

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.А. БУНИНА»

**Е.В. Игони́на, О.Б. Гладких, О.Н. Прокуратова**

# **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ИХ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ**

Учебное пособие

Елец – 2022

УДК 519.6  
ББК  
И

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина  
от 28.01.2022 г., протокол №1

Рецензенты:

А.В. Сидоров, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, радиотехники и электроники (Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина)

С.С. Бунеев, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологических процессов в машиностроении и агроинженерии (Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина)

**И** Игонина Е.В., Гладких О.Б., Прокуратова О.Н. **Численные методы и их программная реализация: учебное пособие.** – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2022. – 80 с.

Учебное пособие содержит краткое изложение таких теоретических вопросов как: элементы теории погрешностей, численные методы решения нелинейных уравнений, аппроксимация функций, численное интегрирование функций одной переменной и приближенное решение дифференциальных уравнений. В пособии приведены основные формулы, а также предложены способы реализации алгоритмов и вычислительных процедур, рассматриваемых численных методов, с использованием функциональных возможностей программной среды MS Excel.

Материалы пособия предназначены для студентов направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика. Также пособие будет полезно студентам IT-направлений, в учебные планы которых входит дисциплина «Численные методы», и аспирантам в ходе проведения численных экспериментов с математической моделью исследуемого процесса или явления.

УДК 519.6  
ББК 22.143

© Елецкий государственный  
университет им. И.А. Бунина, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
Тема 1. Решение задач вычислительными методами.	
Основные понятия .....	6
1.1. Элементы теории погрешностей .....	6
1.2. Корректность задачи.....	11
1.3. Вычислительные методы .....	11
<b>Тема 2. Численные методы решения нелинейных уравнений</b> .....	<b>12</b>
2.1. Постановка задачи и основные этапы нахождения решения .....	12
2.2. Метод деления отрезка пополам .....	14
2.3. Метод простых итераций .....	19
2.4. Метод касательных .....	24
2.5. Метод секущих .....	27
2.6. Метод ложного положения .....	31
<b>Тема 3. Аппроксимация функций</b> .....	<b>33</b>
3.1. Постановка задачи .....	33
3.2. Приближение функций многочленами Тейлора .....	33
3.3. Интерполяция функции многочленами Лагранжа .....	35
3.4. Аппроксимация функций методом наименьших квадратов .....	42
<b>Тема 4. Численное интегрирование функций одной переменной</b> .....	<b>56</b>
4.1. Постановка задачи численного интегрирования .....	56
4.2. Метод средних прямоугольников .....	57
4.3. Метод трапеций.....	61
4.4. Метод парабол .....	64
<b>Тема 5. Приближенное решение дифференциальных уравнений</b> .....	<b>66</b>
5.1. Постановка задачи Коши .....	66
5.2. Метод Эйлера .....	68
5.3. Модифицированные методы Эйлера .....	72
5.4. Метод Рунге-Кутты .....	77
<b>Список литературы</b> .....	<b>80</b>

## Введение

Исследование различных явлений или процессов математическими методами осуществляется с помощью *математической модели*. Математическая модель представляет собой формализованное описание на языке математики исследуемого объекта. Таким формализованным описанием может быть система линейных, нелинейных или дифференциальных уравнений, система неравенств, определенный интеграл, многочлен с неизвестными коэффициентами и т. д. Математическая модель должна охватывать важнейшие характеристики исследуемого объекта и отражать связи между ними.

После того, как математическая модель составлена, переходят к *постановке вычислительной задачи*. При этом устанавливают, какие характеристики математической модели являются *исходными (входными) данными*, какие – *параметрами модели*, а какие – *выходными данными*. Проводится анализ полученной задачи с точки зрения существования и единственности решения.

На следующем этапе выбирается *метод* решения задачи. Во многих конкретных случаях найти решение задачи в явном виде не представляется возможным, так как оно не выражается через элементарные функции. Такие задачи можно решить лишь приближенно. Под *вычислительными (численными) методами* подразумеваются приближенные процедуры, позволяющие получать решение в виде конкретных числовых значений. Для решения одной и той же задачи могут быть использованы различные вычислительные методы, поэтому нужно уметь оценивать качество различных методов и эффективность их применения для данной задачи [1–5, 7–8].

Затем для реализации выбранного вычислительного метода составляется *алгоритм и программа для ЭВМ*. Вычислительные методы, как правило, выполняются с помощью специальных программных сред. Современному специалисту важно уметь не только выполнять построение алгоритма решения такой задачи, но и преобразовать задачу к виду, удобному для ее реализации в программной среде.

В настоящее время на рынке программного обеспечения широко представлены как пакеты, реализующие наиболее общие методы решения широкого круга задач (например, Maple, Mathcad, MatLAB и др.), так и пакеты, реализующие методы решения специальных задач [6, 9–13]. Стоит отметить, что перечисленные программы требуют

специальной подготовки пользователя и достаточно хорошее знание их инструментария для проведения расчетов.

Полученные в ходе вычислительных процедур результаты расчета анализируются и интерпретируются. При необходимости корректируются параметры метода, а иногда математическая модель, и начинается новый цикл решения задачи.

В настоящем пособии предложен подход, позволяющий, в ряде случаев, существенно ускорить и автоматизировать проведение необходимых вычислительных процедур алгоритмов, реализующих наиболее известные и широко применяемые численные методы. Указанный подход основан на использовании функциональных возможностей, а также ряде достоинств программной среды MS Excel (табличного процессора Excel), а именно:

- возможность копирования формулы с фиксацией адреса ячейки, которая позволяет организовывать алгоритмы накопления суммы и произведения;

- возможность вычисления по рекуррентным формулам;

- выполнение мгновенного перерасчета вычисляемых значений при изменении входящих параметров в формулу;

- использование встроенных графических возможностей для наглядности исследуемых функций и др.

Учебное пособие содержит краткое изложение таких теоретических вопросов как: элементы теории погрешностей, численные методы решения нелинейных уравнений, аппроксимация функций, численное интегрирование функций одной переменной и приближенное решение дифференциальных уравнений. В пособии приведены основные формулы, а также предложены способы реализации алгоритмов и вычислительных процедур, рассматриваемых численных методов, с использованием функциональных возможностей программной среды MS Excel 2010.

Материалы пособия предназначены для студентов направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика. Также пособие будет полезно студентам IT-направлений, в учебные планы которых входит дисциплина «Численные методы», и аспирантам в ходе проведения численных экспериментов с математической моделью исследуемого процесса или явления.

При работе с пособием предполагается наличие у студентов основных навыков работы с электронными таблицами типа Excel.

# Тема 1. Решение задач вычислительными методами.

## Основные понятия

### 1.1. Элементы теории погрешностей

Численное решение любой задачи обычно осуществляется приближенно, с различной точностью.

*Главная задача численных методов* – фактическое нахождение решения с требуемой или, по крайней мере, оцениваемой точностью.

Отклонение истинного решения от приближенного называется погрешностью. Полная погрешность вычислений состоит из двух составляющих:

- 1) неустранимая погрешность;
- 2) устранимая погрешность.

*Неустранимая погрешность* обусловлена неточностью исходных данных и никаким образом не может быть уменьшена в процессе вычислений.

*Устранимая погрешность* состоит из двух составляющих:

- а) погрешность аппроксимации (метода);
- б) погрешность вычислений.

Эти составляющие могут быть уменьшены выбором более точных методов и увеличением разрядности вычислений.

Существуют четыре источника погрешностей, возникающих в результате численного решения задачи:

1. *Математическая модель.* Погрешность математической модели связана с ее приближенным описанием реального объекта. Погрешность математической модели является неустранимой, в дальнейшем предполагается, что математическая модель фиксирована и ее погрешность учитываться не будет.

2. *Исходные данные.* Исходные данные обычно содержат погрешности, так как они либо неточно измерены, либо являются результатом решения некоторых вспомогательных задач. Во многих физических и технических задачах погрешность измерений составляет 1 – 10%. Погрешность исходных данных считается неустранимой и учитываться не будет.

3. *Метод вычислений.* Применяемые для решения задачи методы, как правило, являются приближенными. Погрешность метода необходимо определять для конкретного метода. Обычно ее можно оценить и проконтролировать. Следует выбирать погрешность метода так, чтобы она была не более чем на порядок меньше неустранимой погрешности.

4. *Округление в вычислениях.* Погрешность округления возникает из-за того, что вычисления производятся с конечным числом значащих цифр. Округление производят по следующему правилу: если в старшем из отбрасываемых разрядов стоит цифра меньше пяти, то содержимое сохраняемых разрядов не изменяется; в противном случае в младший сохраняемый разряд добавляется единица с тем же знаком, что и у самого числа. При решении больших задач производятся миллиарды вычислений, но так как погрешности имеют разные знаки, то они частично взаимокompенсируются.

Различают *абсолютную* и *относительную* погрешности.

Пусть  $X$  – точное значение,  $x$  – приближенное значение некоторого числа.

*Абсолютная погрешность* приближенного числа равна модулю разности между его точным и приближенным значениями:

$$\Delta x = |X - x|$$

Однако точное значение  $X$  зачастую неизвестно, поэтому вместо абсолютной погрешности используют понятие границы абсолютной погрешности:

$$|X - x| \leq \Delta x^*$$

Выражение вида  $X = x \pm \Delta x^*$  называется предельной абсолютной погрешностью.

Главной характеристикой точности является относительная погрешность.

*Относительная погрешность* – это отношение абсолютной погрешности к приближенному значению числа:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

Имеет место измерение относительной погрешности в процентах

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100\%$$

Следует отметить, что результат действий над приближенными числами представляет собой также приближенное число. Погрешность результата может быть выражена через погрешности первоначальных данных по нижеследующим правилам.

## Правила выполнения операций над приближенными числами

1. При сложении или вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются:  $\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b$ .

2. Относительная погрешность разности или суммы двух чисел вычисляется по формулам:

$$\delta(a+b) = \frac{\Delta(a+b)}{|a+b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|}; \quad \delta(a-b) = \frac{\Delta(a-b)}{|a-b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a-b|}, \quad (a \neq b).$$

3. При умножении или делении чисел друг на друга их относительные погрешности складываются:

$$\delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b, \quad \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta a + \delta b.$$

4. При возведении в степень приближенного числа его относительная погрешность умножается на показатель степени:  $\delta(a^k) = k\delta a$ .

5. Оценка предельной абсолютной погрешности функции нескольких переменных  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  выполняется по формуле:

$$\Delta u^* \approx |df(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i^* \right| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i^*|,$$

где  $\Delta x_i^*$  — предельная абсолютная погрешность числа  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Рассмотрим примеры использования программной среды Excel для решения задач на определение значений абсолютной и относительной погрешности.

**Пример 1.1.** В ходе вычислений получены приближенные значения некоторых величин:  $a = 5,256$ ,  $b = 2,892$ . Установить, какой из результатов более точен, если известны их истинные значения:  $A = 5,158$  и  $B = 2,814$ .

**Решение.** При решении примера 1.1 вводятся начальные значения в ячейках **C4:C5**; **E4:E5**. Остальные значения рассчитываются средствами Excel по формулам, приведенным выше. Отметим, что для отображения относительной погрешности в процентах, необходимо установить соответствующий формат ячейки. Результаты проведенных операций представлены на рис. 1.1.



	A	B	C	D	E	F
2	Оценка точности вычислений					
3						
4	Прибл. знач.:	a=	5,256	b=	2,892	
5	Точное знач.:	A=	5,158	B=	2,814	
6	Абсолют. погр.:	Δa=	0,098	Δb=	0,078	
7	Относит. погр.:	δa=	0,018645	δb=	0,026971	
8		δa=	1,86%	δb=	2,70%	
9						
10	Вывод:	a вычислено точнее b				

Рис. 1.1

**Пример 1.2.** Известно, что  $x = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b}}{c-a}$ , где  $a=1,34 \pm 0,02$ ;  $b=7,98 \pm 0,05$ ,  $c=52,74 \pm 0,1$ . Найти предельную абсолютную и относительную погрешности, а также абсолютную и относительную погрешности.

**Решение.**

1. Найти предельную абсолютную погрешность  $\Delta x^*$  функции  $x$ .

Исходная функция  $x$  является функцией трех переменных  $a, b, c$ . Для оценки предельной абсолютной погрешности воспользуемся формулой:

$$\Delta x^* \approx \left| \frac{\partial x}{\partial a} \right| \Delta a^* + \left| \frac{\partial x}{\partial b} \right| \Delta b^* + \left| \frac{\partial x}{\partial c} \right| \Delta c^* .$$

Найдем частные производные функции  $x = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b}}{c-a}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} [b, c = const] &= \frac{(a)'_a \cdot \sqrt[3]{b} (c-a) - a \cdot \sqrt[3]{b} (c-a)'_a}{(c-a)^2} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{b} (c-a) + a \cdot \sqrt[3]{b}}{(c-a)^2} = \frac{c \cdot \sqrt[3]{b}}{(c-a)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial b} [a, c = const] = \frac{a}{c-a} (\sqrt[3]{b})'_b = \frac{a}{c-a} \frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial c} [a, b = const] = a \cdot \sqrt[3]{b} \left( \frac{1}{c-a} \right)'_c = a \cdot \sqrt[3]{b} \frac{-1}{(c-a)^2} = \frac{-a \cdot \sqrt[3]{b}}{(c-a)^2}$$

Введем исходные данные в блок **A3:B8** (см. рис. 1.2). В ячейках **C3:C8** вычислим значения  $\left| \frac{\partial x}{\partial a} \right|$ ,  $\left| \frac{\partial x}{\partial b} \right|$ ,  $\left| \frac{\partial x}{\partial c} \right|$ . В ячейку **F10** запишем

формулу  $= \left| \frac{\partial x}{\partial a} \right| \Delta a^* + \left| \frac{\partial x}{\partial b} \right| \Delta b^* + \left| \frac{\partial x}{\partial c} \right| \Delta c^*$  для вычисления предельной абсолютной погрешности.

	A	B	C	D	E	F
2	Оценка относительной и абсолютной погрешностей					
3	a	$\Delta a^*$	$ \partial x/\partial a $	$a_B$	$a_H$	
4	1,34	0,02	0,03989	1,36	1,32	
5	b	$\Delta b^*$	$ \partial x/\partial b $	$b_B$	$b_H$	
6	7,98	0,05	0,00218	8,03	7,93	
7	c	$\Delta c^*$	$ \partial x/\partial c $	$c_B$	$c_H$	
8	52,74	0,1	0,00101	52,84	52,64	
9						
10	$x_B =$	0,05290	Пред. абсолют. погр.		$\Delta x^* =$	0,0010
11	$x_H =$	0,05129	Абсолют. погр.		$\Delta x =$	0,0008
12	$x =$	0,05210	Относит. погр.		$\delta x =$	0,0155
13			Пред. относит. погр.		$\delta x^* =$	0,0193

Рис.1.2

2. Найти абсолютную погрешность  $\Delta x$  функции  $x$ .

В ячейках **D3:D8** рассчитаем верхнюю оценку значений переменных:  $a_B = 1,34 + 0,02$  (**=A4+B4**), аналогично  $b_B, c_B$ . В ячейке **B10** вычислим верхнюю оценку значения функции  $x_B = \frac{a_B \cdot \sqrt[3]{b_B}}{c_B - a_B}$ . Нижняя оценка значения функции  $x_H = \frac{a_H \cdot \sqrt[3]{b_H}}{c_H - a_H}$  вычисляется в ячейках **E3:E8** и **B11** аналогично.

Значение абсолютной погрешности функции ищется по формуле  $\Delta x = \frac{|x_B - x_H|}{2}$  в ячейке **F11**. Найденная абсолютная погрешность (ячейка **F11**) должна быть не больше предельной абсолютной погрешности (ячейка **F10**), т.е. должно выполняться условие:  $\Delta x \leq \Delta x^*$ .

3. Вычислить относительную погрешность  $\delta x$  функции  $x$ .

Исходные данные позволяют вычислить значение  $x$  при  $a=1,34$ ;  $b=7,98$ ;  $c=52,74$  в ячейке **B12**, а в ячейке **F12** — рассчитать значение относительной погрешности  $\delta x$ , используя найденное выше значение абсолютной погрешности  $\Delta x$ .

4. Оценить предельную относительную погрешность  $\delta x^*$  функции  $x$ .

Предельная относительная погрешность заданной функции, согласно рассмотренным выше формулам, представима в виде

$$\begin{aligned} \delta x^* &= \delta \left( \frac{a \cdot \sqrt[3]{b}}{c - a} \right)^* = \delta (a \cdot \sqrt[3]{b})^* + \delta (c - a)^* = \delta a^* + \frac{1}{3} \delta b^* + \delta (c - a)^* = \\ &= \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{1}{3} \frac{\Delta b^*}{|b|} + \frac{\Delta (c - a)^*}{|c - a|} = \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{1}{3} \frac{\Delta b^*}{|b|} + \frac{\Delta c^* + \Delta a^*}{|c - a|}. \end{aligned}$$

## 1.2. Корректность задачи

Понятие *корректности* учитывает достаточно естественные требования, т. к. чтобы численно решать задачу, нужно быть уверенным, что ее решение *существует*. Столь же естественны требования *единственности* и *устойчивости* решения.

Решение задачи  $y^*$  называется устойчивым по исходным данным  $x^*$ , если оно зависит от исходных данных непрерывным образом. Это означает, что малому изменению исходных данных соответствует малое изменение решения. Строго говоря, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что всякому исходному данному  $x^*$ , удовлетворяющему условию

$$|x - x^*| < \delta,$$

соответствует приближенное решение  $y^*$ , для которого  $|y - y^*| < \varepsilon$ .

Говорят, что задача поставлена *корректно*, если выполнены следующие три условия:

1. Решение существует при любых допустимых исходных данных.
2. Это решение единственно.
3. Это решение устойчиво по отношению к малым изменениям исходных данных.

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, задача называется *некорректной*.

## 1.3. Вычислительные методы

Под *вычислительными методами* понимаются методы, которые используются в вычислительной математике для преобразования задач к виду, удобному для реализации на ЭВМ. Рассмотрим два класса методов.

1. *Прямые методы*. Метод решения задачи называется *прямым*, если он позволяет получить решение после выполнения конечного числа элементарных операций. Наименование элементарной операции здесь условно. Важно то, что ее сложность существенно меньше, чем сложность основной задачи. Иногда прямые методы называют *точными*, имея в виду, что при отсутствии ошибок в исходных данных и при выполнении элементарных операций результат будет точным. Однако, при реализации метода на ЭВМ неизбежны ошибки округления и, как следствие, наличие вычислительной погрешности.

2. *Итерационные методы*. Суть *итерационных методов* состоит в построении последовательных приближений к решению задачи.

Вначале выбирают одно или несколько начальных приближений, а затем последовательно, используя найденные ранее приближения и однотипную процедуру расчета, строят новые приближения. В результате такого *итерационного процесса* можно теоретически построить бесконечную последовательность приближений к решению. Если эта последовательность сходится (что бывает не всегда), то говорят, что итерационный метод сходится. Отдельный шаг итерационного процесса называется *итерацией*.

Практически вычисления не могут продолжаться бесконечно долго. Поэтому необходимо выбрать *критерий окончания итерационного процесса*. Критерий окончания связан с требуемой точностью вычислений, а именно: вычисления заканчиваются, когда погрешность приближения не превышает заданной величины.

Оценки погрешности приближения, полученные до вычислений, называют *априорными оценками* (от лат. a'priori – «до опыта»), а соответствующие оценки, полученные в ходе вычислений, называют *апостериорными оценками* (от лат. a'posteriori – «после опыта»).

Важной характеристикой итерационных методов является *скорость сходимости* метода. Говорят, что метод имеет  $p$ -ый порядок сходимости если

$$|x_{n+1} - x^*| = C|x_n - x^*|^p,$$

где  $x_n$  и  $x_{n+1}$  – последовательные приближения, полученные в ходе итерационного процесса вычислений,  $x^*$  – точное решение,  $C$  – константа, не зависящая от  $n$ . Говорят, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q < 1$ , если для всех  $n$  справедлива оценка:

$$|x_n - x^*| \leq Cq^n.$$

Итерационный процесс называется *одношаговым*, если для вычисления очередного приближения  $x_{n+1}$  используется только одно предыдущее приближение  $x_n$  и *k-шаговым*, если для вычисления  $x_{n+1}$  используются  $k$  предыдущих приближений  $x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_n$ .

## **Тема 2. Численные методы решения нелинейных уравнений**

### **2.1. Постановка задачи и основные этапы нахождения решения**

Пусть дана некоторая функция  $f(x)$  и требуется найти все или некоторые значения  $x$ , для которых

$$f(x) = 0. \tag{2.1}$$

Значение  $x^*$ , при котором  $f(x^*) = 0$ , называется *корнем* (или *решением*) уравнения (2.1).

Относительно функции  $f(x)$  часто предполагается, что  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема в окрестности корня.

Корень  $x^*$  уравнения (2.1) называется *простым*, если первая производная функции  $f(x)$  в точке  $x^*$  не равна нулю, т. е.  $f'(x^*) \neq 0$ . Если же  $f'(x^*) = 0$ , то корень  $x^*$  называется *кратным корнем*.

Геометрически корень уравнения (2.1) есть точка пересечения графика функции  $y = f(x)$  с осью абсцисс. На рис. 2.1 изображен график функции  $y = f(x)$ , имеющей четыре корня: два простых ( $x_1^*$  и  $x_3^*$ ) и два кратных ( $x_2^*$  и  $x_4^*$ ).

