Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»

На правах рукописи

Агафонов Павел Александрович

МЕТОДИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ СОЦИОКУЛЬТУРНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В ЭЛЕКТРОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ ШКОЛЫ

5.8.2 – теория и методика обучения и воспитания
(математика, уровень общего образования)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Научный руководитель
доктор педагогических наук,
профессор Н.Г. Подаева

Елец – 2022

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В современной образовательной парадигме содержание учебного предмета, рассматриваемое как фактор интеллектуального развития учащихся, должно быть проекцией не столько нормативного научного знания, сколько основных закономерностей интеллектуального развития личности в процессе обучения, в том числе психических закономерностей формирования научных понятий у учащихся разного возраста. В этой связи именно сформированные понятийные психические структуры, обеспечивающие освоение способов понимания, применения научных понятий, ценностное признание, принятие, осмысление знаково-символических конструкций дисциплинарного знания школьниками, следует рассматривать как основной результат обучения геометрии.

Немаловажной задачей для учителя становится понимание общекультурных умений школьников, которые должны формироваться в ходе проведения с ними занятий по математике. Поэтому традиционный подход к пониманию сущности и структуры цикла математических дисциплин в средней школе не может рассматриваться сегодня как объективно оправданный, а в своем исследовании мы придерживаемся мнения о необходимости перехода к социокультурной проблематике данного процесса. Простая трансляция готового знания, актуальная несколько десятилетий назад, сегодня не позволяет соответствовать изменяющимся требованиям образовательных стандартов. Формирование саморазвивающейся личности ребенка возможно лишь в условиях выбора социокультурного подхода к данному вопросу. В рамках нашего исследования будет рассмотрен педагогический потенциал геометрии как одной из наиболее интересных наук, изучаемой школьниками в курсе общеобразовательной подготовки в средней школе. Данные занятия положительно влияют на формирование ценностно-смысловой сферы детей, их мотивации к учению и развитию как личности.

Принимая во внимание требования образовательных стандартов нового поколения, отметим, что результат обучения сегодня не рассматривается в качестве базового ориентира развития системы образования. Ученые и законодатели говорят о необходимости смещения акцентов на процессуальную составляющую, что делает необходимым разработку электронной образовательной среды (ЭОС). Указанное понятие рассматривается нами как совокупность средств обучения различного свойства – компьютеров, интерактивных модулей, программ, технологий и пр., которые помогут организовать для всех заинтересованных лиц полноценное дистанционное обучение. Необходимость внедрения ЭОС объясняется потребностью в инновационных системах обучения детей математике, а также формирования у них высокого интеллектуального уровня и способностей к самостоятельному дальнейшему обучению. В ходе интерактивных форм обучения с применением современных технологий школьники с большей успешностью осваивают навыки геометрических построений, эффективнее выполняют задания на доказательства и в целом легче справляются с освоением курса геометрии. Основным средством обучения по указанной технологии стала динамическая система GeoGebra. Она позволяет бороться с такими ограничивающими факторами в формировании ЗУНов школьников на уроках геометрии, как временные рамки урока, которые не позволяют полноценно и всесторонне рассматривать тему, а также ограниченность учащихся в аспекте степени развития у них воображения и способностей к мысленному эксперименту.

Поэтому актуальность темы исследования в первую очередь подтверждается необходимостью создания систем сопровождения при организации социокультурно-ориентированного образовательного процесса в рамках школьного курса геометрии. Основным средством реализации задач становится электронная образовательная среда учреждения. Таким образом, мы можем констатировать необходимость установления поэтапного внедрения современной системы, которая будет реализована следующим образом: при определении целей – от знаниевой к социально-личностной парадигме; при оценке деятельности школьников – от обучения к самообразованию.

Все сказанное актуализирует проблему разработки системы методического сопровождения обучения геометрии учащихся основной школы в электронной образовательной среде с позиций социокультурного подхода. Выбор подобной образовательной парадигмы обусловлен необходимостью рассмотрения не только ценностей как ориентиров учебно-воспитательного процесса, но и культуры в целом во всем ее многообразии. Сюда относятся такие ее составляющие, как традиции, религия и убеждения, мировоззрение, а также культурные микро-составляющие. Например, последний пункт включает в себя деятельность человека, в которой выделяются направление, цели и прочие элементы, позволяющие рассматривать ее как культурологический феномен. Так социализацию следует понимать как процесс присвоения человеком ценностей, стиля мышления, знаний и приемов математических действий, а также формирование категориально-понятийного аппарата.

