемов мыслительной деятельности, как обобщение, аналогия, сравнение, классификация (Ерошенко, 2023). Например, на рис. 3, *а*)-*г*) продемонстрировано как в игре представлена задача на развитие эвристического приема «классификация».

а)

б)

в)

г)

Рис. 3. Фрагмент электронной дидактической игры: игровые действия

Заключение

Таким образом, целенаправленное и систематическое решение студентами эвристически ориентированных задач при изучении методики обучения математике, на наш взгляд, способствует не только улучшению качества методической подготовки будущего учителя математики, но и формированию умения применять различные эвристические приемы в своей профессиональной деятельности. А разнообразные игровые действия в электронных дидактических играх, при помощи которых решается та или иная умственная задача, поддерживают и усиливают интерес студентов к учебному предмету.

Список литературы

Ерошенко Е.В. Электронная дидактическая игра как средство развития эвристических приемов мыслительной деятельности у будущих учителей математики // Эвристика и дидактика математики: материалы XII международной научно-методической дистанционной конференции-конкурса молодых ученых, аспирантов и студентов, Донецк, апрель-май 2023 г. Донецк: Изд-во ДонНУ, 2023. С. 31-33.

Карандашева О.Г. Использование онлайн-сервисов для конструирования электронных дидактических игр в начальной школе // Интеграция науки, технологии и образования: ИНТО – 2022: материалы VII межрегиональной конференции молодых исследователей с международным участием, Москва, 20 апреля 2022 г. Москва: МПГУ, 2022. С. 180-185.

Король А.Д., Китурко И.Ф. Основы эвристического обучения: учеб. пособие. Минск: БГУ, 2018. 207 с.

Кошелева Е.А. Педагогическая эвристика в учебно-познавательной деятельности обучающихся российских вузов // Образование и культурное пространство. 2022. № 3. С. 17-22. DOI: 10.53722/27132803_2022_3_17.

Салманова Д.А. Проектно-эвристическая деятельность в обучении бакалавров образования // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2020. № 3. С. 49-52.

Селякова Л.И., Мурмилова Д.Ю. Алгебраическая подготовка будущего учителя математики на основе эвристического подхода // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2018. Вып. 48. С. 60-68.

Скафа Е.И., Евсеева Е.Г., Абраменкова Ю.В., Гончарова И.В. Система подготовки нового поколения учителей математики на основе проектно-эвристической деятельности // Перспективы науки и образования. 2021. № 5(53). С. 208-222. DOI: 10.32744/pse.2021.5.14108.

Скафа Е.И. Методика обучения математике: эвристический подход. Общая методика: учебное пособие. Донецк: ДонНУ, 2020. 440 с.

Скафа Е.И. Подготовка будущего учителя математики: от овладения эвристическими приемами к организации проектно-эвристической деятельности // Эвристическое обучение математике: труды VI международной научно-методической конференции, Донецк, 21-23

декабря 2023 г.; под общ. ред. проф. С.В. Беспаловой, проф. А.А. Русакова, проф. Е.И. Скафы. Донецк: Изд-во ДонГУ, 2023. С.75-82.
Тымко Ю.Г. Формирования приемов эвристической деятельности у студентов в куре методики обучения математике // Дидактика математики: проблемы и исследования: междунар. сборник научных работ. 2013. № 39. С. 16-21.
Официальный интернет-портал правовой информации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://publication.pravo.gov.ru/document/0001202107030001?index=2. (дата обращения: 01.05.2024).

К ВОПРОСУ О ПРЕПОДАВАНИИ ТЕМЫ «ВЕРОЯТНОСТЬ И ЧАСТОТА» В 7 КЛАССЕ

Жигулина А.А.[1]
Научный руководитель: к.п.н., старший преподаватель Лыкова К.Г.[2]

[1, 2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]nasta-3913@yandex.ru, [2]ksli1024@mail.ru

Аннотация. В статье приводятся методические рекомендации к изучению курса «Вероятность и статистика» в 7 классе. Основными направлениями при рассмотрении темы «Вероятность и частота» выступают: знакомство учащихся с особенностями и спецификой организации статистических экспериментов, на примере Санкт-Петербургского парадокса, опыта Бюффона; демонстрация комплекса условий для проведения таких экспериментов и актуализации необходимости их обязательного соблюдения; выявление связи понятий «частота» и «вероятность». Важным результатом изучения данной темы является формирование вероятностно-статистических представлений школьников, повышение их интереса и мотивации не только к учебному предмету, но и к науке в целом. Понимание учащимися особенностей статистических экспериментов позволит им лучше интерпретировать данные, выдвигать и аргументировать простейшие гипотезы, размышлять над факторами, приводящими к изменчивости или статистической устойчивости, а также оценивать их влияние.

Ключевые слова: основное общее образование, вероятность, эксперимент, частота, случайное событие.

ON TEACHING THE TOPIC "PROBABILITY AND FREQUENCY" IN THE 7TH GRADE

Abstract. The article provides methodological recommendations for the study of the course "Probability and Statistics" in the 7th grade. The main directions in the consideration of the topic "Probability and Frequency" are: acquaintance of students with the features and specifics of the organisation of statistical experiments, on the example of the St. Petersburg paradox, Buffon's experience; demonstration of a set of conditions for conducting such experiments and actualisation of the necessity of their obligatory observance; identification of the connection between the concepts of "frequency" and "probability". An important result of studying this topic is the formation of probability-statistical ideas of schoolchildren, increasing their interest and motivation not only to the subject, but also to science in general. Pupils' understanding of the peculiarities of statistical experiments will allow them to better interpret data, to put forward and argue the simplest hypotheses, to reflect on the factors leading to variability or statistical stability, as well as to assess their influence.

Keywords: basic general education, probability, experiment, frequency, random event.

Введение

Одной из важных тем программы 7 класса по предмету «Вероятность и статистика» является тема «Вероятность и частота». Однако, сведения по данной теме, представленные в школьной учебной литературе, недостаточны, а порой не совсем точны. В качестве дополнения к уроку можно ознакомить учащихся с несколькими масштабными экспериментами, направленными на демонстрацию процесса стабилизации частот относительно некоторого числа на примере опыта с подбрасыванием монет. Такой опыт в полной мере отражает свойство статистической устойчивости или свойство частоты, которое заключается в том, что с увеличением числа опытов частота принимает значения, близкие к некоторой константе (постоянному числу). Однако при этом следует обратить внимание учащихся на следующие моменты:

1. при подготовке к эксперименту необходимо проверить, можно ли использовать его результаты в качестве подтверждения или опровержения выдвинутой гипотезы, то есть можно ли исследовать интересующий вопрос с помощью выбранного опыта;
2. при проведении эксперимента необходимо соблюдать поставленные условия, которые в случае ряда испытаний должны быть одинаковыми.

Далее кратко опишем несколько таких экспериментов.

«Санкт-Петербургский парадокс», опыт де Бюффона

Начнём с одного из известнейших математических парадоксов, а именно с «Санкт-Петербургского парадокса», который иногда называют «Петербургской игрой». Автором этой задачи был Николай Бернулли (1695–1726). Название «Петербургская» появилось из-за того, что решение задачи было опубликовано Даниилом Бернулли в журнале «Заметки Императорской Петербургской Академии наук». Задача состоит в следующем: берётся монетка и подбрасывается до тех пор, пока на ней не выпадет орёл, как только это происходит, партия заканчивается, и подсчитывается выигрыш. Сумму выигрыша можно найти по формуле 2^{k-1}, где k – это число подбрасываний, то есть, если при первом же броске монетка упала орлом вверх, то участник получит $2^0 = 1$ усл. ед. (условную единицу), если сперва выпадет решка, а следом орёл (2 подбрасывания), то выигрыш будет равен $2^1 = 2$ усл. ед., и так далее. Вопрос задачи – найти справедливый взнос за участие в игре. Парадокс состоит в том, что с математической точки зрения взнос должен равняться бесконечности. Это делает игру бессмысленной, так как, во-первых, для участия в ней необходимо заплатить бесконечную сумму, а во-вторых, выигрыш, каким бы большим он ни был, всё равно окажется меньше взноса. В связи с этим де Бюффон решил провести эксперимент и по его результатам найти сумму взноса [4].

Таким образом, Жорж-Луи Леклерк, граф де Бюффон, в своём эксперименте не просто 4040 раз подбросил монетку, на самом деле он (а точнее его слуга) сыграл 2048 партий в Петербургскую игру, за которые «получил» в сумме 10057 усл. ед. Просто поделив всю сумму выигрыша на число партий, он решил задачу и нашёл справедливый взнос за участие в игре, равный $\frac{10057}{2048} \approx 4{,}91 \approx 5$ усл. ед.

Но даже если взнос составляет всего 5 усл. ед., а не бесконечно большую сумму, эта игра, как и другие азартные игры, не стоит того, чтобы в неё играть. Не смотря на «беспроигрышность» этой игры (ведь даже выкинув с первым же броском «орла», участник получает 1 усл. ед.), шанс заработать в ней очень мал. Чтобы получить $2^3 = 8$ усл. ед. (минимальный выигрыш, превосходящий взнос), необходимо выкинуть 3 «решки» и «орла», вероятность чего равна $\frac{1}{2^4} = 0{,}0625$, то есть 6,2%. Это же подтверждается и на практике, как видно из таблицы 1, из 2048 партий, сыгранных де Бюффоном, только в 137 он «получил» 8 усл. ед., «не окупившихся» же партий было 1787, то есть частота проигрыша в этой игре равна $\frac{1787}{2048} \approx 0{,}87$.

Таблица 1.
Результаты опыта де Бюффона

Число бросков монеты в одной партии, i	Выигрыш в одной партии, 2^{i-1} усл. ед.	Количество партий с данным числом бросков, N_i	Количество «решек» во всех партиях с данным числом бросков, $(i-1)N_i$	Количество «орлов» во всех партиях с данным числом бросков, $1 \cdot N_i$
1	1	1061	0	1061
2	2	494	494	494
3	4	232	464	232
4	8	137	411	137
5	16	56	224	56
6	32	29	145	29
7	64	25	150	25
8	128	8	56	8
9	256	6	48	6
Всего:	**2048**	**1992**	**2048**	

Опыты Джевонса и Романовского

Уильям Стенли Джевонс не бросал одну монетку 20480 раз, а провёл эксперимент, состоящий из 2 испытаний, в каждом из которых 1024 раза подбрасывалось 10 монет. Подкидывание одной монеты 10 раз можно приравнять к одновременному бросанию 10 монет, если в этом случае вероятность выпадения «орла» не меняется и остаётся равной 0,5. Однако для рассматриваемого эксперимента это условие не выполняется (доказывается математически) [5]. К такому же выводу можно прийти, если внимательно посмотреть на результаты эксперимента Джевонса. Из таблицы 2 видно, что очень часто (по сравнению с ожидаемыми результатами) большая часть монет падала одной стороной вверх. Например, в первом испытании вместо 10 ожидаемых был 21 случай выпадения 1 «орла» из 10 подброшенных монет, а во втором – было 23 случая выпадения 9 «орлов» и 1 «решки» против 10 ожидаемых. Такое могло произойти, например, при плохом перемешивании монет.

Таблица 2.
Результаты опыта Джевонса

Количество выпавших «орлов»	Ожидаемое число экспериментов с данным количеством «орлов»	Число экспериментов с данным количеством «орлов» в первом испытании	Число экспериментов с данным количеством «орлов» во втором испытании
0	1	0	1
1	10	21	15
2	45	52	50
3	120	111	119
4	210	201	197
5	252	257	232
6	210	181	190
7	120	129	123
8	45	57	73
9	10	12	23
10	1	3	1
Всего:	**1024**	**1024**	**1024**

То же самое можно сказать об эксперименте Всеволода Ивановича Романовского, который также не совершал 80640 подбрасываний одной монетки, а вместо этого 20160 раз подбросил 4 монеты. Как и в случае с рассмотренным выше экспериментом Джевонса имеются основания полагать, что процессу подбрасывания монет не было уделено достаточно внимания, между бросками монеты вероятно плохо перемешивали. Об этом говорят результаты (таб. 3): 4 «орла» вместо ожидаемых 1260 раз выпало 1181 раз, а 4 «решки» 1402 раза вместо 1260 ожидаемых. К такому же выводу можно прийти путём математического доказательства.

Таблица 3.
Результаты опыта Романовского

Количество выпавших «орлов»	Ожидаемое число экспериментов с данным количеством «орлов»	Число экспериментов с данным количеством «орлов»
0	1260	1402
1	5040	5085
2	7560	7583
3	5040	4909
4	1260	1181
Всего:	**20160**	**20160**

Заключение

В заключение полезно отдельно рассмотреть со школьниками практическое значение таких экспериментов. Так, «Санкт-Петербургский парадокс» - это не азартная игра и даже не абстрактная математическая задача, как считали долгое время. «Парадокс» внёс немалый вклад в экономическую теорию, войдя в неё в начале XX века благодаря Карлу Менгеру, который изменил его смысл и вместо справедливого взноса предложил искать адекватную модель поведения человека в условиях неопределённости. «Санкт-Петербургский парадокс» повлиял на различные стороны экономической теории, такие как ценообразование, связанное с введённым К. Менгером понятием «готовность платить», микроэкономика страхования, управление рисками и другие [2].

Таким образом, представленный материал не только поможет школьникам лучше понять смысл «частоты случайного события», но позволит сформировать представление о реальных экспериментах и сложностях их осуществления. Можно сделать вывод о том, что надо проверять соответствие эксперимента гипотезе и тщательнее выбирать способ его проведения, а так же, что ссылаясь на какое-либо исследование, необходимо внимательно выбирать источники информации и избегать ошибочной интерпретации его результатов.

Список литературы

Войтенко Т.Ю., Фирер А.В. Различные подходы к определению понятия вероятности в курсе математики основной школы // Проблемы современного педагогического образования. 2022. № 76-1. С. 78-81.

Кудрявцев А.А. Санкт-Петербургский парадокс и его значение для экономической теории // Вестник Санкт-Петербургского университета. Экономика. 2013. № 3. С. 41-55.

Максимова О.В. О Математических моделях на примере решения некоторых школьных вероятностных задач // Математика в школе. 2024. № 1. С. 24-32.

Фалин Г.И. История опытов с бросанием монеты. Часть 1. Опыт де Бюффона // Математика в школе. 2014. № 9. С. 55-59.

Фалин Г.И. История опытов с бросанием монеты. Часть 3. Опыт Джевонса // Математика в школе. 2015. № 1. С. 52-58.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ МОДУЛИ ПРИ ОБУЧЕНИИ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Исаева Е.И.[1]
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Забелина С.Б.[2]

[1, 2] *Государственный университет просвещения*

e-mail: [1]evgeniasavchenko2899@mail.ru, [2]zabelina_sb@mail.ru

Аннотация. В данной статье будут представлены плюсы и минусы использования индивидуальных образовательных модулей на уроках математики в средней школе; технология модульного обучения, содержание учебных элементов в модуле, принципы построения урока с использованием модульной технологии. Также будет продемонстрирован пример методической разработки индивидуальных образовательных маршрутов по теме «Производная функции».
Ключевые слова: модульная технология, модуль, образовательный маршрут, учебный элемент, самостоятельная деятельность.

INDIVIDUAL EDUCATIONAL MODULES IN TEACHING DERIVATIVE FUNCTION AT SECONDARY SCHOOL

Abstract. This article will present the pros and cons of using individual educational modules in mathematics lessons at secondary school; the technology of modular learning, the content of educational elements in the module, the principles of building a lesson using modular technology. It will also demonstrate an example of methodological development of individual educational routes on the topic "Derivative of a function".
Keywords: modular technology, module, educational route, learning element, independent activity.

Обучение математике, в том числе и производной функции, играет важную роль в формировании у школьников логического мышления и аналитических способностей. В средней школе, однако, каждый ученик обладает своими индивидуальными способностями, интересами и темпом обучения. Для того чтобы учебный процесс был эффективным и интересным для каждого ученика, важно использовать индивидуальные образовательные модули, специально адаптированные под каждого учащегося.

Индивидуальные образовательные модули представляют собой персонализированные образовательные программы, учитывающие потребности и особенности каждого ученика. В случае обучения производной функции в средней школе, такой подход к образованию может оказаться особенно полезным.

Прежде всего, важно провести начальную диагностику способностей и уровня подготовки каждого ученика по теме производной функции. На основе этих данных можно разработать индивидуальные образовательные модули, учитывающие уровень знаний, интересы и потребности каждого ученика.

Одним из ключевых моментов при разработке таких модулей является использование различных методов обучения. Некоторым ученикам может быть удобнее учиться через визуальное представление материала, другим – через практические задания и примеры. Используя различные подходы, можно создать учебную среду, способствующую максимальному усвоению материала по производной функции.

Важно также учитывать разнообразие индивидуальных образовательных модулей при работе в классе. Это может включать индивидуальные задания, дифференцированные задачи и проектную работу, позволяющую каждому ученику развивать свои навыки в соответствии с его потребностями.

Модульное обучение – обучение, в котором материал разделен на блоки информации. Данная методика основана на самостоятельной деятельности учащихся, которые осваивают модули в соответствии с поставленными целями обучения.

Модуль – это самостоятельный блок, содержащий теоретический материал, образец выполнения задания, само учебное задание и рекомендации для ученика. Неотъемлемой частью модуля является ключ для контрольных вопросов, тестов, самопроверки и взаимопроверки.

В основе модульной технологии лежит системно-деятельностный подход, что как раз и предусматривает современный ФГОС СОО. Субъектом образовательного процесса является ученик, а учитель наставником и тьютором. Минимальная продолжительность урока по модульной технологии составляет два часа.

В чём заключается деятельность учителя? Преподаватели делят материал на блоки, создают собственные разработки с заданиями по вариантам, целями и критериями для проверки решения. Основная цель – организация персональной работы учащегося с данными индивидуальными образовательными маршрутами. Учитель контролирует время, отведенное на каждый учебный компонент, информирует класс о временных ограничениях.

Структура модульного урока:

1. Этап мотивации. Знакомство с модулями, вхождение в учебный процесс, учитель даёт план действий для выполнения работы.

2. Непосредственная работа с модульными блоками. Их логичность, чёткость, структурированность. Они все имеют своё название, нумерацию и цель, которую должны выполнить учащиеся.

3. Рефлексия. Учащиеся оценивают работу на уроке в полной мере, подводят итоги, проставляют баллы. Домашнее задание и его количество складываются из того, с чем ученики справились на уроке, сколько решили и как решили. Оно будет иметь дифференцируемый характер.

Содержание учебных элементов в модуле:

1. УЭ 0 – постановка целей по теме урока, их объяснение, пояснение содержания к последующей работе.

2. УЭ 1 – первая и самая простая диагностическая работа, то, чем должны овладеть все учащиеся.

3. УЭ 2 – УЭ 6 – перечисленные учебные элементы должны содержать теоретическую и практическую часть. Могут быть организованы различные варианты работы (парная, групповая, коллективная) с последующей проверкой и самопроверкой. Ответы находятся у преподавателя.

4. УЭ 7 – в данном блоке предлагаются нестандартные задачи повышенного уровня сложности, обязательно приводятся решения аналогичных задач в качестве образца.

Каждый УЭ (учебный элемент) имеет свои цели, конкретную задачу, поставленную перед учениками, ссылку на то, где в учебнике можно найти необходимые пояснения, а также алгоритм (порядок выполнения заданий) и ключ для самостоятельной проверки и оценки правильности своих ответов. Каждому УЭ соответствует свой уровень подготовки.

- 1 уровень (элементы № 1-4) – базовый уровень.
- 2 уровень (элемент № 5) – средний уровень.
- 3 уровень (элемент № 6-7) – повышенный уровень.

Выполнив задания, учащиеся сверяются с эталонами решения, которые находятся у учителя, и по необходимости исправляют ошибки. Каждый ученик должен набрать определённое количество баллов, но если этого не происходит, он обязан выполнить дополнительные стимулирующие задания, которые повысят его балл и позволят ему двигаться дальше. Все результаты он вносит в оценочный лист согласно критериям ниже, где N – количество баллов, набранное учеником:

- «2», если $N < 15$;
- «3», если $15 \leq N \leq 22$;
- «4», если $23 \leq N \leq 27$;
- «5», если $N \geq 28$.

Фамилия, имя ученика__________________			
Учебные элементы	Количество баллов за основные задания	Количество баллов за корректирующие задания	Количество баллов за элемент
№1			
№2			
№3			
№4			
№5			
№6			
Итоговое количество баллов			
Оценка			

Рис. 1. Примерный вариант оценочного листа ученика

Созданные учебные маршруты обязательно должны подстраиваться под учебный план и программу, федеральный государственный образовательный стандарт образования, они должны удовлетворять социальный заказ, реализовать индивидуальный подход к каждому ученику.

Прежде чем разрабатывать индивидуальные образовательные модули, нужно обязательно проанализировать уровень знаний класса, его успеваемость, выявить психолого-педагогические особенности детей (им не должна быть чужда самостоятельность). Все элементы модуля должны быть обязательно настроены на нужды учеников, их возможности, способности.

Таким образом, создание индивидуальных образовательных модулей подчиняется чёткому алгоритму, как и любая продуктивная деятельность, которая в данном случае должна быть направлена на успех ученика.

Но не стоит забывать учителю и о следующем:

1. Модули должны быть под силу даже самому слабому ученику.
2. Атмосфера на уроке должна быть благоприятная, учащиеся должны быть положительно настроены на урок.
3. Не стоит забывать про поощрение воспитанников и их индивидуальные особенности.
4. Программа модулей для одарённых детей составляется отдельно от общей программы с учётом особенностей таких детей.

Следует отметить, что проведение урока с использованием модульной технологии всегда совместимо с применением других обучающих технологий на данном уроке, например, таких как технология проблемного обучения, уровневой дифференциации, развивающего обучения, проектная и ТРИЗ технология.

Перейдём непосредственно к методической разработке.

Таблица 1

Учебный элемент (УЭ-0)

В результате усердной работы ты узнаешь: • различные формулы дифференцирования функций; • правила дифференцирования для суммы, произведения и частного функций; • как применять правило дифференцирования сложной функции. При выполнении задач тебе нужно будет: • находить производные функций, основываясь на известных правилах и формулах; • определять, какие правила и формулы использовать, исходя из предоставленной информации; • делать обобщения и выводы; • работать с текстом учебника; • оценивать свои знания и отвечать на поставленные вопросы.

Цель: закрепить правило нахождения производной степенной и тригонометрических функций.

Таблица 2

Учебный элемент (УЭ-1)

<table>
<tr><td colspan="2">УЧЕБНЫЙ ЭЛЕМЕНТ № 1
<u>Указания</u>: вспомните правило вычисления производной степенной функции. Для этого найдите и прочитайте текст на стр. 22 учебника. Выполните письменно следующие задания.
Найдите производную функции:</td></tr>
<tr><td>Вариант 1
$f(x) = x^3$ – (1 балл),
$f(x) = -2sin\ x$ – (1 балл),
$f(x) = -5x^7$ – (1 балл),
$f(x) = 2x + 1$ – (1 балл),
$f(x) = ctg\ x$ – (1 балл),
$f(x) = x^{-7}$– (1 балл).</td><td>Вариант 2
$f(x) = x^4$ – (1 балл),
$f(x) = 3cos\ x$ – (1 балл),
$f(x) = -3x^6$ – (1 балл),
$f(x) = -5x + 2$ – (1 балл),
$f(x) = tgx$ – (1 балл),
$f(x) = x^{-6}$ – (1 балл).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Оцените свою работу. Правильные ответы уточните у преподавателя. В случае наличия ошибок, внесите исправления и укажите количество баллов в таблице оценок. Если ваш результат составляет 5 баллов или больше, переходите к следующему заданию; в противном случае, выберите другой вариант для выполнения.</td></tr>
</table>

Цель: закрепить правило нахождения производной суммы функций.

Таблица 3

Учебный элемент (УЭ-2)

<table>
<tr><td colspan="2">УЧЕБНЫЙ ЭЛЕМЕНТ № 2
<u>Указания</u>: вспомните правило вычисления производной суммы функций. Для этого найдите и прочитайте текст на стр. 22 учебника. Выполните письменно следующие задания.
Найдите производную функции:</td></tr>
<tr><td>Вариант 1
$f(x) = x^3 + x^2$ – (1 балл),
$f(x) = 5x^3 + x^2 + 1$ – (1 балл),
$f(x) = 4cosx - 3x^2$ – (1 балл),
$f(x) = x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x}$ – (2 балла),
$f(x) = 2x^6 - \sqrt{x}$ – (2 балла).</td><td>Вариант 2
$f(x) = x^2 - x^4$ – (1 балл),
$f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$ – (1 балл),
$f(x) = 2sinx + 5x^3$ – (1 балл),
$f(x) = x^4 + 4x + \frac{1}{x}$ – (2 балла),
$f(x) = 3x^3 - \sqrt{x}$ – (2 балла).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пожалуйста, проверьте свою работу, оцените ее и получите правильные ответы у своего учителя. Внесите поправки, если обнаружите ошибки, и запишите количество баллов в бланк для оценивания. Если ваш результат составит 5 баллов или более, вы можете переходить к следующему шагу. В случае, если набранная вами оценка окажется ниже, выполните аналогичное задание другого варианта, где была допущена ошибка.</td></tr>
</table>

Цель: закрепить правило нахождения производной произведения двух функций.

Таблица 4
Учебный элемент (УЭ-3)

УЧЕБНЫЙ ЭЛЕМЕНТ № 3 **Указания:** вспомните правило вычисления производной произведения двух функций. Для этого найдите и прочитайте текст на стр. 22 учебника. Выполните письменно следующие задания. **Найдите производную функции:**	
Вариант 1 $f(x) = (5x - 1)(4x + 1)$ – (1 балл), $f(x) = x^2(3x + x^3)$ – (2 балла), $f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 1)$ – (2 балла).	**Вариант 2** $f(x) = (3x + 2)(4x - 1)$ – (1 балл), $f(x) = 2x(1 - x^3)$ – (2 балла), $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)$ – (2 балла).
Пожалуйста, пересмотрите выполненные задания, внесите коррективы при наличии ошибок и укажите количество баллов в оценочном листе. Если ваша оценка составит 3 балла или больше, вы можете перейти к следующему шагу. В случае, если ваша оценка будет ниже, выполните другое задание из аналогичного варианта.	

Цель: закрепить правило нахождения производной частного двух функций.

Таблица 5
Учебный элемент (УЭ-4)

УЧЕБНЫЙ ЭЛЕМЕНТ № 4 **Указания:** вспомните правило вычисления производной частного двух функций. Для этого найдите и прочитайте текст на стр. 22 учебника. Выполните письменно следующие задания. **Найдите производную функции:**	
Вариант 1 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ – (2 балла), $f(x) = \frac{5 - 2x^6}{1 - x^3}$ – (3 балла).	**Вариант 2** $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$ – (2 балла), $f(x) = \frac{4 - 8x^3}{8x - 1}$ – (3 балла).
Осмотрите выполненные задания и произведите проверку. Внесите поправки в случае обнаружения ошибок и отметьте количество баллов в таблице оценок. Если ваш результат составит 5 баллов, продолжайте к следующему пункту; в противном случае, выберите соответствующее задание из другого варианта.	

Цель: научиться применять правила дифференцирования для решения уравнений и неравенств вида $f'(x) = 0, f'(x) > 0$.

Таблица 6

Учебный элемент (УЭ-5)

УЧЕБНЫЙ ЭЛЕМЕНТ № 5

Указания: прочитайте пояснения и выполните задания.

Пример 1. Решить уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = x^3 - 4{,}5x + 12x$

Решение. Найдем производную функции

$f'(x) = 3x^2 - 9x + 12.$

Тогда $f'(x) = 0$, если $3x^2 - 9x + 12 = 0$,

$x^2 - 3x + 4 = 0$, по т. Виета

$x_1 = -1$, $x_2 = 4$

Ответ: -1; 4

Пример 2. Решить неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = 2x - 5x^2$.

Решение. Найдем производную функции $f'(x) = 2 - 10x$

Тогда $f'(x) > 0$, если $2 - 10x > 0$,

$10x < 2$,

$x < 0{,}2$.

Ответ: $(-\infty;\ 0{,}2)$.

Вариант 1	**Вариант 2**
Решить уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x$ – (3 балла).	Решить уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ – (3 балла).
Решить неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = x^2 - 3x + 1$ – (3 балла).	Решить неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = x^2 + 3x - 3$ – (3 балла).

Проверьте выполненные задания. За каждое правильно выполненное задание дается 3 балла; 2 балла – если получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верн последовательность всех шагов решения.

Если вы набрали 4 балла или более, то переходите к следующему элементу, если меньше, то решите соответствующее задание другого варианта.

Цель: закрепить правило нахождения производной произведения двух функций.

Таблица 7
Учебный элемент (УЭ-6)

УЧЕБНЫЙ ЭЛЕМЕНТ № 6 **Указания:** Молодцы! Вы освоили правила нахождения производных. Целью дальнейшей вашей работы является применение своих знаний и умений в более сложных ситуациях. **Найдите производную функции:**	
Вариант 1 $f(x) = (5x+7)^{15}$ (2 балла), $f(x) = \frac{2x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ (3 балла)	**Вариант 2** $f(x) = (10-3x)^{12}$ (2 балла), $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ (3 балла)
Проставьте количество баллов в оценочный лист. Подсчитайте итоговое количество баллов и оцените свои работы согласно критериям.	

Рефлексия – важный элемент каждого модульного урока. В конце каждого урока учащиеся возвращаются к целям урока и оценивают, насколько хорошо они их достигли и чему научились в ходе урока. В конце урока задается домашнее задание. Стоит подчеркнуть, что оно дифференцируемое, то есть зависит от результатов прохождения модулей самими обучающимися.

Таким образом, использование индивидуальных образовательных модулей при обучении производной функции в средней школе позволяет создать индивидуальный подход к каждому ученику, обеспечивая эффективное и интересное обучение. Этот подход способствует развитию учебных навыков и навыков саморегуляции, формируя у учеников уверенность в своих знаниях и способностях и стимулируя их активное участие в учебном процессе.

Список литературы

Баянова Л.А. Технология модульного обучения в школе // Педагогика: традиции и инновации: материалы I международной научной конференции, Челябинск, октябрь 2011 г. Челябинск: Два комсомольца, 2024. Т. 1. С. 107-109. URL: https://moluch.ru/conf/ped/archive/19/956/ (дата обращения: 26.12.2024).

Вазина К.Я. Саморазвитие человека и модульное обучение. Н. Новгород, 2020

Гусев В.А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы [Электронный ресурс]: учебное пособие. М.: Лаборатория знаний, 2020. – Режим доступа: URL: https://znanium.com/catalog/product/538915 (дата обращения: 21.03.2024)

Муравьева А. А., Кузнецова Ю.Н., Червякова Т.Н. Организация модульного обучения, основанная на компетенциях: пособие для преподавателей. М.: Альфа-М, 2024.

Селевко Г.К. Современные образовательные технологии. М.: Народное образование, 2024.

Современные образовательные технологии: учебное пособие; под ред. Н.В. Бордовской. М.: КНОРУС, 2021.

Третьяков П.И., Сенновский И.Б. Технология модульного обучения в школе: практико-ориентированная монография. М.: Новая школа, 2021.

РОЛЬ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРЕМ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Матвеева А.Б. [1]
Научный руководитель: д.п.н., доцент Игнатушина И.В.[2]

[1,2]ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет»

e-mail: [1]arina.matveeva.2002@bk.ru , [2]streleec@yandex.ru

Аннотация. Данная статья посвящена вопросам организации исследовательской деятельности в процессе изучения теорем школьного курса математики. Рассматривается возможность сделать освоение математики интереснее за счет элементов неожиданности открытия при проведении школьниками учебно-исследовательской работы. Показываются возможные варианты введения некоторых теорем через исследовательскую деятельность и выделяются основные закономерности построения подобных уроков.

Ключевые слова: теоремы, исследовательская деятельность.

THE ROLE OF RESEARCH ACTIVITIES IN THE STUDY OF THEOREMS IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

Abstract. This article is devoted to the organization of research activities in the process of studying the theorems of the school course of mathematics. The possibility of making the development of mathematics more interesting at the expense of the elements of surprise of discovery when conducting educational research work by schoolchildren is considered. Possible options for introducing some theorems through research activities are shown and the basic patterns of constructing such lessons are highlighted.

Keywords: theorems, research activity.

Введение. Очень часто теоремы воспринимаются учениками как нечто скучное и приручаемое только зубрежкой. Однако на самом деле в школьных теоремах, в большинстве своем, таится нераскрытый потенциал для творчества и исследований в области математики.

В последнее время дисциплина «Математика» в школе значительно расширилась и углубилась. Был добавлен отдельный учебный курс «Вероятность и статистика», элементы которого раньше встречались в алгебре в средних и старших классах. Однако школьная математика продолжает многими восприниматься как скучный предмет, полный ловушек.

Часть вины лежит на учебниках, которые не всегда могут разжечь интерес к предмету у обучающихся. Одни учебники представляют из себя параграфы теории, за которыми следуют наборы изолированных упражнений и несвязанных задач, редко включая исторические заметки, игры или головоломки. Другие же менее безжизненные, в них могут раскрываться и повседневная важность того или иного математического материала, но даже в таких учебниках можно встретить непонятные, устаревшие и уже не актуальные для учеников примеры и факты.

Другая часть вины за то, что математика становится для многих учеников горькой пилюлей, которую нужно проглотить для успешного окончания школы, ложится на плечи учителя. Учитель, воспринимающий свою работу как рутину, не может надеяться на иное отношение со стороны школьников.

Основная часть. Так как же сделать школьную математику интересной? Этот вопрос рассматривали многие педагоги, в частности: Епишева О.Б (Епишева, 1990), Лакатос И. (Лакатос, 1967), Метельский Н.В. (Метельский, 1975), Осинская В.Н. (Осинская, 1989), Репьев В.В. (Репьев, 1958), Столяр А.А (Столяр, 1987) и др. В данной статье обратимся к еще одному аспекту этого вопроса, связанному с процессом изучения теорем. Покажем, как часть занятий по изучению теорем в математике можно превратить в захватывающий опыт, который вызывает математическое любопытство и мотивирует к изучению соответствующего материала. Конечно, планирование таких уроков требует больше усилий от учителя. В некоторых случаях это довольно сложная задача. Несмотря на то, что каждый урок индивидуален, попробуем выявить некоторые закономерности в обучении теорем через систему маленьких открытий.

Сначала рассмотрим фактор неожиданности при изучении школьной теоремы. Человек удивляется, когда что-то происходит вопреки его ожиданию. Конечно, в жизни какие-то сюрпризы радуют нас, какие-то нет. При изучении математики речь идет об интеллектуальном удивлении, связанным с открытием некой непредвиденной истины. Рассмотрев любую теорему школьного курса математики, можно обнаружить, что все они были настоящими открытиями в мире науки своего времени.

Способ обучения теоремам через исследование, приводящее к новому открытию, конечно, не является самоцелью. Однако это хорошее средство способное зародить в школьниках любовь не только к математике, но и к исследовательской деятельности в целом. При этом у обучающихся развиваются критическое мышление и навыки аргументации, необходимые всем людям в современном информационном обществе.

Покажем, что любую теорему можно преподнести как неожиданный факт. Рассмотрим учеников, которые еще не встречались с утверждением «Сумма углов в треугольнике равна 180 градусов». Ученикам не следует сообщать эту истину, а дать возможность самим к ней прийти. В этом поможет эксперимент с отрыванием уголков треугольника и совмещением их всех вместе. Каждый школьник сможет открыть для себя, что все вместе уголки образуют развернутый угол, градусная мера которого равна 180. В этот момент школьники формулируют гипотезу, которую следует доказать: «Сумма внутренних углов в треугольнике равна 180 градусов».

Подвести к идее доказательства можно проведя с учениками следующий опыт. Обучающимся предлагается три равных треугольника, которые они должны будут расположить таким же образом, как и углы в первом эксперименте. Затем ученики заметят равенство накрест лежащих углов, как следствие, параллельность основания центрального треугольника и прямой, полученный из сторон двух других треугольников (рис. 1). Далее высказанная идея оформляется в виде полноценного доказательства:

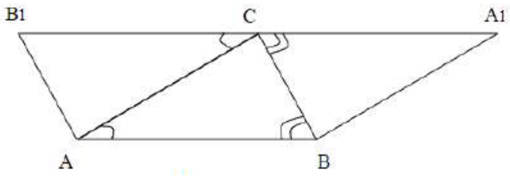


Рис.1

Рассмотрим произвольный ΔABC и докажем, что: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$.