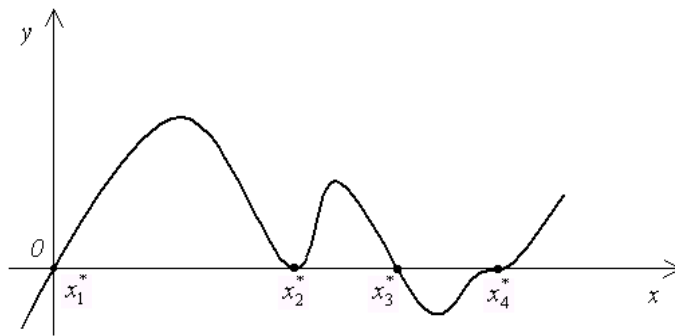


Рис. 2.1

Большинство методов решения уравнения (2.1) ориентировано на отыскание простых корней уравнения (2.1).

В процессе приближенного нахождения корней уравнения (2.1) обычно выделяют два этапа: *локализация* (или *отделение*) *корня* и *уточнение корня*.

**1 этап.** Локализация корня заключается в определении отрезка  $[a, b]$ , содержащего один и только один корень. Не существует универсального алгоритма локализации корня. В некоторых случаях отрезок локализации может быть найден из физических соображений. Иногда удобно бывает локализовать корень с помощью построения графика или таблицы значений функции  $y = f(x)$ . На наличие корня на отрезке  $[a, b]$  указывает различие знаков функции на концах отрезка. Основанием для этого служит следующая теорема математического анализа.

**Теорема 2.1.** Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и принимает на его концах значения разных знаков, так, что  $f(a)f(b) < 0$ , то отрезок  $[a, b]$  содержит, по крайней мере, один корень уравнения  $f(x) = 0$ .

Однако корень четной кратности таким образом локализовать нельзя, так как в окрестности такого корня функция  $f(x)$  имеет постоянный знак.

**2 этап.** На этапе уточнения корня вычисляют приближенное значение корня с заданной точностью  $\varepsilon > 0$ . Приближенное значение корня уточняют с помощью различных итерационных методов. Суть этих методов состоит в последовательном вычислении значений  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ , которые являются приближениями к корню  $x^*$ .

## 2.2. Метод деления отрезка пополам

Метод деления отрезка пополам (метод половинного деления, метод дихотомии, метод бисекции) является самым простым и надежным способом решения нелинейного уравнения.

Пусть из предварительного анализа известно, что корень уравнения (2.1) находится на отрезке  $[a_0, b_0]$ , т. е.  $x^* \in [a_0, b_0]$ , так, что  $f(x^*) = 0$ .

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a_0, b_0]$  и принимает на концах отрезка значения разных знаков, т.е.

$$f(a_0)f(b_0) < 0. \quad (2.2)$$

Разделим отрезок  $[a_0, b_0]$  пополам. Получим точку  $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ . Вычислим значение функции в этой точке:  $f(x_0)$ . Если  $f(x_0) = 0$ , то  $x_0$  – искомый корень, и задача решена. Если  $f(x_0) \neq 0$ , то  $f(x_0)$  – число определенного знака:  $f(x_0) > 0$ , либо  $f(x_0) < 0$ . Тогда либо на концах отрезка  $[a_0, x_0]$ , либо на концах отрезка  $[x_0, b_0]$  значения функции  $f(x)$  имеют разные знаки. Обозначим такой отрезок  $[a_1, b_1]$ . Очевидно, что  $x^* \in [a_1, b_1]$ , и длина отрезка  $[a_1, b_1]$  в два раза меньше, чем длина отрезка  $[a_0, b_0]$ . Поступим аналогично с отрезком  $[a_1, b_1]$ . В результате получим либо корень  $x^*$ , либо новый отрезок  $[a_2, b_2]$ , и т.д. (рис. 2.2).

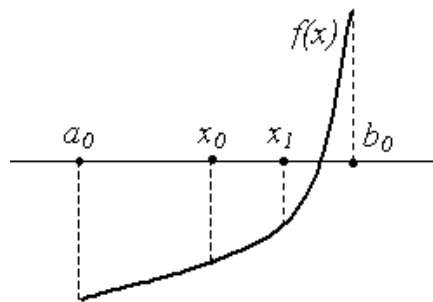


Рис. 2.2

Середина  $n$ -го отрезка  $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ . Очевидно, что длина отрезка  $[a_n, b_n]$  будет равна  $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$ , а т. к.  $x^* \in [a_n, b_n]$ , то

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}. \quad (2.3)$$

**Замечание 1 (погрешность метода).** Оценка (2.3) характеризует погрешность метода деления отрезка пополам и указывает на скорость сходимости: метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой  $q = 1/2$ . Заметим, что оценка (2.3) является априорной.

**Замечание 2 (критерий окончания).** Из соотношения (2.3) следует, что при заданной точности приближения  $\varepsilon$  вычисления заканчиваются, когда будет выполнено неравенство  $b_n - a_n < 2\varepsilon$  или неравенство  $n > \log_2((b_0 - a_0)/\varepsilon) - 1$ . Таким образом, количество итераций можно определить заранее. За приближенное значение корня берется величина  $x_n$ .

**Пример 2.1.** Найдите приближенно  $x = \sqrt[5]{2}$  с точностью  $\varepsilon = 0.01$ .

**Решение.** Эта задача эквивалентна решению уравнения  $x^5 - 2 = 0$ , или нахождению нуля функции  $f(x) = x^5 - 2$ . В качестве начального отрезка  $[a_0, b_0]$  возьмем отрезок  $[1, 2]$ . На концах этого отрезка функция принимает значения с разными знаками:

$$f(1) < 0, f(2) > 0.$$

Найдем число  $n$  делений отрезка  $[1, 2]$ , необходимых для достижения требуемой точности. Имеем:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-2}, n \geq 6.$$

Следовательно, не позднее 6-го деления найдем  $\sqrt[5]{2}$  с требуемой точностью,  $\sqrt[5]{2} \approx 1.1484$ . Результаты вычислений представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$a_n$	1.0000	1.0000	1.0000	1.1250	1.1250	1.1406	1.1406
$b_n$	2.0000	1.5000	1.2500	1.2500	1.1875	1.1875	1.1562
$x_n$	1.5000	1.2500	1.1250	1.1875	1.1406	1.1562	1.1484
$\text{Зн } f(a_n)$	-	-	-	-	-	-	-
$\text{Зн } f(b_n)$	+	+	+	+	+	+	+
$f(x_n)$	5.5938	0.7585	-0.2959	-0.0691	0.1812	0.0532	-0.0078
$b_n - a_n$	1.0000	0.5000	0.2500	0.1250	0.0625	0.0312	0.0156

**Пример 2.2.** Найти методом половинного деления корень уравнения  $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$  (точность  $\varepsilon = 0,001$ ) с использованием табличного процессора Excel.

**Решение.** Чтобы приступить к автоматизации решения указанным методом для начала определим на каких отрезках наша функция будет заключена.

Для этого найдём корни производной:  $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = (x - 1)(x + 1)(4x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = \frac{3}{4}$ .

Составим таблицу знаков:

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{3}{4}$	$1$	$+\infty$
$signf(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Из таблицы видно, что уравнение имеет два действительных корня. Уменьшим промежутки, в которых находятся эти корни, при этом нельзя допустить смену знаков  $signf(x)$ .

$x$	$-2$	$-1$	$1$	$2$
$signf(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

То есть два действительных корня будут заключены в отрезках  $x_1^* \in [-2; -1]; x_2^* \in [1; 2]$ .

Уточним один из них, к примеру,  $x_1^*$ , перейдём в Excel.

На рис. 2.3 представлен алгоритм отыскания корня методом половинного деления.

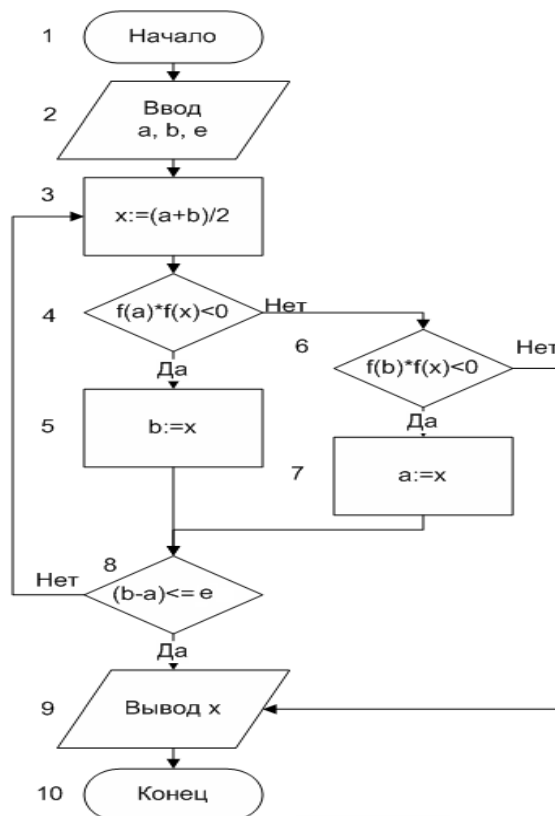


Рис. 2.3



Теперь по его принципу построим таблицу в Excel, которая будет высчитывать нашу функцию за нас, опираясь на данный алгоритм.

Внесём исходные данные: отрезок  $[a, b] = [-2; -1]$  и требуемую точность  $\varepsilon = 0,001$  (A8:C8, рис. 2.4). Заполним шапку таблицы (A10:H10).

В ячейки A11 и B11 поместим ссылки на исходные данные. В ячейке C11 будем рассчитывать значение середины отрезка  $[a, b]$  точки  $c$ , в ячейках D11:F11 будут вычисляться значения функций в указанных точках.

В ячейке G11 запишем формулу оценки погрешности, с помощью которой мы будем проверять выполнение условия  $|b - a| < \varepsilon$ . Если неравенство верно, то корень считается найденным и выдаётся ответ, иначе вычисляется значение  $|b - a|$ . В ячейку H11 вводим комментарий, выдающий сообщение об ошибочности начальных данных.

	A	B	C	D	E	F	G	H
5								
6	Исходные данные							
7	a	b	погрешность					
8	-2	-1	0,001					
9								
10	a	b	c	y(a)	y(b)	y(c)	Оценка погрешности	Коммент
11	-2,000	-1,000	-1,500	7,000	-6,000	-3,563	1,000	
12	-2,000	-1,500	-1,750	7,000	-3,563	0,363	0,500	
13	-1,750	-1,500	-1,625	0,363	-3,563	-1,892	0,250	
14	-1,750	-1,625	-1,688	0,363	-1,892	-0,843	0,125	
15	-1,750	-1,688	-1,719	0,363	-0,843	-0,260	0,063	
16	=ЕСЛИ(ABS(B11-A11)<\$C\$8;"Корень="& C11;ABS(B11-A11))							
17	-1,734	-1,719	-1,727	0,046	0,360	0,108	0,015	
18	-1,734	-1,727	-1,730	=ЕСЛИ(D11*E11>0;"Корни не отделены";" ")				
19	-1,734	-1,730	-1,732	0,046	-0,031	0,007	0,004	
20	-1,732	-1,730	-1,731	0,007	-0,031	-0,012	0,002	
21	-1,732	-1,731	-1,732	0,007	-0,012	-0,002	Корень=-1,73193359375	

Рис. 2.4

А в ячейках A12:B12 (см. рис. 2.5) напишем код, который позволит выбрать тот из отрезков  $[a, c]$  и  $[b, c]$ , на концах которого функция принимает значения разных знаков. Полученный отрезок обозначается снова как  $[a, b]$ .

Затем формулы распространяются вниз до появления ответа.

10	a	b
11	-2,000	-1,000
12	=ЕСЛИ(D11*F11<0;A11;C11)	
	Самостоятельно	

Рис. 2.5

Как видно, из таблицы рис.2.4 искомый левый корень составил: -1,731933359375.

Для того чтобы проверить правильность полученного ответа, обратимся к графику нашей функции и посмотрим на интересующие нас точки. Построение графика функции  $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$  выполним в любом графическом онлайн-калькуляторе или сервисе (например: Umath.ru, Graph.Reshish.ru, Desmos, Grafikus.ru, Onlinecharts.ru и др.), либо с применением прикладной программы Excel.

Как видно из рис. 2.6 искомый корень совпадает с полученным значением.

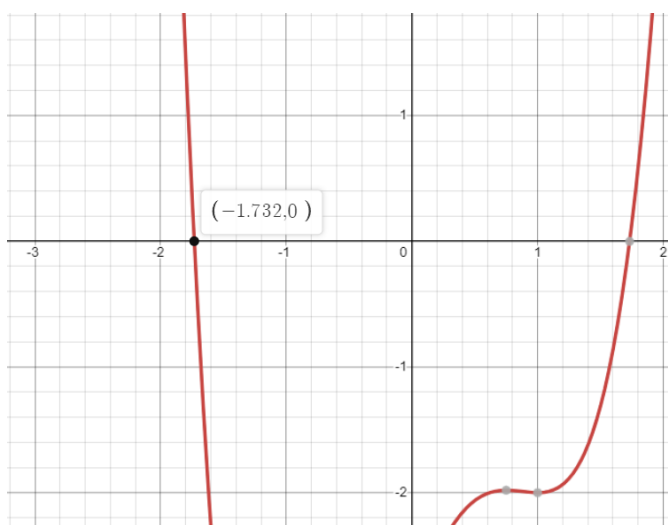


Рис. 2.6

Аналогичным образом, определяется корень отрезка  $x_2^* \in [1; 2]$ . Ответом будет: 1,73193359375 (см. рис 2.7).

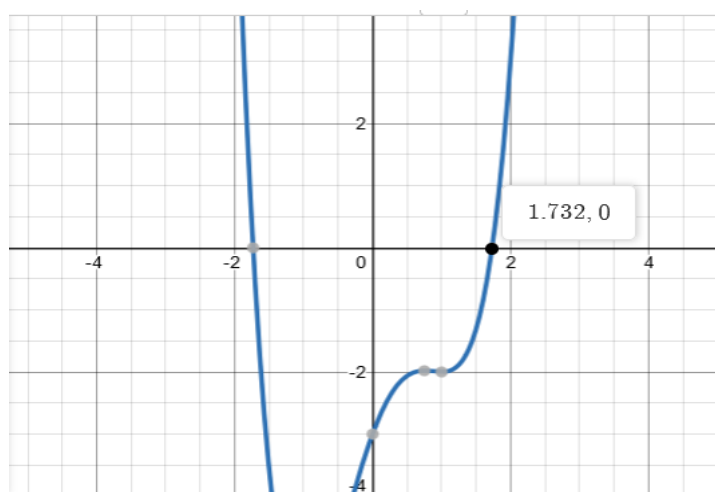


Рис. 2.7

### 2.3. Метод простых итераций

Пусть уравнение (2.1) можно заменить эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x). \quad (2.4)$$

Например, уравнение  $\frac{x}{\sin x} - 0.5 = 0$  можно заменить эквивалентным ему уравнением  $x = 0.5\sin x$ .

Выберем каким-либо образом начальное приближение  $x_0$ . Вычислим значение функции  $\varphi(x)$  при  $x = x_0$  и найдем уточненное значение  $x_1 = \varphi(x_0)$ . Подставим теперь  $x_1$  в уравнение (2.4) и получим новое приближение  $x_2 = \varphi(x_1)$  и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений к корню:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (2.5)$$

Формула (2.5) является *расчетной формулой* метода простых итераций.

Если последовательность  $\{x_n\}$  сходится при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. существует

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad (2.6)$$

и функция  $\varphi(x)$  непрерывна, то, переходя к пределу в (2.5) и учитывая (2.6), получим:

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = \varphi(x^*).$$

Таким образом,  $x^* = \varphi(x^*)$ , следовательно,  $x^*$  – корень уравнения (2.4).

Сходимость метода простых итераций устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2.2.** Если в интервале, содержащем корень  $x^*$  уравнения (2.4), а также его последовательные приближения  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ , вычисляемые по формуле (2.5), выполнено условие:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad (2.7)$$

то  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , т. е. итерационный процесс сходится и справедлива следующая оценка погрешности:

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*| \quad (2.8)$$

Оценка (2.8) является априорной. Она показывает, что метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q$ . Чем меньше  $q$ , тем выше скорость сходимости.

Как следует из теоремы 2.2, условие (2.7) является *достаточным* для сходимости метода простых итераций. Его выполнение гарантирует сходимость процесса (2.5), но невыполнение условия

(2.7), вообще говоря, не означает, что итерационный процесс будет расходиться.

На рис. 2.3 – 2.6 показаны четыре случая взаимного расположения линий  $y = x$  и  $y = \varphi(x)$  и соответствующие итерационные процессы.

Рис. 2.8 соответствуют случаю  $|\varphi'(x)| < 1$ , и итерационный процесс сходится. При этом если  $\varphi'(x) > 0$  (рис. 2.3), сходимость носит односторонний характер, а если  $\varphi'(x) < 0$  (рис. 2.4), сходимость носит двусторонний, колебательный характер. Рис. 2.9 соответствуют случаю  $|\varphi'(x)| > 1$  – итерационный процесс расходится. При этом может быть односторонняя и двусторонняя расходимость.

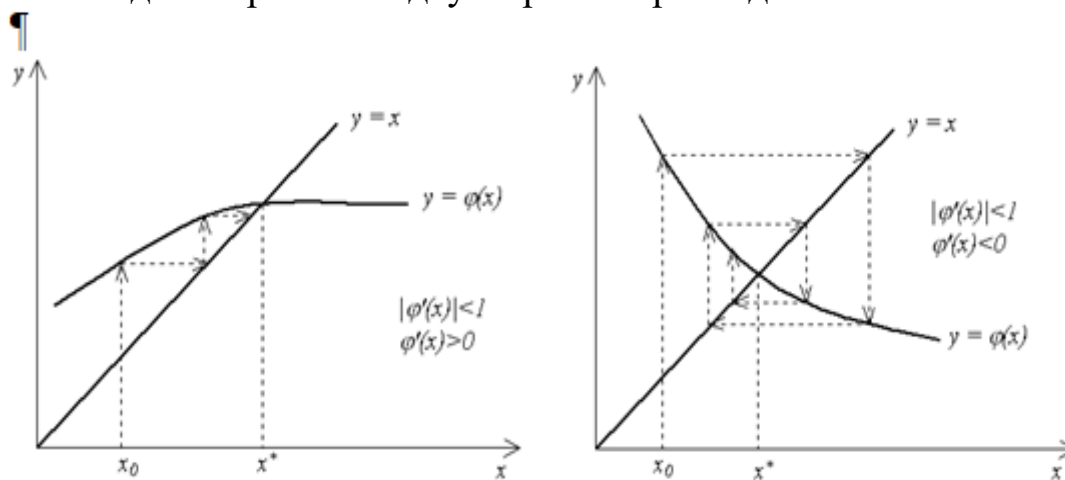


Рис. 2.8

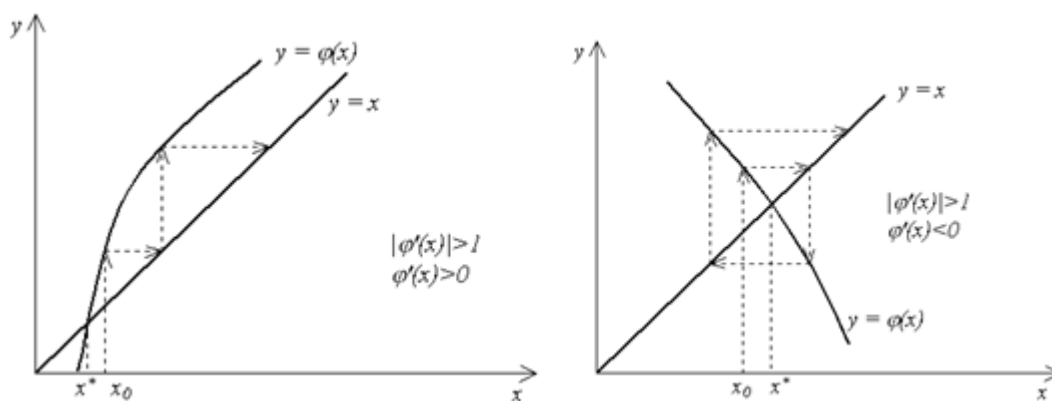


Рис. 2.9

*Замечание (погрешность метода).* Если известна величина  $q$  в условии (2.7), то применима следующая апостериорная оценка погрешности:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, n > 1. \quad (2.9)$$

*Замечание (критерий окончания).* Из оценки (2.9) вытекает следующий критерий окончания итерационного процесса. Вычисления следует продолжать до выполнения неравенства

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q} \varepsilon.$$

Если это условие выполнено, то можно считать, что  $x_n$  является приближением к  $x^*$  с точностью  $\varepsilon$ . Если  $q \leq 0.5$ , то можно пользоваться более простым критерием окончания:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (2.10)$$

**Пример 2.3.** Используя метод простой итерации, решить уравнения  $f(x) = \sin x - x^2 = 0$  с точностью  $\varepsilon = 0.001$ .

**Решение.** Преобразуем уравнение к виду (2.4):

$$x = \frac{\sin x}{x}, \text{ т. е. } \varphi(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Нетрудно убедиться, что корень уравнения находится на отрезке  $[\pi/6, \pi/3]$ . Например, вычислив значения  $f(x)$  на концах отрезка, получим:  $f(\pi/6) > 0$ , а  $f(\pi/3) < 0$ , т. е. функция на концах отрезка имеет разные знаки, что в соответствии с теоремой 2.1 указывает на то, что внутри отрезка есть корень. Расположение корня наглядно иллюстрирует рис.2.10.