В настоящем исследовании средством развития понятийного знания выступает учебная деятельность по овладению школьником обобщенным способом выполнения геометрических построений в ситуации учения-обучения с использованием ресурса системы динамической математики GeoGebra, идентифицируемой с электронной образовательной средой (ЭОС).

Степень разработанности темы исследования.

Роль понятийного мышления глубоко проработана в науке. Важнейшие свойства этой формы мыслительной деятельности исследовали Л.М. Веккер, Л.С. Выготский [21], П.Я. Гальперин [28], В.В. Давыдов [39], Е.Н. Кабанова-Меллер [53], Ж. Пиаже [84], [143], С.Л. Рубинштейн [92], М.А. Холодная [112], и др. Процесс усвоения школьниками математических понятий исследовался в работах Я.И. Груденова, В.А. Гусева [37], В.А. Далингера [40], Н.В. Метельского [74], А. Пуанкаре [145], Г.И. Саранцева [95], З.И. Слепкань [99], А.А. Устиловской [108], И.С. Якиманской [125] и др.

Проблеме внедрения автоматизации в образовательную среду посвящены работы Jari Kaivooja [136] , С.В. Циреля [151], Н. Зиберман [139].

Проблеме цифровизации обучения и трансформации роли преподавателя в образовании при условии полной цифровизации процесса обучения посвящены исследования [130], [153], [138]. [77], [63], [132], [135], [150], [129], [140], [135].

Вопросам использования в образовательном процессе цифровых сред посвящены исследования И. Н. Голицыной [32], [154].

Проведенный анализ исследований позволил представить классификацию автоматизированных цифровых технологий, которые применяются в образовательном процессе в различных странах, и выделить возможности для педагогов и учащихся, которые они предоставляют:

а) модульные цифровые образовательные среды: [154], [155];

б) MOOC и дистанционное образование: [63], [65], [68], [14], [152];

в) LMS и LCMS системы: А. Б. Классов, О. В. Классова [54], [146].

Таким образом, разработка темы методического сопровождения социокультурно-ориентированного обучения геометрии учащихся основной школы в условиях электронной образовательной среды связана с решением следующих **противоречий** между:

– потребностью системы среднего образования в разработке эффективных форм развития у детей математических навыков и знаний через призму социокультурно-ориентированного подхода и отсутствием методологических ориентиров, необходимых для успешного внедрения данных идей в работу современной школы;

– объективными возможностями применения положений социокультурно-ориентированного обучения в системе обучения школьников геометрии через применение инновационных технологий и недостатком методических разработок по сопровождению процессов внедрения ЭОС.

Проблема исследования: поиск путей совершенствования дополнительного обучения математике (геометрии) учащихся основной школы в условиях электронной образовательной среды.

Объект исследования – процесс обучения математике школьников.

Предмет исследования – система методического сопровождения социокультурно-ориентированного обучения геометрии учащихся основной школы в условиях электронной образовательной среды.

Цель исследования: разработка методического сопровождения социокультурно-ориентированного обучения геометрии учащихся 8–9 классов с использованием динамической системы GeoGebra в рамках факультатива «Конструктивная геометрия на евклидовой плоскости».

Гипотеза исследования состоит в том, что уровень обученности геометрии будет динамически развиваться, а именно, будет расти такой показатель интеллектуального развития личности, как понятийные психические структуры, если социокультурно-ориентированное обучение в рамках факультатива «Конструктивная геометрия на евклидовой плоскости» выступает дополнительной необязательной формой предметной подготовки и является значимым механизмом, поддерживающим основные занятия по данному предмету, причем осуществляется методическое сопровождение данного процесса на основе соблюдения таких положений, как:

– содержание дополнительного обучения геометрии фундировано социокультурной концепцией математического образования;

– процесс развития понятийных психических структур опосредован овладением школьником обобщенным умением решения геометрических задач на построения, что значительно облегчается в результате использования ресурса динамической системы GeoGebra, который можно идентифицировать с электронной образовательной средой (ЭОС);

– специфика процесса обучения геометрии основана на целостной модели, компоненты которой представлены в виде блоков: 1) формирование семантических структур – рефлексивного отношения, предполагающего понимание школьником математической информации; 2) развитие индивидуальных стилей кодирования информации; 3) формирование ценностно-смысловой сферы личности обучающегося.