На стороне AC достроим ΔACB $\Delta ACB_1 = \Delta ABC$, а на стороне BC достроим $\Delta BCA_1 = \Delta ABC$.

Заметим, что $\angle B_1CA = \angle CAB$ по построению, также $\angle B_1CA$ накрест лежащей для $\angle CAB$ при прямых B_1C и AB и секущей AC, значит $B_1C \parallel AB$. $\angle BCA_1 = \angle CBA$ по построению, также $\angle BCA_1$ накрест лежащей для $\angle CBA$ при прямых CA_1 и AB и секущей BC значит $CA_1 \parallel AB$. Отсюда $B_1A_1 \parallel AB$ $\Rightarrow \angle B_1CA_1 = \angle A + \angle B + \angle C$ образует развернутый угол, тогда $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$, что и требовалось доказать.

Так, даже одну из самых простых и узнаваемых для школьников теорем можно превратить в исследовательскую деятельность с формулировкой гипотезы и ее последующим доказательством.

Подобные маленькие открытия могут иметь место не только в курсе геометрии, но и алгебры, а также вероятности и статистики.

Когда важность элемента исследования при изучении математических теорем становится понятной, встает очевидная проблема для учителей: как это организовать в процессе изучения.

Безусловно, учителя ограничивают многие моменты, такие как время отдельного урока, количество часов, отведенные на данную тему, особенности класса, творческие способности самого учителя и т.д.

Невозможно предоставить четкого алгоритма успеха для такого подхода, ведь каждый урок уникален, но все же можно выявить некоторые закономерности:

- Крайне важна актуализация знаний, при которой будут выделены опоры или точки «старта», позволяющие в дальнейшем ученикам быстрее прийти к нужному выводу;
- Рассмотрение задачи прикладной направленности, для решения которой необходима изучаемая теорема;

- Зародившийся интерес следует подкрепить возможностью каждому ученику по-своему подойти к разрешению. Учитель выступает в роли руководителя исследовательской деятельности, помогающий подвести итоги;
- В итогах обязательно важно выделить следующие компоненты: формулировка гипотезы; идея доказательства; доказательство.

Стоит отметить, что в последнем пункте каждый компонент влияет на другой. Так гипотеза, идея доказательства и само доказательство может меняться несколько раз в ходе исследовательской деятельности ученика. Также, после подведения итогов может возникнуть новое исследование, т.е. справедлива следующая схема (рис. 2):

Рис.2
Схема организации исследовательской деятельности при доказательстве теорем

Вывод. Исходя из всего вышеизложенного можно сделать вывод, что элемент исследования при изучении теорем в школе крайне важен для более эффективного обучения математике. При применении исследовательской деятельности школьные теоремы превратятся в нечто по-настоящему изученное и открытое, а не просто зазубренное ради хорошей отметки.

Список литературы

Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: формирование приемов учеб. деятельности: кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990.

Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы; пер. с англ. И.Н. Веселовского. М.: Наука, 1967.

Метельский Н.В. Дидактика математики. Лекции по общим вопросам. М.: Изд-во БГУ, 1975.

Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математики: кн. для учителя. Киев: Радяньска шк., 1989.

Репьев В.В. Общая методика преподавания математики. М.: Учпедгиз, 1958.

Столяр А.А. Зачем и как мы доказываем в математике. Минск: Народная Асвета, 1987.

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ К ПРОФИЛЬНОМУ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Черных П.А.[1]
Научный руководитель: к.п.н., доцент Симоновская Г.А.[2]

[1,2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]pavel.chernykh24@mail.ru, [2]Simonovskaj_g@mail.ru

Аннотация. В этой статье рассматриваются особенности решения логарифмических неравенств при подготовке школьников к профильному ЕГЭ по математике, подчёркивается важность изучения данной темы, так как её освоение является одним из ключевых аспектов успешной сдачи экзамена. Статья содержит подробное описание различных методов и подходов к решению логарифмических неравенств и разбор примеров заданий для каждого из них. В статье обращается внимание на то, что для успешного решения логарифмических неравенств необходимо знать свойства логарифмов, уметь строить графики функций, владеть методами интервалов, замены переменной и оценки выражений, подчёркивается, что подготовка к ЕГЭ должна быть комплексной и включать не только изучение теоретического материала, но и регулярное решение практических заданий.

Ключевые слова: логарифм, неравенство, метод замены переменной, метод рационализации, метод мажорант.

FEATURES OF SOLVING LOGARITHMIC INEQUALITIES IN PREPARING STUDENTS FOR THE SPECIALIZED UNIFIED STATE EXAM IN MATHEMATICS

Abstract. This article examines the features of solving logarithmic inequalities in preparing students for the profile USE in mathematics, emphasizes the importance of studying this topic, since its development is one of the key aspects of successful passing the exam. The article contains a detailed description of various methods and approaches to solving logarithmic inequalities and an analysis of examples of tasks for each of them. The article draws attention to the fact that in order to successfully solve logarithmic inequalities, it is necessary to know the properties of logarithms, be able to plot functions, master the methods of intervals, variable substitution and expression evaluation, it is emphasized that preparation for the Unified State Exam should be comprehensive and include not only the study of theoretical material, but also the regular solution of practical tasks.

Keywords: logarithm, inequality, variable replacement method, rationalization method, majorant method.

Введение

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) является ключевым этапом в процессе подготовки школьников к поступлению в высшие учебные заведения. Успешность выполнения профильного ЕГЭ по математике во многом зависит от качества выполнения заданий повышенной сложности, так как они оцениваются наибольшим количеством баллов. Зачастую, многие выпускники школ не только допускают ошибки при выполнении заданий второй части, но порой и вовсе не приступают к ним. В частности, большие затруднения у обучающихся вызывает задание № 15, которое включает в себя решение неравенств. Основные трудности, с которыми сталкиваются обучающиеся при выполнении таких заданий связаны с неумением правильно преобразовывать неравенства и применять различные математические методы для их решения. Также ещё одной из сложностей становится необходимость учитывать различные условия задачи. Например, дополнительные условия, которые могут ограничивать область допустимых значений переменных. Поэтому такие задания требуют от школьников глубокого понимания математических концепций и навыков логического мышления.

В данной статье мы рассмотрим особенности решения одного из наиболее часто встречающихся в материалах ЕГЭ вида неравенств – это логарифмические неравенства. Также мы обсудим основные методы и подходы к решению таких неравенств, приведём примеры их решения.

Основная часть

Методы решения логарифмических неравенств

Логарифмические неравенства являются одним из важных разделов математики, который широко используется в различных теоретических и практических задачах. Одной из основных особенностей логарифмических неравенств является то, что они могут быть преобразованы в показательные и обратно. Это позволяет использовать различные методы решения, такие как логарифмирование обеих частей неравенства, применение свойств логарифмов и др. Чтобы успешно решать логарифмические неравенства школьникам необходимо обладать хорошим пониманием основных свойств логарифмов, таких как возведение логарифма в степень, логарифм произведения и частного, формула перехода к новому основанию и т.д.

Среди основных методов решения логарифмических неравенств можно выделить следующие:

1. Стандартный (классический) метод;
2. Метод интервалов;
3. Метод замены переменной;
4. Графический метод;
5. Метод рационализации;
6. Метод оценок (метод мажорант) (Кожевникова, 2020).

Важно отметить, что при выборе любого из указанных выше методов, начинать решение логарифмического неравенства следует с нахождения области допустимых значений. Далее рассмотрим каждый из вышеперечисленных методов более подробно.

Стандартный (классический) метод

Этот метод заключается в том, что решение простейшего логарифмического неравенства вида $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$, где $a(x) > 0$ и $a(x) \neq 1$ сводится к следующему алгоритму:

1. Найти ОДЗ, решив систему $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

2. Если $a(x)>1$, то решить неравенство $f(x)>g(x)$. Если $0<a(x)<1$, то решить неравенство $f(x)<g(x)$.

3. Найти пересечение решения неравенства из второго пункта с найденной в первом пункте ОДЗ.

Аналогичный алгоритм применим и к неравенствам содержащим вместо знака $>$, знаки $<$, $\geq$ или $\leq$. Другими словами, можно сказать, что решение неравенства $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ сводится к решению системы

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x) \\ g(x)>0 \end{cases}, \text{если } a(x)>1$$

и системы

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>0 \end{cases}, \text{если } 0<a(x)<1.$$

Рассмотрим применение данного метода на примере.

Пример 1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(11-2x)\cdot\log_{4-x}\dfrac{1}{2}\leq 1$.

Решение. Определим ОДЗ:

$$\begin{cases} 11-2x>0 \\ 4-x>0 \\ 4-x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5{,}5 \\ x<4 \\ x\neq 3 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;3)\cup(3;4).$$

Упростим неравенство, используя свойства логарифмов. Получим:

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(11-2x)\cdot\log_{4-x}\frac{1}{2}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{\frac{1}{2}}(11-2x)}{\log_{\frac{1}{2}}(4-x)}\leq 1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(11-2x)\leq 2.$$

Тогда: $\log_{4-x}(11-2x)\leq\log_{4-x}(4-x)^2$. Если $x\in(3;4)$, то $4-x<1$.

Тогда $11-2x\geq(4-x)^2 \Leftrightarrow 11-2x\geq 16-8x+x^2 \Leftrightarrow x^2-6x+5\leq 0$.

Получаем, что $x\in[1;5]$и, учитывая, что $x\in(3;4)$, имеем: $x\in(3;4)$.

Если $x\in(-\infty;3)$, то $4-x>1$.

Тогда $11-2x\leq(4-x)^2 \Leftrightarrow 11-2x\leq 16-8x+x^2 \Leftrightarrow x^2-6x+5\geq 0$.

Получаем, что $x\in(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$и, учитывая, что $x\in(-\infty;3)$, имеем: $x\in(-\infty;1]$. Значит, решением неравенства будет $x\in(-\infty;1]\cup(3;4)$.

Ответ: $x\in(-\infty;1]\cup(3;4)$.

В основном, в школах обучают решать такие неравенства только через определение логарифма, из-за чего данный метод и называют классическим.

Метод интервалов

Универсальным подходом к решению неравенств принято считать метод интервалов (промежутков). Его основная идея заключается в определении ОДЗ и знаков сомножителей. Этот метод позволяет решать неравенства вида $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)\vee 0$, где x – переменная; $x_1, x_2, ..., x_n$ – различные, не равные друг другу числа; $\vee$ – любой из знаков неравенства. Он заключается в разделении области определения функции на промежутки, в которых знак функции остаётся постоянным. При переходе через нули функции её знак меняется. Этот метод является одним из этапов решения логарифмического неравенства после его приведения к равносильной системе (Дендеберя, 2022).

Рассмотрим пример такого решения.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{\pi-2}(x^2+5x+9)\geq\log_{\pi-2}(7x+12)$.

Решение. Определим ОДЗ:

$$\begin{cases}x^2+5x+9>0\\7x+12>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;+\infty)\\x\in\left(-\dfrac{12}{7};+\infty\right)\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\frac{12}{7};+\infty\right).$$

Так как $\pi-2>1$, то неравенство будет равносильно следующей системе:

$$\begin{cases}x^2+5x+9\geq 7x+12\\7x+12>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-3\geq 0\\x>-\dfrac{12}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(x-3)\geq 0\\x>-\dfrac{12}{7}\end{cases}.$$

Применим метод интервалов и изобразим решение полученной системы на координатной прямой:

Рис. 1. Решение логарифмического неравенства методом интервалов.

Значит,

$$x\in\left(-\frac{12}{7};-1\right]\cup[3;+\infty).$$

Ответ:

$$x\in\left(-\frac{12}{7};-1\right]\cup[3;+\infty).$$

Метод замены переменной

Метод замены переменной в логарифмических неравенствах используется для упрощения выражений и облегчения процесса решения. Он заключается в замене сложного логарифмического выражения на новую переменную, что позволяет упростить исходное неравенство. После решения нового неравенства следует вернуться к исходной переменной для получения окончательного ответа. Данный метод может быть полезен при решении сложных логарифмических неравенств, содержащих логарифм в квадрате или квадрат выражения с логарифмом.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\ge\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x>0 \\ \log_4 x-3\neq 0 \\ \log_4(64x)\neq 0 \\ \log_4^2 x-9\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_4 x\neq \log_4 4^3 \\ \log_4(64x)\neq \log_4 4^0 \\ (\log_4 x-3)(\log_4 x+3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 64 \\ x\neq \dfrac{1}{64} \\ \log_4 x\neq \log_4 4^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 64 \\ x\neq \dfrac{1}{64} \end{cases}.$$

То есть $x\in\left(0;\dfrac{1}{64}\right)\cup\left(\dfrac{1}{64};64\right)\cup(64;+\infty)$.

Преобразуем исходное неравенство, используя свойства логарифмов:

$$\frac{\log_4 64+\log_4 x}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4 64+\log_4 x}\ge\frac{4\log_4 x+16}{\log_4^2 x-9}.$$

Так как $\log_4 64=3$, то получим: $\dfrac{3+\log_4 x}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{3+\log_4 x}\ge\dfrac{4\log_4 x+16}{\log_4^2 x-9}$.

Сделаем замену $t=\log_4 x$: $\dfrac{3+t}{t-3}+\dfrac{t-3}{3+t}\ge\dfrac{4t+16}{t^2-9}$.

Решим получившееся неравенство с переменной *t*.

$$\frac{(t+3)(t+3)}{(t-3)(t+3)}+\frac{(t-3)(t-3)}{(t+3)(t-3)}\ge\frac{4t+16}{(t+3)(t-3)};$$

$$\frac{t^2+6t+9+t^2-6t+9-4t-16}{(t-3)(t+3)}\ge 0;$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\ge 0;\ \frac{2(t^2-2t+1)}{(t-3)(t+3)}\ge 0;\ \frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)}\ge 0.$$

Значит, $t\in(-\infty;-3)\cup\{1\}\cup(3;+\infty)$.

То есть $\left[\begin{array}{l} t<-3 \\ t=1 \\ t>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4 x<-3 \\ \log_4 x=1 \\ \log_4 x>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4 x<\log_4 4^{-3} \\ \log_4 x=\log_4 4 \\ \log_4 x>\log_4 4^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{1}{64} \\ x=4 \\ x>64 \end{array}\right.$.

Тогда, с учётом ОДЗ: $x\in\left(0;\dfrac{1}{64}\right)\cup\{4\}\cup(64;+\infty)$.

Ответ: $x\in\left(0;\dfrac{1}{64}\right)\cup\{4\}\cup(64;+\infty)$.

Графический метод

Данный метод используется в том случае, когда функции, представляющие части неравенства, относительно просты для построения их графиков. Метод заключается в том, что мы рассматриваем левую и правую части неравенства как две отдельные функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, строим их графики в одной системе координат и определяем, какой график находится выше другого и на каких промежутках. Интервалами решения неравенства $f(x) \le g(x)$ считаются области, где график функции $f(x)$ не выше графика функции $g(x)$ и обратно для неравенства $f(x) \ge g(x)$. Рассмотрим пример графического решения логарифмического неравенства.

Пример 4. Решить неравенство $\log_2(x+1) + \log_3 x \le 3$.

Решение. Найдём ОДЗ: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Перенесём $\log_3 x$ в правую часть неравенства: $\log_2(x+1) \le 3 - \log_3 x$. Тогда построим графики функций $f(x) = \log_2(x+1)$ и $g(x) = -\log_3 x + 3$.

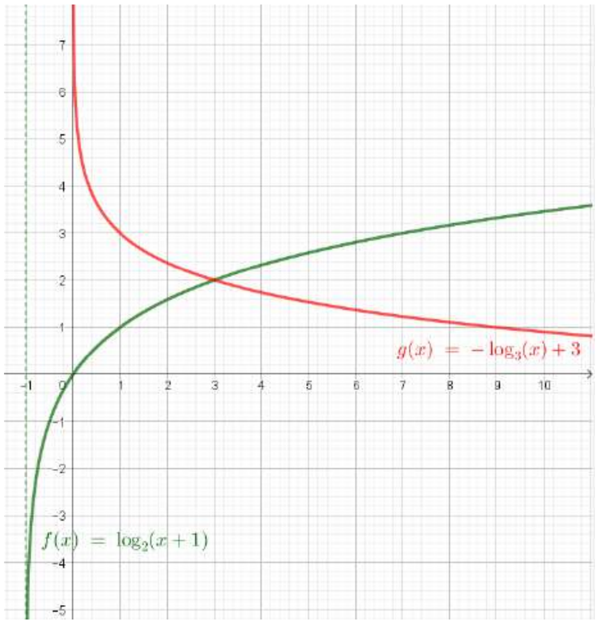


Рис. 2. Решение логарифмического неравенства графическим методом.

По построению видим, что абсцисса точки пересечения графиков равна 3. Так как мы имеем неравенство $f(x) \le g(x)$, то с учётом ОДЗ выбираем промежуток на котором график функции $f(x)$ лежит не выше графика функции $g(x)$ – $(0;3]$.

Ответ: $(0;3]$.

Основным недостатком графического метода является то, что иногда графики функций довольно сложны для построения или по ним достаточно трудно, а порой и вовсе невозможно, с высокой точностью определить количество корней и их значения. То есть данный метод применим далеко не во всех случаях.

Метод рационализации

В том случае если в логарифмическом неравенстве логарифм содержит неизвестное в основании, его решение зачастую требует сложных вычислений и значительных временных затрат. Для сокращения времени решения такого типа неравенств используют метод рационализации. Основная идея данного метода заключается в замене множителя на аналогичный, имеющий те же знаки и корни в пределах области определения. Полученное при замене неравенство равносильно начальному в области его определения. Такая замена становится возможной в том случае, когда исходное выражение сравнивают с нулём (Титоренко, 2021). В таблице 1 приведены правила замены некоторых типовых логарифмических выражений.

Таблица 1.

Замена некоторых типовых логарифмических выражений

В данной таблице f, g, h – выражения с переменной x $\left(h>0, h\neq 1, f>0, g>0\right)$, a – фиксированное число $\left(a>0, a\neq 1\right)$.

№	Выражение	Рационализирующее выражение
1 1а 1б	$\log_a f-\log_a g$ $\log_a f-1$ $\log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$\log_h f-\log_h g$ $\log_h f-1$ $\log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h-\log_g h \ \ (f\neq 1, g\neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$

Рассмотрим пример решения логарифмического неравенства методом рационализации.

Пример 5.

Решить неравенство $\left(x^2+3x-10\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)\cdot\log_{\left(x^2-1\right)}\left(x+2\right)\leq 0$.

Решение. Определим ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x+2>0 \\ x^2-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right).$$

Преобразуем исходное неравенство, используя формулу $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$. Получим: $\left(x^2+3x-10\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(x+2\right)\leq 0$.

Применяя метод рационализации, имеем, что:

$\left(x^2+3x-10\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\left(x+2-1\right)\leq 0$; $\left(x+5\right)\left(x-2\right)\left(x+1\right)\geq 0$.

С помощью метода интервалов получим: $x\in\left[-5;-1\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Учитывая ОДЗ, имеем: $x\in\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left[2;+\infty\right)$.

Ответ: $x\in\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left[2;+\infty\right)$.

Метод оценок (метод мажорант)

Данный метод основан на принципе, что область значений некоторых функций является ограниченной. В ходе этого метода определяются точки ограниченности функции, то есть пределы её изменения, что в дальнейшем используется при решении неравенства. Такой метод в основном применяют, когда имеется неравенство смешанного типа, то есть содержащее разнородные функции.

Пример 6. Решить неравенство $\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\geq 1$.

Решение. Выделим полный квадрат в первом множителе:

$$4x-x^2-3=-\left(x^2-4x\right)-3=-\left(x^2-4x+4-4\right)-3=-\left(x-2\right)^2+4-3=1-\left(x-2\right)^2.$$

Очевидно, что $1-\left(x-2\right)^2\leq 1$. Причём $1-\left(x-2\right)^2=1$ при x=2.

Далее оценим второй множитель:

$$0\leq\cos^2\pi x\leq 1\Rightarrow 1\leq\cos^2\pi x+1\leq 2\Rightarrow 0\leq\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\leq 1.$$

Причём при x=2 имеем: $\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)=\log_2\left(\cos^2 2\pi+1\right)=\log_2 2=1$.

Учитывая, что оба множителя меньше или равны 1, их произведение не может быть больше 1, а равно 1 оно будет только в случае, когда оба они равны 1, то есть при x=2. Значит, решением исходного неравенства будет x=2.

Ответ: x=2.

Заключение

Таким образом, освоение особенностей решения логарифмических неравенств является важным компонентом подготовки школьников к профильному ЕГЭ по математике. Понимание основных свойств логарифмов и обязательное наличие практического опыта решения неравенств помогут школьникам успешно справиться с этой темой и показать высокий результат на экзамене.

Список литературы

Дендеберя Н.Г., Носонов А.А. Различные подходы к решению логарифмических неравенств // Тенденции и проблемы развития математического образования: научно-практический сборник трудов XVI Всероссийской научно-практической конференции по проблемам развития математического образования, Армавир, 16 сентября 2022 года / Научные редакторы: Н.Г. Дендеберя, К.А. Паладян; отв. ред. Е.В. Иващенко. Том Выпуск 16. Армавир: Армавирский государственный педагогический университет, 2022. С. 69-75.

Кожевникова Л.М., Багаутдинова А.К. Методы решения логарифмических неравенств. // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2020. № 12-2(51). С. 166-174.

Титоренко С.А., Игнатова Я.С. Использование метода рационализации при решении логарифмических неравенств // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. 2021. № 11. С. 183-184.

ЦИФРОВИЗАЦИЯ И ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ЦИФРОВЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НА РАЗЛИЧНЫХ ЭТАПАХ УРОКА МАТЕМАТИКИ

Буркина С.А.[1]
Научный руководитель: к. п. н., доцент Сафронова Т.М.[2]

[1, 2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]sv.burkina.00@bk.ru, [2]stm657@mail.ru

Аннотация. *В данной статье рассматривается использование информационных и коммуникационных технологий в учебном процессе. Подробно описываются возможности и преимущества внедрения цифровых инструментов в обучение математике, таких как онлайн-платформы, мобильные приложения, видеоуроки и другие, которые позволяют сделать урок более интересным, доступным и визуализированным, что способствует лучшему пониманию и запоминанию информации. В статье рассматриваются методы интеграции этих технологий в процесс обучения. Приведены примеры использования ИКТ на различных этапах урока. Автор подчеркивает следующие факты. 1. ИКТ повышает эффективность процесса обучения, формирует интерес к предмету учащихся, стимулирует самообразование. 2. Применение ИКТ на уроках математики особенно полезно, так как позволяет наглядно увидеть абстрактные понятия, создавать интерактивные задания и игры, обеспечивает доступ к дополнительной информации. 3. Использование ИКТ помогает развивать навыки работы с компьютером, улучшать навыки поиска и анализа информации, способствует коммуникации и сотрудничеству между учениками и учителями. 4. ИКТ являются важным инструментом в современном образовании. В статье сделан акцент на необходимость грамотного подхода к использованию информационных технологий на уроках, чтобы не утратить связь с учебным материалом и обеспечить достижение образовательных целей. Важно, чтобы ИКТ были инструментом поддержки и разнообразия учебного процесса и помогали достигать поставленных целей обучения. В статье утверждается, что использование информационных технологий на уроках может быть эффективным средством для удержания внимания учеников, повышения интереса к учебному процессу и повышения эффективности обучения.*

Ключевые слова: *процесс обучения, информационно-коммуникационные технологии, урок математики.*

APPLICATION OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES AT DIFFERENT STAGES OF MATHEMATICS LESSONS

Abstract. This article discusses the use of information and communication technologies in the educational process. The possibilities and advantages of introducing digital tools in mathematics teaching, such as online platforms, mobile applications, video

lessons and others, are described in detail, which make the lesson more interesting, accessible and visual, which contributes to better understanding and memorization of information. The article discusses methods for integrating these technologies into the learning process. Examples of the use of ICT at various stages of the lesson are given. The author emphasizes the following facts. 1. ICT increases the efficiency of the learning process, creates interest in the subject of students, and stimulates self-education. 2. The use of ICT in mathematics lessons is especially useful, as it allows you to clearly see abstract concepts, create interactive tasks and games, and provide access to additional information. 3. The use of ICT helps develop computer skills, improve skills in searching and analyzing information, and promotes communication and cooperation between students and teachers. 4. ICT is an important tool in modern education. The article focuses on the need for a competent approach to the use of information technology in the classroom, so as not to lose touch with the educational material and ensure the achievement of educational goals. It is important that ICTs are a tool to support and diversify the educational process and help achieve learning goals. The article argues that the use of information technology in the classroom can be an effective means of maintaining students' attention, increasing interest in the educational process and increasing the effectiveness of learning.
Keywords: learning process, information and communication technologies, mathematics lesson

Введение. В процессе преподавания в школе каждый учитель хотя бы один раз задумывался над вопросами: «Как задержать внимание учеников на уроке?», «Как заинтересовать детей, чтобы за 45 минут они получили максимум пользы от урока?», «Как успеть за урок осуществить все запланированное?». Для решения этих вопросов существуют разнообразные методы и приемы. Один из них – применение информационных технологий на уроках – дает возможность повысить эффективность процесса обучения, что влечёт за собой формирование интереса к предмету у учащихся, развитие любознательности, стремления к изучению нового, а также дает стимул к самообразованию. Таким образом достигается основная задача применения ИКТ – повышение качества обучения (Зеленецкая, 2020).

Основная часть. На сегодняшний день применение информационных технологий на разных этапах урока стало неотъемлемой частью преподавания в школе, ведь они позволяют охватить огромный диапазон методов и средств для обработки и передачи информации, сокращая время на сбор и систематизацию материала (Царева, 2022). В связи с этим происходит оснащение техническим оборудованием образовательного учреждения: во-первых, это существование компьютерных классов с выходом в Интернет; во-вторых, практически в каждом учебном классе теперь можно встретить персональный компьютер, мультимедийный проектор или интерактивную доску; в-третьих, у каждого работника школьной администрации на его рабочем месте имеется персональный компьютер.

«Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) играют важную роль в современной системе образования. Они предоставляют учащимся и преподавателям новые возможности для обучения, коммуникации и доступа к информации» (Информационно-коммуникационные технологии: ключевые понятия и их роль в современном мире). Во-первых, ИКТ позволяют получать и обрабатывать информацию дистанционно в любом месте и в любое время. Теперь не нужно тратить время на дорогу до библиотеки и поиск подходящей литературы. Во-вторых, ИКТ дают возможность знакомиться с новыми знаниями, научными открытиями, создавать аудиовизуальные презентации, наблюдать за экспериментами, которые невозможно сделать обычному школьнику, что ведет к развитию творческих способностей, критического мышления и самостоятельности. В-третьих, ИКТ способствуют повышению мотивации учащихся к изучению школьного материала, так как делают процесс обучения более увлекательным и интересным за счет яркости, красочности, наглядности, применения игровых средств обучения, увлекая школьников, не давая им отвлечься от учебного процесса. В-четвертых, идет эффективное совершенствование навыков цифровой грамотности, что на сегодняшний день просто необходимо. В-пятых, благодаря конференциям, семинарам и форумам, проходящим в онлайн-режимах, идет полезное сотрудничество и коммуникация между учащимися и учителями, которое позволяет «обмениваться идеями, задавать вопросы и работать над проектами в режиме реального времени» (Информационно-коммуникационные технологии: ключевые понятия и их роль в современном мире). «Это способствует развитию коммуникативных навыков и умения работать в коллективе» (Информационно-коммуникационные технологии: ключевые понятия и их роль в современном мире).

Экспериментально установлено, что при устном изложении материала учащийся за минуту воспринимает и способен переработать до 1 тысячи условных единиц информации, а при «подключении» органов зрения до 100 тысяч таких единиц.

Преимущества использования ИКТ на уроках математики:

1. ИКТ позволяют наглядно увидеть математические абстрактные понятия, такие как графики функций, геометрические фигуры. Визуализация помогает лучше понять математические концепции и связать их с реальным миром.

2. «ИКТ дают возможность создать интерактивные задания и игры, которые делают процесс обучения более интересным и привлекательным. Интерактивные задания позволяют школьникам активно участвовать в процессе обучения, решать задачи, отвечать на вопросы и получать мгновенную обратную связь. Это способствует активизации мыслительной деятельности и развитию навыков решения математических задач» (Использование информационно-коммуникационных технологий на уроках математики: преимущества, методы и практические примеры).

3. При помощи ИКТ учащимся легче находить дополнительную информацию, чтобы лучше понять пройденный материал или же сильнее углубить свои знания в какой-то области.

4. «Использование ИКТ на уроках математики помогает ученикам развивать навыки работы с компьютером и интернетом. Они учатся использовать различные программы и онлайн-ресурсы, а также улучшают свои

навыки поиска и анализа информации. Эти навыки являются важными в современном информационном обществе и могут быть полезными в дальнейшей учебе и карьере» (Использование информационно-коммуникационных технологий на уроках математики: преимущества, методы и практические примеры).

В настоящее время существует много разнообразных средств информационных технологий, которыми может пользоваться учитель при подготовке к уроку, например, офисные технологии (MS Word, MS Excel, Power Point и др.), образовательные ресурсы сети Интернет, электронные образовательные ресурсы и т.п.

Во время разработки урока с применением информационных технологий учитель не только формулирует цели и задачи урока, систематизирует теоретический материал, но и оценивает технические возможности проведения такого урока. Затем подбираются соответствующие электронные образовательные ресурсы, и, если это необходимо, разрабатываются собственные. Также до урока преподаватель обязательно просматривает и прослушивает весь подобранный или созданный собственноручно материал, чтобы, в случае технических неполадок, не тратить время на их устранение на уроке (Зеленецкая, 2020).

Примеры использования ИКТ на различных этапах урока.

1. Организационный момент. Чтобы узнать тему урока, детям предлагается решить ребус, выведенный на интерактивную доску. Для любой темы можно составить ребус, применяя «генератор ребусов», который находится в свободном доступе сети Интернет. Или же можно показать на интерактивной доске картинки и попросить найти у них общее, например, фотографии разных площадей, и тема будет – площади.

2. Проверка домашнего задания. Если проверяется решение примеров или задач, то их решения можно продемонстрировать на экране, и тогда каждый ученик сможет увидеть правильность своего решения. Если проверяется теоретический материал, то можно сделать тест и представить его на экране интерактивной доски. После обсуждения вопросов показать верные ответы.

3. Актуализация знаний. Здесь целесообразно на экран вывести ряд вопросов, например, про треугольники: «Какая фигура называется треугольником?», «Какой треугольник называется остроугольным?» и т.п.

4. Объяснение нового материала. На данном этапе эффективнее будет использование презентаций или видеоматериалов, чем бумажные или электронные учебники, т.к. наглядность позволяет лучше усвоить и надолго запомнить учебный материал.

5. Закрепление и систематизация знаний. Существует множество сайтов, в том числе и образовательные (Учи.ру, SkySmart и т.п.), с помощью которых можно создать большое разнообразие тестов и тренажеров по пройденной теме, и дать детям время на их прохождение на данном этапе урока. В данном случае учитель сможет увидеть: насколько дети смогли разобраться в данной теме, а затем уже строить дальнейшие уроки, зная степень обученности школьников.

Так же сделать или найти в сети Интернет подходящие игры или кроссворды и закрепить изученный материал в игровой форме. Для этапа повторения: основной и наиболее важный учебный материал, изученный на уроке, можно разместить на слайдах презентации. В данном случае повторение происходит не только устно, но и наглядно.

При использовании ИКТ на уроках увеличивается положительная мотивация обучения, стимулируется познавательная деятельность школьников, так как информационные технологии способствуют проведению уроков на высоком эстетическом и эмоциональном уровне.

Заключение. Таким образом, информационно-коммуникационные технологии представляют собой эффективный метод, используемый в процессе обучения, который дает возможность повысить продуктивность проводимых уроков в школе, что влечёт за собой формирование интереса к предмету у учащихся, любознательность, стремление к изучению нового, к самообразованию и саморазвитию. Поэтому, следует применять ИКТ на различных этапах урока, выбирая разнообразные средства информационных технологий, которые бы наиболее эффективно помогли учителю в проведении урока. Информационно-коммуникационные технологии дают очень много возможностей: от быстрого поиска информации до изучения новых открытий, не изучаемых в школе, которые открыты не только учителям, но и учащимся, что делает образование более легким и доступным. В связи с этим растет мотивация школьников и повышается качество обучения.

Список литературы

Использование информационно-коммуникационных технологий на уроках математики: преимущества, методы и практические примеры [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://nauchniestati.ru/spravka/ispolzovanie-ikt-na-urokah-matematiki/ (дата обращения: 12.01.2024).

Информационно-коммуникационные технологии: ключевые понятия и их роль в современном мире [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://nauchniestati.ru/spravka/informaczionno-kommunikaczionnye-tehnologii/ (дата обращения: 15.01.2024).

Зеленецкая Л. П. Применение информационно-коммуникационных технологий в образовании // Молодой ученый. 2020. № 18 (308). С. 498-499.

Царева О.В. ИКТ-инструменты для применения технологии формирующего оценивания на уроках в средней школе // Молодой ученый. 2022. № 24 (419). С. 399-401.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ НА ОНЛАЙН-ПЛАТФОРМЕ CORE ЭЛЕКТРОННЫХ ОБУЧАЮЩИХ РЕСУРСОВ ПО МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-МАТЕМАТИКОВ

Гончарова И.В.[1], *Деревянко Е.В.*[2]

[1,2] *ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»*

e-mail: [1]i.goncharova.dongu@mail.ru, [2]k.derevyankoo@mail.ru

Аннотация. В современном мире информационные технологии играют значительную роль в образовательном процессе, поскольку они позволяют сделать обучение более доступным, интересным и эффективным. В связи с этим в области образования происходят изменения, часть учебной деятельности переносится в электронную образовательную среду. Это обуславливает актуальность разработки дистанционных форм обучения, в особенности электронных уроков и их внедрения в систему высшего профессионального образования. В статье сформулированы этапы и общие рекомендации по проектированию электронного урока для будущих учителей математики по дисциплине «Методика обучения математике», опираясь на собственный опыт разработки электронного урока.

Ключевые слова: дистанционное обучение, электронный урок, проектирование электронного урока, методика обучения математике, онлайн-платформа CORE.

DESIGNING ON THE CORE ONLINE PLATFORM ELECTRONIC LEARNING RESOURCES ON MATHEMATICS TEACHING METHODS FOR MATHEMATICS STUDENTS

Abstract. In the modern world, information technologies play a significant role in the educational process, as they make learning more accessible, interesting and effective. In this regard, changes are taking place in the field of education, part of the educational activity is being transferred to the electronic educational environment. This determines the relevance of the development of distance learning, especially e-lessons and their introduction into the system of higher professional education. The article formulates the structural stages and general recommendations for the design of an electronic lesson for future mathematics teachers in the discipline «Methods of teaching mathematics», based on their own experience in the development of an electronic lesson.

Keywords: distance learning, e-learning, e-lesson, e-lesson design, mathematics teaching methods, CORE online platform.

Введение

В современном мире информационные технологии играют значительную роль в образовательном процессе, поскольку они позволяют сделать обучение более доступным, интересным и эффективным. В связи с этим в области образования происходят изменения, часть учебной деятельности переносится в электронную образовательную среду. Все больший интерес в этой области вызывает изучение вопросов применения современных технологий в обучении.

Это подтверждается и тем, что в Федеральной программе развития образования Российской Федерации реализация электронных образовательных методов обучения – одно из основных направлений, которое должно применяться в современном образовании (Коркмазов, 2021).

Большим подспорьем в работе педагогов в образовательных организациях профессиональной направленности посредством дистанционного обучения стало применение электронных образовательных технологий и, в частности, электронных уроков. Поскольку неоспорим тот факт, что для эффективного построения образовательного процесса в современных реалиях – в условиях дистанционного обучения требуется совершенствование учебного процесса, в том числе, через внедрение электронных уроков, разработанных на различных цифровых платформах, создавая тем самым уникальный и продуктивный образовательный контент. Поэтому можно сделать вывод об актуальности разработки дистанционных форм обучения, в особенности электронных уроков и их внедрения в образовательную систему.