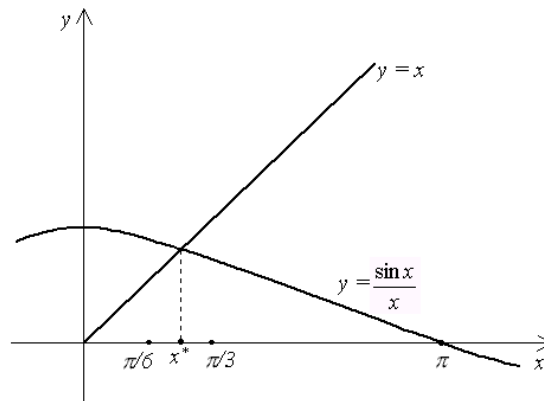


Рис. 2.10

Подсчитаем, первую и вторую производные функции  $\varphi(x)$ :

$$\varphi'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \quad \varphi''(x) = \frac{\sin x(2 - x^2)}{x^3}.$$

Так как  $\varphi''(x) > 0$  на отрезке  $[\pi/6, \pi/3]$ , то производная  $\varphi'(x)$  монотонно возрастает на этом отрезке и принимает максимальное значение на правом конце отрезка, т. е. в точке  $\pi/3$ . Поэтому, справедлива оценка:

$$|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(\pi/3)| \approx 0.312.$$

Таким образом, условие (2.7) выполнено,  $q < 0.5$ , и можно воспользоваться критерием окончания вычислений в виде (2.10). В

табл. 2.2 приведены приближения, полученные по расчетной формуле (2.5). В качестве начального приближения выбрано значение  $x_0 = 1$ .

Критерий окончания выполняется при  $n = 5$ ,  $|x_5 - x_4| < 0.001$ . Сходимость двусторонняя, качественный характер такой сходимости представлен на рис. 2.4. Приближенное значение корня с требуемой точностью  $x^* \approx 0.8765$ .

Таблица 2.2

$n$	$x_n$
0	1
1	0.8415
2	0.8861
3	0.8742
4	0.8774
5	0.8765

*Замечание.* Есть другой вариант реализации метода итераций, который состоит в использовании формулы  $x_{k+1} = x_k + c \cdot y(x_k)$ . Если известен отрезок  $[a, b]$ , содержащий один корень уравнения, то за начальное приближение  $x_0$  можно взять середину отрезка  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ .

В рассматриваемой формуле важную роль играет коэффициент  $c$ , который ищется следующим образом:

$$c = \pm \frac{1}{\max_{[a,b]} |y'(x)|} = \pm \frac{1}{\max_{[a,b]} [|y'(a)|, |y'(b)|]}.$$

Знак перед дробью берётся обратным к знаку производной. Уточнение корня заканчивается при выполнении условия:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon.$$

За приближённое значение корня принимается значение  $x_{k+1}$ .

**Пример 2.4.** Отделить корни уравнения  $2 - \lg x - x = 0$  графически и уточнить один из них методом простой итераций (второй способ) с точностью  $\varepsilon = 0,001$ , используя табличный процессор Excel.

**Решение.** Построим график функций  $y = \lg x$  и  $y = 2 - x$ .

Оформим шапку рабочего листа Excel, введем исходные данные (см. рис. 2.11). В ячейке C3 и D3 ввести формулу вычисления первой производной функции  $\varphi(x)$  в точках  $a$  и  $b$ .

Используя функцию «МАКС» в ячейке E3, определить максимальную из них по модулю ( $= \text{МАКС}(\text{ABS}(C3); \text{ABS}(D3))$ ).

Ввести формулы расчёта начального приближения  $x_0$ . В ячейке B7 набрать формулу  $= 2 - \text{LOG10}(B6)$  и растянуть её до ячейки B13.

Для нахождения относительной погрешности вставим формулу в ячейку E7 (= B7 – B6) и растянем до ячейки E13.

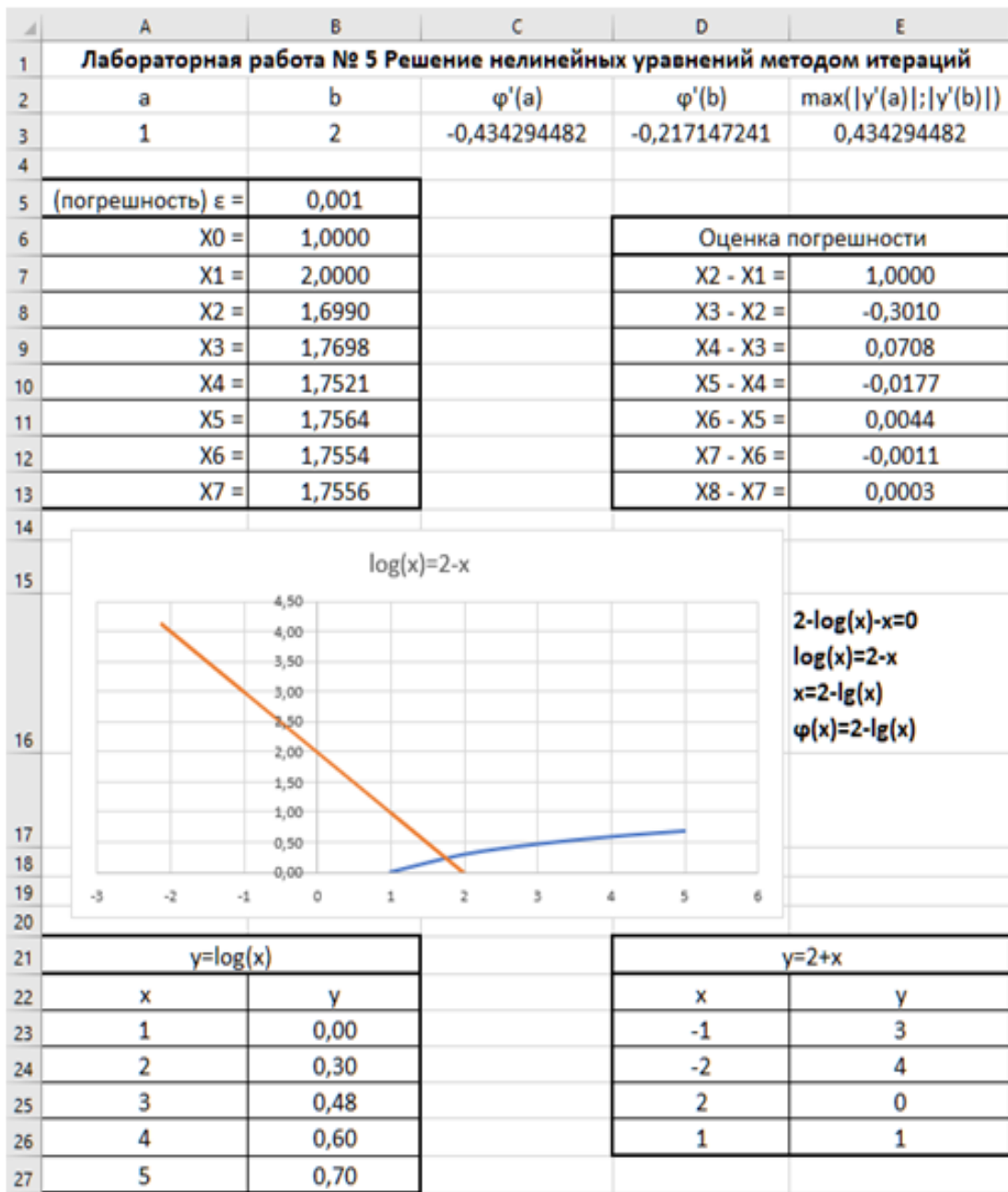


Рис. 2.11

Заметим, что B7 формула = 2 – LOG10(B6) растянута до B13, в E3 формула = МАКС(ABS(C3); ABS(D3)), в E7 формула = B7 – B6 растянута до E13, B23 формула =LOG10(A23) растянута до B27, E23 формула =-D23+2 растянута до E26.

Ответ:  $x \approx 1,755$ .

## 2.4. Метод касательных

Метод касательных (метод Ньютона) является наиболее эффективным методом решения нелинейных уравнений.

Пусть корень  $x^* \in [a, b]$ , так, что  $f(a)f(b) < 0$ . Предполагаем, что функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дважды непрерывно дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Положим  $x_0 = b$ . Проведем касательную к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $B_0 = (x_0, f(x_0))$  (рис. 2.12).

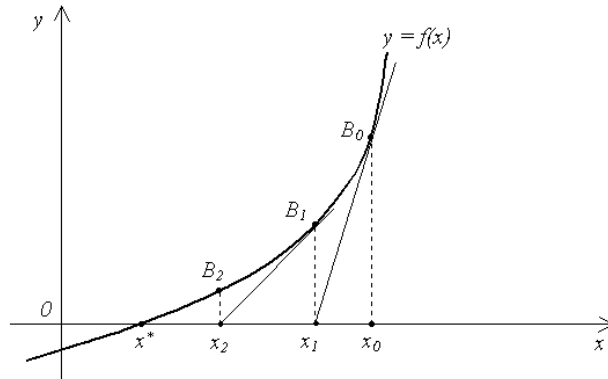


Рис. 2.12

Уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.11)$$

Первое пересечение получим, взяв абсциссу точки пересечения этой касательной с осью  $Ox$ , т. е. положив в (2.11)  $y = 0$ ,  $x = x_1$ :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (2.12)$$

Аналогично поступим с точкой  $B_1(x_1, f(x_1))$ , затем с точкой  $B_2(x_2, f(x_2))$ , и так далее, в результате получим последовательность приближений  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , причем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.13)$$

Формула (2.13) является *расчетной формулой метода Ньютона*.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, для которого

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (2.14)$$

**Сходимость метода.** Сходимость метода Ньютона устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2.3.** Пусть  $x^*$  – простой корень уравнения  $f(x) = 0$ , и в некоторой окрестности этого корня функция  $f$  дважды непрерывно дифференцируема. Тогда найдется такая малая  $\sigma$ -окрестность корня  $x^*$ , что при произвольном выборе начального приближения  $x_0$  из этой



окрестности итерационная последовательность, определенная по формуле (2.13) не выходит за пределы этой окрестности и справедлива оценка:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^2, n \geq 0, \quad (2.15)$$

где  $C = \sigma^{-1}$ . Оценка (2.15) означает, что метод сходится с квадратичной скоростью.

Сходимость метода Ньютона зависит от того, насколько близко к корню выбрано начальное приближение. Неудачный выбор начального приближения может дать расходящуюся последовательность. Полезно иметь в виду следующее *достаточное условие сходимости метода*. Пусть  $[a, b]$  – отрезок, содержащий корень. Если в качестве начального приближения  $x_0$  выбрать тот из концов отрезка, для которого

$$f(x)f''(x) \geq 0, \quad (2.16)$$

то итерации (2.13) сходятся, причем монотонно. Рис. 2.12 соответствует случаю, когда в качестве начального приближения был выбран правый конец отрезка:  $x_0 = b$ .

*Погрешность метода.* Оценка (2.15) является априорной и неудобна для практического использования. На практике удобно пользоваться следующей апостериорной оценкой погрешности:

$$|x_n - x^*| \leq |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.17)$$

*Критерий окончания.* Оценка (2.17) позволяет сформулировать следующий критерий окончания итераций метода Ньютона. При заданной точности  $\varepsilon > 0$  вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (2.18)$$

**Пример 2.5.** Применить метод Ньютона для вычисления  $\sqrt[p]{a}$ , где  $a > 0$ ,  $p$  – натуральное число. Вычисление  $\sqrt[p]{a}$  эквивалентно решению уравнения  $x^p = a$ . Таким образом, нужно найти корень уравнения

$$f(x) = 0, f(x) = x^p - a, f'(x) = px^{p-1}.$$

**Решение.** Итерационная формула метода (2.13) примет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^p - a}{p(x_n)^{p-1}} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p(x_n)^{p-1}}. \quad (2.19)$$

Используя формулу (2.19), найдем  $\sqrt[3]{7}$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

$$x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n + \frac{7}{3(x_n)^2}.$$

Простой корень уравнения  $x^3 - 7 = 0$  расположен на отрезке  $[1, 2]$ . Действительно, на концах отрезка  $[1, 2]$  функция  $f(x) = x^3 - 7$  принимает разные знаки,  $f(1) < 0$ ,  $f(2) > 0$ . Кроме того, при  $x = 2$  выполнено достаточное условие сходимости (2.16):  $f(2)f''(2) \geq 0$ .

Поэтому в качестве начального приближения можно взять  $x_0 = 2$ .  
Результаты приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

$n$	$x_n$
0	2
1	0.8415
2	0.8861
3	0.8742
4	0.8774
5	0.8765

Приведем решение с помощью программного средства Excel. Оформим шапку таблицы, вводим исходные данные. В ячейку A8 установим ссылку на ячейку A4. Вводим формулу метода касательных  $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{7}{3(x_n)^2}$ , значение  $x_0$  берется из ячейки A8. Заполним остальные ячейки строки 8 (рис. 2.13). В ячейке A9 установим ссылку на найденное значение  $x_1$ , т.е. ячейку B8. Следующие ячейки будут определяться следующим образом: B8=ОКРУГЛ((2/3\*A8)+(7/(3\*(A8^2)));4),

C8 =ЕСЛИ(ABS(B8-A8)<=\$B\$4;"Корень="&ОКРУГЛ(B8;4);ABS(B8-A8)), D8 =ОКРУГЛ(((B8^3)-7);4).

Таким образом, корень уравнения  $x^3 - 7 = 0$  равен 1,9129 и найден на 3 шаге.

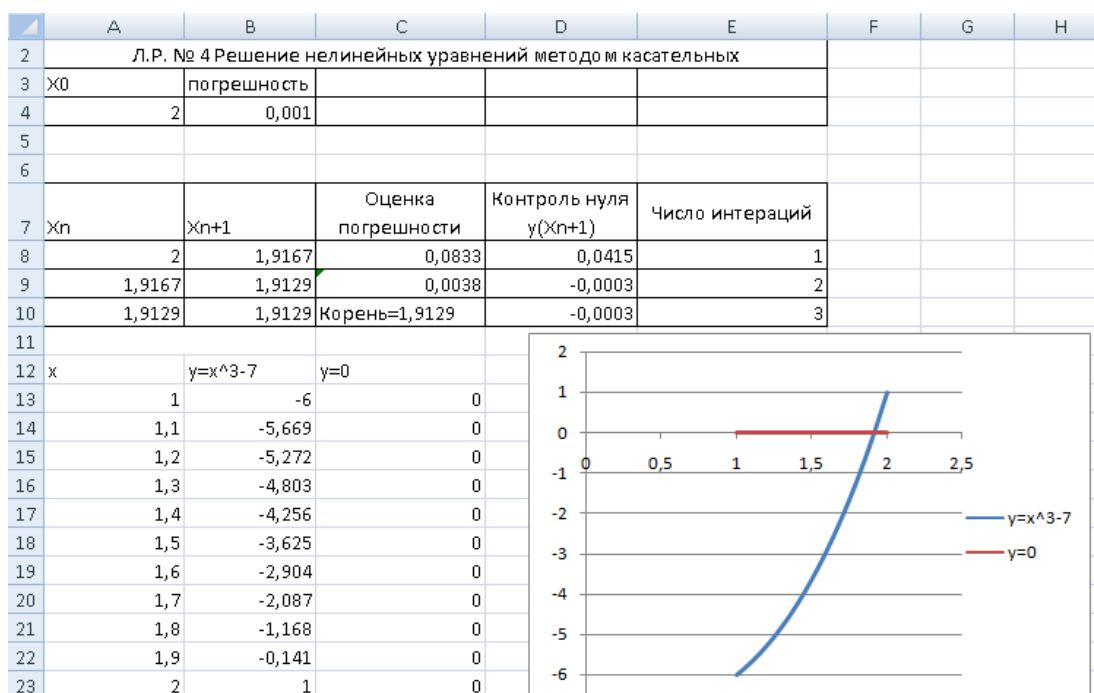


Рис. 2.13

## 2.5. Метод секущих

В этом и следующем разделе рассмотрим модификации метода Ньютона: метод секущих (хорд).

Как видно из формулы (2.13), метод Ньютона требует для своей реализации вычисления производной, что ограничивает его применение. Метод секущих лишен этого недостатка. Если производную заменить ее приближением:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

то вместо формулы (2.13) получим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (2.20)$$

Это означает, что касательные заменены секущими. Метод секущих является двухшаговым методом, для вычисления приближения  $x_{n+1}$  необходимо вычислить два предыдущих приближения  $x_n$  и  $x_{n-1}$ , и, в частности, на первой итерации надо знать два начальных значения  $x_0$  и  $x_1$ .

Формула (2.20) является *расчетной формулой метода секущих*. На рис. 2.14 приведена геометрическая иллюстрация метода секущих.

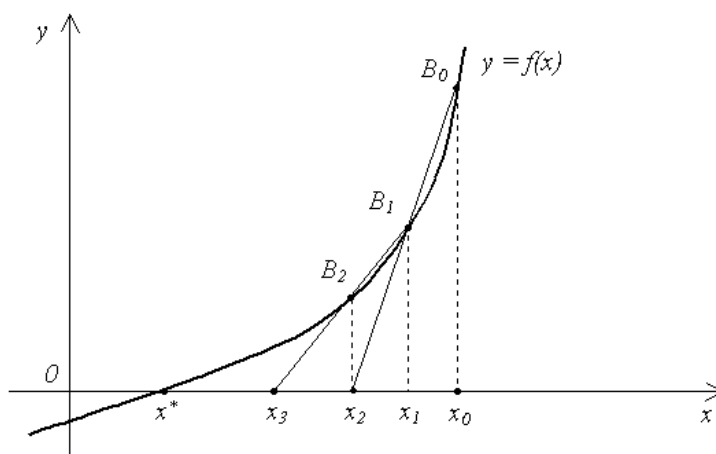


Рис. 2.14

Очередное приближение  $x_{n+1}$  получается как точка пересечения с осью  $OX$  секущей, соединяющей точки графика функции  $f(x)$  с координатами  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  и  $(x_n, f(x_n))$ .

*Сходимость метода.* Сходимость метода секущих устанавливает следующая теорема.

*Теорема 2.4.* Пусть  $x^*$  – простой корень уравнения  $f(x) = 0$ , и в некоторой окрестности этого корня функция  $f$  дважды непрерывно дифференцируема, причем  $f''(x) \neq 0$ . Тогда найдется такая малая  $\sigma$ -окрестность корня  $x^*$ , что при произвольном выборе начальных

приближений  $x_0$  и  $x_1$  из этой окрестности итерационная последовательность, определенная по формуле (2.20) сходится и справедлива оценка:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^p, n \geq 0, p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618. \quad (2.21)$$

Сравнение оценок (2.15) и (2.21) показывает, что  $p < 2$ , и метод секущих сходится медленнее, чем метод Ньютона. Но в методе Ньютона на каждой итерации надо вычислять и функцию, и производную, а в методе секущих – только функцию. Поэтому при одинаковом объеме вычислений в методе секущих можно сделать примерно вдвое больше итераций и получить более высокую точность.

Так же, как и метод Ньютона, при неудачном выборе начальных приближений (вдали от корня) метод секущих может расходиться. Кроме того применение метода секущих осложняется из-за того, что в знаменатель расчетной формулы метода (2.20) входит разность значений функции. Вблизи корня эта разность мала, и метод теряет устойчивость.

*Критерий окончания.* Критерий окончания итераций метода секущих такой же, как и для метода Ньютона. При заданной точности  $\varepsilon > 0$  вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (2.22)$$

**Пример 2.6.** Применить метод секущих для вычисления положительного корня уравнения  $4(1 - x^2) - e^x = 0$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

***Решение.*** Корень этого уравнения находится на отрезке  $[0, 1]$ , так как

$$f(0) = 3 > 0, \text{ а } f(1) = -e < 0.$$

Подсчитаем вторую производную функции:

$$f''(x) = -8 - e^x.$$

Условие  $f(x)f''(x) \geq 0$  выполняется для точки  $b = 1$ . В качестве начального приближения возьмем  $x_0 = b = 1$ . В качестве второго начального значения возьмем  $x_1 = 0.5$ . Проведем вычисления по расчетной формуле (2.20). Результаты приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

$n$	$x_n$
0	1.0000
1	0.5000
2	0.6660
3	0.7093
4	0.7033
5	0.7034

**Пример 2.7.** Рассмотрим применение метода хорд для решения нелинейного уравнения  $x^3+3x^2-2=0$  и его реализацию с помощью табличного процессора Excel.

**Решение.** Сначала таблица заполняется исходными данными, то есть вводятся начальная и конечная точка отрезка и указывается погрешность.

Исходные данные			
а	б	Погрешность	
0	2	0,001	

Далее заполняется шапка таблицы, в которой будут происходить вычисления.

а	б	с	у(а)	у(б)	у(с)	Оценка погр.	Коммент.
---	---	---	------	------	------	--------------	----------

После этого в ячейки первоначальных значений помещаются ссылки на исходные данные

A11	$f_x$	=A8
-----	-------	-----

в ячейку значения точки, которая разбивает отрезок [a;b] заносится формула

$$c = \frac{a \cdot y(b) - b \cdot y(a)}{y(b) - y(a)}$$

C11	$f_x$	=(A11*E11-B11*D11)/(E11-D11)
-----	-------	------------------------------

Далее, в ячейках D11:F11 вводятся формулы для получения значения функции в указанных точках.

D11	$f_x$	=A11^3+3*A11^2-2
-----	-------	------------------

В ячейке G11 записывается формула оценки погрешности, с помощью которой проверяется выполнение условия  $|c_{i+1} - c_i| < \varepsilon$ .  
Вычисления

G11      fx      =ЕСЛИ(ABS(\$C11-\$C12)<\$C\$8;"Корень="&C11;ABS(B11-A11))

В ячейке H11 вводится комментарий, выдающий сообщение об ошибочности начальных данных.