Задачи исследования:

1. Выявить сущностные характеристики понятия социокультурно-ориентированного обучения и возможность его реализации при обучении математике.

2. Определить роль и место электронной образовательной среды (ЭОС) в методическом сопровождении социокультурно-ориентированного обучения геометрии учащихся основной школы.

3. Разработать методологические основы организации освоения школьниками обобщенного умения по решению конструктивных геометрических задач в электронной образовательной среде, опосредующего развитие понятийных психических структур.

4. Разработать систему методического сопровождения обучения геометрии учащихся 8-9 классов на занятиях факультатива «Конструктивная геометрия на евклидовой плоскости».

5. Экспериментально проверить разработанную систему социокультурно-ориентированного обучения геометрии школьников в условиях электронной образовательной среды.

Теоретико-методологические основы исследования:

– концепция модернизации современного образования (Г.А. Бордовский, В.А. Болотов, Ю.И. Журавлев, В.В. Краевский, В.Л. Матросов, А.П. Тряпицына, Г. П. Щедровицкий и др.);

– концепция социокультурного подхода (Э.С. Маркарян, М.С. Каган, Ю.И. Ефимов, В.М. Межуев, А.К. Уледов, Э.В. Соколов и др.)

– концепция информатизации образования (Г.А. Бордовский, И.М. Велихов, В.М. Монахов, А.А. Кузнецов, С.П. Плеханов, Е.С. Полат, И.В. Роберт, В.П. Тихомиров и др.);

– теория дистанционного обучения (А.А. Андреев, А.А. Ахаян, П.П. Дьячук, Е.С. Полат, В.И. Снегурова, В.И. Солдаткин, А.В. Хуторской и др.);

– теория проблемно-деятельностного обучения (М.Е. Бершадский, Л.С. Выготский, Т.В. Габай, П.Я. Гальперин, А.Н. Леонтьев, Н.Ф.Талызина и др.);

– концепции развивающего обучения математике (В.А. Гусев, В.А. Далингер, С.Н. Дворяткина, Ю.А. Дробышев, И.В. Дробышева, В.И. Крупич, В.А. Крутецкий, А.Г. Мордкович, Н.Г. Подаева, М.В. Подаев, О.А. Саввина, И.М. Смирнова, А.А. Столяр, С.В. Щербатых, И.С. Якиманская и др.).

Методы исследования: анализ диссертационных исследований, методической литературы по проблемам открытого образования, дистанционного образования; анализ Интернет-ресурсов, осуществляющих дистанционное обучение математике; моделирование, проектирование; анкетирование, тестирование, наблюдение, психолого-педагогическая диагностика; формирующий эксперимент; методы математической статистики.

Организация и этапы исследования:

Теоретико-аналитический этап (2017г.): изучение работ по проблеме развития современных систем среднего образования с применением инновационных и дистанционных технологий; анализ данных о результатах внедрения систем дистанционного обучения в российских школах; работа над методологической базой исследования, формулирование гипотезы; разработка плана эксперимента.

Опытно-экспериментальный этап (2017-2019 гг.): работа над формированием интернет-платформы для организации дистанционных форм занятий со школьниками; проведение экспериментальной работы по внедрению разработанной системы в практику образовательного процесса на уроках геометрии в 8-9 классах; диагностика результатов экспериментальной работы.

Обобщающий этап (2020 г.): оформление результатов исследования, работа с ними с применением статистических, количественных и качественных методов анализа; оформление текста диссертации и заключения.

Работа выполнена на базе Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. В качестве опытной площадки для проведения эксперимента выступали: ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы КШО (Коммунарское Школьное Отделение) 8 «а» и 9 «а» классы; ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы БШО (Бунинское Школьное Отделение) 8 «в» и 9 «в» классы. Исследованием было охвачено 337 учащихся 8-9 классов физико-математического профиля.