В процессе исследования были обнаружены противоречия между: необходимостью изучать новый материал в условиях дистанционного обучения и возникновением трудностей, связанных с подключением к онлайн занятиям и контролем знаний студентов.

Поиск путей разрешения указанных противоречий позволил сформулировать проблему исследования, которая состоит в необходимости создания дистанционных средств обучения, а именно электронных уроков по учебной дисциплине «Методика обучения математике» для будущих учителей математики, поскольку такой формат подачи материала дисциплины позволит обучаться в любое удобное время, охватить всех студентов и при этом отслеживать прогресс каждого обучающегося. Более того такая форма обучения будет удобна и для студентов заочной формы обучения.

Цель статьи – описание методики проектирования электронного урока для будущих учителей математики по дисциплине «Методика обучения математике».

Методология исследования

В современном мире образование постоянно развивается и адаптируется к новым технологиям и формам обучения. Одной из таких форм является электронный урок. *Электронный урок* – форма организации обучения с целью овладения учащимися изучаемым материалом при использовании современных средств информационно-коммуникационных технологий и разнообразных электронных средств обучения (Горшенева, 2017). Использование электронных уроков позволяет разнообразить учебный процесс, а также повысить его эффективность и доступность.

Результаты

В Донецком государственном университете на кафедре высшей математики и методики преподавания математики студенты направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (Профиль: Математика и информатика) при изучении учебной дисциплины «Методика обучения математике» в рамках творческого индивидуального задания совместно со студентами разрабатываются электронные интерактивные средства обучения. Одним из таких средств является электронный урок для студентов по теме «Математические понятия» (Гончарова, https://coreapp.ai/app/player/lesson/6642f72f1d08f827951a09b9) (рис. 1).

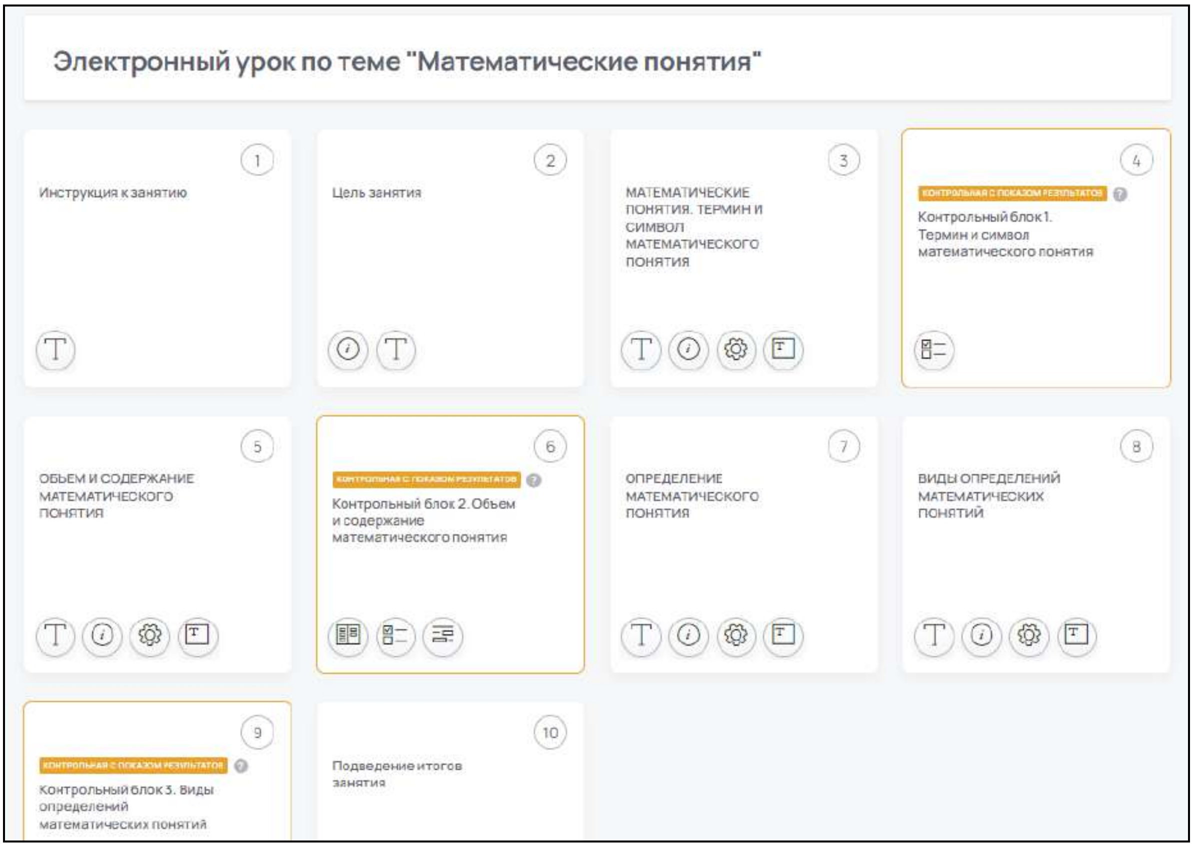


Рис. 1. Фрагмент электронного урока по дисциплине «Методика обучения математике»

Для проектирования электронного урока наш выбор пал на цифровую образовательную онлайн-платформу CORE (*Construct Online Resources for Education)* – технологичный стартап в сфере онлайн-образования – децентрализованная онлайн-платформа конструирования образовательных материалов и проверки знаний с аналитической системой выработки индивидуальных рекомендаций для пользователей (http://didaktor.ru/core-otechestvennyj-konstruktor-interaktivnyx-urokov/). Платформа позволяет размещать видеофайлы, презентации, текстовые документы, аудиозаписи и изображения. Более того в конструкторе есть возможность создать интерактивные задания различных типов, а также встроить задания с других платформ. Весь перечисленный функционал удобен для создания образовательного контента.

Учитывая методические требования к проектированию учебного материала для его использования при разработке электронного урока по математике для учащихся основной школы (Гончарова, 2023), сформулирует методические требования к проектированию учебного материала для разработки электронного урока для студентов вуза:

– учебный материал должен быть спроектирован, опираясь на рабочую программу учебной дисциплины;

– при отборе учебного материала должны быть учтены возрастные особенности студентов, определены степень теоретической сложности и глубины изучения материала в соответствии с этими особенностями;

– учебный материал должен содержать достаточное количество иллюстрационного материала, примеров, которые бы способствовали включению чувственного восприятия изучаемых объектов обучаемого;

– учебный материал должен быть построен с учетом особенностей познавательных, психических процессов, восприятия, внимания, мышления, воображения, памяти;

– должно быть наличие такого учебного материала, который бы повышал мыслительную активность обучаемых;

– должен присутствовать учебный материал, предназначенный для мотивации учебной деятельности обучаемых.

При разработке электронного урока нами были учтены методические требования к проектированию учебного материала для его использования при разработке электронного урока по математике для учащихся основной школы.

Опишем ниже структурные элементы электронного урока (https://multiurok.ru/blog/distantsionnyi-urok-struktura-i-sodierzhaniie.html).

1. Ориентировочный блок. На этом этапе обучающиеся знакомятся с целями и задачами электронного урока (рис. 2). Правила постановки целей в электронном уроке следующие:

1) цели должны отражать основное содержание урока;

2) цели должны быть ориентированы на обучающихся;

3) цели должны быть сформулированы в категориях деятельности (начинаются с глагола, обозначающего, что будет уметь обучающийся).

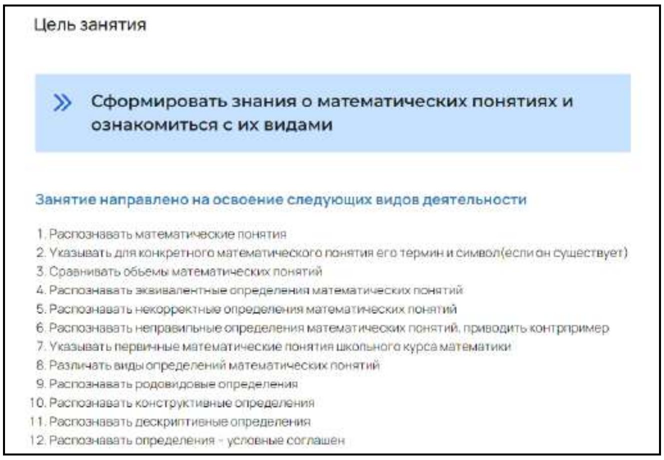


Рис. 2. Фрагмент постановки целей из разработанного электронного урока

Следует помнить, что учебная цель должна быть конкретна, достижима, измерима и направлена на обучающегося. Цель должна быть сформулирована таким образом, чтобы потом можно было проверить, реализована ли она.

В ориентировочный блок, также можно включить инструкции, рекомендации по выполнению задания урока, мотивацию учебной деятельности, проверку домашнего задания, актуализацию знаний и умений учащихся.

2. Информационный блок включает систему информационного наполнения, то есть основной теоретический материал урока (рис. 3). При создании материалов для электронного занятия целесообразно использовать такие способы представления информации, как видеоролики, рисунки, интерактивная упражнения, визуально приятно оформленный текст. Также можно добавить ссылки на сайты, содержащие дополнительные учебные материалы.

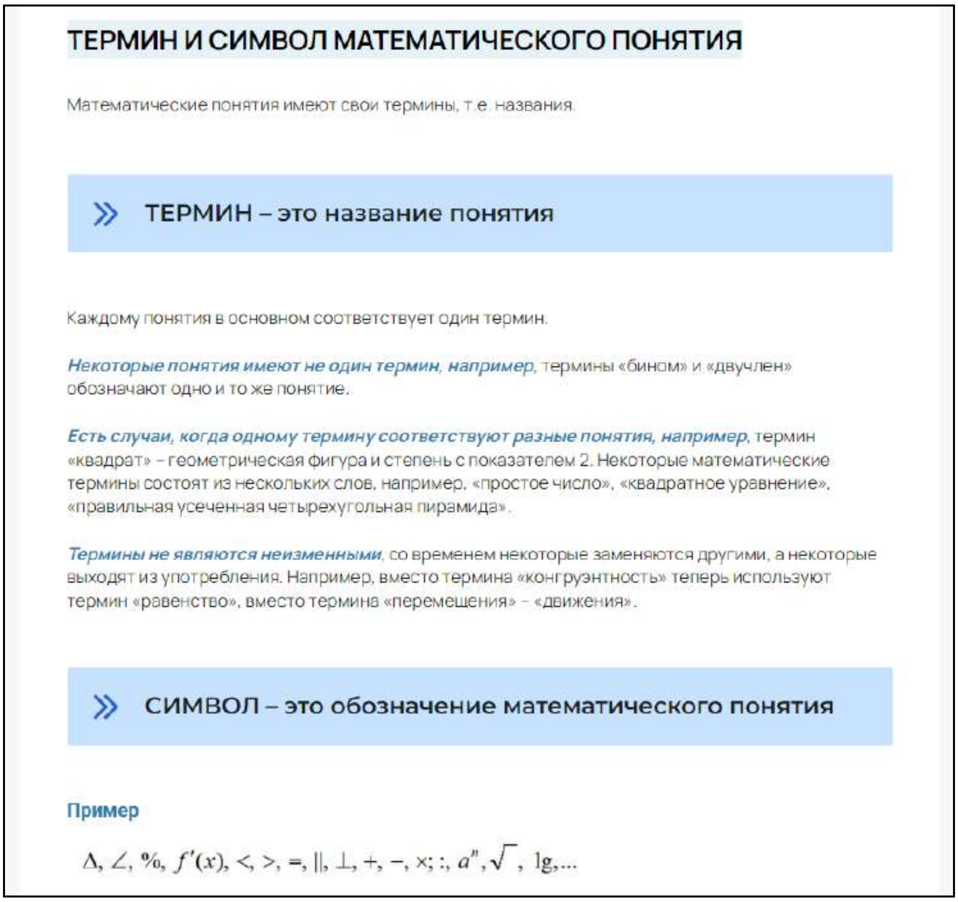


Рис. 3. Фрагмент информационного блока электронного урока

В разработанном нами электронном уроке весь материал поделен на небольшие фрагменты и располагается в отдельных ячейках, каждый такой фрагмент заканчивается интерактивными заданиями для самопроверки обучающегося.

3. Контрольный блок включает систему тестирования и контроля (рис. 4). Практические задания должны быть ориентированы на проверку того, как обучающийся может выполнять определенные операции и действия. Тестовые задания ориентированы на проверку того, как усвоен материал урока.

Общие требования к тестовым заданиям могут быть сформулированы следующим образом (https://multiurok.ru/blog/distantsionnyi-urok-struktura-i-sodierzhaniie.html):

1) они должны соответствовать содержанию учебного материала;
2) они должны быть проверены на практике (апробированы);
3) они должны быть ясными испытуемому.

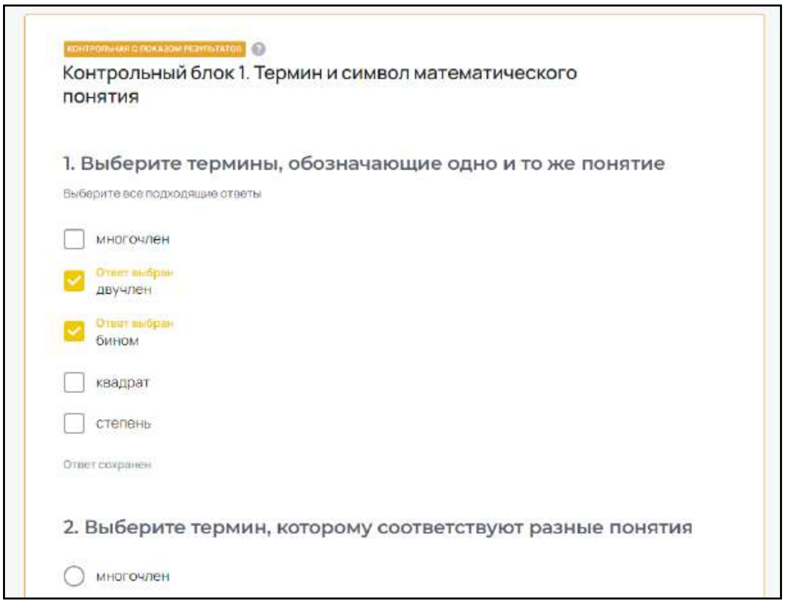


Рис. 4. Фрагмент контрольного блока электронного урока

В разработанном электронном уроке предусмотрено два типа контрольного блока. Первый – выполнение интерактивных заданий с использованием стороннего сервиса LearningApps встроенного в урок. Второй тип – «Контрольная работа» с различными видами тестовых заданий. Важно, что для отслеживания выполнения интерактивных заданий в LearningApps предусмотрено размещение скриншота о их прохождении ниже (рис. 5).

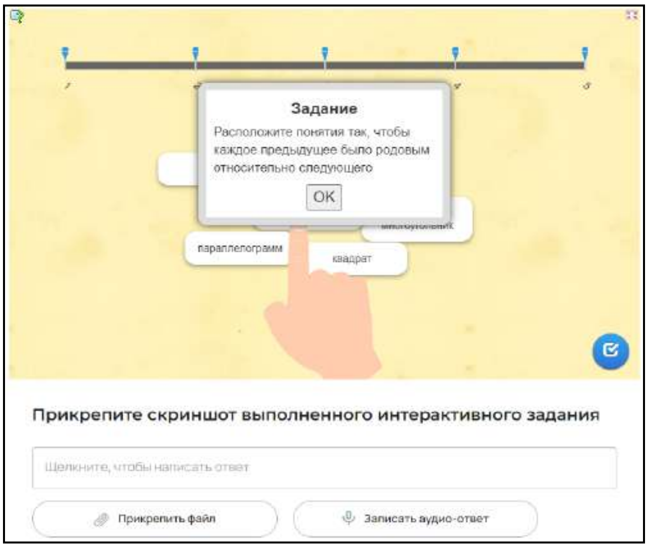


Рис. 5. Фрагмент интерактивного задания

4. Коммуникативный или консультативный блок. Данный блок включает систему интерактивного взаимодействия участников электронного урока с учителем и между собой. Например, можно использовать рефлексивную анкету (рис. 6), которая должна установить достижения обучающегося и трудности, возникшие в процессе изучения материала и выполнения заданий.

Рис. 6. Фрагмент рефлексивной анкеты

Для мониторинга результатов прохождения обучающимися электронного урока на платформе CORE предусмотрена функция «Прохождения» (рис. 7), где отображаются студенты выполнившие задания урока, их баллы и допущенные ошибки, при наличии.

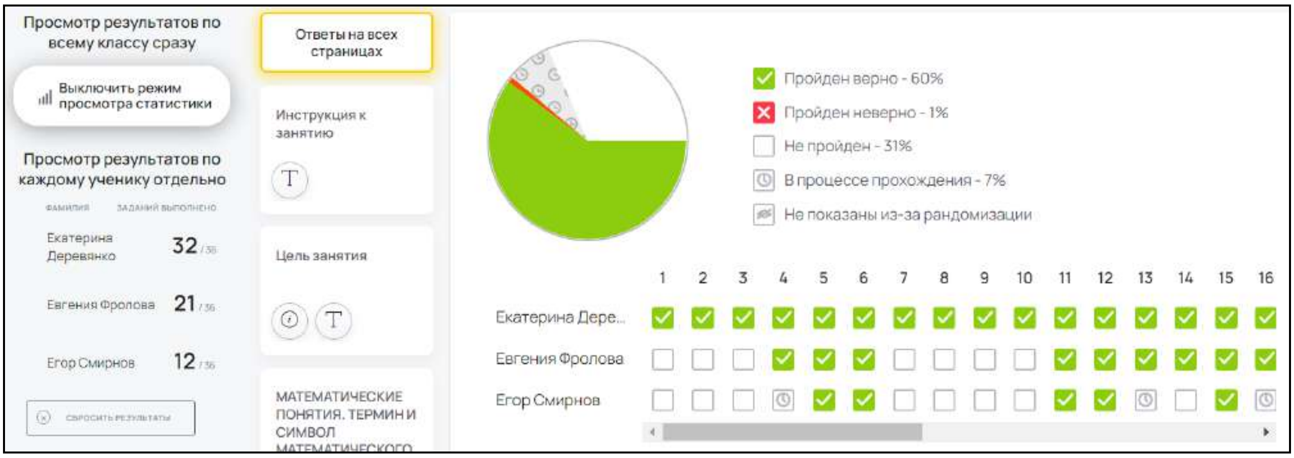


Рис. 7. Фрагмент просмотра прохождения электронного урока

Заключение

Таким образом, электронный урок является перспективной формой организации образовательного процесса, которая улучшает качество обучения, делает его более доступным и интересным. Однако, для успешного применения электронных уроков в образовательном процессе необходимо учитывать их особенности, такие как технические требования, возможные проблемы с доступом к сети Интернет и необходимость адаптации учебных материалов. Также важно создавать условия для взаимодействия обучающихся, развивая тем самым социальные навыки. В целом, электронный урок может стать мощным инструментом для повышения эффективности обучения и мотивации учебной деятельности.

Список литературы

CORE – отечественный конструктор интерактивных уроков [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://didaktor.ru/core-otechestvennyj-konstruktor-interaktivnyx-urokov/ (дата обращения: 27.04.2024).

Гончарова И.В. Методика проектирования электронного урока по математике для учащихся основной школы // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2023. Вып. 3(59). С. 62–69. DOI: 10.24412/2079- 9152-2023-59-62-69.

Гончарова И.В., Деревянко Е.В. Электронный урок по теме «Математические понятия»: цифровой образовательный ресурс [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://coreapp.ai/app/player/lesson/6642f72f1d08f827951a09b9 (дата обращения 25.04.24).

Горшенева И.А., Королева Е.В., Сенченко Е.А. Методические подходы к формированию структуры электронного урока // Вестник экономической безопасности. 2017. № 4. С. 273-277.

Дистанционный урок: структура и содержание [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://multiurok.ru/blog/distantsionnyi-urok-struktura-i-sodierzhaniie.html (дата обращения: 22.04.24).

Коркмазов А.В., Муцурова З.М., Абдулкадыров У.У. Принципы и методы дистанционного обучения студентов вуза // Проблемы современного педагогического образования. 2021. № 71. С. 158-161.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ ПРОЕКТНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СРЕДСТВАМИ ЦИФРОВОЙ ДИДАКТИКИ

Долгова А.А.[1], Морозова В.С.[2]
Научный руководитель: к. п. н., доцент Жук Л.В.[3]

[1,2, 3]Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

e-mail: [1]valariam0rozowa@yandex.ru, [2]li.koroli748@gmail.com, [2]krasnikovalarisa@yandex.ru

Аннотация. В основу реализуемых ФГОС заложен системно-деятельностный подход, в русле которого одной из ключевых форм учебной деятельности школьников признается проектно-исследовательская деятельность. Она представляет собой коллективную познавательную деятельность учащихся, направленную на решение поставленных проблем и включающую: постановку цели, планирование хода выполнения проекта, выбор средств для достижения результата, оценку эффективности использования методов исследования. Проектно-исследовательская деятельность на уроках математики обретает особую актуальность, поскольку наиболее эффективно способствует формированию ключевых и метапредметных компетентностей, установлению прочной связи между теорией и практикой в процессе обучения и, в целом, развитию личности. В условиях интенсивной цифровой трансформации образования увеличивается доля смешанного, гибридного формата обучения математике в школе. Цифровая дидактика, опираясь на ключевые принципы и понятия классической науки об обучении, вместе с тем дополняет, видоизменяет и адаптирует их к новым жизненным реалиям. Возрастает потребность в научно-методическом обеспечении процесса развития проектно-исследовательской деятельности школьников при обучении математике в цифровой образовательной среде.

Ключевые слова: проектно-исследовательская деятельность, обучение математике, цифровая образовательная среда.

THEORETICAL ASPECTS OF THE DEVELOPMENT OF DESIGN AND RESEARCH ACTIVITIES OF SCHOOLCHILDREN IN TEACHING MATHEMATICS BY MEANS OF DIGITAL DIDACTICS

Abstract. The implemented FGOS are based on a system-activity approach, in line with which design and research activities are recognized as one of the key forms of educational activity of schoolchildren. It is a collective cognitive activity of students aimed at solving the problems posed and including: setting goals, planning the progress of the project, choosing means to achieve results, evaluating the effectiveness of using research methods. Design and research activities in mathematics lessons are becoming particularly relevant, since they most effectively contribute to the formation of key and meta-subject competencies, the establishment of a strong link between theory and practice in the learning process and, in general, personal development. In the context of intensive digital transformation of education, the share of a mixed, hybrid format of teaching mathematics at school is increasing. Digital didactics, based on the key principles and concepts of the classical science of learning, at the same time complements, modifies and adapts them to new realities of life. There is an increasing need for scientific and methodological support for the development of design and research activities of schoolchildren in teaching mathematics in a digital educational environment. In this study, an attempt is made to develop a methodology for the development of design and research activities of schoolchildren in teaching mathematics by means of digital didactics, which would take into account the age characteristics and level of mathematical knowledge of schoolchildren; ensure the complexity, diversity and dynamism of educational content and forms of educational activity adequate to the level of modern digital technologies; promote a holistic and conscious perception of the material when studying mathematical facts, concepts, properties, disclosure of their internal relationship with each other.

Keywords: design and research activities, teaching mathematics, digital educational environment.

Введение. Сущность системно-деятельностного подхода, лежащего в основе федеральных государственных образовательных стандартов, состоит в том, что формирование личности ученика и продвижение его в развитии осуществляется в процессе самостоятельной деятельности, направленной на открытие новых знаний. Дидактически целесообразной формой реализации системно-деятельностного подхода выступает проектно-исследовательская деятельность, способствующая формированию широкого спектра универсальных учебных действий: личностных, коммуникативных, регулятивных, познавательных. В настоящем исследовании предпринята попытка разработать методику развития проектно-исследовательской деятельности школьников при обучении математике средствами цифровой дидактики, которая бы учитывала возрастные особенности и уровень математических знаний школьников; обеспечивала сложность, разнообразие и динамизм учебного содержания и форм учебной деятельности, адекватных уровню современных цифровых технологий; способствовала целостному и осознанному восприятию материала при изучении математических фактов, понятий, свойств, раскрытию их внутренней взаимосвязи друг с другом.

Основное содержание исследования. Как отмечают С.Г. Беззубикова, О.С. Садомцева и А.К. Айтуриева, проектно-исследовательская деятельность обучающихся – это образовательная технология, предполагающая решение учащимися исследовательской, творческой задачи под руководством специалиста, в ходе которого реализуется научный метод познания (Беззубикова, 2022, 187). По мнению В.Б. Лыгденовой, проектно-исследовательская деятельность учащихся является одним из методов развивающего (личностно ориентированного) обучения, направлена на выработку самостоятельных исследовательских умений (постановка проблемы, сбор и обработка информации, проведение экспериментов, анализ полученных результатов), способствует развитию творческих способностей и логического мышления (Лыгденова, 2019, 65).

Проанализировав различные подходы к понятию «проектно-исследовательская деятельность», можно отметить, что эта деятельность представляет собой систематическую и осмысленную работу в рамках определенного проекта, в процессе которой выявляются и формулируются проблемы, определяются цели и задачи проекта, разрабатывается план работ и применяются различные методы исследования.

Обращаясь к анализу проектно-исследовательской деятельности, непосредственно, на уроках математики, мы можем отметить, что такая деятельность имеет ряд особенностей. Во-первых, данный подход позволяет учащимся самим выбирать тему исследования в соответствии с их интересами и потребностями. Это способствует активизации их мыслительной деятельности, поскольку они становятся полноправными участниками образовательного процесса. Во-вторых, проектно-исследовательская деятельность предполагает использование различных методов и инструментов исследования. Учащиеся могут проводить эксперименты, анализировать статистические данные, конструировать модели и решать задачи, применяя полученные знания и навыки. В-третьих, такой подход позволяет развивать у учащихся аналитическое мышление и способность к самоорганизации. Они должны уметь планировать свою работу, определять цели и задачи и искать пути их достижения. Такая самостоятельность способствует формированию у учащихся навыков саморегуляции и ответственности за результаты своей деятельности. В-четвертых, проектно-исследовательская деятельность позволяет учащимся применять математические знания на практике. Они имеют возможность проникнуться интересом к предмету, поскольку видят его применение в реальной жизни. Такой подход помогает ученикам осознать важность математики и ее применимость в различных сферах деятельности. Наконец, проектно-исследовательская деятельность стимулирует творческое и критическое мышление учащихся. Они выступают в роли исследователей и находят нестандартные подходы к решению задач и проблем. Такой подход способствует развитию у них креативности и оригинальности мышления.

Важное место в современном образовательном процессе занимают цифровые образовательные ресурсы. Цифровая дидактика – область образования, которая включает в себя использование современных цифровых технологий и ресурсов для обучения и образования. Она объединяет педагогические методы и стратегии, основанные на принципах информационно-коммуникационных технологий, в целях обеспечения эффективного и интерактивного обучения школьников. Как отмечает В.В. Гриншкун, задачей цифровой дидактики является не только внедрение ИКТ в процесс обучения, но и разработка новых адаптивных подходов, которые учитывают особенности современных учащихся, растущие требования к достаточной информационной грамотности и разнообразные потребности (Гриншкун, 2022, 72).

Реализация технологии проектного обучения математике в цифровой образовательной среде включает этапы, представленные на рис. 1.

В ходе выполнения учебных проектов школьникам может быть предложено использование различных цифровых ресурсов для исследования и сбора информации: онлайн-библиотеки, электронные версии учебников и статей, специализированные поисковые системы для поиска актуальных исследований и статей по выбранной теме.

Заключение

В результате проведенного исследования был получен вывод о том, что проектная деятельность выступает одной из современных образовательных технологий, позволяющих сформировать у учащихся важные компетенции, необходимые для эффективного функционирования в постоянно меняющейся информационной среде. Эффективным средством организации проектной деятельности школьников выступают современные технологии и сервисы цифровой образовательной среды. Выбор цифрового контента или сервиса для сопровождения проектной деятельности обучающихся определяется уровнем сформированности цифровых компетенций педагога, а также дидактической целесообразностью применения тех или иных средств информационно-коммуникационных технологий на конкретном этапе исследовательского проекта.

Рис.1. Этапы реализации технологии проектного обучения математике в цифровой образовательной среде

Список литературы

Беззубикова С.Г., Садомцева О.С., Айтуриева А.К. Реализация проектно-исследовательской деятельности в образовании // Фундаментальные и прикладные проблемы получения новых материалов: исследования, инновации и технологии: материалы XVI Международной научно-практической конференции, Астрахань, 26-28 апреля 2022 года. С. 187-189.

Лыгденова В.Б. Модель управления проектно-исследовательской деятельностью школьников в образовательной организации // Традиции и инновации в

начальном и дошкольном образовании: сборник научных статей. Улан-Удэ: Бурятский государственный университет, 2019. С. 64-71.
Гриншкун В.В. Направления и особенности влияния цифровых технологий на развитие дидактики. М.: «ГринПринт», 2022.

ТРАНСПРЕДМЕТНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Майдуров О.Ю.[1]
Научный руководитель: д. п. н., профессор Дворяткина С.Н.[2]

[1,2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]omaydurov91@mail.ru, [2]sobdvor@yelets.lipetsk.ru

Аннотация. В статье рассматривается один из эффективных способов решения олимпиадных задач по математике методом программирования. Функциональность данного транспредметного способа зарекомендовала себя с точки зрения точности получения результата и экономичности времени. В статье используются варианты решения задач на языке Python, так как данный высокоуровневый язык программирования прост в понимании, минималистичен и имеет большое количество дополнительных библиотек для различных областей математики. Кроме того, были выделены и определенные недостатки, которые следует учитывать при решении математических задач.

Ключевые слова: обучение, олимпиадные математические задачи, язык Python, программирование, траспредметный способ.

A TRANS-OBJECTIVE WAY OF SOLVING OLYMPIAD PROBLEMS IN MATHEMATICS

Abstract. The article discusses one of the most effective ways to solve Olympiad problems in mathematics using the programming method. The functionality of this transubject method has proven itself in terms of accuracy of obtaining results and time efficiency. The article uses options for solving problems in Python, since this high-level programming language is easy to understand, minimalistic and has a large number of additional libraries for various fields of mathematics. In addition, certain disadvantages were highlighted that should be taken into account when solving mathematical problems.

Keywords: learning, Olympiad mathematical problems, Python language, programming, the subject method.

Введение

Мир быстро меняется и требует от современного человека постоянных качественных преобразований в плане обработки информации. Ускользающая реальность накладывает определенные отпечатки и на образование. Если ранее срабатывала формула «образование на всю жизнь», то сейчас данная формулировка трансформировалась и выглядит иначе «образование на всю жизнь». Наиболее четко эти образовательные изменения укладываются в известную поговорку «Век живи – век учись». Кроме того, современное образование и методы обучения существенно отличаются от традиционных подходов, применяемых ранее. Эти изменения в основном обусловлены информатизацией современного общества. Вдобавок к этому, цели обучения также претерпели изменения: если раньше учитель стремился просто научить учеников, то теперь его задачей является научить их учиться самостоятельно. Поэтому современный подход к обучению основан на необходимости направлять учеников по правильному пути и быть ими поддержанными на протяжении всего процесса (Алимжанова, 2017).

Данная тенденция затрагивает абсолютно любую предметную область, как в школьном курсе, так и вузе. Кроме того, важнейшая задача педагога в современной реальности становится мотивообразующая, которая заключается в том, чтобы систематически и методически поддерживать внимание и интерес к изучаемому предметному курсу. Помимо прочего, парадигма «ЗУНов» (знаний, умений и навыков) сменилась на УУД (универсальные учебные действия). Здесь вектор обучения сдвинулся от объема изученного материала, к умению находить необходимую информацию и возможности ее использования в нужный момент. Данная концепция имеет, однако, существенный минус, который заключается в смещении «центра тяжести» не в сторону фундаментальных научных знаний. И если, например, это не слишком существенно в информатике, поскольку данная наука «молодая», то в обучении математике появляются определенные проблемы. Современным школьникам нелегко даются математические методы при решении различных задач. Особую сложность вызывают олимпиадные задачи по математике, для решения которых необходимо владеть математическим и логическим аппаратом. Вдобавок ко всему сказанному, решение математической задачи, зачастую требует качественной проверки на точность результата и его достоверность. Даже решенная задача, не означает, что решение ее верное. Встает закономерный вопрос, как убедиться в правильности решения того или иного математического уравнение или примера. Решение данной проблемы во многом может помочь программный код. Но поскольку языков программирования огромное количество, то выбор может быть из числа как компилируемых, так и интерпретируемых языков программирования. В данной статье рассмотрим решение олимпиадных математических задач посредством языка программирования Python.

Методология исследования

Python – это высокоуровневый, интерпретируемые язык программирования общего назначения, ориентированный на повышение производительности разработчика и читаемости кода. Разработчиком является голландский программист Гвидо ван Россум. Прежде всего, питон обладает недостатками и преимуществами любого интрепретируемого языка. Из недостатков стоит выделить медленное выполнение программы и возможное потребление большего количества ресурсов. Однако нас интересует, прежде всего, его достоинства, которые способствуют решению различных задач пользователя.

Кроме того, пайтон один из самых популярных языков для начинающих, он гибок и у него очень лаконичный и минималистичный синтаксис, код легко писать и легко читать. Одной из интересных синтаксических особенностей языка, является выделение блоков кода с помощью отступов, пробелов или табуляции, поэтому в пайтон отсутствуют операторные или фигурные скобки. Такой способ позволяет сократить количество строк символов в программе. Стоит сравнить код программы на C++ и Python в таблице 1.

Таблица 1.
Пример простой программы на C++ и Python, которая печатает «Привет, Мир!»

#include <iostream>
 	
int main()
{
std::cout << "Hello, World!" << std::endl;
return 0;
}
	print('Hello, World!')

for (int i = min; i < max; i++) {
command 1;
command 2;
}
	for i in range(min, max):
	command 1
	command 2

Иными словами Python был создан как универсальный язык, доступный для каждого пользовательского профиля, и поэтому особое внимание было уделено его понятности и простоте синтаксиса. Благодаря этой философии «язык для каждого», Python оказывается более доступным и популярным среди новичков в программировании(https://studfile.net/preview/7083818/page:7/).

Однако, не все так гладко в python. Например, сейчас уживается две версии языка 2. *и 3.*, обе они развиваются параллельно, однако синтаксис 2-ой версии не совместим полностью с синтаксисом 3-ей версии.

Еще одна проблема может возникнуть у вас, если вы не обладатель linux, в этом случае при установке ряда библиотек у вас могут возникнуть трудности, некоторые библиотеки будут полностью не совместимы, например tensorflow.

Использование математических методов в языке программирования Python позволяет эффективно решать разнообразные прикладные задачи. Благодаря богатым математическим возможностям этого языка, разработчикам предоставляется широкий спектр инструментов, которые упрощают и автоматизируют процесс решения различных задач. Python предоставляет мощные алгоритмические методы, возможности работы с числами и матрицами, а также простоту синтаксиса, что делает его языком выбора для решения проблем, связанных с вычислениями, моделированием, статистикой и анализом данных. Таким образом, использование математических методов в языке программирования Python открывает возможности для качественного и эффективного решения прикладных задач. Транспредметный способ решения математических задач, не без оснований приводит к результату по наиболее удобному маршруту решения. Под транспредметным способом, в данном случае, будем понимать решение математических задач через программирование.

Задача 1. Вырубка деревьев.

Фермер решил вырубить некоторые деревья, растущие перед его домом. Деревья перед домом посажены в ряд, всего там растет n деревьев, расстояния между соседними деревьями одинаковы. После вырубки перед домом должно остаться m деревьев, и расстояния между соседними деревьями должны быть одинаковыми. Помогите фермеру выяснить, сколько существует способов вырубки деревьев.