H11      fx      =ЕСЛИ(D11\*E11>0;"Корни не отделены";"

В ячейках A12:B12 из отрезков, полученных в результате разделения изначального точкой c, выбирается удовлетворяющий условия. Полученный отрезок снова переобозначается как [a;b] и снова находится c.

A12      fx      =ЕСЛИ(D11\*F11<0;A11;C11)

Затем формулы распространяются вниз до получения ответа. Полное решение данного номера приведено в таблице Excel (рис. 2.15).

	A	B	C	D	E	F	G	H
4								
5								
6	Исходные данные							
7	a	b	Погрешность					
8		0	2	0,001				
9								
10	a	b	c	y(a)	y(b)	y(c)	Оценка погр.	Коммент.
11		0	2	0,2	-2	18	-1,872	2
12		0,2	2	0,369565	-1,872	18	-1,53979	1,8
13		0,369565	2	0,498048	-1,53979	18	-1,1323	1,630434783
14		0,498048	2	0,586938	-1,1323	18	-0,76431	1,50195197
15		0,586938	2	0,644495	-0,76431	18	-0,48617	1,413062286
16		0,644495	2	0,680144	-0,48617	18	-0,29758	1,355504931
17		0,680144	2	0,701609	-0,29758	18	-0,17786	1,319856209
18		0,701609	2	0,714313	-0,17786	18	-0,1048	1,298390797
19		0,714313	2	0,721755	-0,1048	18	-0,06122	1,285686598
20		0,721755	2	0,726088	-0,06122	18	-0,03559	1,278244713
21		0,726088	2	0,728602	-0,03559	18	-0,02063	1,273911754
22		0,728602	2	0,730058	-0,02063	18	-0,01194	Корень=0,730057653456983
23		0,730058	2	0,730899	-0,01194	18	-0,0069	
24								

Рис. 2.15

Выбор указанного отрезка обусловлен представленным ниже графиком, представленном на рис.2.16.

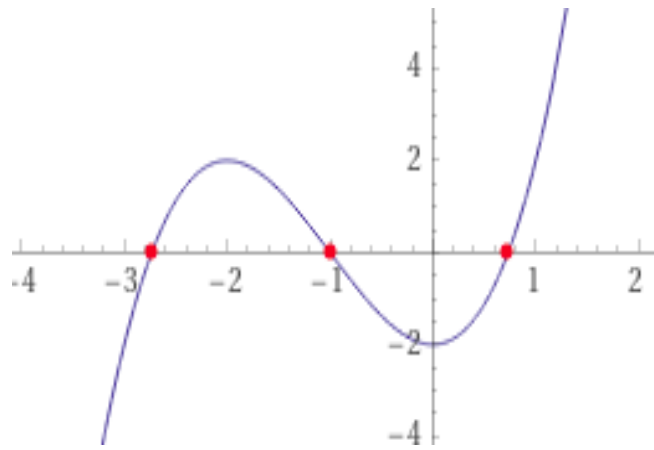


Рис. 2.16

## 2.6. Метод ложного положения

Рассмотрим еще одну модификацию метода Ньютона – метод ложного положения.

Пусть известно, что простой корень  $x^*$  уравнения  $f(x) = 0$  находится на отрезке  $[a, b]$  и на одном из концов отрезка выполняется условие  $f(x)f''(x) \geq 0$ . Возьмем эту точку в качестве начального приближения. Пусть для определенности это будет  $b$ . Положим  $x_0 = a$ . Будем проводить из точки  $B = (b, f(b))$  прямые через расположенные на графике функции точки  $B_n$  с координатами  $(x_n, f(x_n))$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Абсцисса точки пересечения такой прямой с осью  $OX$  есть очередное приближение  $x_{n+1}$ .

Геометрическая иллюстрация метода приведена на рис. 2.17.

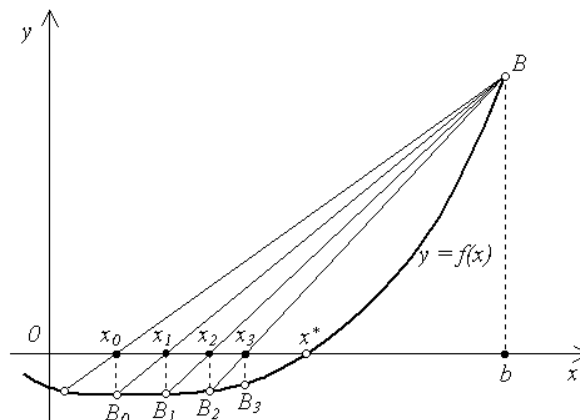


Рис. 2.17

Прямые на этом рисунке заменяют касательные в методе Ньютона (рис. 2.8). Эта замена основана на приближенном равенстве

$$f'(x_n) \approx \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}. \quad (2.23)$$

Заменим в расчетной формуле Ньютона (2.13) производную  $f'(x_n)$  правой частью приближенного равенства (2.23). В результате получим *расчетную формулу метода ложного положения*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} f(x_n). \quad (2.24)$$

Метод ложного положения обладает только линейной сходимостью. Сходимость тем выше, чем меньше отрезок  $[a, b]$ .

**Критерий окончания.** Критерий окончания итераций метода ложного положения такой же, как и для метода Ньютона. При заданной точности  $\varepsilon > 0$  вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (2.25)$$

**Пример 2.5.** Применим метод ложного положения для вычисления корня уравнения  $x^3 + 2x - 11 = 0$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

**Решение.** Корень этого уравнения находится на отрезке  $[1, 2]$ , так как

$$f(1) = -8 < 0, \text{ а } f(2) = 1 > 0.$$

Для ускорения сходимости возьмем более узкий отрезок  $[1.9, 2]$ , поскольку

$$f(1.9) < 0, \text{ а } f(2) > 0.$$

Вторая производная функции  $f(x) = x^3 + 2x - 11$  равна  $6x$ . Условие

$$f(x)f''(x) \geq 0$$

выполняется для точки  $b = 2$ . В качестве начального приближения возьмем  $x_0 = a = 1.9$ . По формуле (2.24) имеем

$$x_1 = x_0 - \frac{(b - x_0)}{f(b) - f(x_0)} f(x_0) = 1.9 + \frac{(2 - 1.9)}{1 - (-0.341)} 0.341 \approx 1.9254.$$

Продолжая итерационный процесс, получим результаты, приведенные в табл. 2.5.

Таблица 2.5

$n$	$x_n$
0	1.9
1	1.9254
2	1.9263
3	1.9263



## Тема 3. Аппроксимация функций

### 3.1. Постановка задачи

Задача приближения (аппроксимации) функций заключается в том, чтобы для данной функции построить другую, отличную от нее функцию, значения которой достаточно близки к значениям данной функции. Укажем наиболее типичные случаи:

1. Функция задана таблицей в конечном множестве точек, а вычисления нужно произвести в других точках;

2. Функция задана аналитически, но ее вычисление по формуле затруднительно;

При решении задачи поиска приближенной функции возникают следующие проблемы:

1) необходимость выбора вида приближенной функции (для приближения широко используются многочлены, тригонометрические функции, показательные функции и т.д.);

2) необходимость выбора критерия близости исходной и приближенной функции (это может быть требование совпадения обеих функций в узловых точках (задача интерполяции), минимизация среднеквадратического отклонения (метод наименьших квадратов) и др.);

3) необходимость наличия правила (алгоритма), позволяющего с заданной точностью найти приближение функции.

### 3.2. Приближение функции многочленами Тейлора

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в окрестности точки  $a$  и имеет в этой окрестности  $n + 1$  производную. Тогда в этой окрестности справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + R_n(x) = \quad (3.1) \\ = T_n(x) + R_n(x),$$

где  $T_n(x)$  – многочлен Тейлора и  $T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n$ ,  $R_n(x)$  – остаточный член формулы Тейлора, его можно записать различными способами, например, в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}, \quad a \leq \xi \leq x \quad \text{и} \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Многочлен Тейлора (3.1) обладает свойством, что в точке  $x = a$  все его производные до порядка  $n$  включительно совпадают с соответствующими производными функции  $f$ , т. е.

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

В этом легко убедиться, дифференцируя  $T_n(x)$ . Благодаря этому свойству многочлен Тейлора хорошо приближает функцию  $f$  в окрестности точки  $a$ . Погрешность приближения составляет

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|,$$

т. е. задавая некоторую точность  $\varepsilon > 0$ , можно определить окрестность точки  $a$  и значение  $n$  из условия:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

**Пример 3.1.**

Найдем приближение функции  $y = \sin x$  многочленом Тейлора в окрестности точки  $a = 0$ .

**Решение.** Воспользуемся известным выражением для  $k$ -ой производной функции  $\sin x$ :

$$(\sin x)^{(k)} = \sin \left( x + k \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.3)$$

Применяя последовательно формулу (3.3), получим:

$$f(0) = \sin 0 = 0;$$

$$f'(0) = \cos(0) = 1;$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0;$$

.....

$$f^{(2k-1)}(0) = \sin \left( 2k-1 \right) \frac{\pi}{2} = (-1)^{k-1};$$

$$f^{(2k)}(0) = 0;$$

$$f^{(2k+1)}(\xi) = (-1)^k \cos \xi.$$

Следовательно, многочлен Тейлора для функции  $y = \sin x$  для  $n = 2k$  имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x),$$

$$R_{2k}(x) = (-1)^k \frac{\cos \xi}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Зададим  $\varepsilon = 10^{-4}$  и отрезок  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ . Определим  $n = 2k$  из неравенства:

$$|R_{2k}(x)| = \frac{|\cos \xi|}{(2k+1)!} |x|^{2k+1} < \frac{1}{(2k+1)!} \left( \frac{\pi}{4} \right)^{2k+1} < \frac{0.8}{(2k+1)!} < \varepsilon = 10^{-4}.$$

Таким образом, на отрезке  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  функция  $y = \sin x$  с точностью до  $\varepsilon = 10^{-4}$  равна многочлену 5-ой степени:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - 0.1667x^3 + 0.0083x^5.$$

**Пример 3.2.**

Найдем приближение функции  $y = e^x$  многочленом Тейлора на отрезке  $[0, 1]$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

**Решение.** Выберем  $a = 1/2$ , т.е. в середине отрезка. При этом величина погрешности в левой части (3.2) принимает минимальное значение. Из математического анализа известно, что для  $k$ -ой производной от  $e^x$  справедливо равенство:

$$(e^x)^{(k)} = e^x.$$

Поэтому

$$(e^a)^{(k)} = e^a = e^{1/2},$$

Следовательно, многочлен Тейлора для функции  $y = e^x$  имеет вид:

$$e^x = e^{1/2} + e^{1/2}(x - 1/2) + \frac{e^{1/2}}{2!}(x - 1/2)^2 + \dots + \frac{e^{1/2}}{n!}(x - 1/2)^n + R_n(x),$$

При этом, учитывая, что  $x \in [0, 1]$ , получим оценку погрешности:

$$|R_n(x)| < \frac{e}{2^{n+1}(n+1)!}. \quad (3.4)$$

Составим таблицу погрешностей, вычисленных по формуле (3.4):

$n$	2	3	4	5	6
$R_n$	0.057	0.0071	0.00071	0.000059	0.0000043

Таким образом, следует взять  $n = 6$ .

### 3.3. Интерполяция функции многочленами Лагранжа

Рассмотрим другой подход к приближению функции многочленами. Пусть функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$  и известны значения этой функции в некоторой системе узлов  $x_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Например, эти значения получены в эксперименте при наблюдении некоторой величины в определенных точках или в определенные моменты времени  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Обозначим эти значения следующим образом:

$$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n.$$

Требуется найти такой многочлен  $P(x)$  степени  $m$

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \quad (3.5)$$

который бы в узлах  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  принимал те же значения, что и исходная функция  $y = f(x)$ , т. е.

$$P(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Многочлен (3.5), удовлетворяющий условию (3.6), называется *интерполяционным многочленом*.

Другими словами, ставится задача построения функции  $y = P(x)$ , график которой проходит через заданные точки  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  (рис. 3.1).

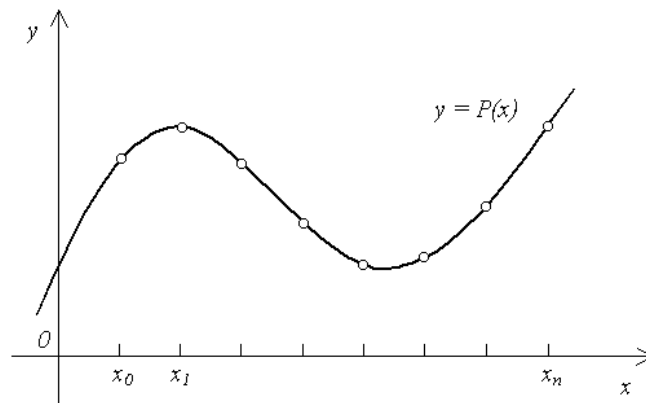


Рис. 3.1

Объединяя (3.5) и (3.6), получим:

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

В искомом многочлене  $P(x)$  неизвестными являются  $m + 1$  коэффициент  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ . Поэтому систему (3.7) можно рассматривать как систему из  $n + 1$  уравнений с  $m + 1$  неизвестными. Известно, что для существования единственного решения такой системы необходимо, чтобы выполнялось условие:  $m = n$ . Таким образом, систему (3.7) можно переписать в развернутом виде:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_2^n = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \quad (3.8)$$

Вопрос о существовании и единственности интерполяционного многочлена решает следующая теорема:

**Теорема 3.1.** Существует единственный интерполяционный многочлен степени  $n$ , удовлетворяющий условиям (3.6).

Имеются различные формы записи интерполяционного многочлена. Широко распространенной формой записи является многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (3.9)$$

В частности, для линейной и квадратичной интерполяции по Лагранжу получим следующие интерполяционные многочлены:

$$L_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)},$$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

**Пример 3.3.** Построим интерполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным:

$x$	0	2	3	5
$y$	1	3	2	5

**Решение.** Степень многочлена Лагранжа для  $n+1$  узла равна  $n$ . Для нашего примера многочлен Лагранжа имеет третью степень. В соответствии с (3.9)

$$L_3(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} + 3 \cdot \frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)} + 2 \cdot \frac{x(x-2)(x-5)}{3(3-2)(3-5)} + 5 \cdot \frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)} = 1 + \frac{62}{15}x - \frac{13}{6}x^2 + \frac{3}{10}x^3.$$

**Пример 3.4.**

Рассмотрим пример использования интерполяционного многочлена Лагранжа для вычисления значения заданной функции в промежуточной точке. Эта задача возникает, например, когда заданы табличные значения функции с крупным шагом, а требуется составить таблицу значений с маленьким шагом.

Для функции  $y = \sin x$  известны следующие данные.

$x$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
$y$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Вычислим  $y(0.25)$ .

**Решение.** Найдем многочлен Лагранжа третьей степени:

$$L_3(x) = 0 \cdot \frac{(x-\pi/6)(x-\pi/3)(x-\pi/2)}{(0-\pi/6)(0-\pi/3)(0-\pi/2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-0)(x-\pi/3)(x-\pi/2)}{(\pi/6-0)(\pi/6-\pi/3)(\pi/6-\pi/2)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(x-0)(x-\pi/6)(x-\pi/2)}{(\pi/3-0)(\pi/3-\pi/6)(\pi/3-\pi/2)} + 1 \cdot \frac{(x-0)(x-\pi/6)(x-\pi/3)}{(\pi/2-0)(\pi/2-\pi/6)(\pi/2-\pi/3)}.$$

При  $x = 0.25$  получим  $y(0.25) = \sin 0.25 \approx 0.249$ .

**Погрешность интерполяции.** Пусть интерполяционный многочлен Лагранжа построен для известной функции  $f(x)$ . Необходимо выяснить, насколько этот многочлен близок к функции в точках отрезка  $[a, b]$ , отличных от узлов. Погрешность интерполяции

равна  $|f(x) - P_n(x)|$ . Оценку погрешности можно получить на основании следующей теоремы.

**Теорема 3.2.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема  $n + 1$  раз на отрезке  $[a, b]$ , содержащем узлы интерполяции  $x_i \in [a, b], i = 0, 1, \dots, n$ . Тогда для погрешности интерполяции в точке  $x \in [a, b]$  справедлива оценка:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad (3.10)$$

где  $M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ ,  $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ .

Для максимальной погрешности интерполяции на всем отрезке  $[a, b]$  справедлива оценка:

$$\max_{[a,b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |\omega_n(x)| \quad (3.11)$$

### Пример 3.5.

Оценим погрешность приближения функции  $f(x) = \sqrt{x}$  в точке  $x = 116$  и на всем отрезке  $[a, b]$ , где  $a = 100, b = 144$ , с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа  $L_2(x)$  второй степени, построенного с узлами  $x_0 = 100, x_2 = 144$ .

**Решение.** Найдем первую, вторую и третью производные функции  $f(x)$ :

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}, f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

$$M_3 = \max_{[a,b]} |f'''(x)| = \frac{3}{8}100^{-5/2} = \frac{3}{8}10^{-5}.$$

В соответствии с (3.9) получим оценку погрешности в точке  $x = 116$ :

$$|\sqrt{116} - L_2(116)| \leq \frac{1}{3!} |(116 - 100)(116 - 121)(116 - 144)| = \frac{1}{16} 10^{-5} \cdot 16 \cdot 5 \cdot 28 = 1.4 \cdot 10^{-3}.$$

Оценим погрешность приближения функции  $f(x) = \sqrt{x}$  на всем отрезке в соответствии с (3.11):

$$\max_{[a,b]} |\sqrt{x} - L_2(x)| \leq \frac{10^{-5}}{16} \max_{[a,b]} |(x - 100)(x - 121)(x - 144)| \approx 2.5 \cdot 10^{-3}.$$

Рассмотрим реализация алгоритма интерполяции функции многочленом Лагранжа с использованием электронных таблиц Excel.

**Пример 3.6.** Неизвестная функция, задана таблицей:

$x$	0.75	1.5	2.25	3	3.75
$y$	2.5	1.2	1.12	2.25	4.28

Определить аналитическое задание функции с помощью реализации алгоритма интерполяции многочленом Лагранжа.

**Решение.** Для начала заполняется шапка таблицы, вводятся исходные данные, вычисляется значение  $h_{(шаг)} = (x_1 - x_0)/2$  (см. рис. 3.2).

	A	B	C	D	E
1					
2		Исходные данные			Искомые:
3		Xi	Yi	h	Xi*
4	X0	0,75	2,5	0,375	1,125
5	X1	1,5	1,2		1,875
6	X2	2,25	1,12		2,625
7	X3	3	2,25		3,375
8	X4	3,75	4,28		4,125

Рис. 3.2

Далее формируется таблица искомых значений. К значению переменных  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  поочередно прибавляется  $h$  и записывается в столбец значений  $X_i^*$ . Значение  $L_5$  и  $L_5(\text{тек})$  будут вычисляться в ходе реализации алгоритма. Текущее значение аргумента поочередно будет равняться значению столбца  $X_i^*$ , который будет соответственно определять значения  $L_5$  (рис. 3.3):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Исходные данные			Искомые значения			Текущее значение аргумента	Значение многочлена Лагранжа
3		Xi	Yi	h	Xi*	L5(Xi)		Xтек=Xi*	L5(Xтек)
4	X0	0,75	2,5	0,375	1,125			1,125	
5	X1	1,5	1,2		1,875				
6	X2	2,25	1,12		2,625				
7	X3	3	2,25		3,375				
8	X4	3,75	4,28		4,125				

Рис. 3.3

После этого формируется таблица вычисления интерполяционного многочлена Лагранжа в конкретной точке  $X_i$ . Для этого формируется форма таблицы, где в столбце  $X_i$  значения  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  равняются в соответствие ранее заявленным значениям (рис. 3.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
7	X3	3	2,25		3,375	3,183594					
8	X4	3,75	4,28		4,125	5,453594					
9											
10		$X_i$	$X_{тек}-X_i$	$X_0-X_i$	$X_1-X_i$	$X_2-X_i$	$X_3-X_i$	$X_4-X_i$	$\Pi$	$Y_i/\Pi$	
11	X0	0,75									
12	X1	1,5									
13	X2	2,25									
14	X3	3									
15	X4	3,75									
16		$\Pi=$							Сумма $Y_i/\Pi =$		
17											

Рис. 1.4

В столбце  $X_{тек} - X_i$  подставляется значение  $X_{тек}$ , которое поочередно выбирается из столбца  $X_i^*$ , и из которого вычитают значение  $X_i$ . Соответственно столбцы  $X_0-X_i$ ,  $X_1-X_i$  и т.д. отражают одноимённые операции, в ячейках, где операция должна равняться 0 ставится соответствующее значение  $X_{тек}-X_i$  строки (например, в ячейке D11, где происходит действие  $X_0-X_i=0$  присваивается значение ячейки C11, в E12 –C12). Столбец I ( $\Pi$ ) подразумевает собой произведение ячеек  $X_0-X_i$ ,  $X_1-X_i$  и т.д. Значение ячеек столбца  $Y_i/\Pi$  вычисляются следующей формулой: из исходной таблицы поочередно, в соответствии с  $X_i$ , берутся значения  $Y_i$ , которые после делят на произведение  $\Pi$  (столбец I).

Ячейка B16 ( $\Pi$ ) отражает произведение элементов столбца  $X_{тек}-X_i$ , Сумма  $Y_i/\Pi$  – сумму значений столбца  $Y_i/\Pi$  (рис. 3.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		Исходные данные			Искомые значения			Текущее значение аргумента	Значение многочлена Лагранжа		
3		$X_i$	$Y_i$	$h$	$X_i^*$	$L_5(X_i)$		$X_{тек}=X_i^*$	$L_5(X_{тек})$		
4	X0	0,75	2,5	0,375	1,125			1,125			
5	X1	1,5	1,2		1,875						
6	X2	2,25	1,12		2,625						
7	X3	3	2,25		3,375						
8	X4	3,75	4,28		4,125						
9											
10		$X_i$	$X_{тек}-X_i$	$X_0-X_i$	$X_1-X_i$	$X_2-X_i$	$X_3-X_i$	$X_4-X_i$	$\Pi$	$Y_i/\Pi$	
11	X0	0,75	0,375	0,375	0,75	1,5	2,25	3	2,847656	0,877915	
12	X1	1,5	-0,375	-0,75	-0,375	0,75	1,5	2,25	0,711914	1,685597	
13	X2	2,25	-1,125	-1,5	-0,75	-1,125	0,75	1,5	-1,42383	-0,78661	
14	X3	3	-1,875	-2,25	-1,5	-0,75	-1,875	0,75	3,55957	0,632099	
15	X4	3,75	-2,625	-3	-2,25	-1,5	-0,75	-2,625	-19,9336	-0,21471	
16		$\Pi=$	0,778656						Сумма $Y_i/\Pi =$	2,194286	
17											

Рис. 3.5



Когда таблица вычислений готова, для нахождения  $L_5(\text{тек})$  в ячейку I5 прописывается формула произведения значений ячеек B16 (П) и J16 (Сумма  $Y_i/\Pi$ ). Поочерёдно в текущее значение аргумента подставляются значения  $X_i^*$ , после вычисления каждого из которых значение  $L_5(\text{тек})$  записываются в столбец  $L_5(X_i)$ , что и будет являться решением данной задачи (рис. 3.6).

=C16*J16											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Исходные данные			Искомые значения			Текущее значение аргумента	Значение многочлена Лагранжа		
2		$X_i$	$Y_i$	$h$	$X_i^*$	$L_5(X_i)$					
3	$X_0$	0,75	2,5	0,375	1,125	1,708594		$X_{\text{тек}}=X_i^*$	$L_5(X_{\text{тек}})$		
4	$X_1$	1,5	1,2		1,875	1,001094		3,375	3,183594		
5	$X_2$	2,25	1,12		2,625	1,546094					
6	$X_3$	3	2,25		3,375	3,183594					
7	$X_4$	3,75	4,28		4,125	5,453594					
8											
9											
10		$X_i$	$X_{\text{тек}}-X_i$	$X_0-X_i$	$X_1-X_i$	$X_2-X_i$	$X_3-X_i$	$X_4-X_i$	$\Pi$	$Y_i/\Pi$	
11	$X_0$	0,75	2,625	2,625	0,75	1,5	2,25	3	19,93359	0,125416	
12	$X_1$	1,5	1,875	-0,75	1,875	0,75	1,5	2,25	-3,55957	-0,33712	
13	$X_2$	2,25	1,125	-1,5	-0,75	1,125	0,75	1,5	1,423828	0,786612	
14	$X_3$	3	0,375	-2,25	-1,5	-0,75	0,375	0,75	-0,71191	-3,16049	
15	$X_4$	3,75	-0,375	-3	-2,25	-1,5	-0,75	-0,375	-2,84766	-1,50299	
16		$\Pi=$	-0,77866						Сумма $Y_i/\Pi=$	-4,08858	
17											

Рис. 3.6

**Пример 3.7.** Рассмотрим реализацию алгоритма интерполяции многочленом Лагранжа для неизвестной функции, заданной таблицей:

x	0,43	0,48	0,55	0,62	0,7
y	1,63	1,73	1,87	2,03	2,22

**Решение.** Решение аналогично примеру 3.6 и выглядит следующим образом (рис.3.7):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Исходные данные			Искомые значения			Текущее значение аргумента	Значение многочлена Лагранжа		
2		$X_i$	$Y_i$	$h$	$X_i^*$	$L_5(X_i)$		$X_{тек}=X_i^*$	$L_5(X_{тек})$		
3											
4	X0	0,43	1,63	0,025	0,455	1,681266					
5	X1	0,48	1,73		0,505	1,778472		0,725	2,270703		
6	X2	0,55	1,87		0,575	1,924693					
7	X3	0,62	2,03		0,645	2,090797					
8	X4	0,7	2,22		0,725	2,270703					
9											
10		$X_i$	$X_{тек}-X_i$	$X_0-X_i$	$X_1-X_i$	$X_2-X_i$	$X_3-X_i$	$X_4-X_i$	$\Pi$	$Y_i/\Pi$	
11	X0	0,43	0,295	0,295	0,05	0,12	0,19	0,27	9,08E-05	17951,34	
12	X1	0,48	0,245	-0,05	0,245	0,07	0,14	0,22	-2,6E-05	-65503	
13	X2	0,55	0,175	-0,12	-0,07	0,175	0,07	0,15	1,54E-05	121153,2	
14	X3	0,62	0,105	-0,19	-0,14	-0,07	0,105	0,08	-1,6E-05	-129789	
15	X4	0,7	0,025	-0,27	-0,22	-0,15	-0,08	0,025	1,78E-05	124579,1	
16		$\Pi=$	3,32013E-05						Сумма $Y_i/\Pi=$	68391,92	
17											

Рис. 3.7

### 3.4. Аппроксимация функций методом наименьших квадратов

В инженерной деятельности часто возникает необходимость описать в виде функциональной зависимости связь между величинами, заданными таблично или в виде набора точек с координатами  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  – общее количество точек. Как правило, эти табличные данные получены экспериментально и имеют погрешности (рис. 3.8)

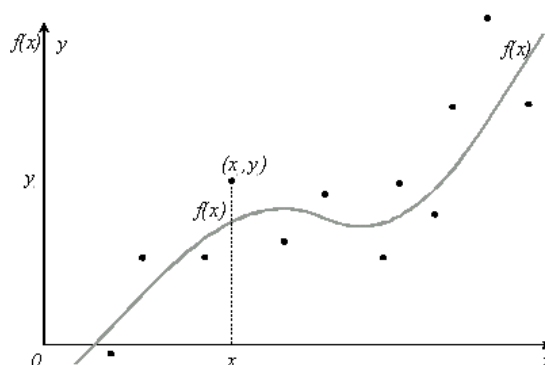


Рис.3.8

При аппроксимации желательно получить относительно простую функциональную зависимость (например, многочлен), которая позволила бы "сгладить" экспериментальные погрешности, вычислять значения функции в точках, не содержащихся в исходной таблице.

Эта функциональная зависимость должна с достаточной точностью соответствовать исходной табличной зависимости. В качестве критерия точности чаще всего используют критерий *наименьших квадратов*, т.е. определяют такую функциональную зависимость  $f(x)$ , при которой

$$S = \sum_{i=0}^n (y_i - f_i)^2, \quad (3.12)$$

обращается в минимум.

Погрешность приближения оценивается величиной среднеквадратического отклонения

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n+1} S}. \quad (4.13)$$

В качестве функциональной зависимости рассмотрим многочлен

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m. \quad (3.14)$$

Формула (3.12) примет вид

$$S = \sum_{i=0}^n (y_i - P_m(x_i))^2$$

Условия минимума  $S$  можно записать, приравняв нулю частные производные  $S$  по всем переменным  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ . Получим систему уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = - \sum_{i=0}^n 2(y_i - a_0 - a_1x_i - \dots - a_mx_i^m)x_i^k = 0, \text{ или}$$

$$\sum_{i=0}^n (y_i - a_0 - a_1x_i - \dots - a_mx_i^m)x_i^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (3.15)$$

Систему уравнений (3.15) перепишем в следующем виде:

$$a_0 \sum_{i=0}^n x_i^k + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{k+1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{k+m} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.16)$$

Введем обозначения:

$$c_k = \sum_{i=0}^n x_i^k, \quad b_k = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k.$$

Система (3.16) может быть записана так:

$$a_0c_k + a_1c_{k+1} + \dots + a_{k+m}c_m = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (3.17)$$

Перепишем систему (3.17) в развернутом виде:

$$\begin{cases} c_0a_0 + c_1a_1 + c_2a_2 \dots + c_ma_m = b_0 \\ c_1a_0 + c_2a_1 + c_3a_2 \dots + c_{m+1}a_m = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ c_ma_0 + c_{m+1}a_1 + c_{m+2}a_2 \dots + c_{2m}a_m = b_m \end{cases} \quad (3.18)$$

Матричная запись системы (3.18) имеет следующий вид:

$$Ca = b. \quad (3.19)$$

Для определения коэффициентов  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , и, следовательно, искомого многочлена (3.14) необходимо вычислить суммы  $c_k$ ,  $b_k$  и решить систему уравнений (3.18). Матрица  $C$  системы (3.19) называется матрицей Грама и является симметричной и положительно определенной. Эти полезные свойства используются при решении.

Погрешность приближения в соответствии с формулой (3.13) составит

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (y_i - P_m(x_i))^2}. \quad (3.20)$$

Рассмотрим частные случаи  $m=1$  и  $m=2$ .

1. Линейная аппроксимация ( $m=1$ ).

$$P_1(x) = a_0 + a_1x.$$

$$c_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 = n+1; c_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 = \sum_{i=0}^n x_i; c_2 = \sum_{i=0}^n x_i^2; \quad (3.21)$$

$$b_0 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^0 = \sum_{i=0}^n y_i; b_1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i. \quad (3.22)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & \sum_0^n x_i \\ \sum_0^n x_i & \sum_0^n x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$b = (b_0, b_1)^T = \left( \sum_{i=0}^n y_i, \sum_{i=0}^n y_i x_i \right)^T.$$

Решение системы уравнений  $Ca = b$  найдем по правилу Крамера:

$$a_0 = \frac{|C_1|}{|C|}, a_1 = \frac{|C_2|}{|C|},$$

где  $|C|$  – определитель матрицы  $C$ , а  $|C_i|$  – определитель матрицы  $C_i$ , полученной из матрицы  $C$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов  $b$ ,  $i = 1, 2$ .

Таким образом,

$$a_0 = \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_0 c_2 - c_1^2}, a_1 = \frac{b_1 c_0 - b_0 c_1}{c_0 c_2 - c_1^2}. \quad (3.23)$$

*Алгоритм метода наименьших квадратов на основе линейной аппроксимации примет вид:*

*Шаг 1.* Ввести исходные данные:  $x_i, y_i, i=0, 1, 2, \dots, n$ .

*Шаг 2.* Вычислить коэффициенты  $c_0, c_1, b_0, b_1$  по формулам (3.21), (3.22).

*Шаг 3.* Вычислить  $a_0, a_1$  по формулам (3.23).

*Шаг 4.* Вычислить величину погрешности

$$\Delta_1 = \sqrt{\sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2}. \quad (3.24)$$

*Шаг 5.* Вывести на экран результаты: аппроксимирующую линейную функцию  $P_1(x) = a_0 + a_1 x$  и величину погрешности  $\Delta_1$ .

2. Квадратичная аппроксимация ( $m = 2$ ).

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

$$c_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 = n+1; c_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 = \sum_{i=0}^n x_i; c_2 = \sum_{i=0}^n x_i^2; c_3 = \sum_{i=0}^n x_i^3; c_4 = \sum_{i=0}^n x_i^4. \quad (3.25)$$

$$b_0 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^0 = \sum_{i=0}^n y_i; b_1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i; b_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2. \quad (3.26)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$b = (b_0, b_1, b_2)^T.$$

Решение системы уравнений  $Ca = b$  найдем по правилу Крамера:

$$a_i = \frac{|C_i|}{|C|}, \quad i = 0, 1,$$

где  $|C|$  – определитель матрицы  $C$ , а  $|C_i|$  – определитель матрицы  $C_i$ , полученной из матрицы  $C$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов  $b$ .

$$|C| = c_0 c_2 c_4 + 2c_1 c_2 c_3 - c_2^3 - c_1^2 c_4 - c_3^2 c_0. \quad (3.27)$$

$$|C_1| = \begin{vmatrix} b_0 & c_1 & c_2 \\ b_1 & c_2 & c_3 \\ b_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = b_0 c_2 c_4 + b_2 c_1 c_3 + b_1 c_2 c_3 - b_2 c_2^2 - b_1 c_1 c_4 - b_0 c_3^2. \quad (3.28)$$

$$|C_2| = \begin{vmatrix} c_0 & b_0 & c_2 \\ c_1 & b_1 & c_3 \\ c_2 & b_2 & c_4 \end{vmatrix} = b_1 c_0 c_4 + b_0 c_2 c_3 + b_2 c_1 c_2 - b_1 c_2^2 - b_0 c_1 c_4 - b_2 c_0 c_3. \quad (3.29)$$

$$|C_3| = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & b_0 \\ c_1 & c_2 & b_1 \\ c_2 & c_3 & b_2 \end{vmatrix} = b_2 c_0 c_2 + b_1 c_1 c_2 + b_0 c_1 c_3 - b_0 c_2^2 - b_2 c_1^2 - b_1 c_0 c_3. \quad (3.30)$$

$$a_0 = \frac{|C_1|}{|C|}, \quad a_1 = \frac{|C_2|}{|C|}, \quad a_2 = \frac{|C_3|}{|C|}. \quad (3.31)$$

Алгоритм метода наименьших квадратов на основе квадратичной аппроксимации:

Шаг 1. Ввести исходные данные:  $x_i, y_i, i=0, 1, 2, \dots, n$ .

Шаг 2. Вычислить коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, b_0, b_1, b_2$ , по формулам (3.25), (3.26).

Шаг 3. Вычислить  $|C|, |C_1|, |C_2|, |C_3|$  по формулам (3.27) – (3.30).

Шаг 4. Вычислить  $a_0, a_1, a_2$  по формулам (3.31).

Шаг 5. Вычислить величину погрешности

$$\Delta_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2))^2}. \quad (3.32)$$

Шаг 5. Вывести на экран результаты : аппроксимирующую квадратичную функцию  $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$  и величину погрешности  $\Delta_2$ .

**Пример 3.8.** Построить по методу наименьших квадратов многочлены первой и второй степени и оценить степень приближения. Значения  $y_i$  в точках  $x_i, i=0, 1, 2, 3, 4$  приведены в таблице:

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	-1	1	2	4	6

**Решение.** Вычислим коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, b_0, b_1, b_2$ , по формулам (3.25), (3.26):

$$c_0 = 5; c_1 = 15; c_2 = 55; c_3 = 225; c_4 = 979;$$

$$b_0 = 12; b_1 = 53; b_2 = 235.$$

1. Линейная аппроксимация ( $m=1$ ).

Система уравнений для определения коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$  многочлена первой степени  $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$  имеет вид

$$5a_0 + 15a_1 = 12$$

$$15a_0 + 55a_1 = 53$$

По формулам (3.23) найдем коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$ :

$$a_0 = \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_0 c_2 - c_1^2} \approx -2.7, a_1 = \frac{b_1 c_0 - b_0 c_1}{c_0 c_2 - c_1^2} \approx 1.7.$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x = -2.7 + 1.7x.$$

2. Квадратичная аппроксимация ( $m=2$ ).

Система уравнений для определения коэффициентов  $a_0, a_1$  и  $a_2$  многочлена второй степени  $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$  имеет вид

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 12, \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 53, \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 235. \end{cases}$$

По формулам (3.31) найдем коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$ :

$$a_0 \approx -2.20, a_1 \approx 1.27, a_2 \approx 0.07.$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = -2.20 + 1.27x + 0.07x^2.$$

Сравним значения, рассчитанные для функциональной зависимости, с исходными данными. Результаты приведены в таблице:

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	-1	1	2	4	6
$P_1(x_i)$	-1	0.7	2.4	4.1	5.8
$P_2(x_i)$	-1	0.62	2.24	4	6.9

Погрешность приближения в соответствии с формулами (3.24) и (3.32) составит

$$\Delta_1 = \sqrt{\sum_{i=0}^4 \frac{1}{5} (y_i - P_1(x_i))^2} = 0.245.$$

$$\Delta_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^4 \frac{1}{5} (y_i - P_2(x_i))^2} = 0.084.$$

**Пример 3.9.** Перейдем к реализации метода наименьших квадратов на примере следующей задачи с использованием табличного процессора Excel. Функция задана в табличном виде и требуется найти такую функцию, которая имела бы наиболее близкие к табличным значения в соответствующих точках:

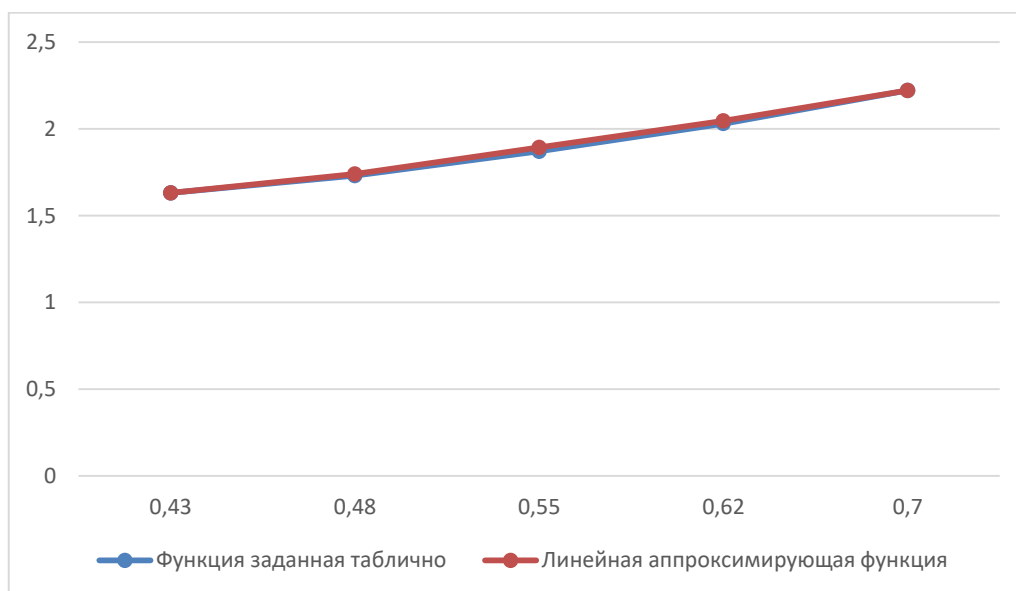
$x$	0,43	0,48	0,55	0,62	0,70
$y$	1,63	1,73	1,87	2,03	2,22

**Решение.** Чтобы определить вид аппроксимирующей функции отобразим точки на следующем графике (рис. 3.9).



*Рис. 3.9*

Предварительно можно сказать, что данный график указывает на линейность функции, заданной таблично. Добавим еще две функции, заданные таблично: линейную с двумя точками (рис. 3.10) – началом и концом табличной функции, а также параболическую с тремя точками (рис. 3.11) – началом, серединой и концом табличной функции.



*Рис. 3.10*



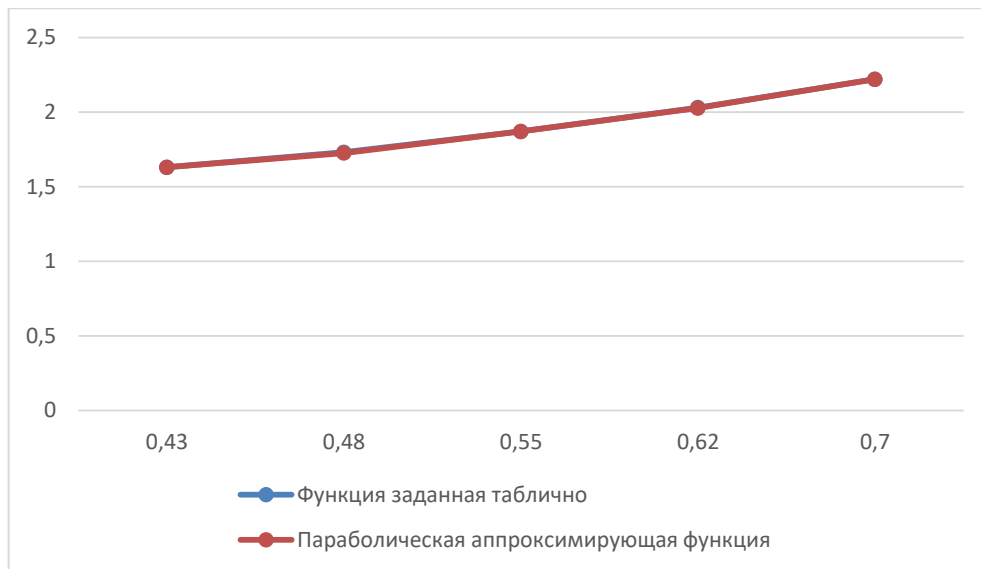


Рис. 3.11

Из этих двух рисунков можно сделать вывод, что параболическая аппроксимирующая функция наиболее близка к табличным значениям. На самом деле, для построения этих функций на графиках требовалось больше точек, чем было доступно изначально. То есть, для представления этих функций на графиках они были предварительно вычислены (через систему уравнений по данным точкам и общему виду функций).

Таким образом, с помощью рядов можно сравнить, какая из двух (линейная или параболическая) функция ближе к табличной. Однако, поскольку предполагается использовать метод наименьших квадратов для нахождения коэффициентов параболической функции, аналитическое сравнение будет опущено.

Согласно методу наименьших квадратов для квадратичной функции (она же параболическая) имеем следующее:

$$y^* = A_0 + A_1x + A_2x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0n + A_1 \sum_{i=1}^n x_i + A_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ A_0 \sum_{i=1}^n x_i + A_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + A_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ A_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + A_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + A_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \end{array} \right.$$

Для проведения вычислений заполним таблицу программной среды Excel следующим образом. Сначала заполним таблицу и подготовим данные. Поскольку с самими данными ничего сделать не выйдет, запишем их вручную в ячейки D3:E7 (рис 3.12).