Требуется написать программу, которая по заданным числам n и m определит, сколько существует способов вырубки некоторых из n деревьев так, чтобы после вырубки осталось m деревьев, и соседние деревья находились на равном расстоянии друг от друга. Так, например, выглядят варианты для m = 5 и n = 3, Рис. 1:

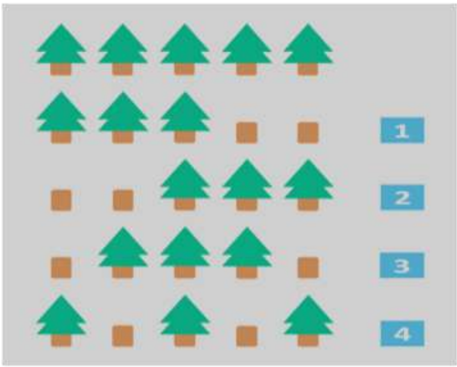


Рис. 1. Варианты вырубки для m = 5 и n = 3

Пример ввода: 125 25

Вывод: 265

Решение

Обозначим расстояние между деревьями после вырубки d. Тогда существует n – d x (m – 1) – m + 1 способов вырубить деревья. Чтобы найти все варианты, нужно просуммировать способы по всем d. Кроме того, нужно учесть 2 частных случая – когда количество оставшихся после вырубки деревьев равно 0 или 1.

```
n, m = list(map(int, input().split()))
trees = 0
if m == 0:
    trees = 1
elif m == 1:
    trees = n
else:
    for d in range(1, n):
        trees += (n - d) // (m - 1)
print(trees)
```

Листинг 1. Код решения задачи 1

Данный код определяет правильный ответ с вероятной точностью > 99, 9(9)%.

Рассмотрим пример задания олимпиады школьников группы компаний «Россети» 2022 года за 10 класс.

Задача 2. Найдите количество всех решений в натуральных числах уравнения с тремя неизвестными:

$$xyz + x + y + z = xy + xz + yz + 1006.$$

Данное задание можно решить математически методом группировки и разложить многочлен на множители, но можно и использовать программный код.

```
k = 0
for x in range(1, 101):
    for y in range(1, 101):
        for z in range(1, 101):
            if x * y * z + x + y + z == x * y + x * z + y * z + 1006:
                k += 1
                print(x, y, z)
print(k)
```

Листинг 2. Код программы задачи 2

Данная программа найдет все возможные варианты и «отсечет» ненужные, что говорит об эффективности способа. Получим 12 случаев для каждой переменной(x, y, z):

(2 16 68), (2 68 16), (4 6 68), (4 68 6), (6 4 68), (6 68 4),

(16 2 68), (16 68 2), (68 2 16), (68 4 6), (68 6 4), (68 16 2)

Итого 12 вариантов. А для гарантированной проверки можно увеличить диапазон проверки. Однако следует в данном примере выделить и определенные недостатки, которые следует учитывать при решении подобных задач. Увеличивая диапазон поиска чисел, увеличивается время выполнения программы. Здесь стоит внимательно произвести анализ предполагаемой задачи и производить оптимизацию кода при необходимости.

Задача 3. Московская математическая олимпиада, 1998 год, 11 класс, МИОО 2010 год, 11 класс.

Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах.

Решим для начала математически, чтобы на данном примере сравнить еще и сложности вычислений, с которыми может столкнуться участник олимпиады.

Решение:

Левая часть уравнения при любых натуральных числах m и n при делении на 3 даёт остаток 1, следовательно, такой же остаток при делении на 3 должен быть и у 5^k, откуда следует, что k – чётное. Пусть k = 2r, r ε N.

Правая часть уравнения при любом натуральном k при делении на 4 даёт остаток 1, следовательно, такой же остаток при делении на 4 должен быть и у 3^m, откуда следует, что m – чётное. Пусть m = 2s, s ε N.

Перепишем исходное уравнение в виде

$3^{2s} + 4^n = 5^{2r}$,

или в виде

$2^{2n} = (5^r - 3^s)(5^r + 3^s)$.

Тогда $5^r - 3^s = 2^q$ и $5^r + 3^s = 2^l$, где q и l - целые неотрицательные числа и q + l = 2n. Таким образом,

$$5^r = \frac{2^q + 2^l}{2} \text{ и } 3^s = \frac{2^l - 2^q}{2} = 2^{l-1} - 2^{q-1}.$$

Число 3^s - нечётное, значит, $2^{l-1} - 2^{q-1}$ нечётно, поэтому q = 1 и $3^s = 2^{l-1} - 1$.

Следовательно, число l − 1 чётно, l − 1 = 2p (иначе левая часть не делится на 3). Тогда $3^s = (2^p - 1)(2^p + 1)$ – произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющихся степенями тройки. Ясно, что эти множители 1 и 3, тогда p = 1, s = 1, m = 2s = 2. Далее последовательно получаем:

l = 2p + 1 = 3,

$5^r = (2^q + 2^l)/2 = 5$,

r = 1,

k = 2r = 2,

q + l = 2n = 4.

Итак, m = n = k = 2.

Ответ: m = 2, n = 2, k = 2.

После данного решения напишем код, который даст тот же результат, упрощая поиск верного ответа.

```
for m in range(0, 101):
    for n in range(0, 101):
        for k in range(0, 101):
            if 3 ** m + 4 ** n == 5 ** k:
                print(m, n, k)
```

Листинг 3. Код программы задачи 3

После запуска программы получится 2 ответа (0, 1, 1) и (2, 2, 2), при этом если производить поиск верного варианта в поле натуральных чисел, то первый вариант не подходит, поскольку переменная m принимает значение 0.

Как видно из сравнения способов получения ответа данной задачи, 2 вариант более минималистичен и прост. Что в свою очередь экономит время решения и дает гарантированный ответ.

Результаты

Проведя сравнительный анализ использования транспредметного способа решения олимпиадных задач по математике, можно заметить, что использование языка программирования Python намного упрощает поиск решений олимпиадных задач по математике. Кроме того, данный способ дает гарантированный ответ и экономит время при решении задач. Следовательно, можно выделить следующие преимущества транспредметного способа решения задач при использовании языка программирования Python:

Кроссплатформенность – пайтон портированно работает практически на всех известных платформах, что дает больше возможностей для пользователя при решении олимпиадных задач;

Интроспекция – для любого объекта из стандартного или нестандартного можно получить всю информацию о его внутренней структуре и среде исполнения, что значительно экономит время программиста, в частности для решения математических задач;

Динамическая типизация – позволяет сделать код более компактным, так как в нем отсутствуют обязательные декларации типов переменных и это значительно ускоряет процесс написания кода, хотя и повышает вероятность ошибок в исполняемых модулях;

Debug – отладка – процесс проверки кода, при котором в процессе его выполнения можно остановиться в обозначенном месте и посмотреть за ходом выполнения. Это позволяет понять, в каком состоянии находится программа в определённом месте, а значит без больших трудностей можно осуществить анализ математической задачи на любом этапе решения.

Неизменяемость: Неизменяемые структуры данных Python гарантируют, что входные данные не будут изменены в процессе вычислений, что упрощает разработку и отладку кода.

Библиотеки: Python предоставляет обширные библиотеки для решения различных олимпиадных задач по математике, такие как Math, Numpy, SciPy, Ststsmodel, которые реализуют эффективные численные методы и предоставляют удобный интерфейс для пользователей.

Также, можно выделить и некоторые недостатки:

Производительность: несмотря на то, что Python известен своей строгой системой типов и оптимизацией во время интерпретации, его производительность может быть ниже, чем у компилируемых языков, таких как C ++ или Pascal.

Ограниченная привязка: Python строго привязан к системным библиотеками. Отсюда возникают сложности при попытке использовать язык на новых программных платформах.

*Параллельная поддержка:*Python имеет две версии 2 и 3, которые параллельно развиваются, при этом обе не совместимы, что приводит к определенным трудностям при переходе с одного варианта на другой.

Выводы

Python в настоящее время является одним из самых популярных и эффективных языков программирования для решения олимпиадных задач по математике, информатике и др. Благодаря своей простоте и лаконичности синтаксиса, Python стал предпочитаемым выбором для начинающих пользователей, а также для опытных программистов.

Язык программирования Python обладает множеством встроенных функций и библиотек, которые обеспечивают широкий спектр возможностей при решении олимпиадных задач.

Одним из основных преимуществ Python является его возможность работы со списками и массивами, которые часто используются при решении математических задач. Списки в Python могут содержать различные типы данных и обеспечивают простой доступ к элементам списка с помощью индексов. Кроме того, Python предлагает удобные методы для модификации, сортировки и поиска элементов в списке, в частности циклами for.

Python также поддерживает функции и модули, позволяющие разбивать программу на небольшие логические блоки, что облегчает чтение и отладку кода. Функции позволяют сократить повторяющийся код, а модули обеспечивают организацию кода в отдельные файлы для лучшей структурированности проекта.

Наконец, Python обладает мощной системой обработки исключений, которая помогает обрабатывать возможные ошибки в программе и предотвращать ее прерывание. Это дает возможность оптимизировать код и улучшить его надежность.

Таким образом, решение олимпиадных математических задач методами программирования позволяет эффективно решать поставленные задачи перед учащимися. Программный код способствует нахождению ответов разнообразных заданий, при этом имеет лаконичный способ решения, что значительно экономит время, приводя к тому же результату. Рассмотренные способы решения не дают исчерпывающих ответов при решении разнообразных математических задач, но являются приглашением к размышлению в поиске ответов.

Список литературы

Акишин Б.А., Богданова Н.Ю., Галабурдин А.В. и др. Применение пакета Maxima при решении прикладных инженерных и экономических задач: учеб. пособие. Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2016.

Алимжанова Г.М. Эффективность интерактивных методов при формировании ключевых компетенций. М.: Просвещение, 2017. 212 с.

Акишин Б.А. Использование систем компьютерной математики при изучении математических дисциплин // Эвристическое обучение математике: материалы IV Междунар. научно-метод. конф. ЭОМ-2018 (19-20 апреля 2018 г.). Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. С. 10-12.

Акишин Б.А., Воронцова В.А. Использование Python в процессе изучения математики в техническом вузе // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе: материалы IV Междунар. научной конф. Т. 2. М.: ФГБОУ ВО «Московский пед. гос. университет» МПГУ, 2018. С. 123-127.

Задачи с экономическим содержанием [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://studfile.net/preview/7083818/page:7/. (дата обращения: 10.04.2024)

История развития языка Python [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://ru.hexlet.io/courses/python-basics/lessons/history/theory_unit (дата обращения: 10.04.2024)

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ В СТАРШИХ КЛАССАХ ПОСРЕДСТВОМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Паршина А.Н.[1]

Научный руководитель: к. п. н, доцент Сафронова Т.М.[2]

[1,2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]*parshina_an@mail.ru*, [2]*stm657@mail.ru*

Аннотация: В статье представлены различные цифровые платформы, сервисы, являющиеся на сегодняшний момент неотъемлемой частью образовательного процесса. Рассматривается зависимость цифрового образования от уровня владения учителя навыками работы с современными цифровыми средствами. В статье делается попытка поиска решения следующей проблемы: каким образом внедрять новые средства на уроке геометрии, чтобы улучшить качество усвоения учебного материала, а также повысить уровень мотивации школьников к учению. Приводится методика решения авторской нестандартной исследовательской задачи как в традиционной форме, так и с использованием цифровой динамической кроссплатформенной среды GeoGebra.

Ключевые слова: цифровизация образования, цифровая платформа, цифровые технологии, исследовательская задача, GeoGebra.

METHODOLOGY FOR SOLVING NON-STANDARD RESEARCH PROBLEMS IN GEOMETRY LESSONS IN HIGH SCHOOL THROUGH THE USE OF DIGITAL TECHNOLOGY

Abstract: The article presents various digital platforms and services that are currently an integral part of the educational process. The dependence of digital education on the teacher's level of skills in working with modern digital tools is considered. The article attempts to find a solution to the following problem: how to introduce new tools in a geometry lesson in order to improve the quality of learning the educational material, as well as increase the level of motivation of schoolchildren to learn. A methodology for solving the author's non-standard research problem is presented, both in the traditional form and using the digital dynamic cross-platform environment GeoGebra.

Keywords: digitalization of education, digital platform, digital technologies, research task, GeoGebra.

Введение. В современном мире цифровые технологии занимают практически ключевое значение в функционировании жизни общества. Разнообразные онлайн сервисы, цифровые платформы, социальные сети, нейросети и искусственный интеллект вплотную вошли в жизнь человека. Сейчас трудно представить себе хотя бы день без различных гаджетов или девайсов.

В тоже время в век стремительного развития передовых технологий школьному образованию приходится преодолевать большие трудности связанные цифровизацией образовательного процесса. Происходит переоснащение школьного оборудования, появляется множество цифровых образовательных платформ таких как Учи.ру, ЯКласс, Интернет-урок, ЛогикЛайк, Фоксфорд.ру и т.д., виртуальных образовательных лабораторий, появляются совершенно иные способы общения с учениками, например, использование информационно-коммуникационной платформы мессенджера «Сферум». Учителю при этом приходится подстраиваться под быстрый темп постоянных изменений связанных в цифровизацией образования.

Можно считать, что «цифровизация образования напрямую зависит от уровня владения цифровыми технологиями педагога с целью их продуктивного применения в образовательной деятельности. Н.Н. Битюцкая отмечает необходимость формирования умения ориентироваться в потоке цифровой информации у педагогов, работать с ней, обрабатывать и встраивать в новую технологию» [Никулина, Стариченко, 2018].

Основная часть. Перед учителем встаёт вопрос: каким образом использовать на уроке цифровые технологии, чтобы это было понятно, своевременно и не препятствовало освоению школьной программы? Покажем применение цифровых технологий на примере фрагмента урока геометрии в 11 классе «Закрепление знаний по теме «Многогранники и тела вращения»». Учащимся предстоит решить задачу исследовательского характера:

Задача Архитектор F.O. проектирует новый корпус медицинского цента, специализирующегося на психологической реабилитации людей, попавших в чрезвычайные ситуации. По заказу владельца данного центра в здании требуется разместить комнату психологической разгрузки, которая отвечала бы следующим параметрам (условиям): площадь комнаты должна быть не менее 15м^2, высота потолка более 2,5 м, а коэффициент комфортности комнаты должен находиться в пределах 0,55-0,75. F.O. размышляет над двумя вариантами планировки комнаты:

1) форма правильной усечённой пятиугольной пирамиды с углом наклона стены относительно пола 60° и длиной стены у пола и потолка соответственно 4,5 м и 2 м, высота стен (апофема усеченной пирамиды) равна 3,46 м;

2) форма полусферы с радиусом основания 4 м.

Помогите архитектору определиться с выбором.

При решении данной нестандартной исследовательской задачи учитель может предложить ученикам выполнить следующие действия: оформить решение традиционным способом (произвести построения и вычисления в тетради), а также решить задачу, применяя кроссплатформенную динамическую математическую программу GeoGebra.

Ниже представлена методика решения задачи традиционным способом.

В начале учащиеся знакомятся с текстом задачи, затем оценивают, что необходимо для её решения. Требуется найти коэффициент комфортности К ($К = \frac{36\pi V^2}{S^3}$, где V – объём жилища, S – полная поверхность жилища, включая и пол) двух комнат, после чего выбрать ту планировку комнаты, которая удовлетворяет параметрам, представленным в условии задачи.

Этапы нахождения коэффициента комфортности для комнаты формы правильной усечённой пятиугольной пирамиды:

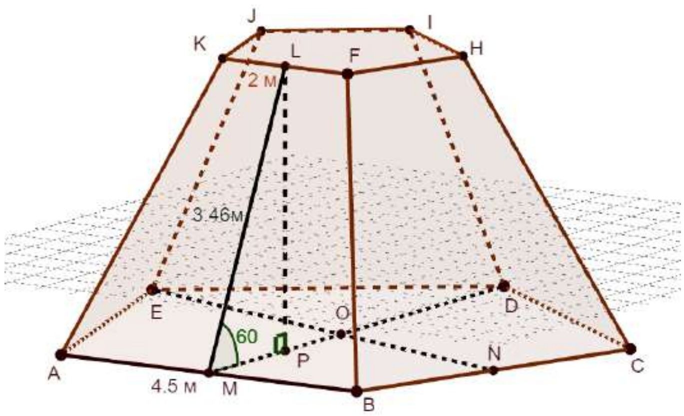


Рис. 1

1) Находят площадь полной поверхности комнаты. Для этого нужно сложить площадь потолка, пола и стен. Площадь пола, а также потолка, т.е. правильного многоугольника ABCDE и KFHIJ при известной стороне, будем находить по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$, где a – сторона пятиугольника. Отсюда имеем, $S_{\text{ABCDE}} = \frac{AB^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} = \frac{4{,}5^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \approx 34{,}84\ (\text{м}^2)$ – площадь пола (можем заметить, что данное значение удовлетворяет первому условию задачи), $S_{\text{KFHIJ}} = \frac{KF^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} = \frac{2^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \approx 6{,}88\ (\text{м}^2)$ – площадь потолка. Так как форма комнаты – правильная усеченная пятиугольная пирамида, то боковыми сторонами будут одинаковые равнобедренные трапеции. Находим площадь такой трапеции по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b – соответственно стороны нижнего и верхнего основания, h – высота трапеции, в нашем случае формула примет вид $S_{\text{ABFK}} = \frac{AB+KF}{2} \cdot ML$, $S_{\text{ABFK}} = \frac{4{,}5+2}{2} \cdot 3{,}46 \approx 11{,}24(\text{м}^2)$ – площадь стены. Найдём площадь полной поверхности комнаты по формуле $S_{\text{п.п.1}} = S_{\text{ABCDE}} + S_{\text{KFHIJ}} + 5S_{\text{ABFK}}$,

$S_{\text{п.п.1}} = 34{,}84 + 6{,}88 + 5 \cdot 11{,}24 = 97{,}92(\text{м}^2)$.

2) Вычисляют объём комнаты, при этом целесообразно использование формулы нахождения объёма усечённой пирамиды $V_1 = \frac{1}{3}H(S_{\text{ниж}} + \sqrt{S_{\text{ниж}} \cdot S_{\text{верх}}} + S_{\text{верх}})$, где H – высота усечённой пирамиды, $S_{\text{ниж}}$ и $S_{\text{верх}}$ – площадь нижнего и верхнего основания соответственно. В нашем случае $V_1 = \frac{1}{3}LP(S_{\text{ABCDE}} + \sqrt{S_{\text{ABCDE}} \cdot S_{\text{KFHIJ}}} + S_{\text{KFHIJ}})$, найдём LP из прямоугольного треугольника LPM, $LP = sin\angle LMP \cdot LM$, $LP = sin60^\circ \cdot 3{,}46 \approx 3$ м. Подставляем все имеющиеся значения в формулу случае $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 3(34{,}84 + \sqrt{34{,}84 \cdot 6{,}88} + 6{,}88 \approx 57{,}2(\text{м}^3)$ – объем комнаты.

3) Находят искомый коэффициент для первой комнаты $\text{К}_1 = \frac{36\pi {V_1}^2}{{S_{\text{п.п.1}}}^3}$, $\text{К}_1 = \frac{36\pi 57{,}2^2}{97{,}92^3} \approx 0{,}39$.

Этапы нахождения коэффициента комфортности для комнаты формы полусферы:

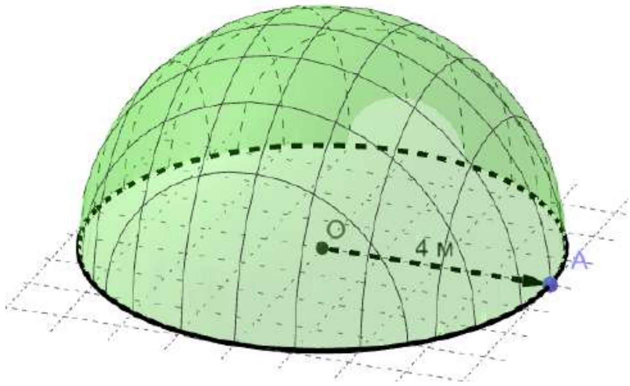


Рис. 2

1) Находят площадь полной поверхности комнаты как сумму площади основания полусферы и половины площади сферы, при этом действует формула $S_{\text{п.п.2}} = S_{\text{осн.}} + \frac{1}{2}S_{\text{сф.}} = \pi R^2 + \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 3\pi R^2$, $S_{\text{п.п.2}} = 3\pi \cdot 4^2 \approx 150{,}8(\text{м}^2)$.

2) Вычисляют объём комнаты по формуле $V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3$, $V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot 4^3 \approx 134(\text{м}^3)$ – объем комнаты.

3) Находят искомый коэффициент для второй комнаты $\text{К}_2 = \frac{36\pi {V_2}^2}{{S_{\text{п.п.2}}}^3}$, $\text{К}_2 = \frac{36\pi 134^2}{150{,}8^3} \approx 0{,}59$.

После произведённых вычислений учащиеся проверяют, какая из двух планировок комнат подходит по параметрам для комнаты психологической разгрузки, делают вывод, что архитектору F.O. лучше выбрать второй вариант (комнату формы полусфера).

Теперь покажем методику решения задачи с помощью программы GeoGebra.

Построим усечённую пятиугольную пирамиду, выполнив следующую последовательность действий:

1) С помощью инструмента ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК (рис.3), отметим на плоскости две вершины и в открывшемся окне выберем общее количество вершин, в нашем случае их 5, после чего образуется правильный пятиугольник.

2) С помощью инструмента ПИРАМИДА «выдавливаем» требующуюся форму на плоскости, для этого отмечаем пятиугольник и в открывшемся окне отмечаем нужную высоту (рис. 4).

3) Отмечаем тоску F на ребре BG и, выбрав инструмент ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ, восстанавливаем линию параллельную отрезку BC (рис. 5). Отмечаем точку пересечения образовавшейся прямой с ребром пирамиды GC (точка H), выбрав инструмент ПЕРЕСЕЧЕНИЕ (рис. 6). Аналогичные действия проделываем с каждой гранью пирамиды (рис. 7). Чтобы не допустить загруженности чертежа скроем лишние линии, для этого

кликаем правой кнопкой мыши на нужную прямую и снимаем галочку с функции ПОКАЗЫВАТЬ ОБЪЕКТ (рис. 8).

4) Выбрав инструмент МНОГОУГОЛЬНИК (рис.9) отметим пятиугольник KFHIJ и четырёхугольники AKFB, FHCB, HIDC, IJED и JKEA, при этом образуются будущие грани и верхнее основание правильной усечённой пятиугольной пирамиды.

5) В боковой панели скроем ОБЪЕКТ ПИРАМИДА (рис. 10), при этом образуется конечный вид искомой фигуры. Для эстетичного оформления можно изменить цвет, для этого помощью клавиши Ctrl выбираем все необходимые грани, переходим в настройки (рис. 11) и выбираем параметр ЦВЕТ (рис. 12) (данные действия не обязательны).

4) Для нахождения площади полной поверхности суммируем площадь верхнего и нижнего оснований и всех боковых граней усечённой пирамиды. При этом будем использовать инструмент ПЛОЩАДЬ. Укажем нужный многоугольник, после чего программа автоматически выполнит вычисления (рис. 13), подставим значения в формулу $S_1 = S_{\text{ABCDE}} + S_{\text{KFHIJ}} + 5S_{\text{AB}F\text{K}}$, получим $S_1 \approx 97{,}92\text{м}^2$.

5) С помощью инструмента VOLUME, выбираем усечённую пирамиду, после чего программа автоматически рассчитает её объём $V_1 \approx 57{,}2\ \text{м}^3$ (рис. 14).

6) Вычисляем коэффициент комфортности $\text{К}_1 \approx 0{,}39$.

Теперь построим на плоскости полусферу:

1) Первым этапом требуется построить основание полусферы. Выбираем инструмент ОКРУЖНОСТЬ ПО ТРЁМ ТОЧКАМ, после чего на оси координат отмечаем точки A(-4, 0, 0), B(0, 4, 0) и C(4, 0, 0), окружность «восстанавливается» автоматически (рис. 15).

2) В боковую панель введем формулу $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, после чего программа проявит искомую полусферу (рис. 16).

3) Выбрав те же инструменты ПЛОЩАДЬ и VOLUME, найдём $S_2 \approx 150{,}8\ \text{м}^2, V_2 \approx 134\ \text{м}^3$ (рис. 17).

4) Аналогично находим коэффициент комфортности $\text{К}_2 \approx 0{,}59$.

Далее учащиеся делают вывод о целесообразности выбора архитектором комнаты-полусферы.

В ходе урока, ученики активно включены в образовательный процесс, нестандартная постановка условия задачи повышает интерес в нахождении верного ответа на поставленный вопрос, а вариативность способа решения начиная от обычного выполнения задания в тетради, до использования при решении цифровой среды GeoGebra формирует дополнительную мотивацию к учению.

В заключение важно отметить, что на вопрос «Как использовать цифровые технологии?» отвечает сам учитель и только от него зависит: будет ли урок сложным и не понятным от переизбытка действий с цифровыми ресурсами или же они будут выступать ярким дополнением к освоению/закреплению учебного материала.

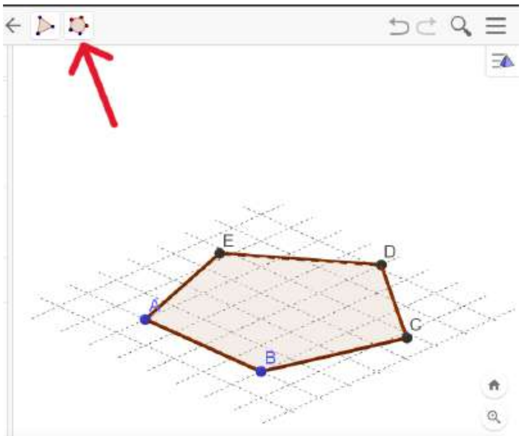


Рис. 3

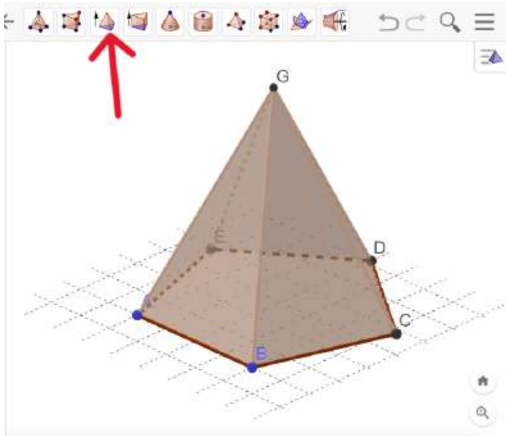


Рис. 4

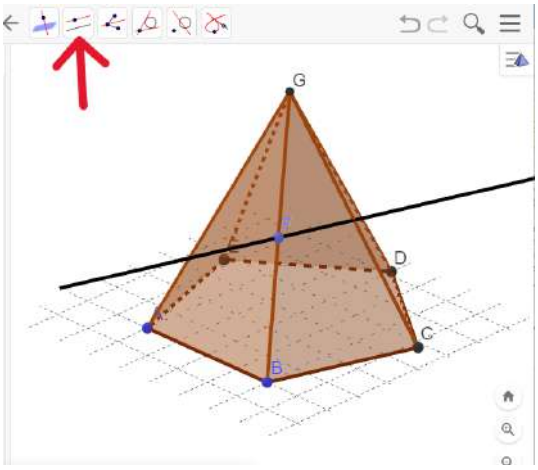


Рис. 5

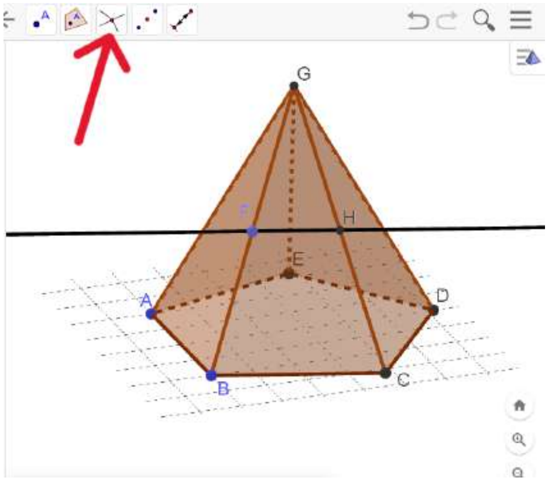


Рис. 6

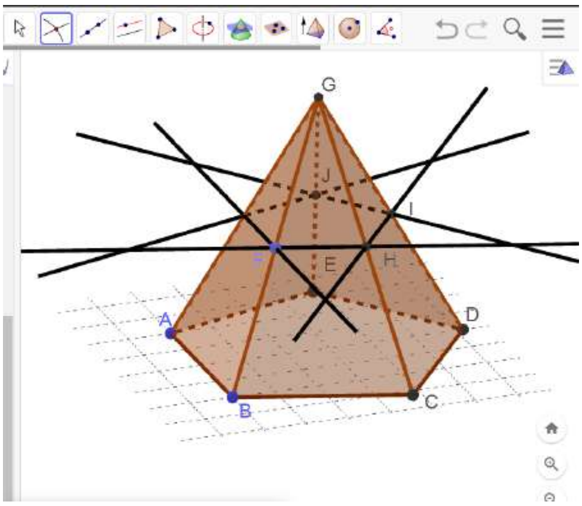


Рис. 7

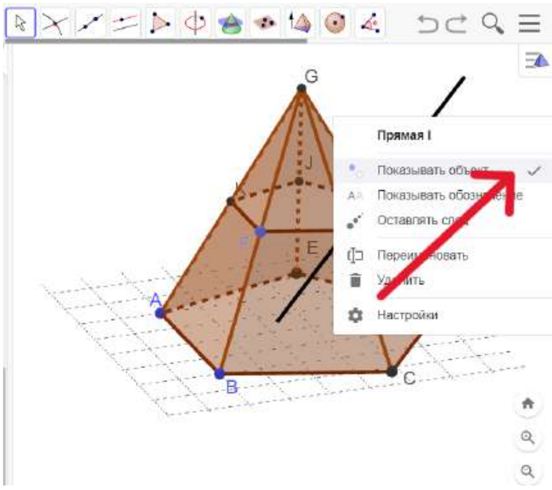


Рис. 8

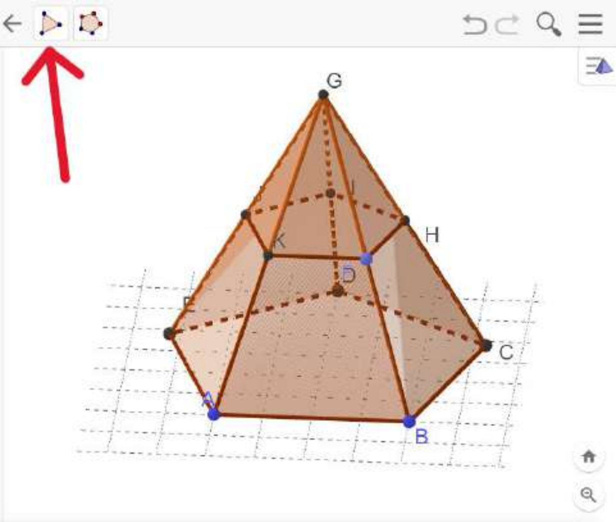


Рис. 9

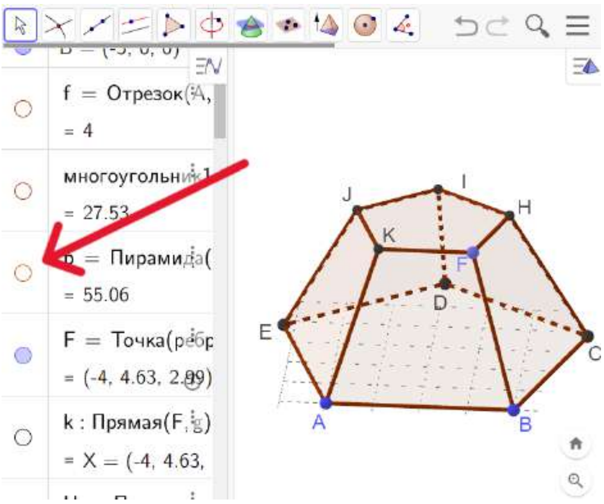


Рис. 10

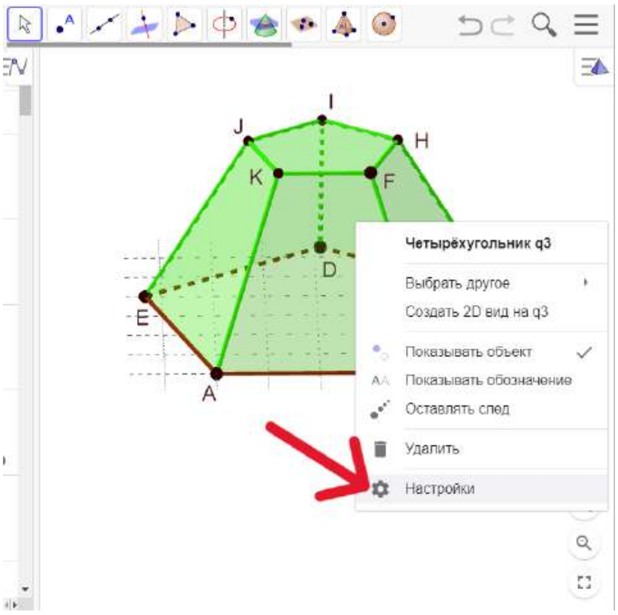


Рис. 11

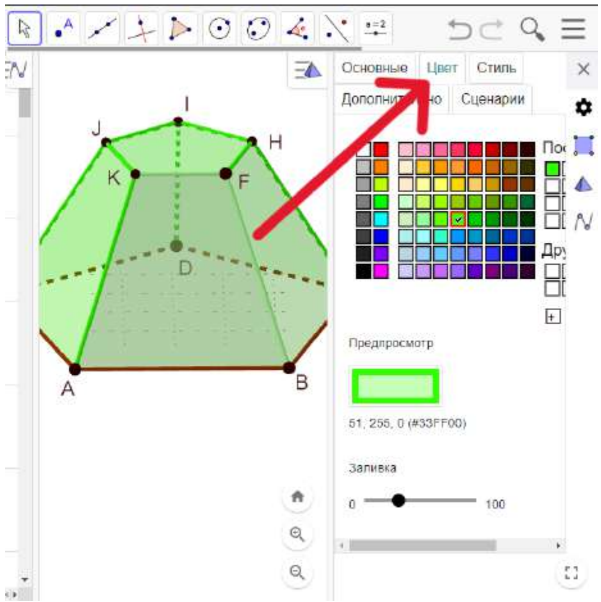


Рис. 12

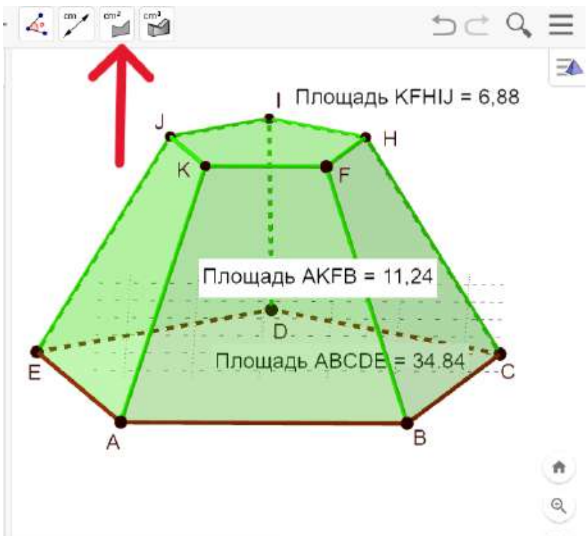


Рис. 13

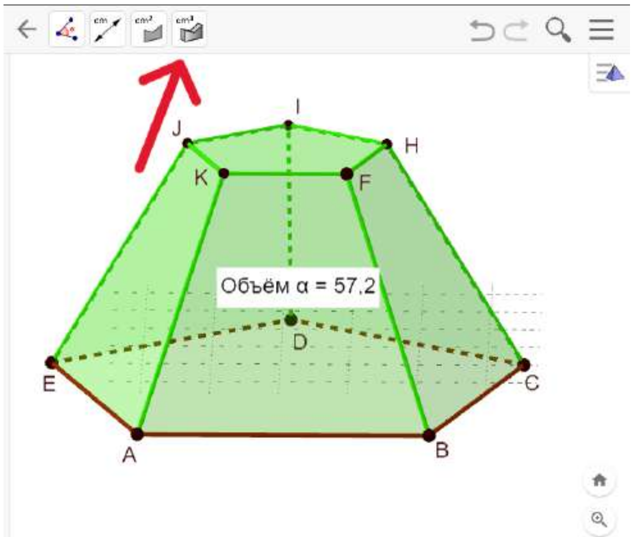


Рис. 14

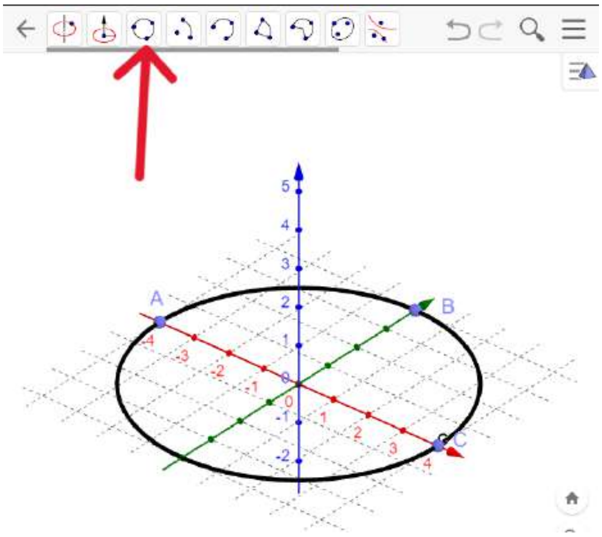


Рис. 15

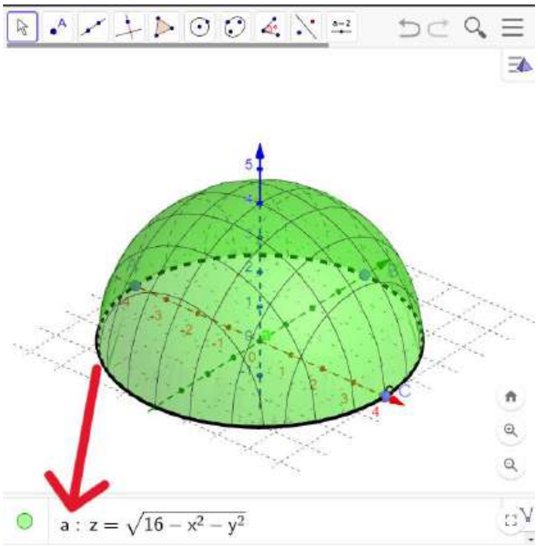


Рис. 16

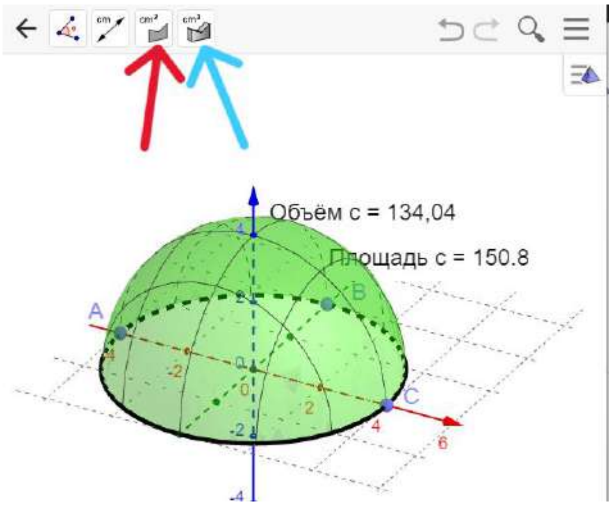


Рис. 17

Список литературы

Никулина Т.В., Стариченко Е.Б. Информатизация и цифровизация: понятия, технологии, управление // Педагогическое образование в России. 2018. № 8. С. 107-113.