	A	B	C	D	E
1			Исходные данные		
2				X	Y
3			x1	0.43	1.63
4			x2	0.48	1.73
5			x3	0.55	1.87
6			x4	0.62	2.03
7			x5	0.7	2.22

Рис. 3.12

Все данные введены вручную, а столбец C заполнен порядковыми номерами  $X_i$ , – это было сделано для удобства. Далее необходимо сделать предварительные вычисления:  $X_i^k, X_i^j Y_i$  – для этого достаточно под столбцами F-J строки 3 записать соответствующие выражения, опираясь на данные в таблице: для  $X^2$  это будет =D3\*D3, для  $XY$  – =D3\*E3 и так далее, в итоге должны получиться новые столбцы (рис. 3.13):

J3										
=D3*D3*E3										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Исходные данные			Вспомогательные вычисления				
2				X	Y	X^2	X^3	X^4	Y*X	Y*X^2
3			x1	0.43	1.63	0.1849	0.079507	0.034188	0.7009	0.301387
4			x2	0.48	1.73					
5			x3	0.55	1.87					
6			x4	0.62	2.03					
7			x5	0.7	2.22					

Рис. 3.13

Затем необходимо выделить секцию F3:J3 и навести мышку на правый нижний угол секции. Когда иконка мышки сменится на тонкую версию знака “+” нужно нажать на левую кнопку мыши и потянуть вниз, вплоть до строки 7 включительно (рис. 3.14).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			Исходные данные			Вспомогательные вычисления					
2				X	Y	X^2	X^3	X^4	Y*X	Y*X^2	
3			x1	0.43	1.63	0.1849	0.079507	0.034188	0.7009	0.301387	
4			x2	0.48	1.73	0.2304	0.110592	0.053084	0.8304	0.398592	
5			x3	0.55	1.87	0.3025	0.166375	0.091506	1.0285	0.565675	
6			x4	0.62	2.03	0.3844	0.238328	0.147763	1.2586	0.780332	
7			x5	0.7	2.22	0.49	0.343	0.2401	1.554	1.0878	
8											
9											
10											

Рис 3.14

Далее необходимо произвести сумму по данным строкам каждого из столбцов X-J с 3 по 7 строки включительно. Для этого достаточно выбрать любую ячейку сразу под столбцом, предположим X8, и нажать на символ функции слева от поля ввода (выделено желтым на рис. 3.15).

The image shows the 'Вставка функции' (Insert Function) dialog box in Microsoft Excel. The formula bar at the top shows '='. The 'fx' icon in the formula bar is highlighted with a yellow circle. The dialog box is open, showing a search for functions. The 'Категория' (Category) is set to 'Математические' (Mathematical). The 'Выберите функцию:' (Select a function:) list includes 'СЛЧИС', 'СТЕПЕНЬ', 'СУММ', 'СУММЕСЛИ', 'СУММЕСЛИМН', 'СУММКВ', and 'СУММКВРАЗН'. The 'СУММ' function is selected and highlighted in blue. Below the list, the function signature 'СУММ(число1,число2,...)' and its description 'Суммирует аргументы.' are visible. At the bottom of the dialog, there are buttons for 'Справка по этой функции' (Help on this function), 'OK', and 'Отмена' (Cancel). The background spreadsheet shows the same data as Figure 3.14, with cell D8 selected and containing an equals sign.

Рис. 3.15

Здесь нас интересует функция СУММ, которую можно найти, как через поиск, так и в конце списка математических функций. После нажатия кнопки ОК. Среда Excel предложит просуммировать столбец над данной ячейкой (рис. 3.16).

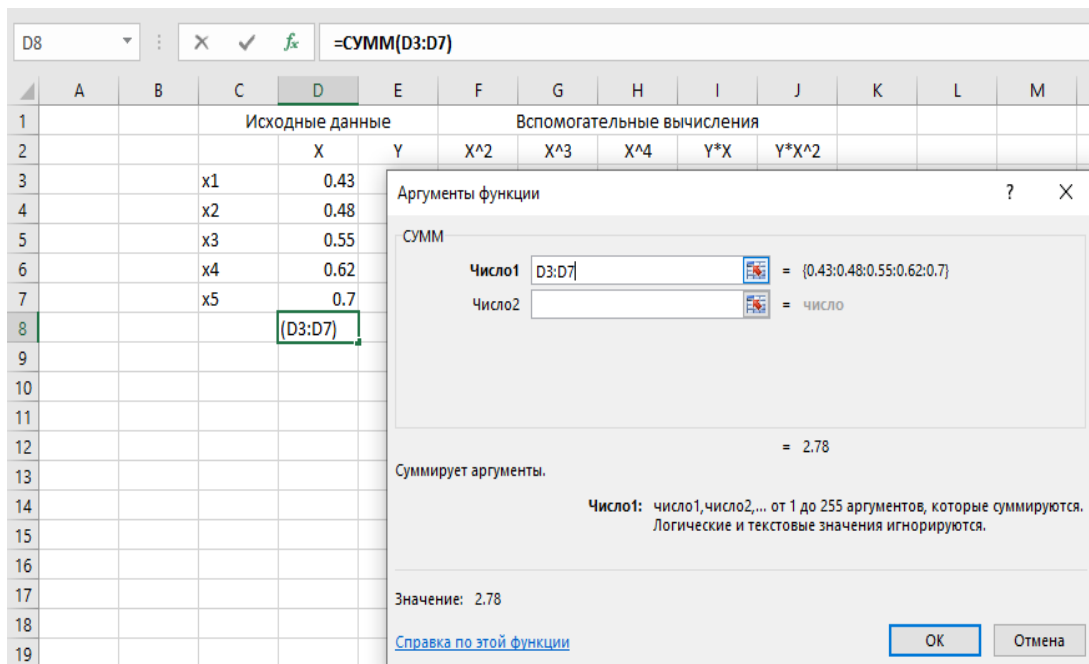


Рис. 3.16

Если поле Число1 по какой-либо причине не заполнено, достаточно указать срез по двум ячейкам – начальной и конечной также, как это представлено на рис. 3.16.

После нажатия кнопки ОК, необходимо выделить заполненную только что ячейку и аналогично предыдущим, выбрав правый нижний угол, растянуть ее вплоть до столбца J (рис. 3.17).

	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	Исходные данные		Вспомогательные вычисления						
		X	Y	X^2	X^3	X^4	Y*X	Y*X^2	
x1		0.43	1.63	0.1849	0.079507	0.034188	0.7009	0.301387	
x2		0.48	1.73	0.2304	0.110592	0.053084	0.8304	0.398592	
x3		0.55	1.87	0.3025	0.166375	0.091506	1.0285	0.565675	
x4		0.62	2.03	0.3844	0.238328	0.147763	1.2586	0.780332	
x5		0.7	2.22	0.49	0.343	0.2401	1.554	1.0878	
СУММА		2.78	9.48	1.5922	0.937802	0.566642	5.3724	3.133786	

Рис. 3.17

Также понадобится ячейка, которая будет хранить количество пар X, Y. Для этих нужд я выбрал секцию A1:B8 (рис. 3.18).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Исходные данные			Вспомогательные вычисления				
2		№		X	Y	X^2	X^3	X^4	Y*X	Y*X^2
3		0 x1		0.43	1.63	0.1849	0.079507	0.034188	0.7009	0.301387
4		1 x2		0.48	1.73	0.2304	0.110592	0.053084	0.8304	0.398592
5		2 x3		0.55	1.87	0.3025	0.166375	0.091506	1.0285	0.565675
6		3 x4		0.62	2.03	0.3844	0.238328	0.147763	1.2586	0.780332
7		4 x5		0.7	2.22	0.49	0.343	0.2401	1.554	1.0878
8	n=	5 СУММЫ		2.78	9.48	1.5922	0.937802	0.566642	5.3724	3.133786

Рис. 3.18

Теперь необходимо обратить внимание на систему метода наименьших квадратов:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 n + A_1 \sum_{i=1}^n x_i + A_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ A_0 \sum_{i=1}^n x_i + A_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + A_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ A_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + A_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + A_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \end{array} \right.$$

Нетрудно заметить, что необходимая нам расширенная матрица содержит значения именно из этой системы, значения которой были рассчитаны ранее: так количество переменных  $n$  хранится в ячейке B8, сумма значений  $X$  в D8, сумма  $X^2$  в F8 и так далее. Нетрудно выделить немного места под расширенную матрицу размером 3 на 4 и заполнить ссылками на уже существующие ячейки (рис. 3.19).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Исходные данные			Вспомогательные вычисления				
2		№		X	Y	X^2	X^3	X^4	Y*X	Y*X^2
3		0 x1		0.43	1.63	0.1849	0.079507	0.034188	0.7009	0.301387
4		1 x2		0.48	1.73	0.2304	0.110592	0.053084	0.8304	0.398592
5		2 x3		0.55	1.87	0.3025	0.166375	0.091506	1.0285	0.565675
6		3 x4		0.62	2.03	0.3844	0.238328	0.147763	1.2586	0.780332
7		4 x5		0.7	2.22	0.49	0.343	0.2401	1.554	1.0878
8	n=	5 СУММЫ		2.78	9.48	1.5922	0.937802	0.566642	5.3724	3.133786
9										
10			Расширенная матрица коэффициентов							
11			5	2.78	1.5922			9.48		
12			2.78	1.5922	0.937802			5.3724		
13			1.5922	0.937802	0.566642			3.133786		

Рис. 3.19

Как можно видеть, все значения взяты через ссылки на ячейки. Далее необходимо вычислить обратную матрицу. Для этого необходимо выделить секцию размером 3 на 3, на которой будут отображены значения обратной матрицы, нажать на значок формулы и найти МОБР, который доступен в группе математических функций (рис. 3.20).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1			Исходные данные			Вспомогательные вычисления								
2		№		X	Y	X^2	X^3	X^4	Y*X	Y*X^2				
3		0 x1		0.43	1.63	0.1849	0.079507	0.034188	0.7009	0.301387				
4		1 x2		0.48	1.73	0.2304	0.110592							
5		2 x3		0.55	1.87	0.3025	0.166375							
6		3 x4		0.62	2.03	0.3844	0.238328							
7		4 x5		0.7	2.22	0.49	0.343							
8	n=	5 СУММЫ		2.78	9.48	1.5922	0.937802							
9														
10			Расширенная матрица коэффициентов											
11			5	2.78	1.5922			9.48						
12			2.78	1.5922	0.937802			5.3724						
13			1.5922	0.937802	0.566642			3.133786						
14														
15			=											
16														
17														
18														
19														
20														
21														

Вставка функции

Поиск функции:

Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"

Категория: Математические

Выберите функцию:

- МЕДИН
- МОБР**
- МОПРЕД
- МУЛЬТИНОМ
- МУМНОЖ
- НЕЧЕТ
- НОД

МОБР(массив)  
Возвращает обратную матрицу (матрица хранится в массиве).

[Справка по этой функции](#)

OK Отмена

Рис. 3.20

Следующим шагом будет заполнение поля МАССИВ секцией с оригинальной матрицей C11:E13 и нажать комбинацию клавиш CTRL+SHIFT+ENTER. Тогда будет заполнена ВСЯ выделенная площадь (рис. 3.21).

Расширенная матрица коэффициентов			
5	2.78	1.5922	9.48
2.78	1.5922	0.937802	5.3724
1.5922	0.937802	0.566642	3.133786
342.5957	-1237.14	1084.83	
-1237.14	4492.324	-3958.65	
1084.83	-3958.65	3505.154	

Рис.3.21

Аналогично необходимо выбрать столбец из трех ячеек – для коэффициентов  $A_0, A_1, A_2$  – соответственно, найти функцию МУМНОЖ и выбрать обратную матрицу и столбец свободных членов расширенной матрицы (рис. 3.22):

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1			Исходные данные			Вспомогательные вычисления											
2		№		X	Y	X^2	X^3	X^4	Y*X	Y*X^2							
3		0 x1		0.43	1.63	0.1849	0.079507	0.034188	0.7009	0.301387							
4		1 x2		0.48	1.73	0.2304	0.110592	0.053084	0.8304	0.398592							
5		2 x3		0.55	1.87	0.3025	0.166375	0.091506	1.0285	0.565675							
6		3 x4		0.62	2.03	0.3844	0.238328	0.147763	1.2586	0.780332							
7		4 x5		0.7	2.22	0.49	0.343	0.2401	1.554	1.0878							
8		n=	5 СУММЫ	2.78	9.48	1.5922	0.937802	0.566642	5.3724	3.133786							
9																	
10			Расширенная матрица коэффициентов														
11			5	2.78	1.5922					9.48							
12			2.78	1.5922	0.937802					5.3724							
13			1.5922	0.937802	0.566642					3.133786							
14																	
15			342.5957	-1237.14	1084.83					11:G13							
16			-1237.14	4492.324	-3958.65												
17			1084.83	-3958.65	3505.154												
18																	
19																	
20																	
21																	
22																	

The dialog box 'Аргументы функции' shows the following details:

- Функция: МУМНОЖ
- Массив1: C15:E17 = {342.595663760254;-1237.13858637...}
- Массив2: G11:G13 = {9.48;5.3724;3.133786}
- Результат: = {1.02984815058062;0.915320482587...}
- Значение: 1.029848151

Рис. 3.22

Стоит заметить, что если столбец не заполнится полностью, то можно попробовать использовать все ту же комбинацию клавиш, но в поле ввода формул. Дальнейшее заполнение значений тривиально и делается на основе обычных математических операций с ячейками (рис. 3.23).

Расширенная матрица коэффициентов				
5	2.78	1.5922		9.48
2.78	1.5922	0.937802		5.3724
1.5922	0.937802	0.566642		3.133786
Обратная матрица			Решение	
342.5957	-1237.14	1084.83	A0=	1.029848
-1237.14	4492.324	-3958.65	A1=	0.91532
1084.83	-3958.65	3505.154	A2=	1.121824
Y* = 1.02984815058062 + 0.915320482587049 * X + 1.1				
X	Y	Y*	ABS(Y - Y*)	ABS(Y - Y*) ^2
0.43	1.63	1.630861	-0.00086	7.42E-07
0.48	1.73	1.72767	0.00233	5.43E-06
0.55	1.87	1.872626	-0.00263	6.9E-06
0.62	2.03	2.028576	0.001424	2.03E-06
0.7	2.22	2.220266	-0.00027	7.09E-08
СУММА:				1.52E-05

Рис. 3.23

Таким образом, можно сделать следующие выводы: метод наименьших квадратов позволяет быстро и эффективно подобрать коэффициенты для аппроксимирующей функции. Более того, в рассмотренном примере с помощью среды Excel построили программу, которая позволяет вычислять квадратичную функцию для любой функции, заданной таблично, но только если она определена пятью точками.

*Замечание.* Для визуализации графиков функций были сделаны предварительные вычисления: коэффициенты были найдены при помощи системы уравнений по трем точкам. Метод наименьших квадратов примерно в два раза точнее, чем подбор коэффициентов через систему уравнений.

## Тема 4. Численное интегрирование функций одной переменной

### 4.1. Постановка задачи численного интегрирования

Далеко не все интегралы можно вычислить по известной из математического анализа формуле Ньютона – Лейбница:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (4.1)$$



где  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$ . Например, в элементарных функциях не выражается интеграл  $\int_0^b e^{-x^2} dx$ . Но даже в тех случаях, когда удастся выразить первообразную функцию  $F(x)$  через элементарные функции, она может оказаться очень сложной для вычислений. Кроме того, точное значение интеграла по формуле (4.1) нельзя получить, если функция  $f(x)$  задается таблицей. В этих случаях обращаются к методам численного интегрирования.

Суть численного интегрирования заключается в том, что подынтегральную функцию  $f(x)$  заменяют другой приближенной функцией, так, чтобы, во-первых, она была близка к  $f(x)$  и, во вторых, интеграл от нее легко вычислялся. Например, можно заменить подынтегральную функцию интерполяционным многочленом. Широко используют *квадратурные формулы*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i), \quad (4.2)$$

где  $x_i$  – некоторые точки на отрезке  $[a, b]$ , называемые *узлами квадратурной формулы*,  $A_i$  – числовые коэффициенты, называемые *весами квадратурной формулы*,  $n \geq 0$  – целое число.

## 4.2. Метод средних прямоугольников

Формулу прямоугольников можно получить из геометрической интерпретации интеграла. Будем интерпретировать интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  как площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $y = f(x)$ , осью абсцисс и прямыми  $x = a$  и  $x = b$  (рис. 4.1).

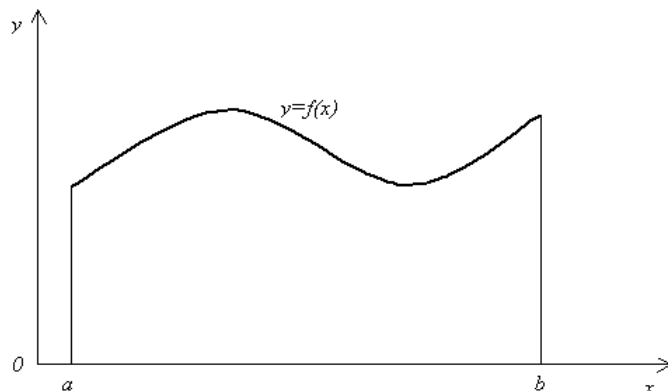


Рис. 4.1

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей длиной  $h$ , так, что  $h = \frac{b-a}{n}$ . При этом получим точки  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  и  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  (рис. 4.2)

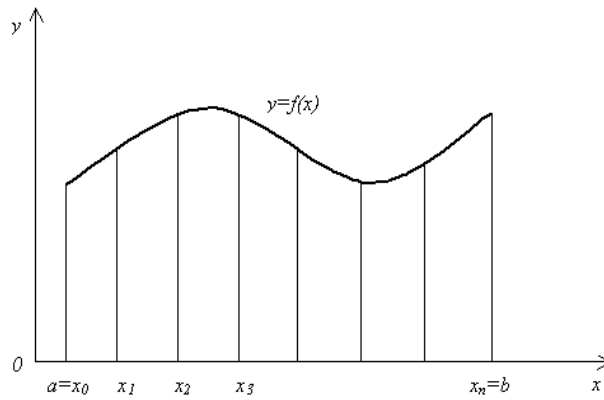


Рис. 4.2

Заменим приближенно площадь криволинейной трапеции площадью ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 4.3.

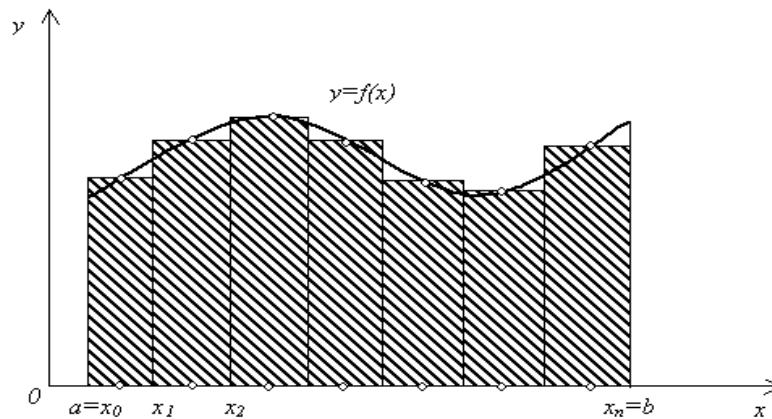


Рис. 4.3

Эта фигура состоит из  $n$  прямоугольников. Основание  $i$ -го прямоугольника образует отрезок  $[x_i, x_{i+1}]$  длины  $h$ , а высота основания равна значению функции в середине отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$ , т.е.  $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$  (рис. 4.4).

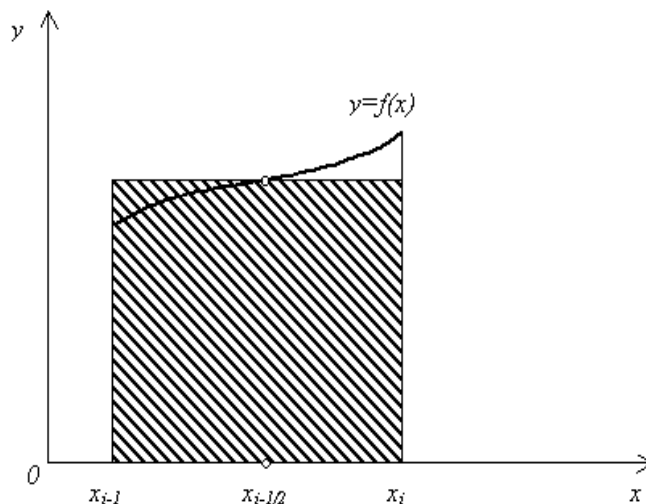


Рис. 4.5

Тогда получим *квадратурную формулу средних прямоугольников*:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_{\text{пр}} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \quad (4.3)$$

Формулу (4.3) называют также *формулой средних прямоугольников*. Иногда используют формулы

$$I \approx I_{\text{пр}}^n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad (4.4)$$

$$I \approx I_{\text{пр}}^n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (4.5)$$

которые называют соответственно *квадратурными формулами левых и правых прямоугольников*.

Геометрические иллюстрации этих формул приведены на рис. 4.5 и 4.6.

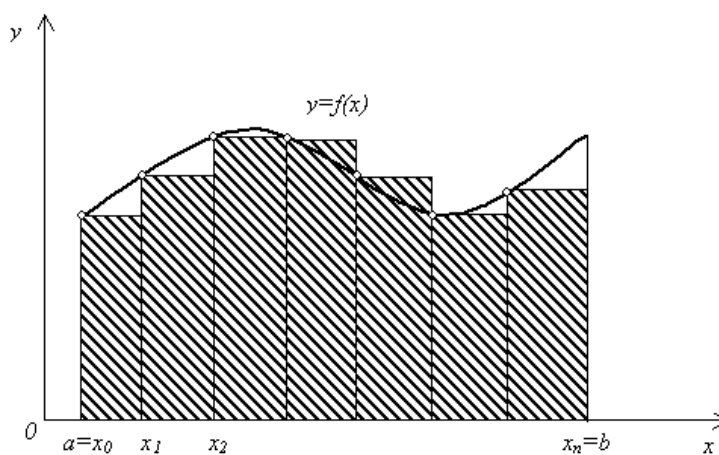


Рис. 4.5

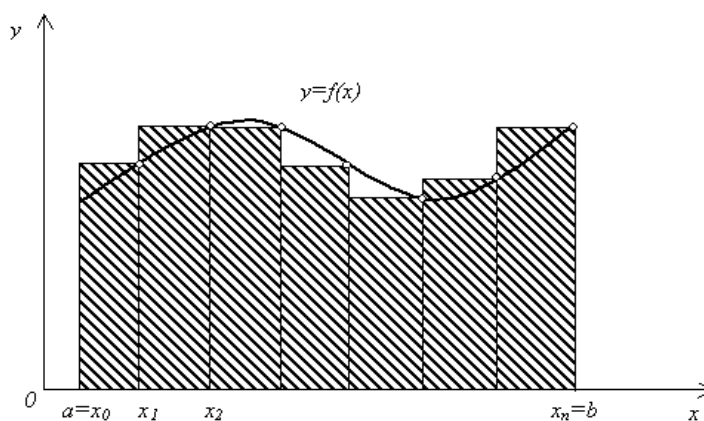


Рис. 4.6

**Оценка погрешности.** Для оценки погрешности формулы прямоугольников воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 4.1.** Пусть функция  $f$  дважды непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ . Тогда для формулы прямоугольников справедлива следующая оценка погрешности:

$$|I - I_{\text{пр}}| \leq \frac{M_2(b-a)}{24} h^2, \quad (4.6)$$

где  $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$

**Пример 4.1.**

Вычислим значение интеграла  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  по формуле средних прямоугольников (4.3) с шагом  $h = 0.1$ .

**Решение.** Составим таблицу значений функции  $e^{-x^2}$

$x$	$e^{-x^2}$	$x$	$e^{-x^2}$
0.00	1.0000000	0.55	0.7389685
0.05	0.9975031	0.60	0.6976763
0.10	0.9900498	0.65	0.6554063
0.15	0.9777512	0.70	0.6126264
0.20	0.9607894	0.75	0.5697828
0.25	0.9394131	0.80	0.5272924
0.30	0.9139312	0.85	0.4855369
0.35	0.8847059	0.90	0.4448581
0.40	0.8521438	0.95	0.4055545
0.45	0.8166865	1.00	0.3678794
0.50	0.7788008		

Производя вычисления по формуле (4.3), получим:

$$I_{\text{пр}} = 0.74713088.$$

Оценим погрешность полученного значения. Имеем:

$f''(x) = (e^{-x^2})'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ . Нетрудно убедиться, что  $|f''(x)| \leq M_2 = 2$ . Поэтому по формуле (4.4) получим

$$|I - I_{\text{пр}}| \leq \frac{2 \cdot 1}{24} (0.1)^2 \approx 0.84 \cdot 10^{-3}.$$

**Пример 4.2.** Вычислить определенный интеграл  $\int_1^2 \sqrt{x} dx$  методом прямоугольников, разделив интервал интеграла на  $n = 10$  частей и оценить погрешность, используя для автоматизации расчетов табличный процессор.

**Решение.** Оформим шапку листа среды Excel, для этого введем исходные данные: отрезок интегрирования (**B2:B3**); количество отрезков разбиения (**B4**); формулу расчета шага интегрирования  $h$  (**H2**) ( $= (B3 - B2)/B4$ ) (см. рис. 4.7).

Заполним блок **C6:L7**, используя формулы Excel. Строку **C6:L6** заполним данными от 0 до  $n$  ( $n = 10$ ), в ячейку **C7** вставим формулу ( $= B7 + \$H\$2$ ) и растянем ее до ячейки **L7**, чтобы получить значения

$x_i (i = \overline{0, n})$ . Введем подынтегральную функцию  $y(x) = \sqrt{x}$  в ячейку **B8** (= КОРЕНЬ(B7)) и выполним заполнение блока **B8: L8**.

Воспользуемся первой формулой прямоугольника и найдем значение интеграла (**E11** (= Н2 \* (СУММ(B8: K8)))). В ячейках **A16: A17** вычисляем значения производной на отрезке  $[a, b]$  (=  $1/(2 * \text{КОРЕНЬ}(B2))$  и  $= 1/(2 * \text{КОРЕНЬ}(B2))$ ), а в ячейке **E15** находим максимальное значение по модулю (= **МАКС**(ABS(A16); ABS(A17))). Предельную абсолютную погрешность  $R_{10}$  укажем в ячейке **E17** (= (Н2 \* (B3 – B2) \* E15)/2).

Таким образом,

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx 1,198 \pm 0,025 \quad (\text{ячейка A19}).$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1	<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ</b>												
2	$\int_1^2 \sqrt{x} dx$	$a = 1$					$h = \frac{b-a}{n} = 0,1$						
3		$b = 2$											
4		$n = 10$											
5													
6		$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7		$x_i$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
8		$y_i$	1	1,049	1,095	1,14	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378	1,414
9													
10		$\int_1^2 \sqrt{x} dx = h \cdot (y_0 + \dots + y_{n-1}) = 1,198$											
11													
12													
13													
14		$M_1 = \max f'(x) $											
15		$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$			$M_1 = 1/2$								
16		$f'(1) = 1/2$			$R_n \leq \frac{h}{2}(b-a)M_1$								
17		$f'(2) = 1/3$			$R_{10} = 0,025$								
18													
19		$\int_1^2 \sqrt{x} dx = 1,198 \pm 0,025$											
20													
21													

Рис. 4.7

### 4.3. Метод трапеций

Выведем формулу трапеций так же, как и формулу прямоугольников, из геометрических соображений. Заменяем график

функции  $y = f(x)$  (рис. 4.1) ломаной линией (рис. 4.7), полученной следующим образом. Из точек  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  проведем ординаты до пересечения с кривой  $y = f(x)$ . Концы ординат соединим прямолинейными отрезками.

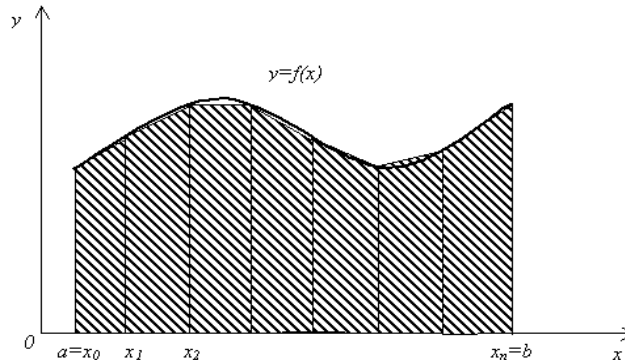


Рис. 4.7

Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно можно считать равной площади фигуры, составленной из трапеций. Так как площадь трапеции, построенной на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  длины  $h = \frac{b-a}{n}$ , равна  $h \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$ , то, пользуясь этой формулой для  $i = 0, 2, \dots, n - 1$ , получим *квадратурную формулу трапеций*:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{\text{тр}} = h \left( \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) = \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (4.7)$$

**Оценка погрешности.** Для оценки погрешности формулы трапеций воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 5.2.** Пусть функция  $f$  дважды непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ . Тогда для формулы трапеций справедлива следующая оценка погрешности:

$$|I - I_{\text{тр}}| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2, \quad (5.8)$$

где  $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$ .

**Пример 4.3.** Вычислим значение интеграла  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  по формуле трапеций (4.7) и сравним полученный результат с результатом примера 4.1.

**Решение.** Используя таблицу значений функции  $e^{-x^2}$  из примера 4.1 и производя вычисления по формуле трапеций (4.7), получим:

$$I_{\text{тр}} = 0.74621079.$$

Оценим погрешность полученного значения. В примере (4.1) получили оценку:  $|f''(x)| \leq M_2 = 2$ . Поэтому по формуле (4.8)

$$|I - I_{\text{тр}}| \leq \frac{2 \cdot 1}{12} (0.1)^2 \approx 1.7 \cdot 10^{-3}.$$

Сравнивая результаты примеров 4.1 и 4.3, видим, что метод средних прямоугольников имеет меньшую погрешность, т.е. он более точный.

**Пример 4.4.** Вычислить определенный интеграл  $\int_1^2 \sqrt{x} dx$  методом трапеций, принимая  $n = 10$ , и оценить погрешность.

**Решение.** Воспользуемся теми же значениями функции из первого примера.

Воспользуемся формулой трапеции и найдем значение интеграла в ячейке

$$\mathbf{J32} \quad \left( = \mathbf{H23} * \left( \left( (\mathbf{КОРЕНЬ}(\mathbf{B23})) + (\mathbf{КОРЕНЬ}(\mathbf{B24})) \right) / 2 + \mathbf{СУММ}(\mathbf{C29:K29}) \right) \right) \text{ (см. рис. 4.8).}$$

Вычислим значения производной второго порядка от подынтегральной функции  $y(x) = \sqrt{x}$  на отрезке  $[a, b]$  (ячейки **B37** ( $= -1/(4 * \mathbf{КОРЕНЬ}(\mathbf{B23}^3))$ ), **B38** ( $= -1/(4 * \mathbf{КОРЕНЬ}(\mathbf{B24}^3))$ )) и отберем максимальное значение по модулю (**F36** ( $= \mathbf{МАКС}(\mathbf{ABS}(\mathbf{B37}); \mathbf{ABS}(\mathbf{B38}))$ )).

Оценим погрешность в **G37** ( $= \mathbf{H23}^2/12 * (\mathbf{B24} - \mathbf{B23}) * \mathbf{G36}$ ). Получаем, что

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx 1,219 \pm 0,0002 \text{ (см. ячейку } \mathbf{A39})$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
23	$\int_1^2 \sqrt{x} dx$	$a = 1$					$h = \frac{b-a}{n} = 0,1$						
24		$b = 2$											
25		$n = 10$											
26													
27		$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
28		$x_i$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
29		$y_i$	1	1,049	1,095	1,14	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378	1,414
30													
31		$\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx h \cdot \left( \frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right) \pm R_n$											
32										$\approx$	1,219	$\pm R_n$	
33													
34													
35		$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$						$R_n \leq \frac{h^2}{12}(b-a) \cdot M_2$					
36		$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$						$M_2 = 1/4$					
37		$f''(1) = -1/4$						$R_{10} = 0,0002$					
38		$f''(2) = -0,09$											
39		$\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx 1,219 \pm 0,0002$											

Рис. 4.8

#### 4.4. Метод парабол

Рассмотрим метод парабол или как его еще называют метод Симпсона.

Заменим график функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 2, \dots, n - 1$ , параболой, проведенной через точки  $(x_i, f(x_i))$ ,  $(x'_i, f(x'_i))$ ,  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ , где  $x'_i$  - середина отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$ . Эта парабола есть интерполяционный многочлен второй степени  $L_2(x)$  с узлами  $x_i, x'_i, x_{i+1}$ . Нетрудно убедиться, что уравнение этой параболы имеет вид:

$$y = L_2(x) = f(x'_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x'_i) + \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x'_i) + f(x_i)}{h^2/2}(x - x'_i)^2, \quad (4.9)$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Проинтегрировав функцию (4.9) на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ , получим

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = \frac{h}{6} (f(x_i) + 4f(x'_i) + f(x_{i+1})). \quad (4.10)$$

Суммируя выражение (4.10) по  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , получим *квадратурную формулу Симпсона (или формулу парабол)*:



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_C = \frac{h}{6}(f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x'_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)). \quad (4.11)$$

**Оценка погрешности.** Для оценки погрешности формулы Симпсона воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 4.2.** Пусть функция  $f$  имеет на отрезке  $[a, b]$  непрерывную производную четвертого порядка  $f^{(4)}(x)$ . Тогда для формулы Симпсона (4.9) справедлива следующая оценка погрешности:

$$|I - I_C| \leq \frac{M_4(b-a)}{2880} h^4, \quad (4.12)$$

где  $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$ .

**Замечание.** Если число элементарных отрезков, на которые делится отрезок  $[a, b]$ , чётно, т.е.  $n = 2m$ , то параболы можно проводить через узлы с целыми индексами, и вместо элементарного отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$  длины  $h$  рассматривать отрезок  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$  длины  $2h$ . Тогда формула Симпсона примет вид:

$$I \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + f(x_{2m}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})), \quad (4.13)$$

а вместо оценки (4.10) будет справедлива следующая оценка погрешности:

$$|I - I_C| \leq \frac{M_4(b-a)}{180} h^4, \quad (4.14)$$

**Пример 4.5.** Вычислим значение интеграла  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  по формуле

Симпсона (4.11) и сравним полученный результат с результатами примеров 4.1 и 4.2.

**Решение.** Используя таблицу значений функции  $e^{-x^2}$  из примера 4.1 и производя вычисления по формуле Симпсона (4.11), получим  $I_C = 0.74682418$ .

Оценим погрешность полученного значения. Вычислим четвертую производную  $f^{(4)}(x)$ .

$$f^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}, \quad |f^{(4)}(x)| \leq 12.$$

Поэтому

$$|I - I_C| \leq \frac{12 \cdot 1}{2880} (0.1)^4 \approx 0.42 \cdot 10^{-6}.$$

Сравнивая результаты примеров 4.1 – 4.3, видим, что метод парабол (Симпсона) имеет меньшую погрешность, чем метод средних прямоугольников и метод трапеций.

**Пример 4.6.** Вычислить определенный интеграл  $I = \int_0^1 (3x^2 + 1)dx$ , используя формулу Симпсона (4.13). Вычисления провести с использованием табличного процессора.

Оформим шапку лабораторной работы, введем исходные данные: отрезок интегрирования (**E4** и **E6**); количество отрезков разбиения (**E8**); формулу расчета шага интегрирования  $h$  (**I4**) ( $= (E6 - E4)/E8$ ) (см. рис. 4.9).

Заполним ячейку **B11** ( $= E4$ ) и блок **C11:L11** (в ячейке **C11** вставим формулу  $= B11 + $I$4$  и растянем до **L11**). Ввести подынтегральную функцию  $y(x) = 3x^2 + 1$  в ячейку **B12** ( $= (3 * B11^2 + 1)$ ) и выполним заполнение блока **B12:L12**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	<b>ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ</b>											
2	<i>По формуле Симпсона</i>											
3												
4				$a = 0$				$h = \frac{b-a}{n} = 0,1$				
5												
6		$\int_0^1 (3x^2 + 1)dx$		$b = 1$								
7												
8				$n = 10$								
9												
10	$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
12	$y_i$	1	1,03	1,12	1,27	1,48	1,75	2,08	2,47	2,92	3,43	4
13												
14												
15												
16												
17												

Рис.4.9

Для получения приближенного значения интеграла введем команду в ячейке **L16** ( $= (I4/3) * (B12 + L12 + 2 * (D12 + F12 + H12 + J12) + 4 * (C12 + E12 + G12 + I12 + K12))$ ). Ответ:

$$I = \int_0^1 (3x^2 + 1)dx = 2.$$

## Тема 5. Приближенное решение дифференциальных уравнений

### 5.1. Постановка задачи Коши

Известно, что *обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка* имеет вид:

$$y'(t) = f(t, y(t)). \quad (5.1)$$

Решением уравнения (5.1) является дифференцируемая функция  $y(t)$ , которая при подстановке в уравнение (5.1) обращает его в

тождество. На рис. 5.1 приведен график решения дифференциального уравнения (5.1). График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

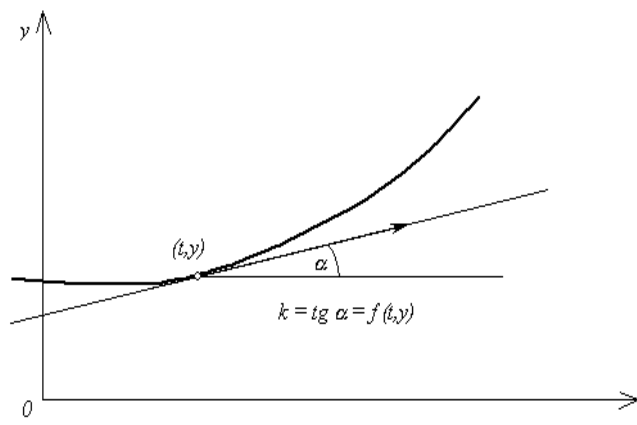


Рис. 5.1

Производную  $y'(t)$  в каждой точке  $(t, y)$  можно геометрически интерпретировать как тангенс угла  $\alpha$  наклона касательной к графику решения, проходящего через эту точку, т.е.:  $k = \operatorname{tg} \alpha = f(t, y)$ .

Уравнение (5.1) определяет целое семейство решений. Чтобы выделить одно решение, задают *начальное условие*:

$$y(t_0) = y_0, \quad (5.2)$$

где  $t_0$  – некоторое заданное значение аргумента  $t$ , а  $y_0$  – *начальное значение функции*.

*Задача Коши* заключается в отыскании функции  $y = y(t)$ , удовлетворяющей уравнению (5.1) и начальному условию (5.2). Обычно определяют решение задачи Коши на отрезке, расположенном справа от начального значения  $t_0$ , т.е. для  $t \in [t_0, T]$ .

Разрешимость задачи Коши определяет следующая теорема.

**Теорема 5.1.** Пусть функция  $f(t, y)$  определена и непрерывна при  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $-\infty < y < \infty$  и удовлетворяет условию Липшица  $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ , где  $L$  некоторая постоянная, а  $y_1, y_2$  – произвольные значения. Тогда для каждого начального значения  $y_0$  существует единственное решение  $y(t)$  задачи Коши для  $t \in [t_0, T]$ .

Даже для простых дифференциальных уравнений первого порядка не всегда удастся получить аналитическое решение. Поэтому большое значение имеют численные методы решения. Численные методы позволяют определить приближенные значения искомого решения  $y(t)$  на некоторой выбранной сетке значений аргумента  $t_i$ , ( $i = 0, 1, \dots$ ). Точки  $t_i$  называются *узлами сетки*, а величина  $h_i = t_{i+1} - t_i$  – *шагом сетки*. Часто рассматривают *равномерные сетки*, для

которых шаг  $h_i$  постоянен,  $h_i = h = \frac{T-t_0}{n}$ . При этом решение получается в виде таблицы, в которой каждому узлу сетки  $t_i$  соответствуют приближенные значения функции  $y(t)$  в узлах сетки  $y_i \approx y(t_i)$ .

Численные методы не позволяют найти решение в общем виде, зато они применимы к широкому классу дифференциальных уравнений.

**Сходимость численных методов решения задачи Коши.** Пусть  $y(t)$  – решение задачи Коши. Назовем *глобальной погрешностью* (или просто *погрешностью*) численного метода функцию  $\varepsilon_i = y(t_i) - y_i$ , заданную в узлах сетки  $t_i$ . В качестве абсолютной погрешности примем величину  $R = \max_{0 \leq i \leq n} |y(t_i) - y_i|$

Численный метод решения задачи Коши называется *сходящимся*, если для него  $R \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Говорят, что метод имеет  $p$ -ый порядок точности, если для погрешности справедлива оценка  $R \leq Ch^p$ ,  $p > 0$ ,  $C$  – константа,  $C \neq 0$ .

## 5.2. Метод Эйлера

Простейшим методом решения задачи Коши является метод Эйлера.

Будем решать задачу Коши  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(t_0) = y_0$  на отрезке  $[t_0, T]$ . Выберем шаг  $h = \frac{T-t_0}{n}$ , и построим сетку с системой узлов  $t_i = t_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

В методе Эйлера вычисляются приближенные значения функции  $y(t)$  в узлах сетки  $y_i \approx y(t_i)$ .

Заменяв производную  $y'(t)$  конечными разностями на отрезках  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , получим приближенное равенство  $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , которое можно переписать так:

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.3)$$

Формулы (5.3) и начальное условие (5.2) являются *расчетными формулами метода Эйлера*.

Геометрическая интерпретация одного шага метода Эйлера заключается в том, что решение на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  заменяется касательной  $y = y'(t_i)(t - t_i)$ , проведенной в точке  $(t_i, y(t_i))$  к интегральной кривой, проходящей через эту точку. После

выполнения  $n$  шагов неизвестная интегральная кривая заменяется ломаной линией (ломаной Эйлера).

**Оценка погрешности.** Для оценки погрешности метода Эйлера воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 4.2.** Пусть функция  $f$  удовлетворяет условиям:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K, \quad \left| \frac{df}{dt} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right| \leq L. \quad (5.4)$$

Тогда для метода Эйлера справедлива следующая оценка погрешности:

$$R = \max_{0 \leq i \leq n} |y(t_i) - y_i| \leq \frac{l^2 L}{2n} e^{KL} = \frac{l^2 h}{2} e^{KL},$$

где  $l$  – длина отрезка  $[t_0, T]$ . Мы видим, что метод Эйлера имеет первый порядок точности.