Паршина А.Н. Развитие учебно-исследовательской деятельности школьников в процессе обучения геометрии // Инновационные технологии в математическом образовании: молодежная парадигма: сборник научных статей молодых исследователей. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2022. С. 40-49.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ: ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБУЧЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ УВЛЕКАТЕЛЬНОГО ОПЫТА

Соломенцева Е.С.[1]
Научный руководитель: ассистент Андропова О.Ю.[2]

[1,2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]liza1771@yandex.ru, [2]olya199612@bk.ru

Аннотация. В статье рассказывается о том, как применяется виртуальная реальность в обучении. На примерах из исследований в области медицины и образования показано, что обучение с применением VR даёт более глубокое понимание и усвоение материала по сравнению с классическими методами. Также в статье обсуждаются технические аспекты создания VR-пространств, использование разных языков программирования и платформ для разработки VR-приложений. Несмотря на то, что VR может кардинально изменить учебный процесс, есть фактор, который затрудняет широкое применение этой технологии в образовании.

Ключевые слова: Виртуальная реальность, VR, 3D-среда, компьютерное моделирование, иммерсивное обучение, образовательный процесс, погружение, практические навыки.

USING VIRTUAL REALITY: TRANSFORMING LEARNING THROUGH AN ENGAGING EXPERIENCE

Abstract. The article describes how virtual reality is used in teaching. Using examples from research in the field of medicine and education, it is shown that learning using VR provides a deeper understanding and assimilation of the material compared to classical methods. The article also discusses the technical aspects of creating VR spaces, the use of different programming languages and platforms for developing VR applications. Despite the fact that VR can radically change the educational process, there is a factor that makes it difficult to widely use this technology in education.

Keywords: Virtual reality, VR, 3D environment, computer modeling, immersive learning, educational process, immersion, practical skills.

Введение

Виртуальная реальность (Virtual Reality, VR) позволяет пользователю погрузиться в отличающееся от реального пространство и представляет собой «компьютерное моделирование 3D-среды, которая кажется человеку, взаимодействующему с ней исключительно реальной благодаря специальному оборудованию. Разработчики ставят задачу создать у пользователей ощущение присутствия в виртуальной среде» (Линовес, 2022).

Сегодня VR популярный инструмент во многих сферах, в том числе, в сфере образования. Это неудивительно, ведь за счет возможности погружаться в реалистичные и интерактивные цифровые среды улучшается взаимодействие с информацией, уровень понимания и восприятия данных становится более глубоким. В отличие от традиционных методов обучения, часто заключающихся в пассивном потреблении информации, VR поощряет активное участие и исследование. Мы можем изучать клетки, ткани и органы, проводить эксперименты с химическими компонентами или практиковать навыки языка. Сферы применения обучения с технологией VR не ограничены.

Методология исследования

«На сегодняшний день во всем уже существует немалое количество прецедентов внедрения технологий виртуальной реальности в учебный процесс:

– В Йельском университете при помощи VR-технологий были проведены тренировки по проведению хирургической операции на желчном пузыре. По результатам данного эксперимента было выявлено, что группа, которая в процессе тренировок использовала VR-технологии, оказалась примерно на 30% быстрее, а также совершала ошибки в 6 раз реже, чем обычная группа;

– Другое исследование ученые провели в Пекине под названием «Влияние виртуальной реальности на академическую деятельность». Детей разделили на две группы и начали преподавать одну и ту же дисциплину с одной разницей: в первой группе применялся классический метод, а во второй – с использованием технологий виртуальной реальности. В конце исследования провели тест, по результатам которого оказалось, что успехи в первой группе составляли 73%, а во второй – 93%. Помимо более высоких результатов первого теста, проведя второй тест спустя 2 недели, во второй группе также выявили, что у участников было более глубокое понимание темы, а также они смогли лучше усвоить материал» (Шорин, 2022).

Таким образом, исследования показали, что применение VR в обучении и образовании может привести к более высоким уровням понимания и усвоения материала по сравнению с традиционными подходами к обучению. Обучение с использованием VR является империческим, позволяет пользователям создавать более прочные когнитивные связи и воспоминания на основе пережитого опыта. Сложные понятия, которые ранее могли казаться абстрактными или труднодоступными, становятся более осязаемыми иммерсивной среде, что приводит к улучшению результатов обучения.

«Иммерсивность следует трактовать как «погружение», «вовлечение», «присутствие». Иммерсивность – это комплекс ощущений человека, находящегося в искусственно созданном трёхмерном мире, в котором можно выполнять различные манипуляции: менять точку обзора, приближать и удалять объекты, уменьшать и увеличивать их размеры, вращать в пространстве, изменять освещенность сцены» (Азевич, 2020).

Примером иммерсивного обучения в школе может служить урок ОБЖ, на котором рассматриваются правильные действия при возникновении пожара. Обучающийся, погруженный в VR-среду, может получить практические навыки по теме урока. Таким образом, урок станет значительно более полезным. Если обучающийся, имеющий опыт урока по ОБЖ с применением технологий виртуальной реальности, окажется в условиях реального пожара, то у него будет больше шансов спасти свою жизнь по сравнению с другим студентом, который традиционно послушал лекцию на эту тему. Добросовестно выученный материал в таких ситуациях, к сожалению, имеет меньший успех.

С VR-технологиями студенты медицинских университетов могли бы иметь возможность практиковаться в области хирургии, избегая рисков, связанных с реальными операциями. Врачи также могут использовать VR для разработки стратегии при проведении сложных и продолжительных операций. Это может повысишь шансы на успешное проведение многих сложных операций, которые до сих пор не удалость провести никому, либо удалось, но лишь единицам особо квалифицированных опытных специалистов. VR может произвести революцию в этой области медицины, улучшая обучение новых специалистов и облегчая практику уже состоявшихся. Примером успешного внедрения VR-технологий в сферу медицины служит конусно-лучевая компьютерная томография. «Конусно-лучевая компьютерная томография и плоскопанельные рентгеновские детекторы позволили интраоперационной 3D-визуализации занять свое достойное место в ортопедической и травматологической хирургии. Кроме помощи хирургам при проведении операций, технология привела к существенному снижению дозы облучения пациентов и врачей. С помощью 3D-визуализации редукция переломов, процедуры остеотомии и имплантации прослеживаются в безопасном режиме» (Зеленский, 2021).

Рассмотрим, каким образом создаются VR-пространства. Специалисты по разработке VR используют такие языки программирования, как C#, C ++, кроссплатформенную среду Unity и движок Unreal Engine.

C++ и C# — это языки программирования с C-подобным синтаксисом. C# является объектно-ориентированным и предназначен для программирования на платформе «.NET». C++ не ограничен платформой «.NET», является языком общего назначения, совместимый в большинстве случаев с C.

Unity — это среда разработки от компании Unity Technologies. Unity позволяет создавать приложения, которые могут работать на компьютерах и ноутбуках, игровых консолях, смартфонах и т.д. Популярность Unity для VR-разработки обусловлена наличием визуальной среды разработки (Рис. 1); способностью ПО, созданного в Unity, работать с несколькими аппаратными платформами или операционными системами; модульной системой компонентов, что означает наличие в структуре программы множества подзадач со своим модулем. Модульность в разработке крупных и обширных программных решений, на реализацию которых требуется множество специалистов, полезно облегчением разделения задач между программистами и в т.ч. уменьшением объема кода программы, улучшением структуры кода, т.е. его читаемости.

Unreal Engine крайне популярен среди разработчиков по причине своей бесплатности и универсальности платформы. При этом функционал Unreal Engine позволяет реализовать даже то, что недоступно на других бесплатных движках.

Все эти средства необходимы для создания программ с виртуальным пространством, будь то компьютерная игра, 3D-карта города или средства для обучения, которые мы рассматриваем. В наше время существуют следующие популярные готовые VR-продукты для обучения:

Лаборатории «Virtual laboratories» для проведения экспериментов в различных отраслях физики, химии и пр.;

Решение, позволяющее изучить клетки изнутри от «XReady Lab»;

«AeroFlyFS», позволяющее «исследовать небо с потрясающим уровнем детализации и сложной моделью динамики полета для достижения максимального реализма» (AeroFlyFS Flight Simulator) ;

«Lithodomos VR», специализирующееся «на создании виртуальной реальности для изучения объектов древнего культурного наследия» (Lithodomos VR).

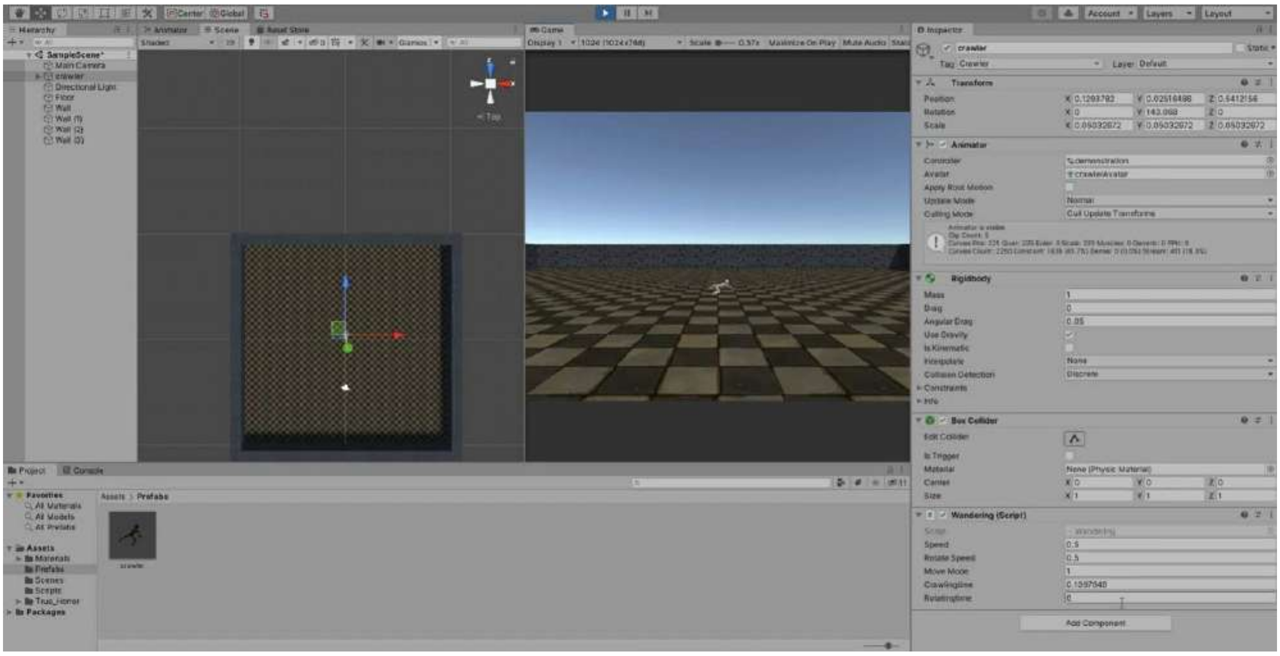


Рис. 1. Виртуальная среда разработки в Unuty

Результаты

Вышеперечисленные продукты – только малая часть среди всех имеющихся. Виртуальная реальность действительно является популярным направлением для разработки, в которое углубляются как новички, вдохновленные VR для обучения программированию, так и опытные специалисты, рассматривающие VR как средство для реализации своей давней цели. Но реально ли широкое использование хотя бы части из существующих VR-программ для обучения? Пусть для некоторых VR-продуктов и достаточно современного смартфона, для полного погружения требуется производительное оборудование, способное поддерживать графику на должном уровне. Однако такое оборудование стоит довольно дорого, что препятствует его широкому распространению в образовательной сфере и полноценному включению в учебный процесс. Кроме производительных графических карт могут потребоваться шлем или очки виртуальной реальности. Также следует учитывать, что данная технология развивается быстро, и также быстро устаревает дорогостоящее оборудование, требующее замены и апдейта.

Заключение

В заключение отметим, что виртуальная реальность может быть действительно ценным инструментом в сфере образования. Уже есть множество результатов внедрения VR в процесс обучения с положительными результатами. Однако, одним из главных факторов, мешающих внедрению данной технологии в обучение, является дороговизна. Отметим, что по мере своего развития технологии часто становятся более доступными среднестатистическому пользователю. И так как потенциал виртуальной реальности революционизировать учебный опыт остается многообещающим, в будущем вполне можно обнаружить данную технологию как что-то столь же нам сегодня привычное, как интерактивная доска, казавшаяся предметом из научной фантастики несколько десятков лет назад.

Список литературы

Линовес Д. Виртуальная реальность в Unity. М.: ДМК Пресс, 2022. С. 316.

Шорин В.Д., Наумов А.Э., Бровкин В.Ю. Исследование возможностей применения технологий виртуальной реальности в образовательном процессе // Известия ТулГУ. Технические науки. 2022. № 9.

Азевич А.И. Иммерсивные образовательные среды: проектирование, конструирование, использование // Материалы IV Международной конференции «Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании». Красноярск, 2020. С. 566.

Зеленский М.М., Рева С.А., Шадеркина А.И. Виртуальная реальность (VR) в клинической медицине: международный и российский опыт [Электронный ресурс] // Российский журнал телемедицины и электронного здравоохранения 2021. 7(3):7-20. – Режим доступа: https://doi.org/10.29188/2712-9217-2021-7-3-7-20

AeroFlyFS Flight Simulator. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://www.aerofly.com (дата обращения: 24.04.2024).

Lithodomos VR [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://www.cbinsights.com/company/lithodomos-vr (дата обращения: 24.04.2024).

РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Стесик И.А.[1]
Научный руководитель: к. п. н., доцент Азевич А. И.[2]

[1, 2]*Московский городской педагогический университет*

e-mail: [1]stesikia@mgpu.ru, [2]azevichai@mgpu.ru

Аннотация. В рамках данной статьи представлено исследование по разработке приложения дополненной реальности для визуализации задач по стереометрии. Основная цель разработки заключается в повышении наглядности и интерактивности учебного процесса, что способствует улучшению пространственного мышления учащихся. В статье рассмотрены современные концепции обучения стереометрии, проанализированы существующие средства визуализации, и представлены методические рекомендации по использованию разработанного приложения. Экспериментальная проверка показала положительное влияние использования приложения на образовательный процесс.

Ключевые слова: дополненная реальность, стереометрия, пространственное мышление, визуализация, образовательное приложение, 3D-модели, методические рекомендации.

DEVELOPMENT OF AN AUGMENTED REALITY APPLICATION FOR VISUALIZING STEREOMETRY PROBLEMS

Abstract. This article presents a study on the development of an augmented reality application for visualizing stereometry problems. The main goal of the development is to enhance the clarity and interactivity of the educational process, thereby improving students' spatial thinking. The article examines modern concepts of stereometry teaching, analyzes existing visualization tools, and provides methodological recommendations for using the developed application. Experimental verification showed a positive impact of the application's use on the educational process.

Keywords: augmented reality, stereometry, spatial thinking, visualization, educational application, 3D models, methodological recommendations.

Введение

Формирование пространственного мышления является одной из ключевых задач математического образования, однако, далеко не всегда ей уделяется должное внимание. Особенно это касается школьного курса геометрии, где основной акцент делается на двумерные объекты, в то время как изучение стереометрии, то есть трехмерных фигур, остается на периферии образовательного процесса. В 7–9-х классах школьники практически не взаимодействуют с объемными фигурами, что негативно сказывается на развитии их пространственного воображения и навыков.

Стереометрия представляет собой важный раздел геометрии, изучающий свойства объемных фигур, и требует развитого пространственного мышления. Понимание пространственных отношений и возможность визуализировать геометрические фигуры в трех измерениях является необходимым навыком для успешного освоения стереометрии. Однако, большинство учащихся сталкиваются с трудностями при изучении этой темы, что связано с недостаточной наглядностью традиционных методов обучения.

Современные технологии, такие как дополненная реальность (AR), открывают новые возможности для повышения наглядности и интерактивности образовательного процесса. Дополненная реальность позволяет объединять виртуальные объекты с реальным окружением, создавая уникальный учебный опыт, который способствует лучшему пониманию и запоминанию сложных концепций. В связи с этим возникает необходимость разработки и внедрения образовательных приложений, использующих технологию дополненной реальности для визуализации задач по стереометрии.

Данная статья посвящена исследованию и разработке приложения дополненной реальности для визуализации задач по стереометрии. Основная цель разработки заключается в создании инструмента, который позволит учащимся более эффективно изучать объемные фигуры, улучшая их пространственное мышление и навыки решения задач. В статье рассмотрены современные концепции обучения стереометрии, проведен анализ существующих средств визуализации, и приведены результаты экспериментальной проверки разработанного приложения.

Методология исследования

Цели и задачи

Целью данного исследования является разработка приложения дополненной реальности для визуализации задач по стереометрии и формулирование методических рекомендаций по его использованию. Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить современные концепции обучения стереометрии и существующие средства визуализации задач.
2. Провести анализ существующих средств обучения стереометрии, основанных на технологиях дополненной реальности.
3. Сформулировать функциональные требования к разрабатываемому приложению.
4. Разработать и протестировать приложение дополненной реальности для визуализации задач по стереометрии.

Методы и методики исследования

Для выполнения поставленных задач были использованы следующие методы исследования:

1. Анализ литературных источников по теме использования дополненной реальности в образовании и обучении стереометрии.
2. Сравнительный анализ существующих AR-приложений для обучения геометрии.

3. Разработка программного обеспечения с использованием платформы Unity и технологии ARKit.
4. Экспериментальная проверка разработанного приложения в образовательном процессе.
5. Анкетирование и сбор отзывов пользователей для оценки эффективности приложения.

Гипотеза

Основная гипотеза исследования заключается в том, что использование приложения дополненной реальности в процессе обучения стереометрии способствует повышению уровня знаний учащихся, развитию их пространственного мышления и увеличению интереса к изучению геометрии.

Разработка и реализация приложения

Анализ существующих решений

Современные технологии визуализации стереометрии включают в себя традиционные методы (статические изображения, диаграммы), физические модели, компьютерное моделирование и визуализацию, а также использование виртуальной и дополненной реальности (AR). Каждая из этих технологий имеет свои преимущества и ограничения.

Традиционные методы, такие как статические изображения и диаграммы, являются наиболее доступными, но ограничены в своей способности передать объемные свойства объектов. Физические модели позволяют учащимся визуализировать и манипулировать трехмерными объектами, но их использование часто ограничено стоимостью и трудностями в создании. Компьютерное моделирование и виртуальная реальность предоставляют мощные инструменты для визуализации и анализа стереометрических задач, однако они требуют специального оборудования и навыков работы с программным обеспечением.

Дополненная реальность (AR) объединяет виртуальные объекты с реальным окружением, предоставляя уникальные возможности для интерактивного обучения. AR-приложения позволяют учащимся наблюдать и взаимодействовать с трехмерными объектами в режиме реального времени, что способствует лучшему пониманию и запоминанию сложных геометрических концепций.

В рамках данного исследования был проведен анализ существующих AR-приложений для обучения геометрии, таких как Arloon Geometry, Stereometry AR, Shapes 3D, Geometry AR и Construct3D. Эти приложения предоставляют разнообразные функции для визуализации и взаимодействия с геометрическими фигурами, однако не полностью удовлетворяют потребностям учащихся и преподавателей.

Формирование концепции приложения

Целью разработки приложения является создание интерактивного инструмента для визуализации задач по стереометрии с использованием технологии дополненной реальности. Основные функции приложения включают в себя:

1. Визуализация 3D-моделей геометрических фигур.
2. Интерактивное взаимодействие с объектами (поворот, масштабирование, перемещение).
3. Автоматическое распознавание поверхностей для размещения фигур.
4. Предоставление задач по стереометрии и автоматическая проверка ответов.
5. Удобный пользовательский интерфейс, адаптированный для школьников.

Техническая реализация

Для разработки приложения была выбрана платформа Unity, которая предоставляет широкий набор инструментов для создания 3D-моделей и интерактивных сцен. Технология ARKit была использована для реализации функций дополненной реальности, таких как распознавание поверхностей и отслеживание позиции устройства.

Основные этапы разработки включали:

1. Создание 3D-моделей геометрических фигур и их импорт в Unity.
2. Разработка пользовательского интерфейса, включающего главное меню, сцены для работы с AR и задачи по стереометрии.
3. Написание скриптов на языке C# для обеспечения взаимодействия с 3D-объектами и реализации функционала приложения.
4. Тестирование приложения на различных устройствах с операционной системой Android 7.0 и выше.

Пример интерфейса главного меню приложения и AR-сцены представлен на рисунках 1 и 2.

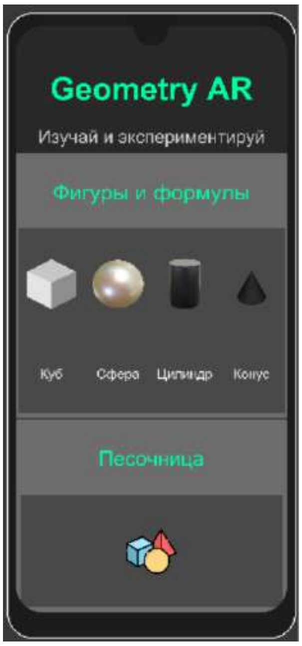


Рис. 1. Меню разрабатываемого приложения

Рис. 2. Пример интерфейса сцены для расположения нескольких фигур

Приложение позволяет учащимся выбирать геометрические фигуры, визуализировать их в реальном окружении и решать задачи по стереометрии с автоматической проверкой ответов. Это способствует развитию их пространственного мышления и повышению интереса к изучению геометрии.

Экспериментальная проверка и результаты

Методика проверки

Для оценки эффективности разработанного приложения дополненной реальности была проведена экспериментальная проверка, включающая несколько этапов:

1. **Подготовительный этап**: выбор учебного заведения и группы учащихся для проведения эксперимента. Было выбрано две группы учеников 10-го класса, изучающих курс стереометрии.
2. **Проведение эксперимента**: одна группа (экспериментальная) использовала AR-приложение для изучения стереометрических задач, в то время как другая группа (контрольная) обучалась традиционными методами. Эксперимент длился в течение одного учебного месяца.
3. **Сбор данных**: проведение тестирования до и после эксперимента для оценки уровня знаний учащихся по стереометрии. Также был проведен опрос для сбора обратной связи от учеников и преподавателей.

Результаты эксперимента

Результаты тестирования показали значительное улучшение уровня знаний учащихся экспериментальной группы по сравнению с контрольной группой. Средний балл по тесту у учащихся, использовавших AR-приложение, увеличился на 20% по сравнению с их результатами до эксперимента. В контрольной группе средний балл увеличился только на 10%.

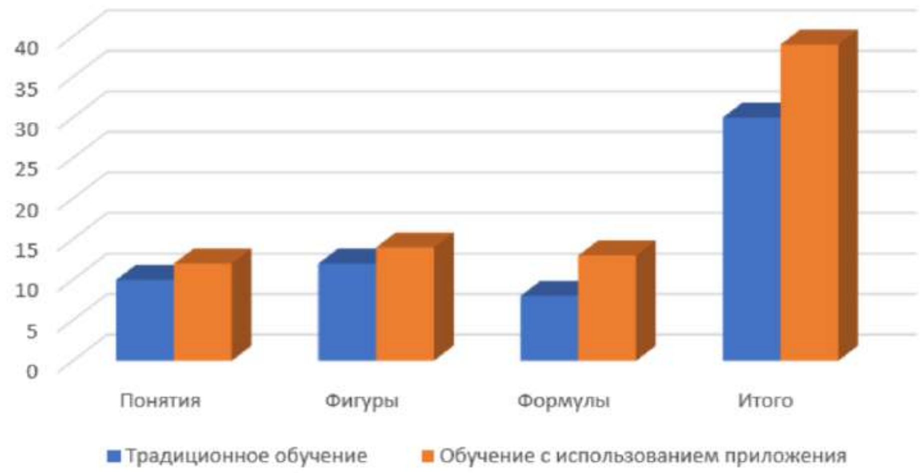


Рис. 3. Диаграмма сравнения результатов тестирования обучающихся средней школы

Таблица 1.
Результаты эксперимента

Группа	Средний балл до эксперимента	Средний балл после эксперимента	Прирост, %
Экспериментальная	60	80	20
Контрольная	60	70	10

Анализ результатов

Анализ результатов тестирования и отзывов учащихся показал следующие ключевые выводы:

1. **Повышение уровня знаний**: использование AR-приложения способствовало лучшему пониманию и запоминанию сложных концепций стереометрии, что отразилось на результатах тестирования.
2. **Развитие пространственного мышления**: учащиеся экспериментальной группы отметили, что визуализация объемных фигур в реальном окружении помогла им лучше понять пространственные отношения и свойства геометрических фигур.
3. **Увеличение интереса к предмету**: использование интерактивных технологий повысило мотивацию учащихся к изучению стереометрии и геометрии в целом. Многие из них выразили желание продолжить использование подобных приложений в учебном процессе.
4. **Положительные отзывы преподавателей**: учителя отметили, что использование AR-приложения значительно упростило объяснение сложных тем и повысило вовлеченность учащихся в учебный процесс.

Заключение

В ходе исследования и разработки приложения дополненной реальности для визуализации задач по стереометрии были достигнуты следующие основные выводы:

1. **Эффективность использования AR-технологий**: использование дополненной реальности в процессе обучения стереометрии показало значительное улучшение уровня знаний учащихся, развитие их пространственного мышления и увеличение интереса к предмету.
2. **Положительные отзывы учащихся и преподавателей**: результаты эксперимента и отзывы пользователей подтвердили высокую эффективность и востребованность разработанного приложения.

Разработанное приложение представляет собой мощный инструмент для обучения стереометрии, который может быть успешно использован в образовательных учреждениях для улучшения качества и наглядности учебного процесса.

Список литературы

Анисимов А.М. Работа в системе дистанционного обучения Moodle: учебное пособие. Харьков: ХНАГХ, 2009.

Матвеева Э.Ф. Самообразование – важнейшая сфера профессионально-методической подготовки будущего преподавателя: монография. Астрахань: ИД «Астраханский университет», 2007.

Пережовская А.Н. Непрерывное образование: цели, задачи, содержание, функции, перспективы развития // Проблемы и перспективы развития образования: материалы VI Междунар. науч. конф. (г. Пермь, апрель 2015 г.). Пермь: Меркурий, 2015. С. 38-41.

Martin-Blas T., Serrano-Fernandez A. The role of new technologies in the learning process: Moodle as a teaching tool in Physics [Электронный ресурс] // Computers & Education. 2009.

Готовность личности к самообразованию [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://journalpro.ru/articles/gotovnost–lichnosti–k–samoobrazovaniyu/ (дата обращения: 16.03.2023).

ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ В ЭПОХУ ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ: ПРОБЛЕМЫ И ОГРАНИЧЕНИЯ

Черных П.А.[1]
Научный руководитель: к. п. н., доцент Сафронова Т.М.[2]

[1,2]Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

e-mail: [1]pavel.chernykh24@mail.ru, [2]stm657@mail.ru

Аннотация. Данная статья обращает внимание на то, что дистанционное обучение становится всё более популярным в эпоху цифровизации. Однако, не смотря на это, существуют проблемы и ограничения, затрудняющие эффективное обучение школьников математике дистанционным путём. В статье исследуются пять категорий проблем (содержательные, психолого-педагогические, методические, организационные, методологические), которые возникают при переходе от традиционной формы обучения математике к дистанционной, а также предлагаются возможные пути их решения. Особое внимание уделяется ограничениям дистанционного обучения, среди которых выделяются особенности Интернет-общения, технические характеристики сети Интернет и индивидуальные особенности обучающихся. В статье описываются последствия, к которым приводят данные ограничения, отмечается, что успешное преодоление проблем дистанционного обучения невозможно без учёта его ограничений. В статье даётся определение термина «дистанционное обучение», отмечаются его характерные черты (независимость процесса обучения от времени и места, расстояние между обучающимися, опора на самообучение, постоянное взаимодействие между обучающимися через информационно-образовательную среду), выделяются основные компоненты информационно-образовательной платформы, рассматривается понятие «идеальный цифровой ресурс» и отмечаются критерии его доступности (лёгкость в использовании и загрузке, необходимость установки дополнительного программного обеспечения). Делается вывод, что дистанционное обучение математике в эпоху цифровизации в общеобразовательной школе, несмотря на все преимущества, имеет также некоторые проблемы и ограничения, но использование соответствующих методик и инструментов позволит преодолеть имеющиеся трудности и обеспечить эффективное и качественное обучение математике дистанционным путём.

Ключевые слова: дистанционное обучение, цифровизиция образования, цифровой ресурс, информационно-образовательная среда, обучение математике.

DISTANCE TEACHING MATHEMATICS IN GENERAL EDUCATION SCHOOL IN THE AGE OF DIGITALIZATION OF EDUCATION: PROBLEMS AND LIMITATIONS

Abstract. This article draws attention to the fact that distance learning is becoming increasingly popular in the era of digitalization. However, despite this, there are problems and limitations that make it difficult for schoolchildren to effectively teach mathematics remotely. The article examines five categories of problems (substantive, psychological and pedagogical, methodological, organizational, methodological) that arise during the transition from the traditional form of teaching mathematics to distance learning, and also suggests possible ways to solve them. Particular attention is paid to the limitations of distance learning, among which are the features of Internet communication, technical characteristics of the Internet and individual characteristics of students. The article describes the consequences that these limitations lead to, noting that successfully overcoming the problems of distance learning is impossible without taking into account its limitations. The article defines the term “distance learning”, notes its characteristic features (independence of the learning process from time and place, distance between students, reliance on self-learning, constant interaction between students through the information and educational environment), identifies the main components of the information and educational platform, the concept of “ideal digital resource” is considered and the criteria for its accessibility are noted (ease of use and download, the need to install additional software). It is concluded that distance learning in mathematics in the era of digitalization in secondary schools, despite all the advantages, also has some problems and limitations, but the use of appropriate methods and tools will overcome the existing difficulties and ensure effective and high-quality teaching of mathematics via distance learning.

Keywords: distance learning, digitalization of education, digital resource, information and educational environment, mathematics teaching.

Введение. В современном мире процессы цифровизации затрагивают многие сферы жизни общества. Не является исключением и образование. В последнее время интеграция цифровых технологий в систему образования становится всё более и более распространённым явлением. Она затрагивает многие её аспекты, в том числе общеобразовательные предметы, такие как математика. Дистанционная форма обучения, позволяющая получить доступ к учебным материалам и возможность выполнения заданий с помощью различных онлайн-платформ, служит основным инструментом процесса цифровизации. Модернизация системы дистанционного обучения является частью становления открытого образовательного пространства. Но, несмотря на то, что дистанционное образование набирает популярность, возникает ряд трудностей при его применении в рамках преподавания математики.

Основная часть. В данной статье мы рассмотрим основные проблемы и ограничения, связанные с организацией дистанционного обучения математике в общеобразовательной школе в эпоху цифровизации образования.

В работах многих отечественных и зарубежных исследователей понятие «дистанционное обучение» рассматривается с разных сторон. Хотя трактовки данного термина значительно различаются в работах учёных, все они обладают некоторыми общими характеристиками, среди которых можно выделить следующие:

– независимость образовательного процесса от времени и места нахождения обучающегося;

– нахождение обучающихся на расстоянии между собой;

– опора на самостоятельное обучение, крайней степенью которого служит самообразование;

– регулярное взаимодействие между участниками учебного процесса через информационно-образовательную среду (Снегурова, 2009).

Основываясь на анализе различных толкований термина «дистанционное обучение» и учитывая специфику учебного процесса в школе, под «дистанционным обучением» будем понимать «систему обучения, которая построена на коммуникации участников учебного процесса, осуществляющейся не посредством их прямого контакта, а преимущественно через специализированную информационно-образовательную среду, а также отражает все компоненты учебного процесса (цели, содержание, организационные формы и средства обучения) особыми возможностями информационно-коммуникационных технологий (ИКТ)» (Полат, 2020).

Информационно-образовательная платформа должна быть призвана:

- обеспечивать взаимодействие всех участников процесса обучения (ученики, родители, сетевой учитель, методист, куратор, психолог и др.);
- предоставлять доступ к виртуальным учебным материалам, включающим в себя практические задания, доступ к дополнительным информационным ресурсам, проверочным и контрольным работам и т.д.

Такая платформа способствует получению учащимися знаний, развитию умений и навыков посредством самостоятельной или управляемой сетевым учителем деятельности.

Большинство исследователей в своих трудах рассматривают дистанционное обучение как способ получения образования для обучающихся высших учебных заведений. Однако, стоит отметить, что в настоящее время дистанционная форма обучения становится всё более востребована и у школьников, которые по той или иной причине не могут посещать учебное заведение. Кроме того, зачастую, онлайн-обучение является не просто альтернативой традиционной форме получения образования, но и входит с ней в успешный «симбиоз». Дистанционная форма обучения может стать полезной, например, при построении образовательного процесса для обучающихся, которые временно пропускают школу по состоянию здоровья. Она позволяет сделать образовательный процесс уникальным и соответствующим дистанционным требованиям, позволяя учитывать индивидуальные особенности и потребности каждого ученика, а также способствует эффективному решению различных образовательных задач и преодолению проблем, с которыми могут столкнуться школьники при обучении.