**Оценка погрешности метода Эйлера** часто бывает затруднительна, так как требует вычисления производных функции  $f(t, y(t))$ . Грубую оценку погрешности дает *правило Рунге (правило двойного пересчета)*, которое используется для различных одношаговых методов, имеющих  $p$ -ый порядок точности. Правило Рунге заключается в следующем. Пусть  $y_i^{h/2}$  – приближения, полученные с шагом  $\frac{h}{2}$ , а  $y_i^h$  – приближения, полученные с шагом  $h$ .

Тогда справедливо приближенное равенство:

$$|y_i^{h/2} - y(t_i)| \approx \frac{1}{2^p - 1} |y_i^{h/2} - y_i^h|. \quad (5.5)$$

Таким образом, чтобы оценить погрешность одношагового метода с шагом  $\frac{h}{2}$ , нужно найти то же решение с шагом  $h$  и вычислить величину, стоящую справа в формуле (5.5), т. е.

$$R \approx \frac{1}{2^p - 1} |y_i^{h/2} - y_i^h|. \quad (5.6)$$

Так как метод Эйлера имеет первый порядок точности, т. е.  $p = 1$ , то приближенное равенство (5.6) примет вид

$$R \approx |y_i^{h/2} - y_i^h| \quad (5.7)$$

Используя правило Рунге, можно построить процедуру приближенного вычисления решения задачи Коши с заданной точностью  $\varepsilon$ . Нужно, начав вычисления с некоторого значения шага  $h$ , последовательно уменьшать это значение в два раза, каждый раз вычисляя приближенное значение  $y_i^{h/2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Вычисления прекращаются тогда, когда будет выполнено условие:

$$R \approx \frac{1}{2^p - 1} |y_i^{h/2} - y_i^h| < \varepsilon. \quad (5.8)$$

Для метода Эйлера условие (4.8) примет вид

$$R \approx |y_i^{h/2} - y_i^h| < \varepsilon \quad (5.9)$$

Приближенным решением будут значения  $y_i^{h/2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Пример 5.1.** Найдем решение на отрезке  $[0, 1]$  следующей задачи Коши:

$$y'(t) = y - \frac{2t}{y}, y(0) = 1. \quad (5.10)$$

**Решение.** Возьмем шаг  $h = 0.2$ . Тогда  $n = \frac{1-0}{0.2} = 5$ .

В соответствии с (5.3) получим расчетную формулу метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + 0.2 \left( y_i - \frac{2t_i}{y_i} \right), y_0 = 1, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Решение представим в виде таблицы:

Таблица 5.1

$i$	0	1	2	3	4	5
$t_i$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$y_i$	1.0000	1.2000	1.3733	1.5294	1.6786	1.8237

Уравнение примера 5.1 есть уравнение Бернулли. Его решение можно найти в явном виде

$$y = \sqrt{2t+1}. \quad (5.11)$$

Для сравнения точного и приближенного решений представим точное решение последнего уравнения в виде таблицы:

Таблица 5.2

$i$	0	1	2	3	4	5
$t$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$y$ $(t_i)$	1.0000	1.1832	1.3416	1.4832	1.6124	1.7320

Из таблицы видно, что погрешность составляет  $R = \max_{0 \leq k \leq 5} |y(t_i) - y_i| = 0.0917$ .

**Пример 5.2.** Используя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения  $y' = 1 + xy^2$  при заданном начальном условии  $y(0) = 0$  на отрезке  $[0, 1]$ . Обеспечить точность решения  $\varepsilon = 0,001$ .

**Решение.** Оформим шапку вычислительной таблицы, введем исходные данные: отрезок интегрирования (**A5:B5**); начальное значение  $y_0$  (**C5**); количество отрезков разбиения (**F4**); формулу расчета шага интегрирования  $h$  (**I3**) (см. рис. 5.2).



Рис. 5.2

В строке (**B7:L7**) указываются номера итераций; в блоке (**B8:L8**) рассчитываются точки разбиения отрезка интегрирования (в ячейку **B8** вставляем формулу  $=A5+B7*I3$  и растягиваем до **L8**); в ячейках (**B9:L9**) реализуется формула метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1$$

(**B9=C5**; в ячейку **C9** вставляем формулу  $=B9+I3*(1+B8*B9^2)$  и растягиваем до **L9**). Ответ: 1,247 (ячейка **L9**).

Изобразить полученные значения приближенного решения на графике, используя точечный тип диаграммы (см. рис. 5.2). Это и есть ломаная, дающая приближенный вид интегральной кривой графика

точного решения дифференциального уравнения при заданном начальном условии.

### 5.3. Модифицированные методы Эйлера

**Первый модифицированный метод Эйлера.** Суть этого метода состоит в следующем. Сначала вычисляются вспомогательные значения искомой функции  $y_{i+\frac{1}{2}}$  в точках  $t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{h}{2}$  с помощью формулы:

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_i = y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i).$$

Затем находится значение правой части уравнения (5.1) в средней точке

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

и затем полагается

$$y_{i+1} = y_i + h f_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.12)$$

Формулы (5.12) являются *расчетными формулами первого модифицированного метода Эйлера.*

Первый модифицированный метод Эйлера является одношаговым методом со вторым порядком точности

**Второй модифицированный метод Эйлера – Коши.** Суть этого метода состоит в следующем. Сначала вычисляются вспомогательные значения

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i). \quad (5.13)$$

Затем приближения искомого решения находятся по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})], \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.14)$$

Формулы (5.14) являются *расчетными формулами второго модифицированного метода Эйлера – Коши.*

Второй модифицированный метод Эйлера – Коши, так же, как и первый, является одношаговым методом со вторым порядком точности.

**Оценка погрешности.** Приближенная оценка погрешности модифицированных методов Эйлера осуществляется как и для простого метода Эйлера с использованием правила Рунге, так как оба модифицированных метода Эйлера имеют второй порядок точности, т. е.  $p = 2$ , то оценка погрешности (5.6) примет вид

$$R \approx \frac{1}{3} |y_i^{h/2} - y_i^h|. \quad (5.15)$$



Используя правило Рунге, можно построить процедуру приближенного вычисления решения задачи Коши модифицированными методами Эйлера с заданной точностью  $\varepsilon$ . Нужно, начав вычисления с некоторого значения шага  $h$ , последовательно уменьшать это значение в два раза, каждый раз вычисляя приближенное значение  $y_i^{h/2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Вычисления прекращаются тогда, когда будет выполнено условие:

$$R \approx \frac{1}{3} |y_i^{h/2} - y_i^h| < \varepsilon. \quad (5.16)$$

Приближенным решением будут значения  $y_i^{h/2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Пример 5.3.** Применим первый модифицированный метод Эйлера для решения задачи Коши

$$y'(t) = y - \frac{2t}{y}, \quad y(0) = 1,$$

рассмотренной ранее в примере 5.1.

**Решение.** Возьмем шаг  $h = 0.2$ . Тогда  $n = \frac{1-0}{0.2} = 5$ . В соответствии с (5.3) получим расчетную формулу первого модифицированного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h f_{i+\frac{1}{2}} = y_i + 0.2 f_{i+\frac{1}{2}},$$

где

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) = y_{i+\frac{1}{2}} - \frac{2t_{i+\frac{1}{2}}}{y_{i+\frac{1}{2}}},$$

$$t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{h}{2} = t_i + 0.1,$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) = y_i + 0.1 \left( y_i - \frac{2t_i}{y_i} \right),$$

$t_0 = 0, y_0 = 1, i = 0, 1, \dots, 4$ .

Решение представим в виде таблицы 5.3:

Таблица 5.3

$t_i$	$y_i$	$\frac{h}{2} f(t_i, y_i)$	$t_{i+\frac{1}{2}}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$h f_{i+\frac{1}{2}}$
0	1	0.1	0.1	1.1	0.1836
0.2	1.1836	0.0850	0.3	1.2682	0.1590
0.4	1.3426	0.0747	0.5	1.4173	0.1424
0.6	1.4850	0.0677	0.7	1.5527	0.1302
0.8	1.6152	0.0625	0.9	1.6777	0.1210
1.0	1.7362				

Третий столбец таблицы 5.3 содержит приближенное решение  $y_i, i = 0, 1, \dots, 5$ .

Сравним полученное приближенное решение с точным решением (5.11), представленном в таблице 5.2. Видим, что погрешность составляет  $R = \max_{0 \leq k \leq 5} |y(t_k) - y_k| = 0.0042$ .

**Пример 5.4.** Применим второй модифицированный метод Эйлера – Коши для решения задачи Коши

$$y'(t) = y - \frac{2t}{y}, y(0) = 1,$$

рассмотренной ранее в примерах 5.1 и 5.2.

**Решение.** Так же, как и ранее, зададим шаг  $h = 0.2$ . Тогда  $n = \frac{1-0}{0.2} = 5$ .

В соответствии с (5.14) получим расчетную формулу метода Эйлера – Коши:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] = y_i + 0.1 [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})],$$

где

$$f(t_i, y_i) = y_i - \frac{2t_i}{y_i}$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i) = y_i + 0.1 \left( y_i - \frac{2t_i}{y_i} \right)$$

$$t_0 = 0, y_0 = 1, i = 0, 1, \dots, 4.$$

Решение представим в виде таблицы 5.4:

Таблица 5.4

$t_i$	$y_i$	$\frac{h}{2} f(t_i, y_i)$	$t_{i+1}$	$\tilde{y}_{i+1}$	$f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$
0	1	0.1	0.2	1.2	0.867
0.2	1.1867	0.0850	0.4	1.3566	0.767
0.4	1.3484	0.0755	0.6	1.4993	0.699
0.6	1.4938	0.0690	0.8	1.6180	0.651
0.8	1.6272	0.0645	1.0	1.7569	0.618
1.0	1.7542				

Таблица 5.4 заполняется последовательно по строкам, сначала первая строка, затем вторая и т. д. Третий столбец таблицы 5.4 содержит приближенное решение  $y_i, i = 0, 1, \dots, 5$ .

Сравним полученное приближенное решение с точным решением (6.11), представленном в таблице 5.2. Видим, что погрешность составляет  $R = \max_{0 \leq k \leq 5} |y(t_k) - y_k| = 0.0222$ .

**Пример 5.5.** Используя второй модифицированный метод Эйлера-Коши (исправленный метод Эйлера), найти решение дифференциального уравнения  $y' = 1 + xy^2$  при заданном начальном условии  $y(0) = 0$  на отрезке  $[0, 1]$ . Обеспечить точность решения  $\varepsilon = 0,001$ .

**Решение.** Оформим шапку вычислительной таблицы и введем исходные данные: отрезок интегрирования (**A5:B5**); начальное значение  $y_0$  (**C5**); количество отрезков разбиения (**F4**); формулу расчета шага интегрирования  $h$  (**I3**) (см. рис. 4).

В строке (**B7:L7**) указываются номера итераций; в блоке (**B8:L8**) рассчитываются точки разбиения отрезка интегрирования (в ячейку **B8** вставляем формулу  $=A5+B7*I3$  и растягиваем до **L8**); в ячейках (**B9:L9**) реализуется формула исправленного метода Эйлера (**B9**  $=C5$ ; в ячейку **C9** вставляем формулу  $=B9+I3*(B10+B11)/2$  и растягиваем до **L9**).

Для удобства вычислений данная формула разбивается на несколько составляющих, значения которых вычисляются в строках **A10:L11**.

В ячейке **B10** используем формулу  $=1 + B8 * B9^2$ , растягиваем до **L10**, а в **B11**  $=1 + (B8 + I3) * (B9 + (I3 * B10))$  до **L11**.

Результаты вычислительных процедур представлены в таблице рис. 5.3. Ответ: 1,377 (ячейка **L9**).



Рис.5.3

**Замечание.** Геометрический смысл исправленного метода Эйлера заключается в следующем (см. рис. 5.4). Строится касательная (1) к кривой  $y = y(x)$  в точке  $x_i$  и касательная (2) в точке  $x_{i+1}$ . Находится средняя линия  $((1) + (2))/2$ . Полученная линия переносится параллельно самой себе до совмещения с точкой  $(x_i, y_i)$ . Точка касательной  $y_{i+1}$  и будет являться следующим приближением. Исправленный метод Эйлера более точен, нежели метод Эйлера.

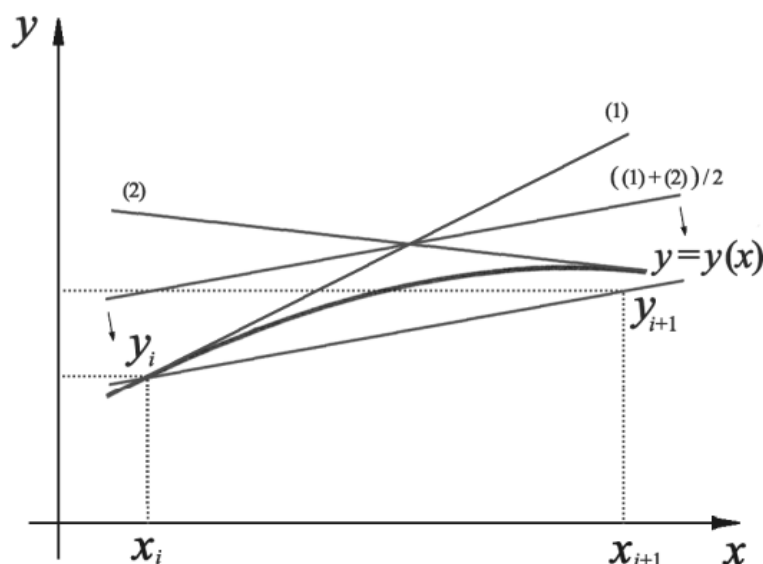


Рис. 5.4

## 5.4. Метод Рунге–Кутта

Метод Рунге–Кутта является одним из наиболее употребительных методов высокой точности. Метод Эйлера можно рассматривать как простейший вариант метода Рунге – Кутта.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

с начальным условием  $y(t_0) = y_0$ .

Как и в методе Эйлера, выберем шаг  $h = \frac{T - t_0}{n}$  и построим сетку с системой узлов

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Обозначим через  $y_i$  приближенное значение искомого решения в точке  $t_i$ .

Приведем расчетные формулы метода Рунге – Кутта четвертого порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4),$$

$$\begin{aligned}
k_i^1 &= f(t_i, y_i), \\
k_i^2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^1\right), \quad (6.17) \\
k_i^3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^2\right), \\
k_i^4 &= f(t_i + h, y_i + hk_i^3), \\
i &= 0, 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

**Оценка погрешности.** Оценка погрешности метода Рунге – Кутта затруднительна. Грубую оценку погрешности дает правило Рунге. Так как метод Рунге – Кутта имеет четвертый порядок точности, т. е.  $p = 4$ , то оценка погрешности (5.6) примет вид

$$R \approx \frac{1}{15} |y_i^{h/2} - y_i^h|. \quad (5.18)$$

Используя правило Рунге, можно построить процедуру приближенного вычисления решения задачи Коши методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности с заданной точностью  $\varepsilon$ . Нужно, начав вычисления с некоторого значения шага  $h$ , последовательно уменьшать это значение в два раза, каждый раз вычисляя приближенное значение  $y_i^{h/2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Вычисления прекращаются тогда, когда будет выполнено условие:

$$R \approx \frac{1}{15} |y_i^{h/2} - y_i^h| < \varepsilon. \quad (5.19)$$

Приближенным решением будут значения  $y_i^{h/2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Пример 5.6.** Методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности найдем решение на отрезке  $[0, 1]$  следующей задачи Коши.

$$y'(t) = 2ty, y(0) = 1. \quad (5.20)$$

**Решение.** Возьмем шаг  $h = 0.1$ . Тогда  $n = \frac{1-0}{0.1} = 10$ .

В соответствии с (5.17) расчетные формулы примут вид:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4), \\
k_i^1 &= 2t_i y_i, \\
k_i^2 &= 2\left(t_i + \frac{h}{2}\right)(y_i + \frac{h}{2}k_i^1), \\
k_i^3 &= 2\left(t_i + \frac{h}{2}\right)(y_i + \frac{h}{2}k_i^2), \\
k_i^4 &= 2(t_i + h)(y_i + hk_i^3), \\
i &= 0, 1, \dots, 10.
\end{aligned} \quad (5.21)$$

Задача (5.20) имеет точное решение:  $y(t) = e^{t^2}$ , поэтому погрешность определяется как абсолютная величина разности между точными и приближенными значениями  $\varepsilon_i = |y(t_i) - y_i|$ .

Найденные по формулам (5.21) приближенные значения решения  $y_i$  и их погрешности  $\varepsilon_i$  представлены в таблице 5.5:

Таблица 5.5

$t_i$	$y_i$	$\varepsilon_i$	$t_i$	$y_i$	$\varepsilon_i$
0.1	1.01005	$10^{-9}$	0.6	1.43333	$5 \cdot 10^{-7}$
0.2	1.04081	$4 \cdot 10^{-9}$	0.7	1.63232	$2 \cdot 10^{-6}$
0.3	1.09417	$2 \cdot 10^{-8}$	0.8	1.89648	$3 \cdot 10^{-6}$
0.4	1.17351	$6 \cdot 10^{-8}$	0.9	2.24790	$6 \cdot 10^{-6}$
0.5	1.28403	$2 \cdot 10^{-7}$	1.0	2.71827	$2 \cdot 10^{-5}$

**Пример 5.7.** Используя метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности, найти решение дифференциального уравнения  $y' = 1 + xy^2$  при заданном начальном условии  $y(0) = 0$  на отрезке  $[0, 1]$ . Обеспечить точность решения  $\varepsilon = 0,001$ .

**Решение.** Оформим шапку вычислительного листа, введем исходные данные: отрезок интегрирования (**A5:B5**); начальное значение  $y_0$  (**C5**); количество отрезков разбиения (**F4**); формулу расчета шага интегрирования  $h$  (**I3**) (см. рис. 5.5).



Рис.5.5

В строке (**B7:L7**) указываются номера итераций; в блоке (**B8:L8**) рассчитываются точки разбиения отрезка интегрирования (в ячейку **B8** вставляем формулу  $=A\$5+B\$7*\$I\$3$  и растягиваем до **L8**); в ячейках (**B9:L9**) реализуется формула исправленного метода Рунге-Кутты. Значения коэффициентов  $k_1, k_2, k_3, k_4$  вычисляются в строках **A10:L13**.

Напомним, что  $y' = 1 + xy^2$ . Обратите внимание на то, что ссылки на значение шага интегрирования  $h$ , должны иметь абсолютную адресацию (**\$I\$3**).

Ответ: 1,350 (ячейка **L9**).

## Список литературы

1. Балабко, Л.В. Численные методы: учебное пособие : [16+] / Л.В. Балабко, А.В. Томилова; Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова. – Архангельск: Северный (Арктический) федеральный университет (САФУ), 2014. – 163 с.

2. Гильмутдинов, Р.Ф. Численные методы: учебное пособие / Р.Ф. Гильмутдинов, К.Р. Хабибуллина; Министерство образования и науки России, Казанский национальный исследовательский технологический университет. – Казань: Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2018. – 92 с.

3. Гладких О.Б., Прокуратова О.Н. Введение в численные методы: учебно-методическое пособие. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2008. – 140 с.

4. Зенков, А.В. Численные методы: учебное пособие / А.В. Зенков; науч. ред. В.В. Плещев; Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2016. – 127 с.

5. Корнеев, П. К. Численные методы: учебное пособие: [16+] / П.К. Корнеев, Е.О. Тарасенко, А.В. Гладков; Северо-Кавказский федеральный университет. – Ставрополь: Северо-Кавказский Федеральный университет (СКФУ), 2017. – Часть 1. – 145 с.

6. Крахоткина, Е.В. Численные методы в научных расчетах: учебное пособие / Е.В. Крахоткина; Северо-Кавказский федеральный университет. – Ставрополь: Северо-Кавказский Федеральный университет (СКФУ), 2015. – 162 с.

7. Мицель, А.А. Вычислительные методы: учебное пособие / А.А. Мицель; Томский Государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск: Эль Контент, 2013. – 197 с.

8. Основы численных методов линейной алгебры: учебное пособие: [16+] / Р.З. Даутов, М.М. Карчевский; науч. ред. М.Ф. Павлова; Казанский (Приволжский) федеральный университет. – Казань: Казанский федеральный университет (КФУ), 2018. – 136 с.

9. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATCAD: учебное пособие. 2-е. изд, испр. И доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 352 с.

10. Семенистый, В.В. Применение численных методов для построения разностных моделей: учебное пособие: [16+] / В.В. Семенистый, И.Э. Гамолина, В.В. Дурягина; Южный



федеральный университет. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Южный федеральный университет, 2021. – 119 с.

11. *Целых, А.Н.* Анализ устойчивости вычислительных схем: учебное пособие по курсу «Численные методы»: [16+] / А.Н. Целых, В.Васильев, Э.М. Котов. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Южный федеральный университет, 2018. – 147 с.

12. Численные методы в информационных системах: учебное пособие / Ю.Ю. Громов, О.Г. Иванова, М.А. Ивановский [и др.]; Тамбовский государственный технический университет. – Тамбов: Тамбовский государственный технический университет (ТГТУ), 2012. – 135 с.

13. Численные методы в уравнениях математической физики: учебное пособие: [16+] / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин [и др.]; Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2016. – 60 с.

Учебное издание

**Иголина Елена Викторовна,  
Гладких Ольга Борисовна,  
Прокуратова Оксана Николаевна**

## **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ИХ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ**

*Техническое исполнение – В.М. Гришин  
Книга печатается в авторской редакции*

Лицензия на издательскую деятельность  
ИД №06146. Дата выдачи 26.10.01  
Формат 60 x 84/16. Гарнитура Times. Печать трафаретная  
Печ.л 5,3 Уч.-изд.л.5,1  
Тираж 100 экз. (1-й завод 1 – 30 экз.). Заказ 100

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии  
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»  
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, 1