Важность решения вопросов, связанных с внедрением дистанционного обучения и его элементов в систему среднего образования, становится всё более очевидной. Это требует создания методической базы для онлайн-обучения, что особенно актуально в области точных наук, в частности математики. Анализ теоретических исследований и практического опыта использования дистанционных образовательных технологий позволяет выделить несколько категорий проблем, которые необходимо решить для успешной интеграции дистанционного обучения в образовательный процесс.

1) Содержательные. Эта категория проблем затрагивает разработку методик для создания педагогических инструментов для онлайн-обучения, которые акцентируют внимание на индивидуальных особенностях учащихся, особенностях изучаемого материала, предлагают различные варианты в освоении образовательной программы и разработке индивидуальных планов обучения по каждой учебной дисциплине.

В рамках этой категории можно обозначить следующие проблемы:

– выбор практических заданий и способов их решения, соответствующих отличительным чертам онлайн-обучения;

– создание условий для ведения деятельности, соответствующей особенностям математики как науки и позволяющей успешно заниматься ею;

– выбор структуры дистанционного курса;

– отбор методов и форм отображения математического материала;

– отбор и организация теоретической информации.

2) Психолого-педагогические. Данная категория проблем включает в себя требование поиска и создания структуры методов, которые будут способны организовать процесс дистанционного обучения, обращая внимание на

личностные характеристики школьников, и построить персональные пути изучения каждого предмета.

В этой категории можно отметить следующие проблемы:

– нацеленность образовательного процесса на индивидуальный стиль усвоения материала;

– анализ перспектив организации онлайн-обучения с помощью новаторских дидактических подходов и оценки продуктивности такого рода организации.

3) Методические. Данная категория проблем связана с созданием и использованием методов и подходов для достижения установленных целей в образовательной деятельности.

Среди основных проблем данной категории можно выделить следующие:

– разработка продуктивных методик планирования онлайн-обучения;

– создание единой системы форм и средств онлайн-обучения основным школьным предметам, которая передавала бы особенности дистанционного обучения и отвечала индивидуальным возможностям школьников в изучении материала определённой дисциплины;

– потребность в создании оптимальной системы диагностики для оценки уровня знаний и умений школьников и мониторинга их развития в процессе дистанционного обучения;

– подготовка учебных материалов для методической поддержки педагогов, работающих в дистанционном формате.

4) Организационные. Данная категория проблем включает в себя анализ возможностей создания и внедрения разных схем построения дистанционного образования, а также совместной работы обучающихся в ходе онлайн-обучения. Также здесь важно уделить внимание мотивации и стимулированию школьников, организации благоприятной обстановки для обучения на расстоянии. В контексте данной категории проблем, помимо вышесказанного, следует учесть технологические особенности организации онлайн-обучения, к которым относятся выбор платформы, проектирование учебных материалов и предоставление доступа к необходимым ресурсам.

5) Методологические. Эта категория проблем охватывает определение принципов создания методических концепций онлайн-обучения основным школьным предметам и подсистемы методической поддержки преподавателя, который обучает на расстоянии, и идентификационно-контрольной подсистемы (Снегурова, 2009). Также в данную категорию проблем входит необходимость изучения связи между компонентами методической системы онлайн-обучения.

Преодолеть все вышеуказанные проблемы возможно, если взять во внимание существующие в контексте дистанционного образования ограничения. Среди наиболее значимых из них можно выделить следующие:

1. Особенности Интернет-общения (нехватка зрительного взаимодействия, общение с задержкой, недостаток возможностей передачи собственных идей и т.п.). Стоит отметить, что теоретические разработки для онлайн-обучения иногда трудно осуществимы на практике или же не

реализуемы вовсе, а планы занятий для традиционной формы обучения не всегда соответствуют дистанционным занятиям, и потому возникают сложности в их корректировке.

2. Технические характеристики сети Интернет (низкая скорость передачи данных и непостоянство связи).

3. Индивидуальные особенности школьников (потребность в высокой степени самостоятельности и мотивации).

Отметим, что понятие «идеальный цифровой ресурс» подразумевает, что доступ к нему должен быть у каждого школьника, даже не смотря на низкую скорость сети Интернет. В свою очередь, доступность ресурса будет оцениваться по следующим критериям: простота загрузки и использования, необходимость установки дополнительного программного обеспечения (ПО) (Снегурова, 2009).

Все перечисленные ограничения приводят к тому, что, зачастую, в конечном итоге мы предпочитаем создавать онлайн-курсы, которые имеют строго последовательную структуру и предполагают определённый метод освоения материала. В рамках школьного математического образования это выражается в ориентации на определённый учебник. Но данный подход не позволяет целиком и полностью создавать индивидуальный образовательный маршрут для каждого школьника, что является особенно важным для старшеклассников в контексте профильного обучения.

Также ограничения дистанционного обучения приводят к недостаточному количеству мультимедийных фрагментов и интерактивных вставок в сетевых курсах, что в свою очередь мешает преодолеть проблему направленности ресурса на индивидуальную психофизиологическую форму воспитания.

Помимо всего вышесказанного, стоит отметить, что немаловажно обращать внимание на ограничения онлайн-обучения и при решении методических вопросов, таких как учёт персональных предпочтений школьников, применение различных педагогических подходов и формирование индивидуальной программы усвоения математического материала. На всём вышеперечисленном может негативно сказаться, например, линейное построение материала, ограниченность содержания и форм его представления и слабая интерактивность.

Заключение. Можно отметить, что дистанционное обучение математике в общеобразовательной школе в эпоху цифровизации образования, несмотря на свои достоинства, имеет определённые проблемы и ограничения. Тем не менее, с повышением доступности сети Интернет и модернизацией современных технологий данная форма обучения становится всё более популярной и продуктивной. В образовательных учреждениях, в частности школах, с каждым разом всё чаще осуществляются проекты по интеграции цифровых образовательных платформ и программ, предоставляющих эффективные инструменты и ресурсы для изучения математики. Развитие технологических возможностей и создание инновационных электронных платформ и модернизация методов обучения задают тенденцию к успешному преодолению проблем и ограничений онлайн-обучения. Таким образом, дистанционное обучение математике продолжает своё развитие и совершенствование, положительным образом влияя на эффективность и качество образования.

Список литературы

Полат Е.С. и др. Педагогические технологии дистанционного обучения: учебное пособие для вузов; под ред. Е.С. Полат. 3-е изд. М.: Изд-во Юрайт, 2020.

Снегурова В.И. Проблемы и ограничения дистанционного обучения математике // Вестник Новгородского государственного университета. 2009. № 53. С. 57-60.

ПОПУЛЯРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОПЫТ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ В РОССИИ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ СОВРЕМЕННЫХ ШКОЛЬНИКОВ

Беба Д.Н.[1]
Научный руководитель: д.п.н., профессор Саввина О.А.[2]

[1, 2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]qup95@mail.ru, [2]oas5@mail.ru

Аннотация. В исследовании рассматривается историко-методический опыт преподавания арифметики в России в XVIII–XX веках в контексте развития мотивации современных школьников к изучению математики. В качестве ведущего приема обучения математике предлагается историзация. Выявлены критерии сформированности мотивации, разработаны учебно-методические материалы по арифметике на основе учебников XVIII века. В статье приводятся результаты опытно-экспериментальной работы и анкетирования, которые подтверждают эффективность использования дореволюционнного опыта преподавания арифметики в формировании мотивационной сферы современных школьников.

Ключевые слова: историко-методический опыт, арифметика, мотивация, методическая система, обучение делению, историзация.

HISTORICAL EXPERIENCE OF TEACHING ARITHMETIC IN RUSSIA AS A MEANS OF DEVELOPING MOTIVATION IN MODERN SCHOOLCHILDREN

Abstract. The study examines the historical and methodological experience of teaching arithmetic in Russia in the 18th-20th centuries in the context of the development of motivation of modern schoolchildren to study mathematics. Historicization is proposed as a leading teaching technique for mathematics. The criteria for the formation of motivation have been identified, and educational and methodological materials on arithmetic based on 18th-century textbooks have been developed. The article presents the results of experimental work and questionnaires that confirm the effectiveness of using the pre-revolutionary experience of teaching arithmetic in the formation of the motivational sphere of modern schoolchildren.

Keywords: historical and methodological experience, arithmetic, motivation, methodological system, teaching division, historization.

В современных условиях информационной насыщенности образовательного пространства возрастает роль самостоятельной работы обучающихся, их мотивация становится основополагающим фактором результативности обучения.

В течение почти двух столетий арифметика изучалась в отечественной средней школе как самостоятельный учебный предмет. За это время накопился богатый историко-методический опыт, который до настоящего время не подвергался глубокому анализу. Вместе с тем именно арифметику ученики прошлого столетия нередко признавали самым интересным из школьных предметов.

Возникает проблема: насколько востребован исторический опыт обучения арифметике в современных условиях формирования мотивационной сферы обучающихся?

Отечественное математическое образование долгое время представляло собой пример для национальной гордости. На это указывали Ю.М. Колягин (Колягин, 2001), Т.С. Полякова (Полякова, 2002), И.Ф. Шарыгин (Шарыгин, 2007), С.М. Никольский (Никольский, 2005) и многие другие математики-методисты. Кроме того, актуальный на сегодняшний день проблемный подход в обучении, личностно-ориентированная направленность и прочие составляющие учебного процесса весьма созвучны с идеями дореволюционных и советских математиков-методистов. В дореволюционное время в методике преподавания математики были получены существенные результаты, не потерявшие актуальности и в настоящее время. Советская методика обучения математике позволяла повышать познавательную активность и формировать мотивационную сферу на протяжении всех ступеней обучения.

Отсюда следует, что совершенствование системы образования предполагает изучение и обобщение научно-методического наследия предшественников и практическое применение исторического опыта в современной школе.

К методическому наследию дореволюционных педагогов-математиков обращались Т.К. Авдеева (Авдеева, 2008), Ю.М. Колягин, Г.В. Кондратьева (Кондратьева, 2013), А.В. Ланков (Ланков, 1951), В.Е. Прудников (Прудников, 1964), Т.С. Полякова, О.А. Саввина (Саввина, 2007), А.П. Юшкевич (Юшкевич, 1982) и др., но проблема истории развития научно-методических идей в преподавании арифметики в контексте повышения мотивации к изучению математики, как целостного и многогранного явления не стала предметом специального исследования. Отсутствие в историко-методической литературе специальных исследований, которые раскрывали бы, сопоставляли и анализировали влияния различных методов обучения арифметике на мотивационную сферу обучающихся, и определило выбор темы диссертации.

Степень разработанности темы исследования. Проблема использования исторического опыта в обучении математике находилась в центре внимания исследований дореволюционных и советских авторов И.К. Андронова (Андронов, 1957), Д.Д. Галанина (Галанин, 1914), Б.В. Гнеденко (Гнеденко, 1946), А.С. Пчелко (Пчелко, 1951), А.В. Ланкова и др.

Частные вопросы методики преподавания арифметики в школе отражены в трудах И.И. Баврина (Баврин, 2015), А.И. Гольденберга (Гольденберг, 1885), Н.С. Истоминой (Истомина, 2009), Ю.М. Колягина (Колягин, 1977), М.И. Моро (Моро, 1965), А.М. Пышкало (Пышкало, 1966) и др.

В работах и диссертационных исследованиях Ю.А. Дробышева (Дробышев, 2011), Т.С. Поляковой (Полякова, 1998), М.А. Скоробогатой

(Скоробогатая, 1973) обосновывается необходимость и целесообразность включения элементов истории науки в школьный курс математики.

При этом применение исторического опыта в решении проблемы повышения мотивационной сферы обучающихся математике находится вне сферы внимания ученых. Под мотивационной сферой обучающихся, по мнению И.А. Макарычевой, понимается интерес обучающихся к учебным занятиям в общем смысле, а также сформированное осознанное отношение к самим учебным предметам и прогнозируемым результатам обучения (Макарычева, 2018). Также в мотивационную сферу входят учебные мотивы, которые необходимы для повышения эффективности педагогических взаимодействий между обучающимися и учителем.

Под процессом повышения мотивации понимается деятельность по постепенному изменению отношения обучающихся к учению, а также расширение и усложнение компонентов мотивационной сферы и их взаимодействия. Исследованием процесса повышения мотивационной сферы занимались такие ученые как: В.В. Давыдов (Давыдов, 2004), В.П. Зинченко (Зинченко, 1976), Е.П. Ильин (Ильин, 2000), И.И. Ильясов (Ильясов, 1986), А.Н. Леонтьев (Леонтьев, 1971), А.К. Маркова (Маркова, 1990), Н.А. Менчинская (Менчинская, 1998), О.К. Тихомиров (Тихомиров, 1983), И.С. Якиманская (Якиманская, 1989) и многие другие.

Анализ актуальности и степени разработанности темы исследования позволяет выявить **противоречие** между положительным историческим опытом преподавания арифметики в России в XVIII–XIX вв. и ослаблением внимания к арифметическому материалу в программах по математике в современной школе.

Цель исследования – показать эффективность использования дореволюционнного опыта преподавания арифметики в формировании мотивационной сферы современных школьников.

Нами была разработана методика обучения делению многозначных натуральных чисел непосредственно с использованием текстов учебника математики XVIII века и их адаптации для современных школьников (Жигулина, Беба, 2023).

На основе исследований И.А. Макарычевой и А.К. Марковой были выявлены критерии сформированности мотивационной сферы школьников и их показатели (вопросы): внутренний мотивационный (мне хочется/не хочется узнать о том, как развивалась математика), эмоциональный (урок мне показался длинным/коротким), научно-познавательный (деление уголком более удобное/трудоемкое), рефлексивный (на уроке я работал активно/пассивно).

Школьникам дважды (до начала опытной работы и в конце) была предложена анкета, включающая 8 вопросов.

В начале и в конце опытно-экспериментальной работы (внедрения разработанной методики в процесс обучения математике в 5-6 классах) было проведено анкетирование (Саввина, Жигулина, Черных, Долгова, 2023).

Результаты динамики развития мотивации до начала и после опытно-экспериментальной работы приведены ниже (рис. 1).

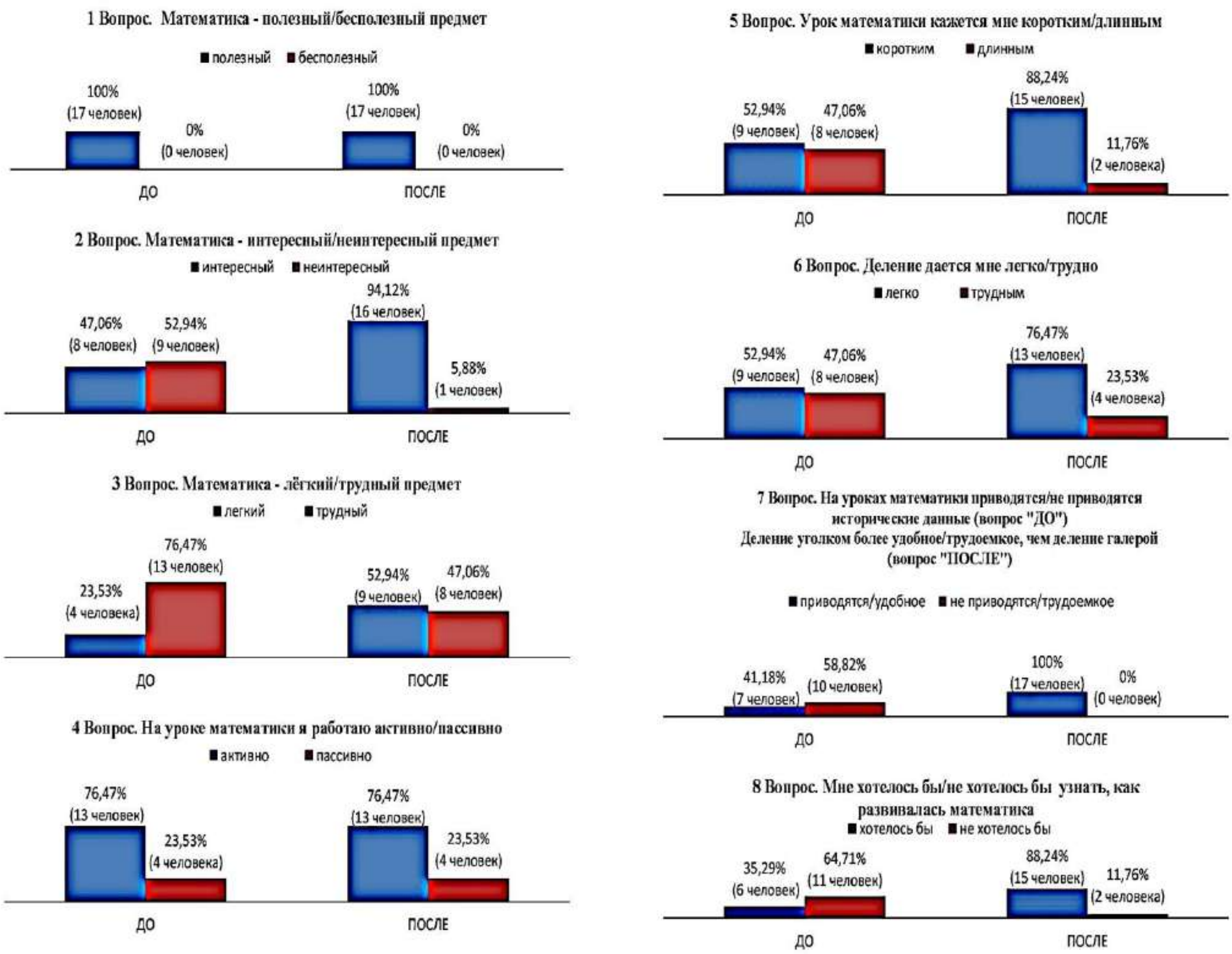


Рис. 1. Результаты анкетирования до начала опытно-экспериментальной работы и после внедрения методики историзации обучения делению многозначных чисел

Таким образом, имеет место положительная динамика в ответах, касающихся исследования уровня сформированности мотивации к изучению математики.

Список литературы

Андронов И.К., Брадис В.М. Арифметика: пособие для средней школы. М.: Учпедгиз, 1957.

Аткинсон Дж.В. Теория о развитии мотивации. Н.: НОРМА. 2001.

Божович Л.И. Избранные психологические труды: Пробл. формирования личности; под ред. Д.И. Фельдштейна. М.: Междунар. пед. акад., 1995.

Галанин Д.Д. Леонтий Филиппович Магницкий и его арифметика. М.: Тип. О.Л. Сомовой, 1914.

Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России. М., 1946.

Гольденберг А.И. Методика начальной арифметики: руководство для учительских семинарий и институтов, для народных учителей и учительниц. СПб.: изд. Д.Д. Полубояринова, 1885. С. 185, 15, 6.

Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. М.: Академия, 2004.

Депман И.Я. История арифметики. М.: Просвещение, 1965.
Жигулина А.А., Беба Д.Н. Методика изучения «деления вверх»: дополнительный материал по математике в 5-6 классах // Современные проблемы физико-математических наук: материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Орел, 24-25 ноября 2023 года. Орел: Изд-во ОГУ им. И.С. Тургенева, 2023.
Зимняя И.А. Педагогическая психология. М.: Логос, 2000.
Ильин Е.П. Мотивация и мотивы. СПб.: Питер, 2000.
Ильясов И.И. Структура процесса учения. М.: МГУ, 1986.
Колягин Ю.М. Русская школа и математическое образование: Наша гордость и наша боль. М.: Просвещение, 2001.
Ланков А.В. К истории развития передовых идей в русской методике математики: пособие для учителей. М.: Учпедгиз, 1951.
Леонтьев А.Н. Потребности, мотивы и эмоции: Конспект лекций / Кафедра общ. психологии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971.
Макарычева И.А. Оценка уровня мотивации у младших школьников // Вестник науки и образования. 2018. № 5 (41). С. 105-108.
Маркова А.К., Матис Т.А., Орлов А.Б. Формирование мотивации учения. М.: Просвещение, 1990.
Пчелко А.С. Методика преподавания арифметики в начальной школе: пособие для учителей. М.: Учпедгиз, 1951.
Саввина О.А., Жигулина А.А., Черных П.А., Долгова А.А. Историзация обучения делению многозначных натуральных чисел // Эвристическое обучение математике: труды VI Международной научно-методической конференции. Донецк: Донецкий государственный университет, 2023. С. 288-294.
Якиманская И.С., Юдашкина Н.И. Особенности познавательных интересов старшеклассников в условиях дифференцированного обучения // Вопросы психологии. 1989. № 3. С. 32-39.

ФИЛЬМЫ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ КАК СПОСОБ ОБУЧЕНИЯ

Разинкина С.К. [1]
Научный руководитель: д.п.н., доцент Игнатушина И.В. [2]

[1,2] *ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет»*

e-mail: [1]razinkina2002r@mail.ru, [2]streleec@yandex.ru

Аннотация. В нашем современном мире математика играет невероятно важную роль, и ее значимость трудно переоценить. Школьные уроки математики становятся основой для понимания науки. Однако, как часто бывает, не всегда легко увлечь учащихся этой сложной и абстрактной дисциплиной. В статье рассмотрим важное средство, способное оживить процесс обучения математике, – фильмы, посвященные её истории. Обсудим, как история математики может стать ключом к увлекательному и более понятному изучению соответствующей науки, а также как фильмы о великих математиках способны вдохновить учащихся и помочь им установить связь между учебой и реальным миром.

Ключевые слова: математика, обучение, фильмы, история математики.

FILMS ON THE HISTORY OF MATHEMATICS AS A WAY TRAINING

Abstract. In our modern world, mathematics plays an incredibly important role, and its significance is hard to overestimate. School mathematics lessons form the basis for understanding science. However, as often happens, it is not always easy to engage students in this complex and abstract discipline. In the article, we will consider an important tool that can enliven the process of teaching mathematics – films dedicated to its history. We will discuss how the history of mathematics can become the key to a fascinating and more comprehensible study of the relevant science, as well as how films about great mathematicians can inspire students and help them establish a connection between their studies and the real world.

Keywords: mathematics, training, films, history of mathematics.

Математика является одним из наиболее важных учебных предметов в школе. Однако, многие ученики испытывают сложности в изучении данной дисциплины. Один из способов заинтересовать учащихся математикой — это использование фильмов, посвященных истории развития данной науки.

Исторические факты дополняют содержание школьной программы и способствуют увеличению интереса к этому предмету. Правильное использование данных из истории науки может сыграть ключевую роль в образовательном процессе. Во-первых, такие сведения наглядно продемонстрируют, что наука развивается благодаря практическим усилиям человека. Во-вторых, биографии многих ученых служат образцом преданности и любви к своему делу, что способствует формированию этих качеств у школьников. В-третьих, рассказы о вкладе отечественных математиков в развитие науки способствуют формированию национальной гордости, а информация о зарубежных ученых побуждает к уважению научных достижений других стран.

Основная цель использования фильмов по истории математики - показать ученикам, что математика – это не только формулы и теоремы, но и увлекательный процесс развития, который насчитывает несколько тысячелетий. Фильмы помогают учащимся понять, что изучать математику – значит быть частью большой и интересной истории.

Фильмы о великих математиках, их открытиях и трудностях, с которыми они сталкивались, создают живые образы исторических личностей и математических концепций. Это позволяет учащимся видеть математику в широком контексте, вдохновляет и помогает им устанавливать связи между тем, что они изучают в классе, и тем, что их ожидает в будущем.

Также фильмы историко-математической направленности могут быть отличным дополнительным материалом для уроков. Они служат основой для проведения дискуссий, викторин, а также для организации соответствующей проектной деятельности. Это позволяет учащимся лучше понять и усвоить новый материал, а также развить свои навыки критического мышления и анализа.

Однако, при использовании фильмов по истории математики на уроках, следует учитывать возраст учащихся и уровень их подготовки.

Существует множество фильмов о математике, каждый из которых имеет свою направленность. Некоторые посвящены отдельным областям математики, другие – более широки и раскрывают общие принципы развития данной науки. Рассмотрим примеры таких фильмов и дадим краткий обзор каждого.

«Математика и подъем цивилизации» (https://www.kinopoisk.ru/series/4913416/2) – это уникальный фильм, который позволяет зрителю окунуться в мир математики. Этот фильм повествует о появлении цифр, формировании систем счисления и о роли, которую они играют в нашей жизни сегодня.

Цикл фильмов «Тайный код жизни» (https://my.mail.ru/mail/c.obaka/video/212) представляет собой подборку документальных фильмов, рассказывающих о различных аспектах математики и ее роли. В этих фильмах освещаются такие темы, как применение математики в различных областях науки и техники, её связь с искусством и философией, а также история математики.

«Формула невероятности академика Колмогорова» (https://smotrim.ru/brand/62411) – это документальный фильм о русском математике Андрее Николаевиче Колмогорове (1903-1987). В фильме использованы архивные материалы, интервью с коллегами и родственниками Колмогорова, а также кадры хроники, позволяющие зрителям увидеть, как жил и работал этот выдающийся ученый.

С этими фильмами целесообразно знакомить учащихся перед началом учебного года, предмета, или определенной темой, как обзор материала, который предстоит изучить.

В учебном процессе фильмы могут быть встроены в серию последовательных уроков, являться основой одного видеоурока, представлены лишь тематическими фрагментами.

Если учащимся демонстрируется целый цикл учебных фильмов (кинокурс), то им должна быть ясна последовательность показа серий. После просмотра каждой серии следует провести рефлексию по увиденному, а также после знакомства со всем кинокурсом организовать контроль достижения уровня соответствующих образовательных результатов.

Фильм по истории математики можно использовать как самостоятельный видео-урок. Этот вид урока, который повышает интерес к изучаемому предмету и дает возможность качественно улучшить результаты учащихся. Просматривая видеоуроки, учащиеся активнее вовлекаются в процесс обучения. А если в фильмы добавить интерактивные задания, тогда процесс восприятия новой информации возрастает не только у заинтересованных в предмете учащихся, но и у слабоуспевающих.

Весь фильм, предлагаемый на уроке, следует разбить на тематические фрагменты. После каждого такого фрагмента необходимо предложить школьникам задания, позволяющие проверить степень освоения увиденного материала. Такую работу можно организовать, используя приложение LearningApps.

Например, при изучении темы «Системы счисления» возьмём фильм «Математика и подъем цивилизации». Рекомендуется разделить его на несколько частей, каждая из которых будет освещать системы счисления, применяемые в различных культурах.

После просмотра первой части, посвященной Древнему Египту, ученикам следует предложить несколько заданий:

1. Преобразуйте числа 10, 47, 69 в систему исчисления древних египтян. Запишите ответ в виде комбинации иероглифы.

2. Запишите свою дату рождения, используя систему исчисления древнего Египта.

3. Дано два древнеегипетских числа ∩ (10) и □ (5), сложите их и представьте результат в той же системе исчисления.

Только после правильного выполнения всех заданий ученикам дается доступ просмотра следующего фрагмента. Если же допускается ошибка, то обучающемуся предлагается ещё просмотреть соответствующий видеофрагмент.

Следующая часть посвящена системе счисления Древней Греции. После её просмотра аналогично даются задания:

1. Преобразуйте число 35 из десятичной системы в систему исчисления древних греков.

2. Преобразуйте число μς΄ (греческие буквы дельта и стигма) из системы исчисления древних греков в десятичную систему.

3. Два древнегреческих числа, например, δ′ (4) и λ′ (30), сложить их и представьте результат в древнегреческих числах.

После выполнения ученикам открывается доступ к фрагменту о Древнем Риме. Затем предлагаются соответствующие задания.

1. Преобразуйте числа XII, MDCCLXXVI из римской системы счисления в десятичную систему.

2. Преобразуйте число 23, 88,1001 из десятичной системы в систему счисления древних римлян.

3. Даны два римских числа XX и IX, произведите разность одного числа из другого и представьте результат в римской нумерации.

В конце школьникам даются несколько контрольных заданий:

1. Даны 187, 567, 354, преобразуйте их в системы исчисления Рима, Египта и Греции.

2. Найдите значение выражение: $\square\square + \xi\eta\square - \mathrm{XI} =$

3. Поставьте в соответствии:

1) Римская нумерация	А) Иероглифический способ нумерации
2) Система счисления Древнего Египта	Б) Алфавитный способ нумерации
3) Система счисления Древней Греции	

Такая работа с видеоматериалами может быть организована в качестве домашней работы, в случае отсутствия ученика на уроке, а также при дистанционном формате обучения.

Когда вводится только фрагмент фильма в урок, ученики рассматривают лишь тот отрезок фильма, который необходим для дальнейшего изучения: нового материала по теме, расширение материала, его закрепление, углубление и повторение. После просмотра видео учащиеся выполняют чаще всего ряд коммуникативных заданий. При использовании на уроке только части фильма, учителю нужно лишь подобрать фрагмент видео, подходящий по смысловому содержанию урока. Затем составить задания, учащимся для выполнения после просмотра видео фрагмента. Они могут быть индивидуальными, с разной степенью сложности, что обеспечивает индивидуальный и дифференцированный подходы в обучении; групповыми, что помогает развитию навыков социализации среди сверстников; направленными на работу со всем классом или группой, когда соревновательный момент подталкивает школьников к более активному участию на уроке.

В настоящее время происходит эффект «удвоения культурной среды», при котором все достижения человечества, полностью отраженные ранее в письменных текстах, получают аудиовизуальное выражение. В связи с этим особое значение приобретают экранные искусства. Так и история математики получает новый выход в фильмах, что облегчает ее использование в процессе обучения. Фильмы по истории математики представляет собой мощный инструмент для повышения интереса учеников к предмету и улучшения качества образования в целом.

Список литературы

Математика подъём цивилизации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://www.kinopoisk.ru/series/4913416/2 (дата обращения 17.10.2023)

Тайный код жизни [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://my.mail.ru/mail/c.obaka/video/212 (дата обращения 17.10.2023)

Формула невероятности академика Колмогорова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://smotrim.ru/brand/62411 (дата обращения 17.10.2023)

Никотина О.А. Формы и методы использования истории математики на уроках и факультативных занятиях [Электронный ресурс] // Молодой ученый.

2017. № 24 (158). С. 121-122. – Режим доступа: URL: https://moluch.ru/archive/158/44493/ (дата обращения: 17.10.2023)

Пожарова Г.А. ИКТ как неотъемлемая часть образовательного процесса на уроках математики [Электронный ресурс] // Молодой ученый. 2015. № 2 (82). С. 549-551. – Режим доступа: URL: https://moluch.ru/archive/82/14939/ (дата обращения: 17.10.2023).

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ АКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕН

Гуров В.С.[1]
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Елецких К.С.[2]

[1, 2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]senior.guroff2013@yandex.ru, [2]Kostan86@yandex.ru

Аннотация. В рыночной экономике большую роль играют ценные бумаги определенного типа, которые служат для получения прибыли в виде дивидендов, совершения финансовых операций, заключения договоров и для других целей. Акции предприятия (компании) являются формой коллективного владения собственностью предприятия и механизмом распределения доходов. Стоимость акции является показателем эффективности функционирования производственных мощностей. Акции и другие ценные бумаги торгуются на бирже, образуя финансово-экономический процесс, который при достаточном числе однородных элементов (акций) можно рассматривать как континуальный процесс. В статье рассматриваются математическая модель, описывающая процесс изменения стоимости ценных бумаг в течение определенных промежутков времени посредством теории уравнений в частных производных.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, параболическое уравнение, плотность акций, пространство цен, интеграл Пуассона.

MIXED PROBLEM FOR THE PARABOLIC EQUATION OF STOCK DENSITY IN THE PRICE SPACE

Abstract. In a market economy, securities of a certain type play an important role, which are used to generate profits in the form of dividends, carry out financial transactions, conclude contracts and for other purposes. Shares of an enterprise (company) are a form of collective ownership of enterprise property and a mechanism for distributing income. The share price is an indicator of the efficiency of production facilities. Shares and other securities are traded on the stock exchange, forming a financial and economic process, which, with a sufficient number of homogeneous elements (shares), can be considered as a continuous process. The article discusses a mathematical model that describes the process of changes in the value of securities over certain periods of time through the theory of partial differential equations.

Keywords: partial differential equation, parabolic equation, stock density, price space, Poisson integral.

Рассмотрим ось Ox, на которой точка x изображает акцию, а координата точки $x(t)$ означает цену акции в момент времени t. Единицы измерения:

$[x(t)] =$ рублей, $[t] =$ месяцев. Легко заметить, что вследствие изменения цены акции со временем точка x будет перемещаться. Функцию $x = x(t)$ будем называть функцией цены акции, множество $B = 0 \leq x < \infty$ – пространством цен (пространством Блэка-Шоулса). В частном случае функция $x(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (Ширяев, 1998, 337):

$$dx = \mu x dt + \sigma x dX, \qquad \mu > 0,\ \sigma > 0,$$

где X - стохастический процесс, определяемый переходной функцией плотности вероятностей $\rho(z) = \rho(z', s; z, t)$, для которой справедливы соотношения (Самарский, 1997, 140) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall y \in R$ и при постоянных c и b

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| > \varepsilon} \rho(y, t; x, t + \Delta t) dx = 0,$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (x - y) \rho(y, t; x, t + \Delta t) dx = c,$$

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (x - y)^2 \rho(y, t; x, t + \Delta t) dx = b$; μ, σ – постоянные: μ – норма возврата акций, σ – волатильность акций. Если процесс X винеровский, то $c = 0,\ b = 1$.

Выразим коэффициент μ. Пусть стоимость акции растет на i процентов в месяц, тогда за время Δt цена акции $x(t)$ возрастет на $\frac{i}{100} x(t) \Delta t$ рублей и в момент времени $t + \Delta t$ составит $x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{i}{100} x(t) \Delta t$ рублей. Вычисляя скорость перемещения акции в пространстве цен, получим $\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{i}{100} x(t) \Rightarrow \mu = \frac{i}{100}$.

Далее будем рассматривать более общее уравнение

$$dx = F(x, t) dt + \sigma x dX, \qquad (1)$$

динамики цены отдельной акции.

Пусть, имеем N_0 акций, цена которых описывается одним и тем же уравнением (1). Так как акции одного вида продаются в разных условиях, то их цены в фиксированный момент времени могут различаться. Это означает, что акции некоторым образом распределены по оси Ox. Отметим на оси Ox N_0 точек. Координата каждой точки (акции) означает цену, по которой данная акция была приобретена к моменту времени t. На оси Ox рассмотрим достаточно малый интервал $[x, x + \Delta x]$ длины Δx, и пусть $\Delta A(x, t)$ – число точек (акций) на отрезке $[x, x + \Delta x]$ в момент времени t.

Введем функцию

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A(x,t)}{\Delta x} = u(x, t), \quad 0 \leq x < \infty, \qquad (2)$$

где $u(x, t)$ – плотность акций (функция плотности распределения акций) на положительном направлении оси Ox. Единица измерения $[u] = \frac{\text{акц}}{\text{руб.}}$. Очевидно, что $A(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx$ – число акций, приобретенных по ценам в пределах отрезка $[x_1, x_2]$ к моменту времени t. Имеем

$$\int_0^\infty u(x, t) dx = N_0. \qquad (3)$$

Требуется получить дифференциальное уравнение для функции $u(x,t)$. Для этого рассмотрим произвольный отрезок $[x_1,x_2] \subset B$. Обозначим дополнение $\Omega_0 = (-\infty < x < x_1) \cup (x_2 < x < \infty)$.

Считается, что акции постоянно покупаются, продаются и со временем их цена меняется, поэтому точки, обозначающие акции, перемещаются вдоль оси Ox. За отрезок времени $[t_1,t_2]$ часть акций попадет на $[x_1,x_2]$, часть выпадет из этого отрезка. Запишем уравнение баланса акций для интервала $[x_1,x_2]$ за отрезок времени от t_1 до t_2:

$\Delta A_{[t_1,t_2]} = A_1 + A_2,$ (4)

где $\Delta A_{[t_1,t_2]}$ - изменение числа акций за время от t_1 до t_2, которые имеют цену в пределах интервала $[x_1,x_2]$; A_1 – число акций, которые попадут на интервал $[x_1,x_2]$ за время от t_1 до t_2 за счет детерминированной части уравнения (1); A_2 – за счет случайных процессов.

Находим $\Delta A_{[t_1,t_2]}$: $\Delta A_{[t_1,t_2]} = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dtdx.$ (5)

Вычисляем A_1: $A_1 = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}(Fu)dxdt.$ (6)

Далее находим A_2. Для этого рассмотрим два момента времени t и $t+\Delta t$ и две оси Ox, изображающие пространства цен в эти моменты времени. Вычислим число акций J_1, которые попадут в отрезок $[x_1,x_2]$ к моменту времени $t+\Delta t$ из множества Ω_0 в момент времени t за счет случайности процесса. Множество Ω_0 разобьем на элементарные отрезки длиной Δy_i. Пусть точка y_i принадлежит отрезку Δy_i. На элементарном отрезке Δy_i, согласно определению (2), находится в момент времени t $u(y_i,t)\Delta y_i$ акций. Эти акции через промежуток времени Δt распределятся по всей полуоси Ox $(0 < x < \infty)$, но в момент времени $t+\Delta t$. Чтобы определить это распределение, запишем уравнение (1) для конечного интервала времени Δt:

$x(t+\Delta t) - x(t) = F(x,t)\Delta t + \sigma x(t)\big(X(t+\Delta t) - X(t)\big),$ (7)

где $X(t) = z'$ – реализованное значение стохастического процесса в момент времени t; $X(t+\Delta t) = z$ – значение стохастического процесса в момент времени $t+\Delta t$. При этом случайная величина $X(t+\Delta t)$ описывается плотностью вероятностей $\rho(z',t;z,t+\Delta t)$. (8)

Рассмотрим акцию с ценой y_i в момент времени t, тогда $x(t) = y_i$. В равенстве (7) отождествим $x(t) = \sigma x(t)X(t)$, тогда $X(t) = z' = \frac{1}{\sigma}$, $x(t+\Delta t) = \sigma x(t)X(t+\Delta t)$.

Далее, пусть случайная величина $\sigma x(t)X(t+\Delta t)$ принимает значения в интервале $[x_1,x_2]$, то есть

$x_1 < \sigma x(t)X(t+\Delta t) < x_2, x_1 < \sigma y_i z < x_2.$ (9)

Таким образом, если выполнено условие (9), тогда величина z для функции (8) изменяется в пределах $\frac{x_1}{\sigma y_i} < z < \frac{x_2}{\sigma y_i}$ при $y_i > 0$.

Отсюда можно заключить, что если величина $\sigma x(t)X(t)$ в момент времени t приняла значение y_i, то величина $\sigma x(t)X(t+\Delta t)$ в момент времени

$t+\Delta t$ примет значение из интервала $[x_1,x_2]$ с вероятностью $sgn\,y_i \int_{\frac{x_1}{\sigma y_i}}^{\frac{x_2}{\sigma y_i}} \rho\left(\frac{1}{\sigma},t;z,t+\Delta t\right)dz$.

Умножив эту вероятность на число акций $u(y_i,t)\Delta y_i$, определим число акций ΔA_i, которое перейдет из интервала Δy_i в момент времени t на отрезок $[x_1,x_2]$, но в момент времени $t+\Delta t$. В результате $\Delta A_i = \int_{\frac{x_1}{\sigma y_i}}^{\frac{x_2}{\sigma y_i}} \rho\left(\frac{1}{\sigma},t;z,t+\Delta t\right)dz\,u(y_i,t)\,sgn\,y_i\,\Delta y_i$, $\quad u(y_i,t)=0$ при $y_i<0$.

Суммируя по всем Δy_i в пределах множества Ω_0, получаем при $\Delta y_i \to 0$ интеграл $J_1 = \int_{\Omega_0}\left[\int_{\frac{x_1}{\sigma y}}^{\frac{x_2}{\sigma y}} \rho\left(\frac{1}{\sigma},t;z,t+\Delta t\right)dz\,u(y,t)\,sgn\,y\right]dy$.

Производя замену переменных интегрирования $z=\frac{\eta}{\sigma y}$, получаем $J_1=\int_{\Omega_0}\left[\int_{x_1}^{x_2}\rho\left(\frac{1}{\sigma},t;\frac{\eta}{\sigma y},t+\Delta t\right)d\eta\,u(y,t)\right]\frac{dy}{\sigma|y|}$.

Аналогично вычислим число акций, которые покинут отрезок $[x_1,x_2]$ и попадут на множество Ω_0 к моменту времени $t+\Delta t$: $J_2=\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{\Omega_0}\rho\left(\frac{1}{\sigma},t;\frac{\eta}{\sigma y},t+\Delta t\right)d\eta\,u(y,t)\right]\frac{dy}{\sigma|y|}$.

Вычислим приращение числа акций на отрезке $[x_1,x_2]$ за интервал времени Δt

$$\Delta J = J_1 - J_2 = \int_{\Omega_0}\left[\int_{x_1}^{x_2}\rho d\eta u\right]\frac{dy}{\sigma|y|} - \int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{\Omega_0}\rho d\eta u\right]\frac{dy}{\sigma|y|} + \int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{x_1}^{x_2}\rho d\eta u\right]\frac{dy}{\sigma|y|} - \int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{x_1}^{x_2}\rho d\eta u\right]\frac{dy}{\sigma|y|} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{x_1}^{x_2}\rho\left(\frac{1}{\sigma},t;\frac{\eta}{\sigma y},t+\Delta t\right)d\eta u(y,t)\right]\frac{dy}{\sigma|y|} - \int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\rho\left(\frac{1}{\sigma},t;\frac{\eta}{\sigma y},t+\Delta t\right)d\eta u(y,t)\right]\frac{dy}{\sigma|y|}.$$

(10)

Сделав замену переменной $\frac{\eta}{\sigma y}=z$, вычислим интеграл справа:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho\left(\frac{1}{\sigma},t;\frac{\eta}{\sigma y},t+\Delta t\right)d\eta = \sigma|y|\int_{-\infty}^{\infty}\rho\left(\frac{1}{\sigma},t;z,t+\Delta t\right)dz = \sigma|y|.$$

Пренебрегая величинами более высокого порядка малости, чем Δt, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho\left(\frac{1}{\sigma},t;z,t+\Delta t\right)\phi(z)dz = u(x,t) - c\sigma\left\{u(x,t)+x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\}\Delta t + \frac{1}{2}b\sigma^2\left\{2u(x,t)+4x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\}\Delta t.$$

Возвращаясь к интегралу (10), получаем

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2}\left[(b\sigma^2-c\sigma)u(x,t)+(2b\sigma^2-c\sigma)x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}b\sigma^2x^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]dx\Delta t.$$

Суммируя эти интегралы по всем элементарным интервалам Δt^i, на которые разбивается временной отрезок $[t_1,t_2]$, получаем интегральную сумму, которая преобразуется в интеграл при $\Delta t^i \to 0$:

$$A_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[(b\sigma^2 - c\sigma)u + (2b\sigma^2 - c\sigma)x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}b\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]\mathrm{dxdt}. \quad (11)$$

Подставляя формулы (5), (6), (11) в уравнение баланса (4) и опуская интегралы, получаем уравнение для плотности акций:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Fu) + (b\sigma^2 - c\sigma)u + (2b\sigma^2 - c\sigma)x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}b\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Если $F = \mu x$, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta x\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u, \quad x > 0, \qquad (12)$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{b}\sigma^2, \quad \beta = 2\mathrm{b}\sigma^2 - \mathrm{c}\sigma - \mu, \quad \gamma = \mathrm{b}\sigma^2 - \mathrm{c}\sigma - \mu.$

Параболическое уравнение (12) называется уравнением для плотности акций. Перепишем это уравнение в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 u) - (2\alpha - \gamma)\frac{\partial}{\partial x}(xu). \qquad (13)$$

Такая форма записи позволяет легко вывести закон сохранения числа акций на пространстве цен B. Действительно, интегрируя уравнение (13) по x в пределах от 0 до ∞ и используя (3), получаем

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}(x^2 u) - (2\alpha - \gamma)xu\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} = 0.$$

Следовательно, $N_0 = const$, то есть число акций N_0 на пространстве цен не зависит от времени t.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ акции распределены на полуоси $0 < x < \infty$ и известна функция плотности их распределения $\phi(x)$. Требуется определить плотность акций $u(x,t)$ из уравнения (12) в последующие моменты времени $t > 0$.

Для этого решим следующую смешанную задачу для интервала $0 < x < \infty$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta x\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u \quad \text{в} \quad \mathrm{D} = (t > 0) \times (0 < x < \infty), \qquad (14)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad 0 \le x < \infty, \quad (15)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \mathrm{t} \ge 0, \qquad (16)$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{b}\sigma^2, \quad \beta = 2\mathrm{b}\sigma^2 - \mathrm{c}\sigma - \mu, \quad \gamma = \mathrm{b}\sigma^2 - \mathrm{c}\sigma - \mu.$

Для простоты и наглядности проведем решение нашей задачи в системе компьютерной математики Maple (Дьяконов, 2011). Для поиска решения дифференциальных уравнений в частных производных используем пакет PDEtools. Зададим уравнение.

```
restart; with(PDEtools): eqn:=x^2*alpha*diff(u(x, t), x, x)
+ x*beta*diff(u(x, t), x) + gamma*u(x,t)-diff(u(x, t), t)=
0:
```

Вводим новую искомую функцию $h(x,t)$ Такую, что $u(x,t) = e^{\gamma t}h(x,t)$,

```
u(x,t):=exp(gamma*t)*h(x,t): simplify(eqn): %/exp(gamma*t):
eqn:=%;
```

имеем $\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \beta x\frac{\partial h}{\partial x}, \quad h|_{t=0} = \phi(x), \quad h|_{x=0} = 0.$

Далее сделаем замену независимых переменных x, t, вводя новые переменные z, η: $x = e^{z-(\beta-\alpha)\eta}$, $t = \eta$.

```
simplify(dchange({x=exp(z-(beta-alpha)*eta), t=eta},eqn,
params={alpha,beta}));
```

Получим задачу Коши, аналогичную задаче Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \square}{\partial \eta} - \alpha \frac{\partial^2 \square}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в области} \quad D = (\eta > 0) \times (-\infty < z < \infty), \quad \square|_{\eta=0} = F(z), \quad -\infty < z < \infty,$$

где $\mathrm{h}(x,t) = \mathrm{h}\left(e^{z-(\beta-\alpha)\eta}, \eta\right)$, $F(z) = \phi(e^z)$; граничное условие при этом преобразуется в условие на бесконечности: $\mathrm{h} \to 0$ при $z \to -\infty$.

Полученную задачу, как известно, можно решить используя интеграл Пуассона (Егоров, 2021):

$$\mathrm{h}(z,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \frac{1}{P\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{P^2}} d\xi,$$

где $P = 2\sqrt{\alpha\eta}$.

Заменим переменную интегрирования $\xi = ln\, y$, тогда $\mathrm{h}(z,\eta) = \int_0^{\infty} \phi(y) \frac{1}{P\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(z-ln y)^2}{P^2}} \frac{dy}{y}$.

Возвращаясь к исходным переменным и искомой функции, получим решение нашей задачи (14)-(16):

$$u(x,t) = e^{\gamma t} \int_0^{\infty} \frac{\phi(y)}{P_0 y \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(ln(x/y)+(\beta-\alpha)t)^2}{P_0^2}} dy,$$

где $P_0 = 2\sqrt{\alpha t}$.

Например, рассмотрим пакет из N_0 акций, каждая из которых в момент времени $t = 0$ стоила x_0 рублей. Тогда начальная плотность акций в условии (15) может быть представлена в виде $\phi(x) = N_0 \delta(x - x_0)$, где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Подставляя в формулу полученное выше решение, имеем

$$u(x,t) = \frac{N_0 e^{\gamma t}}{P_0 x_0 \sqrt{\pi}} exp\left[-\frac{1}{P_0^2}\left(ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + (\beta - \alpha)t\right)^2\right]. \qquad (17)$$

При $N_0 = 1$ функцию (17) можно интерпретировать как плотность вероятностей, с которой будет распределена цена одной акции в момент времени $t > 0$ при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ акция стоила x_0 рублей.

Список литературы

Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 1997.

Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998.

Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК пресс, 2011.

Егоров Д.Л. Уравнения математической физики. Казань: КНИТУ, 2021.

ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Елисеев А.А.[2]
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Елецких К.С.[2]

[1, 2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]alesha.eliseev.5@mail.ru, [2]Kostan86@yandex.ru

Аннотация. В этой статье мы углубились в историю зарождения интегрального исчисления. Начиная с эпохи древнего Мира, в которой происходит возникновение задач, решение которых требуют применения методов интегрального исчисления. Далее даем основные понятия и определения интегралов. Что такое интегралы? Какими бывают интегралы? В каких вычислениях применяются? Затем рассматриваем примеры и проводим их решение.

Ключевые слова: Интегралы, История появления интегралов, Двойные интегралы, Тройные интегралы, Приложения кратных интегралов.

APPLICATIONS OF MULTIPLE INTEGRALS

Abstract. In this article, we delved into the history of the origins of integral calculus. Starting from the era of the ancient World, in which problems arose whose solution required the use of integral calculus methods. Next, we give the basic concepts and definitions of integrals. What are integrals? What are integrals? In what calculations are they used? Then we look at examples and solve them.

Keywords: Integrals, The history of the appearance of integrals, Double integrals, Triple integrals, Applications of multiple integrals.

Интегральное исчисление, изучающее интегралы, их свойства также методы исчисления, вместе с исчислением дифференциальным, является основой математического анализа.

Интегрирование наблюдается еще в древнем Египте приблизительно в 1800 году до нашей эры. Математический папирус показывает знание формулы объема усеченной пирамиды. Наиболее ранним популярным методом вычисления интегралов считается метод исчерпывания Евдокса приблизительно в 370 году до нашей эры, который пытался найти площади, объемы. Разбивая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объем были известны. Затем метод приобрёл собственное формирование в работах Евклида. Особенным искусством также многообразием использованием метода исчерпывания стал известным сам Архимед.

Последующий большой шаг в интегральном исчислении был сделан в Ираке в 11 веке математиком Ибн аль-Хайсамом. В своей работе «Об измерении параболического тела» он приходит к уравнению четвертой степени. Решая данную задачу, он проводит вычисления, эквивалентные вычислению определенного интеграла.

Таким образом, поиск методов вычисления новых видов определенных интегралов показал, что обыкновенные, двойные и тройные определенные интегралы должны быть обоснованы сами по себе независимо от понятия неопределенного интеграла.

Двойные интегралы есть обобщение определенного интеграла на случай плоской области интегрирования функции двух переменных.

Положим в замкнутой области σ плоскости XOY задана функция $f(x,y)$. Разобьем область σ свободно в n элементов $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, таким образом, для того чтобы области $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ не обладали единых внутренних точек. В любой замкнутой области $\Delta\sigma_k$ (внутри либо на границе) подберём произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$, также умножим значение функции $f(x,y)$ в данной точке на площадь $\Delta\sigma_k$. Сложив все без исключения подобные произведения, приобретаем интегральную необходимую сумму для функции $f(x,y)$ в области σ: $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\sigma_k$.

Интегральная сумма никак не зависит от способа разбиения области σ на части также от выбора точек P_k в данных частях. Диаметром замкнутой области называется максимальное из расстояний между двумя точками границы данной области. Шагом разбиения области на конечное число элементов называется максимальный из диаметров областей разделения.

Отметим через λ этап разбиения области σ на части $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. В случае если при стремлении к нулю λ интегральные суммы имеют предел, в таком случае данный предел называют двойным интегралом от функции $f(x,y)$ согласно области σ также обозначают символами:

$$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma \text{ или } \iint_{\sigma} f(x,y)dxdy.$$

Здесь $f(x,y)$ – подынтегральная функция, σ – область интегрирования, x также y – переменные интегрирования, $d\sigma = dxdy$ – элемент площади. Таким образом:

$$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\sigma_k, \text{в случае если данный предел существует.}$$

Функция $f(x,y)$, для которой существует двойной интеграл

$$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma, \text{называется интегрируемой в области } \sigma.$$

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{D} (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^3.$$

Решение: Зададим область D неравенствами.

$D: 0 \le x \le 1; -x^3 \le y \le \sqrt{x}$

Перейдём от двойного интеграла к повторному:

$$\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-x^3}^{\sqrt{x}} (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dy.$$

Проведём поэтапное вычисление интеграла:

$$\int_{-x^3}^{\sqrt{x}} (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dy = 27x^2 \int_{-x^3}^{\sqrt{x}} y^2dy + 48x^3 \int_{-x^3}^{\sqrt{x}} y^3dy = 27x^2 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-x^3}^{\sqrt{x}} + 48x^3 \cdot \frac{y^4}{4}\Big|_{-x^3}^{\sqrt{x}} = 27x^2 \cdot \left(\frac{(\sqrt{x})^3}{3} - \frac{(-x^3)^3}{3}\right) + 48x^3 \cdot \left(\frac{(\sqrt{x})^4}{4} - \frac{(-x^3)^4}{4}\right) = 27x^2 \cdot \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^9}{3}\right) + 48x^3 \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^{12}}{4}\right) = 9x^{\frac{7}{2}} + 9x^{11} + 12x^5 - 12x^{15},$$

$$\int_0^1 (9x^{\frac{7}{2}} + 9x^{11} + 12x^5 - 12x^{15})dx = 9 \cdot \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}\Big|_0^1 + 9 \cdot \frac{x^{12}}{12}\Big|_0^1 + 12 \cdot \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 - 12 \cdot \frac{x^{16}}{16}\Big|_0^1 = 9 \cdot \left(\frac{1^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}\right) + 9 \cdot \left(\frac{1^{12}}{12}\right) + 12 \cdot \left(\frac{1^6}{6}\right) - 12\left(\frac{1^{16}}{16}\right) = 9 \cdot \frac{2}{9} + 9 \cdot \frac{1}{12} + 12 \cdot \frac{1}{6} - 12 \cdot \frac{1}{16} = 2 + \frac{3}{4} + 2 - \frac{3}{4} = 4,$$

Ответ: 4

Тройные интегралы есть обобщение определенного интеграла на случай трехмерной области интегрирования функции трех переменных.

Положим в замкнутой области V пространства XYZ задана произвольная функция $f(x, y, z)$. Разобьем область V на n областей $V_1, V_2, \ldots, V_n$ никак не имеющих единых внутренних точек. В любой точке области V_i возьмем произвольно точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Значение функции $f(x, y, z)$ в точке M_i умножим на объем V_i -й области также сложим подобные произведения согласно абсолютно всем областям разделения. Приобретённая сумма

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i$ называется интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$

интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ согласно области V. С целью функции $f(x, y, z)$ возможно сформировать многочисленное большое число интегральных сумм согласно области V.

В случае если при стремлении к нулю шага разбиения λ области V имеется предел интегральных сумм, в таком случае данный предел называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ согласно области V также обозначается символами:

$$\iiint_V f(x, y, z)dV \text{ или } \iiint_V f(x, y, z)dxdydz.$$

При данном $f(x, y, z)$ – подынтегральная функция, V – область интегрирования, x, y также z – переменные интегрирования, $dV(dxdydz)$ – элемент объема. Подобным способом, в случае если данный предел существует, в таком случае:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,V_i = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV$$

Тройной интеграл, таким образом, как и двойной, никак не зависит от способа разбиения области V на части также выбора точек на данных частях.

Пример. Вычислить тройной интеграл.

$$\iiint\limits_V \big(36(y+z)\big)dxdydz; V: 0\le x\le 1; 0\le y\le 1-x; 0\le z\le x+y.$$

Решение:

Перейдем от тройного интеграла к повторному:

$\iiint_V \big(36(y+z)\big)dxdydz = 36\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}(y+z)dz.$

Проведём поэтапное вычисление интеграла:

$\int_0^{x+y}(y+z)dz = \int_0^{x+y} ydz + \int_0^{x+y} zdz = y\int_0^{x+y}dz + \int_0^{x+y}zdz = y\cdot(x+y) + \left(\frac{(x+y)^2}{2}\right) = y\cdot(x+y) + \frac{x^2+2xy+y^2}{2} = \frac{2xy+2y^2+x^2+2xy+y^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2+4xy+3y^2)$,

$\int_0^{1-x}\frac{1}{2}(x^2+4xy+3y^2)dy = \frac{1}{2}\int(x^2+4xy+3y^2)dy = \frac{1}{2}\Big(\int_0^{1-x}x^2dy + \int_0^{1-x}(4xy)dy + \int_0^{1-x}3y^2dy\Big) = \frac{x^2}{2}\cdot\left(y\Big|_0^{1-x}\right) + 2x\cdot\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right) + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x}\right) = \frac{x^2}{2}\cdot(1-x) + 2x\cdot\left(\frac{(1-x)^2}{2}\right) + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{(1-x)^3}{3}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + 2x\cdot\left(\frac{1-2x+x^2}{2}\right) + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1-3x+3x^2-x^3}{3}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{2x-4x^2+2x^3}{2} + \frac{3-9x+9x^2-3x^3}{3} = \frac{3x^2-3x^3+4x-8x^2+4x^3+6-18x+18x^2-6x^3}{6} = \frac{1}{6}(-5x^3+13x^2-14x+6)$.

$\int_0^1\frac{1}{6}(-5x^3+13x^2-14x+6)dx = -\frac{5}{6}\int_0^1 x^3dx + \frac{13}{6}\int_0^1 x^2dx - \frac{14}{6}\int_0^1 xdx + 6\int_0^1 dx = -\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right) + \frac{13}{6}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) - \frac{14}{6}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) + 1\cdot x\Big|_0^1 = -\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{13}{6}\cdot\frac{1}{3} - \frac{14}{6}\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{75}{216}$,

$36\cdot\frac{75}{216} = \frac{75}{6} = 12{,}5.$

Ответ: $12{,}5$

Приложения двойных интегралов.

Площадь плоской фигуры S: $S = \iint_S dxdy.$

Объём тела, ограниченного поверхностями: $V = \iint_D f(x,y)dxdy.$

Площадь части криволинейной поверхности: $S = \iint_D\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,dxdy.$

Момент инерции относительно начала координат Oплоскости фигуры D:

$$I_0 = \iint\limits_D \gamma(x^2+y^2)dxdy.$$

Масса плоскости фигуры D переменной поверхности плотности:

$$\gamma = \gamma(x, y); M = \iint_D \gamma(x, y)dxdy.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями $x = 8 - y^2; x = -2y$..

Решение: Зададим область D неравенствами:

$8 - y^2 = -2y;\ -y^2 + 2y + 8 = 0;\ y_1 = 4;\ y_2 = -2; D:\ -2 \leq y \leq 4;\ -2y \leq x \leq 8 - y^2$

Вычислим двойной интеграл

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{4} dy \int_{-2y}^{8-y^2} dx = \int_{-2}^{4} dy \cdot x \Big| \begin{matrix} 8 - y^2 \\ -2y \end{matrix} = \int_{-2}^{4} (8 - y^2 + 2y)dy =$$

$$8\int_{-2}^{4} dy - \int_{-2}^{4} y^2 dy + 2\int_{-2}^{4} ydy = 8 \cdot y \Big| \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} - \frac{y^3}{3} \cdot \Big| \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} + 2\frac{y^2}{2} \cdot \Big| \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} = 8 \cdot (4 + 2) - \left(\frac{64}{3} + \frac{8}{3}\right) + 2\left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right) = 48 - 24 + 12 = 36$$

.

Ответ: $S = 36$

Приложения тройных интегралов.

Объём тела V:

$$V = \iiint_V dxdydz.$$

Масса тела M плотности:

$$M = \iiint_V \gamma(x, y, z)dxdydz.$$

Моменты инерции тела I относительно координатных осей и начала координат:

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz;$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz;$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dxdydz;$$

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

Статистические моменты тела относительно координатных плоскостей Oyz, Oxy, Oxz:

$$M_{yz} = \iiint_V x\gamma(x, y, z)dxdydz;$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)dxdydz;$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

Координаты центра масс тела:

$$x_0 = \frac{\iiint_V x\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{yz}}{M};$$

$$y_0 = \frac{\iiint_V y\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{xz}}{M};$$

$$z_0 = \frac{\iiint_V z\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Пример. Найти объём тела, ограниченного плоскостями $x = 1; y = 2; z = 3; x = 0; y = 0; z = 0$.

Решение: Зададим область V^* неравенствами:

$V^* = 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2; 0 \le z \le 3$.

Перейдём от тройного интеграла к повторному:

$V = \iiint_V dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$.

Проведём поэтапное вычисление интеграла:

$\int_0^3 dz = z \Big|_0^3 = 3 - 0 = 3$,

$\int_0^2 3dy = 3\int_0^2 dy = 3 \cdot y \Big|_0^2 = 3(2-0) = 6$,

$\int_0^1 6dx = 6\int_0^1 dx = 6 \cdot (1-0) = 6$.

Ответ: $V = 6$

В математическом анализе **кратным интегралом** называют множество интегралов, взятых от $d > 1$ переменных $\int \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_d$. Выше мы рассмотрели на примере двойных и тройных интегралов некоторые приложения таких интегралов.

Математический анализ оказывает значительную помощь в исследовании предметов также действий, встречающихся как в разных науках о природе, так и в разных науках о мире, повсюду, где имеется необходимость рассматривать данные вещи и процессы с количественной стороны. В этой статье показана роль интегрального исчисления, применение кратных интегралов в решении прикладных задач.

Список литературы

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Издательство Юрайт, 2019.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2004.

О НЕКОТОРЫХ ВОСТРЕБОВАННЫХ БИБЛИОТЕКАХ ДЛЯ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON

Мямлин А.А.[1]
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Щербатых В.Е.[2]

[1, 2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]myamlin.51@gmail.com, [2] wega18@mail.ru

Аннотация. В настоящей статье автор определяет такое явление в контексте компьютерного программировании, как библиотеки языков программирования. Сегодня библиотеки являются необходимым инструментарием при написании компьютерных программ и приложений, поскольку являются готовыми функциями и классами, упрощающими работу программиста. Автор приводит перечень наиболее значимых с его точки зрения библиотек языка программирования Python, показывает их предназначение и раскрывает структуру. Излагается краткая характеристика этих библиотек и ключевой функционал.

Ключевые слова: программирование, компьютерная программа, Python, библиотека подпрограмм.

ABOUT SOME POPULAR LIBRARIES FOR THE PYTHON PROGRAMMING LANGUAGE

Abstract. In this article, the author defines such a phenomenon in the context of computer programming as libraries of programming languages. Today, libraries are essential tools for writing computer programs and applications, as they are ready-made functions and classes that simplify the programmer's work. The author gives a list of the most significant libraries of the Python programming language from his point of view, shows their purpose and reveals their structure. A brief description of these libraries and key functionality are presented.

Keywords: programming, computer program, Python, subroutine library.

Введение

Библиотека в программировании – это набор инструментов, состоящий из функций, классов, объектов, модулей, макросов, глобальных переменных и т.д., разработанных для выполнения вполне определенных задач на языке программирования. Библиотеки существенно упрощают процесс написания программ, обеспечивая пользователя обширным инструментарием, который можно сочинить и самому (написать соответствующий код), для чего потребовалось бы много сил, энергии и времени, чего часто не хватает.

Как известно, дистрибутив языка программирования – это форма передачи программного обеспечения, содержащая программу-установщик (здесь можно выбирать стандартные режимы и параметры установки) и пакет файлов, в которых находятся элементы программных продуктов, в том числе и стандартные библиотеки (Даг Хеллман, 2019), обладающие максимальной универсальностью и включающие в себя наибольшее количество шаблонных алгоритмов для беспроблемной работы с конструктом, содержащим различные объекты.

Библиотеки Python

Поскольку для Python существует уже около 140 тыс. библиотек, то рассказать про все в одной статье просто невозможно, выбрать из лидеров среди пользователей-программистов также очень сложно – их очень много.

Для языка программирования Python, по нашему мнению, необходимо выделить следующие библиотеки.

Difflib – это библиотека, которая предоставляет набор функций для вычисления разницы между двумя последовательностями, такими как строки, списки или файлы. Эти функции могут быть использованы для сравнения, обнаружения изменений и слияния различных версий данных.

Базовые функции:

- `get_close_matches(word, possibilities, n=3,cutoff=0.6)` – находит слова из списка “possibilities”, которые наиболее близки в слову «word», возвращает список из “n” наиболее близких совпадений;
- `ndiff(a, b)` – возвращает последовательность строк, представляющих разницу между двумя строками a и b. Каждая строка в последовательности начинается с символа «-» для строк, присутствующих только в a, «+» для строк, присутствующих только в b и «?» для строк, присутствующих одновременно в обоих строках, но отличающихся.
- `HtmlDiff(a, b, tabsize=8)` – возвращает строку HTML, представляющую разницу между двумя строками a и b в виде таблицы. Различия выделяются цветом.

Gzip и Zlib – эти библиотеки предоставляют функции для сжатия и распаковки данных. Они основаны на алгоритмах сжатия без потерь, что означает, что сжатые данные могут быть восстановлены до своего исходного состояния без потери информации. Рассмотрим особенности каждой из них.

Gzip предоставляет функции для сжатия и распаковки данных в формате gzip, который широко используется для сжатия файлов и потоковой передачи данных. Основной функционал этой библиотеки:

- **`open (filename, mode = ‘rb’, compresslevel=9)`** – открывает файл для чтения (‘rb’) или записи (‘wb’) в сжатом формате gzip. Уровень сжатия может быть указан в диапазоне от 0 (без сжатия) до 9 (максимальное сжатие);
- **`compress(data, compresslevel=9)`** – сжимает данные с указанным уровнем сжатия;
- **`decompress(data)`** – распаковывает сжатые данные.

Zlib предоставляет более низкоуровневый доступ к функциям сжатия и распаковки формата zlib. Библиотека может использоваться для сжатия и распаковки данных в различных форматах, включая gzip, zlib, raw, deflate. Её основные функции:

- **`compress (data, level=9)`** – сжимает данные с указанным уровнем сжатия;
- **`decompress(data)`** – распаковывает сжатые данные;
- **`compressobj(level=9)`** – возвращает объект сжатия, который можно использовать для последовательного сжатия данных.

Библиотеки gzip и zlib являются не только мощными инструментами для сжатия и распаковки данных в Python 3, но также могут применяться для ускорения передачи данных и сохранения ценного дискового пространства.

Json – библиотека, которая предоставляет функции для работы с данными формата JSON (JavaScript Object Notation). JSON – это популярный текстовый формат для представления структурированных данных, широко используемых в веб-приложениях и обмене данными. Основным возможности:

- сериализация (преобразование) объектов Python в JSON (формат);
- десериализация (процесс, обратный сериализации) данных JSON в объекты Python;
- поддержка различных типов данных, включая словари, списки, строки, числа и булевы значения;
- встроенная поддержка кодирования и декодирования Unicode.

Библиотека json является значимым инструментом для работы с данными JSON в Python 3, поскольку позволяет разработчикам легко обмениваться данными с другими приложениями и сервисами, поддерживающими формат JSON.

Math – это библиотека, которая содержит широкий спектр математических функций и констант. Она включает в себя функции тригонометрические, логарифмические, показательные, статистические, а также предоставляет доступ к математическим константам π, e и другим. Приведем примеры:

- **`sin(x)`** – *синус угла x в радианах;*
- **`asin(x)`** – *арксинус числа x;*
- **`log10(x)`** – *логарифм числа x по основанию 10;*
- **`exp(x)`** – *экспонента числа x;*
- **`factorial(x)`** – *факториал целого числа x.*

Поскольку библиотека math имеет много и других возможностей для решения широкого круга вычислительных задач, то она просто необходима для математических вычислений.

Sqlite – это библиотека, которая предоставляет интерфейс для работы с базами данных SQLite – легко встраиваемая реляционная база данных, которая широко используется в настольных, мобильных и встроенных приложениях. С её помощью можно:

- подключаться к базам данных SQLite;
- выполнять SQL-запросы;
- вставлять, обновлять и удалять данные;
- извлекать данные из результатов запросов;

- создавать и управлять таблицами, индексами и другими объектами базы данных.

Библиотека sqlite является очень ценным инструментом для работы с базами данных SQLite в Python, т.к. позволяет разработчикам легко взаимодействовать с базами данных, выполнять запросы, вставлять, обновлять и удалять данные.

Threading – это библиотека, которая предоставляет высокоуровневый интерфейс для создания и управления потоками. Как известно, потоки позволяют выполнять несколько задач одновременно в одном процессе. Основные возможности:

- создание и управление потоками;
- синхронизация доступа к общим ресурсам;
- обмен данными между потоками;
- обработка исключений в потоках.

Библиотека threading является мощным средством для написания многопоточных программ в Python. Она позволяет разработчикам распараллеливать задачи, тем самым повышать производительность, создавать отзывчивые приложения.

Tkinter – это библиотека предназначена для создания графических пользовательских интерфейсов с помощью набора виджетов и элементов управления. Основной функционал:

- широкий набор виджетов, таких как кнопки, текстовые поля, окна прокрутки, списки, меню и т.п.;
- поддержка разных операционных систем, включая Windows, macOS и Linux;
- кроссплатформенная совместимость – приложения, созданные с помощью Tkinter, будут работать без проблем на разных платформах;
- возможность настройки внешнего вида и поведения виджетов с помощью CSS (Cascading Style Sheets);
- поддержка динамической компоновки, позволяющей изменять размер и положение виджетов в соответствии с размерами окна.

Tkinter – очень мощная библиотека для создания графических пользовательских интерфейсов в Python. Её простота при использовании, кроссплатформенная совместимость и широкие возможности настойки делают её незаменимой для разработки различных приложений GUI от простых до очень сложных.

Некоторые особо азартные программисты разрабатывают собственные наборы подпрограмм и модулей, которыми делятся с сообществом. Это способствует развитию и созданию новых библиотек, которые называются нестандартными. Среди таких библиотек хочется выделить следующие:

Pandas – это мощная библиотека для обработки и анализа данных. Она предоставляет высокоуровневые структуры данных и инструменты для работы с различными типами данных, такими как табличные данные, временные ряды и панели данных, очень полезна в статистических исследованиях (График с пандами).

NumPy (Numerical Python) – фундаментальная библиотека для научных вычислений. В её распоряжении имеется математический аппарат, позволяющий
высокопроизводительно обрабатывать матрицы, многомерные массивы и многое другое. Именно поэтому она входит в базовый стек библиотек для Machine Learning (машинное обучение) (Полезные библиотеки для Python).

Matplotlib – это библиотека для создания статических, анимированных и интерактивных визуализаций данных. Она необходима для программирования широкого спектра типов графиков, включая двухмерные, гистограммы, диаграммы рассеяния и трёхмерные поверхности.

PrettyTable – библиотека для создания аккуратных и легко читаемых таблиц в консольных приложениях. Она предоставляет простой API для форматирования и вывода табличных данных, что упрощает работу с данными в терминале.

Uuid (Universally Unique Identifier) – библиотека, которая предоставляет функции для генерации и работы с универсально уникальными идентификаторами (UUID). UUID – это 128-битные значения, которые используются для идентификации объектов уникальным и постоянным образом.

Art – библиотека, которая является мощным инструментом для создания текстовой графики в терминале. Она предлагает набор функций и классов для рисования различных фигур, текстов и изображений в текстовом формате.

PyPI (Python Package Index) – это библиотека, которая является центральным репозиторием для распространения программного обеспечения и управления пакетами, написанных на Python. PyPI предоставляет простой и централизованный способ поиска, загрузки и установки пакетов Python. Это огромная библиотека с более чем 307 тысячами программных пакетов для Python. Если подходящего пакета не находится, то, как правило, он создается с нуля, и автор его делится им с сообществом. Такой подход вносит весомый вклад в развитие экосистемы Python.

Celery – это распределённая система обработки задач и сообщений для Python. Она позволяет выполнять задачи асинхронно, параллельно и в распределённом режиме, что делает её идеальной для приложений, которым требуется высокая производительность и масштабируемость.

Dash – это фреймворк с открытым исходным кодом для создания динамических и интерактивных веб-приложений, использующих Python. Он предоставляет набор компонентов для быстрой и простой разработки веб-интерфейсов.

Pillow – это библиотека обработки изображений, которая имеет простой и мощный API для манипулирования изображениями различных форматов. Данная библиотека является форком библиотеки PIL (Python Imaging Library) и включает в себя множество дополнительных функций и улучшений.

Pygame – библиотека с открытым исходным кодом для разработки игр. Она состоит из набора модулей и классов, ориентированных на создание и управление графикой, звуком, вводом и другими элементами, необходимыми для создания интерактивных игр.

Bokeh – это интерактивная библиотека, которая предназначена для создания красивых и интерактивных веб-приложений для визуализации данных, основана на современных технологиях веб-разработки, такие как HTML5 и JavaScript и предоставляет простой и понятный API для создания сложных графиков.

Manim – новая библиотека для создания анимации с открытым исходным кодом на Python, позволяет разрабатывать высококачественные математические, научные и образовательные видеоролики с использованием кода Python. Manim популярен среди исследователей, преподавателей и любителей математики, которым необходимо визуализировать сложные концепции и идеи.

Заключение

В данной статье мы сделали небольшой обзор наиболее востребованных библиотек для языка программирования Python, которые значительно расширяют его возможности и делают его идеальным инструментом для решения широкого спектра задач: математических, экономических, статистических, обучающих, логических и т.д.

Используя эти библиотеки и множество других, программисты-разработчики могут повысить свою производительность, улучшить качество кода и создавать решения в инновационном стиле. Поскольку экосистема Python постоянно развивается, в будущем можно ожидать появления ещё более мощных и специализированных библиотек, расширяющих возможности языка или объединяющих функционалы нескольких библиотек.

Список литературы

Даг Хеллман Стандартная библиотека Python 3. Справочник с примерами. Компьютерное издательство «Диалектика», 2019.

График с пандами: визуализация данных Python для начинающих [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://realpython.com/pandas-plot-python/ (дата обращения: 03.05.2024)

Полезные библиотеки для Python: чем пользуются разработчики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://blog.skillfactory.ru/top-29-bibliotek-dlya-python-chem-polzuyutsya-razrabotchiki/ (дата обращения: 26.04.2024)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ СРЕДСТВАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Панов П.Р.[1], Чеботарёв Р.М.[2]
Научный руководитель: к. п. н., доцент Мельников Р.А.[3]

[1,2,3]Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

e-mail: [1]pavel-lol-panov@mail.ru, [2]romik.chyobik4@gmail.com, [3]roman_elets_08@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается применение дифференциальных уравнений для построения математической модели и исследования социально-экономических процессов. Математическое моделирование посредством составления функциональных зависимостей между различными экономическими показателями и характеристиками позволяет получить описание функционирования какой-либо системы, осуществить поиск оптимальных (устойчивых) её решений, изучить изменения в поведении решения в зависимости от малых изменений первоначальных данных и параметров. Изучив и проанализировав теоретические основы математического моделирования социально-экономических процессов, мы пришли к выводу, что использование дифференциальных уравнений при построении моделей является актуальным в аспекте выявления проблем оценки эффективности использования ресурсов и функционирования социально-экономических систем различных уровней и масштабов. В целом построение экономико-математических моделей является современным научным направлением, позволяющим раскрыть сущность протекания социально-экономических процессов, эффективно управлять их поведением и анализировать состояние экономических объектов и систем в будущем.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, математическая модель, моделирование, экономические процессы.

MATHEMATICAL MODELING OF SOCIO-ECONOMIC PROCESSES BY MEANS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. The article considers the application of differential equations for the construction of a mathematical model and the study of socio-economic processes. Mathematical modeling through the compilation of functional dependencies between various economic indicators and characteristics allows you to obtain a description of the functioning of any system, search for optimal (stable) solutions, study changes in the behavior of the solution depending on small changes in the initial data and parameters. Having studied and analyzed the theoretical foundations of mathematical modeling of socio-economic processes, we came to the conclusion that the use of differential equations in the construction of models is relevant in terms of identifying problems in assessing the effectiveness of resource use and the functioning of socio-economic systems of various levels and scales. In general, the construction of economic and mathematical models is a modern scientific direction that allows us to reveal the essence of the course of socio-economic processes, effectively manage their behavior and analyze the state of economic objects and systems in the future.

Keywords: differential equations, mathematical model, modeling, economic processes.

В начале рассмотрим понятие модели: «Модель – это физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследования и позволяющий адекватно отображать интересующие физические свойства и характеристики объекта» (Бережная, 2005) и её важной разновидности – «математическая модель».

«Совокупность математических объектов и отношений между ними, адекватно отображающая физические свойства, взаимосвязи и зависимости основных характеристик моделируемой системы» (Гамецкий, 1997).

На современном этапе развития науки математическое моделирование, безусловно, является одной из главных составляющих методологии научного исследования. «Ключевой идеей математического моделирования является замена исходного объекта математической моделью и решения поставленной задачи с помощью современных вычислительных средств» (Бережная, 2005).

Одним из наиболее эффективных инструментов в математическом моделировании является теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный вид математических объектов позволяет описывать и анализировать динамические процессы и изменения в социально-экономических системах, обеспечивая необходимую степень формализации для самых разнообразных экономических явлений и процессов.

Использование дифференциальных уравнений для создания модели способствует обогащению методологической базы экономического анализа, позволяя формализовать и математически описать сложные экономические гипотезы и теории, что способствует проверке и апробации их на практике.

Дифференциальные уравнения дают возможность создания комплексных моделей, в которых учитываются множество факторов, определяющих течение социально-экономических процессов, что повышает сбалансированность и точность прогнозов, а это, в свою очередь, обеспечивает эффективность экономического планирования и управления.

Рассмотрим основные экономические модели, связанные с решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

«Модель *экономического роста Солоу* – представляет собой ключевую теоретическую концепцию в области макроэкономики, разработанную для объяснения и анализа долгосрочного экономического роста. В основе модели лежит идея, что уровень производства в экономике зависит от трёх основных факторов:

1) накопление капитала;
2) трудовые ресурсы;
3) технологический прогресс» (Бережная, 2005).

Математическая модель Солоу является линейной, она обычно состоит всего из одного дифференциального уравнения, с помощью которого происходит моделирование эволюции запаса капитала, в расчёте на душу населения.

Её результаты интерпретируются в следующем контексте: «в долгосрочной перспективе уровень производства на душу населения растёт благодаря увеличению этих трёх основных факторов» (Васенкова, 2003).

«Модель Солоу[1] рассматривает экономику как единое целое (без структурных подразделений), в ней производится единственный универсальный продукт, который может потребляться как в непроизводственной, так и в производственной среде. Потребление данного продукта в производственной среде может рассматриваться как инвестирование» (Кузнецов, 2015).

«Одна из основных моделей – функция Кобба-Дугласа[2]. Где объём выпуска в экономике обозначен *Y*, объем труда – *L*, *A* – изменение в технологиях производства, α – коэффициент окупаемости ресурса, а *K* – объем капитала» (Васенкова, 2003):

$$\mathrm{Y} = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

Рассмотрим модель известного американского экономиста, лауреата Нобелевской премии Роберта Солоу (1924–1923) с производственной функцией Кобба-Дугласа.

Пусть *X* – внутренний валовый продукт, *C* – конечное потребление, а *I* – инвестиции.

$$\mathrm{X} = I + C,$$
$$1 = \frac{1}{X} + \frac{C}{X}.$$

В данном равенстве $\frac{1}{X}$ – доля производственного накопления, далее s, а $\frac{C}{X}$ – доля непроизводственного потребления, которую мы обозначим u и будем считать постоянной величиной, поскольку поведение потребителя не рассматривается в данном случае.

$$1 = s + u$$

Уравнение динамики для объёма фондов будет представлено в следующем виде с включением нормы амортизации капитала, μ ($0 < \mu < 1$):

$$\mathrm{K}' = I - \mu K$$

Фондовооруженность обозначим как *k(t)* и будем находить её по формуле:

$$\mathrm{k}(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$
$$K(t) = k(t)L(t)$$
$$K' = k'(t)L(t) + k(t)L'(t)$$
$$k'L + kL' = 1 - \mu K$$

[1] Разработана в 1956 году Р. Солоу и австралийским экономистом Тревором Своном (1918–1989), независимо друг от друга

[2] «Функция полезности» впервые была предложена шведским экономистом Ю.Г.К. Викселлем (1851–1926), а в 1928 г. была применена, интерпретирована и проверена в работе «Теория производства», написанной американскими математиками и экономистами Ч. Коббом (1875–1949) и П. Дугласом (1892–1976).

$$k' + k\frac{L'}{L} = \frac{I}{L} - \mu k$$

Если численность населения растёт с коэффициентом $p > 0$, то принимая во внимание модель естественного роста, описанную выше:

$$L' = pL$$

$$p = \frac{L'}{L}$$

$$k' = \frac{I}{L} - (\mu + p)k$$

Пусть $x(t)$ – средняя производительность труда.

$$x(t) = \frac{X(t)}{L(t)}$$

$$k' = sx(t) - (\mu + p)k$$

«Данное уравнение является результирующим для модели Солоу. Его экономический смысл определяется как прирост капиталовооруженности одного работника равен соотношению фактически сделанных инвестиций $sx(t)$ и вложений, необходимых для сохранения достигнутого уровня k в условиях прироста населения p и потери капитала μ» (Гамецкий, 1997).

Теперь, пусть $a>0$, $\alpha+\beta = 1$, α, $\beta>0$ в производственной функции Кобба-Дугласа вида:

$$F(K, L) = aK^{\alpha}L^{\beta}$$

$$x(t) = \frac{aK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = aK^{\alpha}L^{\beta-1} = aK^{\alpha}L^{\alpha}L^{\beta-1} = ak^{\alpha}$$

$$k' + (\mu + p)k^{1-\alpha} = ask^{\alpha}.$$

Это уравнение Бернулли с $\gamma = \alpha$.

$$\frac{k'}{k^{\alpha}} + (\mu + p)k^{1-\alpha} = as$$

Введём новую неизвестную функцию

$$z = k^{1-\alpha} = k^{\beta}, z' = \beta\frac{k\prime}{k^{\alpha}}$$

и получим линейное неоднородное уравнение.

$$z' + \beta(\mu + p)z = as\beta. \qquad (*)$$

Соответствующее линейное однородное уравнение имеет вид:

$$z' = -(1 - \alpha)(\mu + p)z.$$

А его общее решение:

$$z = De^{-\beta(\mu+p)t},$$

где D – произвольная постоянная.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (*) можно решить методом вариации произвольной постоянной, приняв $D = D(t)$:

$$D'e^{-\beta(\mu+p)t} - \beta(\mu + p)De^{-\beta(\mu+p)t} + \beta(\mu + p)De^{-\beta(\mu+p)t} = as\beta$$

$$D' = as\beta e^{\beta(\mu+p)t}$$

$$D = \frac{as}{(\mu+p)}e^{\beta(\mu+p)t} + H.$$

Общее решение:

$$z = He^{-\beta(\mu+p)t} + \frac{as}{(\mu+p)}.$$

Значит,

$$k = \left(He^{-\beta(\mu+p)t} + \frac{as}{(\mu+p)}\right)^{\frac{1}{\beta}}, k = 0$$

$$k(0) = k_0 > 0$$

$$k_0 = \left(H + \frac{as}{(\mu+p)}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$H = k_0^{\beta} - \frac{as}{(\mu+p)}$$

$$k(t) = \left(k_0^{\beta} e^{-\beta(\mu+p)t} + \frac{as}{(\mu+p)}\left(1 - e^{-\beta(\mu+p)t}\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Следует отдельно подчеркнуть, что:

$$lim_{t\to+\infty} k(t) = \left(\frac{as}{(\mu+p)}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Изучив и проанализировав теоретические аспекты математического моделирования социально-экономических процессов с помощью теории обыкновенных дифференциальных уравнений, мы пришли к выводу, что данный метод один из наиболее распространённых методов анализа и прогнозирования развития экономического процесса.

Таким образом, дифференциальные уравнения являются внушительным инструментом для специалистов в области экономики и финансирования, позволяющим создавать сложные и практичные модели социально-экономических процессов и явлений, что способствует тщательному анализу и прогнозированию экономического сценария для эффективного принятия управленческих решений.

Список литературы

Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учебное пособие для вузов. М.: Финансы и статистика, 2005.

Васенкова Е.К., Волкова Е.С., Шандра И.Г. Дифференциальные и разностные уравнения: курс лекций. М.: Финансовая академия, 2003.

Гамецкий А.Ф. Математическое моделирование макроэкономических процессов. Кишинев: Еврика, 1997.

Кузнецов Б.Т. Макроэкономика: учебное пособие. М.: ЮнитиДана, 2015.

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Полякова О.И.[1]
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Игонина Е.В.[2]

[1,2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]olgapolyakovai@yandex.ru, [2]elenaigonina7@mail.ru

Аннотация. Программирование основывается на понятии изменяемых состояний, побочных эффектов и последовательной обработке данных. Однако, функциональное программирование ставит во внимание чистоту функций – то есть функции, всегда возвращающие одинаковый результат для тех же аргументов и не имеющие побочных эффектов. Это позволяет создавать более предсказуемые и легко поддерживаемые программы. В функциональном программировании функции во главе угла – они могут быть переданы как параметры другим функциям, возвращены из функций и присвоены переменным. Это позволяет создавать более гибкий и модульный код, так как функции могут быть легко переиспользованы. Одной из ключевых концепций функционального программирования является неизменяемость данных. Это способствует параллельности и упрощает отладку. Еще одной важной концепцией функционального программирования является рекурсия. Этот подход позволяет лаконично и элегантно описывать решения, основываясь на характеристиках задачи. В этой работе проведем сравнительный анализ эффективности применения функционального программирования и применения языков программирования низшего порядка для решения дифференциальных уравнений. Анализ проведен с использованием языка программирования Haskell и C++.

Ключевые слова: функциональное программирование, функция, дифференциальное уравнение, Haskell, C++.

ANALYSIS OF THE EFFECTIVENESS OF USING FUNCTIONAL PROGRAMMING METHODS FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. Traditionally, programming is based on the concept of mutable states, side effects, and sequential processing of data. However, functional programming emphasizes the purity of functions – that is, functions that always return the same result for the same arguments and have no side effects. This allows you to create programs that are more predictable and easier to maintain. In functional programming, functions are treated as first-class values-that is, they can be passed as parameters to other functions, returned from functions, and assigned to variables. This allows you to create more flexible and modular code, since functions can be easily reused. One of the key concepts of functional programming is data immutability. This promotes concurrency and makes debugging easier. Another important concept in functional programming is recursion. This allows you to succinctly and elegantly describe solutions based on the characteristics of the problem. In this work, a mathematical model is developed to analyze the effectiveness of using functional programming to solve differential equations. The analysis was carried out using the Haskell programming language.

Keywords: functional programming, function, differential equation, Haskell, C++.

Введение

Функциональное программирование (ФП) предоставляет мощные инструменты для решения дифференциальных уравнений. Одним из них является использование функций высшего порядка, которые позволяют работать с функциями как с данными.

Методы функционального программирования на языке Haskell могут быть эффективным выбором для решения дифференциальных уравнений, особенно для задач, требующих неизменяемости, ленивой оценки и выразительности. Однако важно учитывать потенциальные недостатки, такие как производительность и ограниченная поддержка параллелизма при выборе Haskell для конкретной задачи. Дифференциальные уравнения широко используются для моделирования различных физических, химических и биологических явлений (*Hudak, 1989*). Их решение может быть сложной задачей, особенно для нелинейных уравнений. Методы функционального программирования (ФП) предлагают мощный набор инструментов для решения этих задач.

В этой статье рассмотрим актуальность применения функционального программирования для решения дифференциальных уравнений.

Методология исследования

Существует несколько методов ФП, которые можно использовать для решения дифференциальных уравнений:

- Метод Рунге-Кутты: Семейство численных методов, которые широко используются для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Рунге_—_Кутты).
- Метод конечных элементов: Численный метод, который используется для решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). (https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_конечных_элементов)
- Метод конечных разностей: Численный метод, который используется для решения ДУЧП на дискретных сетках. (https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_конечных_разностей)

Многие ФП-языки, такие как Haskell, OCaml и F#, предоставляют библиотеки для решения дифференциальных уравнений. Эти библиотеки реализуют вышеупомянутые методы и предоставляют удобный интерфейс для пользователей.

Например, в Haskell библиотека *differential-equations* предоставляет функции для решения ОДУ и ДУЧП с использованием методов Рунге-Кутты и конечных элементов. (https://en.wikipedia.org/wiki/Functional_programming)

Рассмотрим наглядно схему решения ОДУ с использованием метода Рунге-Кутты на языке Haskell:

```
import Differential.Equations (solveIVP)
import qualified Differential.Equations.RK as RK
//Определяем ОДУ
```

```
f :: Double -> Double -> Double
f(t,y) = t * y

//Решаем ОДУ
result <- solveIVP RK.rungeKutta4 f 0.0 1.0 1.0
//Выводим результат
print result
```

Листинг 1. Метод Рунге-Кутты на языке Haskell

Ниже приведен пример реализации функции, которая решает дифференциальное уравнение вида $dy/dx = f(x,y)$:

```
import Numeric.AD
solveDifferentialEquation :: (Floating a, Eq a) => (a -> a -
> a) -> a -> a -> a -> a
solveDifferentialEquation f x0 y0 h = y
  where
    y = foldr (\x ys -> (ys !! 0) + h * (f' (x, ys !! 0)))
[y0] xs
    xs = iterate (+ h) x0
    f' = convert (flip diff' 0 . uncurry) f

//Пример использования
f :: Double -> Double -> Double
f x y = x * y

main :: IO ()
main = do
  let x0 = 0.0  // начальное значение x
      y0 = 1.0  // начальное значение y
      h = 0.1   // шаг
      result = solveDifferentialEquation f(x0,y0) h
  print result
```

Листинг 2. Решение ОДУ на языке Haskell методом Эйлера

В данном примере используется библиотека *Numeric.AD*, которая позволяет автоматически вычислять производные функций. Функция `solveDifferentialEquation` принимает на вход функцию `f`, начальные значения x0 и y0, а также шаг h. Она последовательно вычисляет значение y на каждом шаге, используя *метод Эйлера* для численного интегрирования дифференциального уравнения. (https://en.wikipedia.org/wiki/Haskell)

В данном примере используется функция $f(x,y) = xy$, но ее можно заменить на любую другую функцию в соответствии с задачей.

Таким образом, функциональное программирование позволяет элегантно и компактно описывать и решать дифференциальные уравнения с использованием функций высшего порядка и ленивых вычислений.

Далее рассмотрим программу реализации метода Эйлера для решения обыкновенного дифференциального уравнения с использованием языка программирования C++.

```
#include<iostream>
/* определение обыкновенного дифференциального уравнения,
которое необходимо решить */
/* В этом примере мы решаем dy/dx = x + y */
#define f(x,y) x+y

using namespace std;

int main()
{
 float x0, y0, xn, h, yn, slope;
 int i, n;
 cout<<"Enter Initial Condition"<< endl;
 cout<<"x0 = ";
 cin>> x0;
 cout<<"y0 = ";
 cin >> y0;
 cout<<"Enter calculation point xn = ";
 cin>>xn;
 cout<<"Enter number of steps: ";
 cin>> n;

 /* Расчет размера шага (h) */
 h = (xn-x0)/n;

 /* Метод Эйлера */
 cout<<"\nx0\ty0\tslope\tyn\n";
 cout<<"------------------------------\n";
 for(i=0; i < n; i++)
 {
  slope = f(x0, y0);
  yn = y0 + h * slope;
  cout<< x0<<"\t"<< y0<<"\t"<< slope<<"\t"<< yn<< endl;
  y0 = yn;
  x0 = x0+h;
 }
 /* Вывод результата */
 cout<<"\nValue of y at x = "<< xn<< " is " << yn;

 return 0;
}
```

Листинг 3. Решение ОДУ на языке C++ методом Эйлера

Результаты

Проведя сравнительный анализ использования разных методологий решения дифференциальных уравнений, мы наглядно видим, что использование функций при поиске решений дифференциальных уравнений намного упрощает и сокращает объем программы. Таким образом, можно выделить следующие преимущества функционального программирования:

- *Неизменяемость*: Неизменяемые структуры данных Haskell гарантируют, что входные данные не будут изменены в процессе вычислений, что упрощает разработку и отладку кода.
- *Ленивая оценка*: Ленивая оценка Haskell позволяет отложить вычисления до тех пор, пока они не понадобятся, что может значительно повысить эффективность для больших дифференциальных уравнений.
- *Выразительность*: Мощные средства выражения Haskell, такие как функции высшего порядка и лямбда-выражения, позволяют легко определять сложные функции и операции для решения дифференциальных уравнений.
- *Библиотеки*: Haskell предоставляет обширные библиотеки для решения дифференциальных уравнений, такие как *differential-equations*, которые реализуют эффективные численные методы и предоставляют удобный интерфейс для пользователей.

Также, можно выделить и некоторые недостатки:

- *Производительность*: Хотя Haskell известен своей строгой системой типов и оптимизацией во время компиляции, его производительность может быть ниже, чем у языков с более низким уровнем, таких как C или Fortran, особенно для больших и сложных дифференциальных уравнений.
- *Крутая кривая обучения*: Haskell имеет крутую кривую обучения, и разработчикам может потребоваться время, чтобы освоить его функциональный стиль программирования и систему типов.
- *Ограниченная поддержка параллелизма:* Haskell имеет ограниченную поддержку параллелизма, что может ограничивать его масштабируемость для больших дифференциальных уравнений, требующих параллельных вычислений.

Выводы

Таким образом, можно сделать вывод, что по сравнению с другими языками, используемыми для решения дифференциальных уравнений, Haskell предлагает уникальные преимущества в отношении неизменяемости, ленивой оценки и выразительности. Однако он может уступать по производительности языкам с более низким уровнем, таким как C или Fortran, и может иметь ограниченную поддержку параллелизма по сравнению с языками, такими как Python или Julia.

Функциональное программирование сильно отличается от императивного программирования. Наиболее существенные различия проистекают из того факта, что функциональное программирование позволяет избежать побочных эффектов, которые используются в императивном программировании для реализации состояния и ввода-вывода. Чистое функциональное программирование полностью предотвращает побочные эффекты и обеспечивает ссылочную прозрачность.

При этом, языки функционального программирования обычно менее эффективны в использовании процессора и памяти, чем императивные языки, такие как C и Pascal. Это связано с тем фактом, что некоторые изменяемые структуры данных, такие как массивы, имеют очень простую реализацию с использованием существующего оборудования. К плоским массивам можно очень эффективно обращаться с помощью процессоров с глубокой конвейерной обработкой, эффективно выполнять предварительную выборку через кэши или обрабатывать с помощью инструкций SIMD. Также нелегко создать их одинаково эффективные неизменяемые аналоги общего назначения. Для чисто функциональных языков наихудшее замедление – логарифмическое по количеству используемых ячеек памяти, поскольку изменяемая память может быть представлена чисто функциональной структурой данных с логарифмическим временем доступа (например, сбалансированным деревом). Для программ, выполняющих интенсивные численные вычисления, функциональные языки лишь немного медленнее, чем C (The Computer Language Benchmarks Game, 2011). Для программ, которые обрабатывают большие матрицы и многомерные базы данных, используются функциональные языки программирования массивов (такие как J и K), отличающиеся оптимизацией скорости.

Список литературы

Paul Hudak. Conception, evolution, and application of functional programming languages // ACM Computing Surveys. 1989. Vol. 21. No 3. P. 359–411. DOI:10.1145/72551.72554

Functional programming [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Functional_programming (дата обращения: 02.02.2024)

Haskell [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Haskell (дата обращения: 02.02.2024)

Метод Рунге – Кутты [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Рунге_—_Кутты (дата обращения: 02.02.2024)

Метод Эйлера [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Эйлера (дата обращения: 02.02.2024)

Метод конечных элементов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_конечных_элементов (дата обращения: 02.02.2024)

Метод конечных разностей [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_конечных_разностей (дата обращения: 02.02.2024)

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Поршнева Д.Э.[1]
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Елецких К.С.[2]

[1, 2]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина*

e-mail: [1]eduardovna0203@gmail.com, [2]Kostan86@yandex.ru

Аннотация. В статье речь пойдет о приближенных методах вычисления определенных интегралов в основании, которых лежит геометрический смысл интеграла. Рассмотрим приближенные вычисления методом прямоугольников, методом трапеций и методом парабол (Симпсона).

Ключевые слова: определенный интеграл, метод прямоугольников, метод парабол, метод Симпсона, метод трапеций.

APPROXIMATE METHODS FOR CALCULATING A CERTAIN INTEGRAL

Abstract. The article will focus on approximate methods for calculating certain integrals, which are based on the geometric meaning of the integral. Let's consider approximate calculations by the rectangle method, the trapezoid method and the parabola (Simpson) method.

Keywords: definite integral, rectangle method, parabola method, Simpson method, trapezoidal method.

Расчёт определённых интегралов согласно формуле Ньютона – Лейбница не всегда допустимо, поскольку не все функции интегрируются в конечном виде, в таком случае присутствуют первообразные таких функций не выражающиеся посредством элементарные функции с помощью конечного числа арифметических действий и операций взятия функции от функции.

В случае если первообразная функция известна, но имеет весьма непростой и неудобный для вычисления вид, в таком случае использование формулы Ньютона – Лейбница весьма сложно. В данных случаях прибегают к приближенным методам вычисления определённого интеграла.

Данные методы предоставляют возможность вычислить определённый интеграл, если он существует и в случае, если численные значения подынтегральной функции известны. Формулы, при помощи которых проводится численное интегрирование, приобрели название квадратурных формул.

Непростые вычислительные задачи, которые образуются при исследовании физических и технических вопросов, есть возможность разделить на ряд простых - таких как вычисление интегралов, например, и иных. Многие элементарные задачи считаются простыми и хорошо исследованы. Для этих задач разобраны методы численного решения, зачастую существуют стандартные программы решения их на ЭВМ.

Случаи, если подынтегральная функция задаётся графиком либо таблицей экспериментально полученных значений. В подобных ситуациях применяют различные методы численного интегрирования, которые базируются на том, что интеграл представляется в виде предела интегральной суммы (суммы площадей), также дают возможность установить эту сумму с оптимальной точностью.

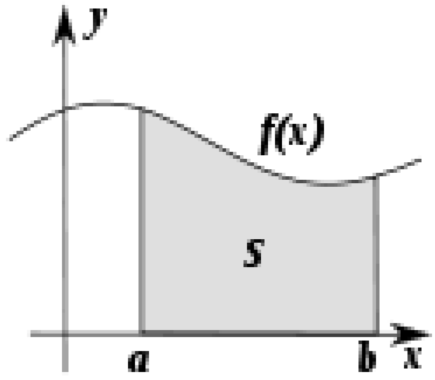


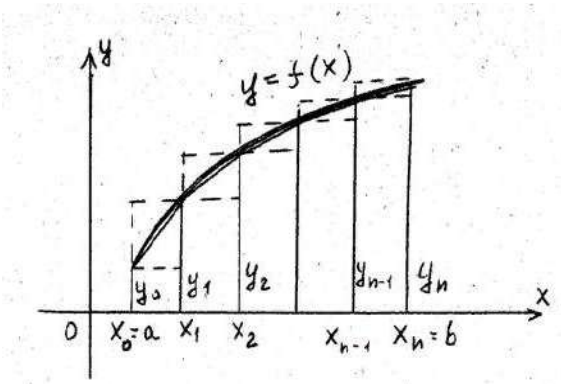
Рис. 1

Пусть требуется вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ при условии, что a и b конечны и $f(x)$ является непрерывной функцией на всем промежутке (a,b). Значение интеграла I представляет собой площадь, ограниченную кривой $f(x)$,осью x и прямыми $x = a$, $x = b$ (Рис. 1).

Вычисление интеграла проводится путем разбиения интервала от $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$ на множество минимальных промежутках, приближенным нахождением площади каждой полосы, получающейся при данном разбиении, а также последующем суммировании площадей этих полос.

Одномерный случай.

Главная концепция многих методов численного интегрирования заключается в смене подынтегральной функции на наиболее элементарную, интеграл от которой просто рассчитывается аналитически. При этом с целью оценки значения интеграла образуются формулы вида



$$I \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i),$$

где n – число точек, в которых рассчитывается значение подынтегральной функции. Точки x_i называются узлами метода, числа ω_i – весами узлов. При замене подынтегральной функции на полином нулевой, первой и второй степени получаются соответственно методы прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона).

Метод прямоугольников (средних, левых, правых).

Пусть функция $f(x)$непрерывна на отрезке $[a,b]$. Необходимо вычислить определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Разделим отрезок $[a,b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n равных частей длины Δx: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Обозначим через $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n$ значения функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, т.е. $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$.

Составим суммы:

$y_0\Delta x + y_1\Delta x + \cdots + y_{n-1}\Delta x$

$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \cdots + y_n\Delta x$

Каждая из составленных сумм является суммой для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и поэтому приближенно выражает интеграл

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}), \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n). \qquad (2)$$

Данные формулы являются формулами прямоугольников.

Исходя из рисунка видно, что если $f(x)$ – положительная и возрастающая функция, то формула (1) называется формулой левых прямоугольников и выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящая из прямоугольников входящих. Формула (2) является формулой правых прямоугольников – площадь ступенчатой фигуры, который состоит из входящих прямоугольников.

Ошибку, которую совершают при вычислении интеграла по формуле прямоугольников, тем будет меньше, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ чем больше число n.

Если подынтегральная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$, то для оценки погрешности δ_n при вычислении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формулам прямоугольников служит неравенство:

$$|\delta_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M_1$$

где M_1 является наибольшее значение абсолютной величины производной $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$, т.е. наибольшее значение $|f'(x)|$ на данном отрезке.

Метод трапеций.

Если кривую $y = f(x)$ как и в формуле прямоугольников заменить на вписанную ломанную, то получиться более точное значение определенного интеграла. Тогда площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей прямоугольных трапеций, которые ограничены сверху хордами $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$.

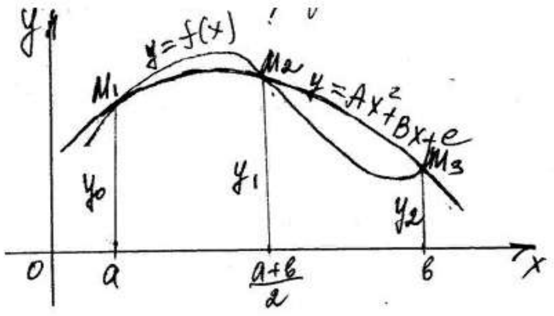
Площадь первой из трапеций будет равна $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, а площадь второй трапеции $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$ и т.д.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \cdots + \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x\right)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-}$$



является формулой трапеции. Число, которое стоит в правой части формулы (3), будет среднее арифметическое чисел, стоящих в правых частях формул (1) и (2). Обозначив $y_0 + y_n = y_{кр}$ (крайние), $(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) = y_{кр}$ (промежуточные), получаем более компактную форму записи

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_{кр} + 2y_{кр}).$$

Данная приближенная формула является более точной, чем больше число n. Ошибка, допускаемая при вычислении, не превышает

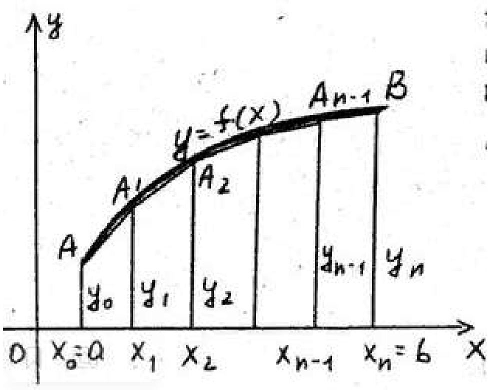
$$\Delta \leq \left|\frac{(b-a)^3}{12n^2}M\right|,$$

где M – наибольшее значение $f''(x)$ на отрезке $[a,b]$, или

$$\Delta \leq \frac{b-a}{12}|max\,\Delta^2 y|,$$

где $\Delta^2 y$ – табличные разности второго порядка.

Метод парабол (Симпсона).



Метод парабол базируется на замене графика подынтегральной функции дугами парабол, оси которых параллельны оси Oy. Разберём частный случай, если кривая, ограничивающая эту криволинейную трапецию, считается графиком квадратного трехчлена

$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$

Есть место для формулы

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2), \qquad \textbf{(4)}$$

где $y_0 = f(a), y_2 = f(b), y_1 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, есть ордината параболы находящаяся в середине отрезка $[a,b]$.

Вывод соотношения приводиться к прямой проверке. Вычислим выражение, которое стоит в правой части формулы.

$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Big|_a^b = \frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b-a) = \frac{b-a}{6}(2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(b+a) + 6C)$

Для подсчёта выражения, которое стоит в правой части формулы, найти нужно предварительно y_0, y_1, y_2:

$$y_0 = f(a) = Aa^2 + Ba + C;$$
$$y_2 = f(b) = Ab^2 + Bb + C;$$
$$y_1 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = A\frac{(a+b)^2}{4} + B\frac{a+b}{2} + C.$$

Найденные значения нужно подставить в правую часть формулы (4), тогда получаем следующее:

$$\frac{b-a}{6}(y_0 + y_1 + y_2) = \frac{b-a}{6}(Aa^2 + Ba + C + A(a^2 + 2ab + b^2) + 2B(a+b) + 4C + Ab^2 + Bb + C) = \frac{b-a}{6}(2A(a^2 + ab + b^2) + 3B(a+b) + 6C)$$

.

Правая и левая части формулы (4) между собой будут равны, тем самым доказывая её справедливость.

Теперь рассмотрим криволинейную трапецию, которая ограничена произвольной кривой $y = f(x)$. Через точки $M_1(a, y_0)$, $M_2\left(\frac{a+b}{2}, y_1\right)$, $M_3(b, y_2)$ кривой нужно провести вспомогательную параболу $y = Ax^2 + Bx + C$.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченная вспомогательной параболой, приблизительно равная площади криволинейной трапеции

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx.$$

Следовательно, по формуле (4), для произвольной функции $y = f(x)$ преобладает следующее приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2). \qquad (5)$$

Данная формула есть малая формула Симпсона.

Если отрезок $[a, b]$ довольно большой, в таком случае приближение, предоставляемое формулой (5), станет очень неприятным. С целью того чтобы приобрести наиболее точно приближение интеграла разделим $[a, b]$ на n равных частей. Длина каждого отрезка станет равна $\frac{b-a}{n}$, где n – непременно четное число. Используя, формулу (5) поочередно к каждому отрезку, получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})). \qquad (6)$$

Формула (6) является большой формулой Симпсона.

Если ввести обозначения

$$y_0 + y_{2n} = y_{\text{кр}},$$
$$y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1} = y_{\text{неч}},$$
$$y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2} = y_{\text{чётн}}$$

тогда имеем

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left(y_{\text{кр}} + 4y_{\text{неч}} + 2y_{\text{чётн}}\right).$$

Погрешность, которую получаем при вычислении, не превышает

$$\Delta \leq \left|\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4\right|,$$

где M_4 – наибольшее значение четвёртой производной функции $f(x)$ на $[a, b]$, или

$$\Delta \leq \frac{b-a}{180} |max \Delta^4 y|,$$

где $\Delta^4 y$ – четвёртые табличные разности.

Приближенные методы вычисления определенного интеграла обширно используются при решении множества физических, промышленных задач. Таким образом, к примеру, приближенные методы вычисления определенного интеграла, применяются во внешней и внутренней баллистике, при расчете дальности, а также расхода горючего в полете.

Численных методов большое количество, однако, все без исключения они базируются на геометрическом представлении определенного интеграла, ровно так, как и площади криволинейной трапеции.

Любой из описанных методов приближенного вычисления интегралов включает точный алгоритм их нахождения, что даёт возможность обширно использовать данные способы с целью вычислений на ЭВМ. Подводя итоги, заметим, что отмеченные методы являются эффективными для вычисления интегралов.

Список литературы

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Издательство Юрайт, 2019.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2004.

Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов. 11-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2005.

Научное издание

ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ: МОЛОДЕЖНАЯ ПАРАДИГМА

СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ МОЛОДЫХ ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ

Технический редактор – Г.Н. Бурганская
Техническое исполнение – В.М. Гришин

Сборник подготовлен по материалам,
предоставленным авторами в электронном виде,
и сохраняет авторскую редакцию.
Авторы несут персональную ответственность
за содержание материалов, точность цитирования и
библиографической информации

Гарнитура Times.
Печ.л. 9,7 Уч.-изд.л. 9,5

Электронная версия
Сборник размещен в системе Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)
и на сайте https://elsu.ru/kaf/maem/science
Заказ 41
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1