Научная новизна исследования: определено содержание и структура методического сопровождения социокультурно-ориентированного обучения геометрии учащихся 8-9 классов основной школы в электронной образовательной среде; обоснована возможность развития понятийных психических структур обучающихся при методическом сопровождении процесса обучения геометрии с использованием систем динамической математики (СДМ) на теоретическом и прикладном уровнях; разработана система методического сопровождения обучения геометрии учащихся основной школы в ЭОС; определен комплекс условий, обеспечивающих эффективность развития рефлексивного, когнитивного, эмоционального и поведенческого компонентов понятийных психических структур, а также действий в составе деятельности учащихся по решению конструктивных задач.

Теоретическая значимость исследования: раскрыты возможности развития рефлексивного, когнитивного, эмоционального и поведенческого компонентов в составе понятийных психических структур обучающихся при методическом сопровождении процесса обучения геометрии с использованием систем динамической математики (СДМ) в контексте социокультурного содержания математического образования; теория и методика обучения математике дополнены знанием о системе методического сопровождения процесса обучения геометрии с использованием систем динамической математики (СДМ); обоснована и экспериментально апробирована система методического сопровождения социокультурно-ориентированного обучения геометрии учащихся основной школы.

Практическая значимость исследования: результаты исследования могут быть использованы в модернизации системы общего образования, в преподавании математики, при проектировании дистанционных курсов обучения математике, а также при организации изучения студентами соответствующих направлений курса «Теория и методика преподавания математики».

Положения, выносимые на защиту:

1. Признание социокультурной функции обучения предполагает необходимость развития понятийных психических структур обучающихся как интегральных когнитивных структур, которые выступают в качестве носителя понятийного знания (понятийного опыта), характеризуются включенностью разных способов кодирования информации, иерархической организацией семантических признаков в содержании понятия и наличием систем связей отдельного понятия с некоторым множеством других понятий. Наиболее адекватной моделью обучения геометрии в школе является целостная модель, компоненты которой представлены в виде блоков: 1) формирование семантических структур – рефлексивного отношения, предполагающего *понимание* школьником математической информации; 2) развитие индивидуальных стилей кодирования информации; 3) формирование ценностно-смысловой сферы личности обучающегося на уровнях усвоения математических понятий (формирование ценностных представлений), переживания ценностных позиций (формирование ценностного отношения), применения (формирование ценностных ориентаций и личностных смыслов).

2. В качестве средства развития выступает система методического сопровождения процесса освоения обобщенного умения по решению геометрических задач на построение в электронной образовательной среде, функционирующая на основе конкретного ресурса, созданного на платформе GeoGebra.ru., обеспечивающая овладение обучающимися целями обучения геомет-

рии, основывающаяся на личном опыте ученика, его развертывании в рамках трех фаз, каждая из которых представляет определенный вид обучения математике – инструментально-ориентированный, ценностно-ориентированный, предментно-ориентированный, определенную область математического знания (содержательную, контекстуальную, процессуальную), а также определенный тип научных знаний (декларативный, ценностный, процедурный). Отдельный цикл обучения (в рамках формирования определенного понятия) включает последовательно сменяющие друг друга фазы. Предметно-ориентированная (содержательная) фаза – обеспечение декларативных знаний, понимания учебного материала. С этой точки зрения речь идет о формировании семантических структур – индивидуальной системы значений математических терминов, что является ключевым фактором успешности овладения школьной математикой. Ценностно-ориентированная (контекстуальная) фаза – обеспечение ценностных знаний, переживания ценностных позиций. С этой точки зрения речь идет о формировании ценностно-смысловой сферы личности обучающегося как социально обусловленной направленности, в структуре которой выделяются когнитивный, эмоциональный и поведенческий компоненты, включающие соответственно ценностные представления, ценностные отношения, ценностные ориентации и личностные смыслы. Инструментально-ориентированная (процессуальная) фаза – обеспечение процедурных знаний, усвоения и применения научных понятий. С этой точки зрения речь идет о развитии понятийных психических структур.

3. Внедрение системы методического сопровождения позволяет реализовать цели исследования. В рамках данного процесса применяются принципы интеграции современных и общепринятых методов проведения образовательного процесса, выбора методов, форм и содержания уроков геометрии с учетом идей социокультурного подхода. На технологическом уровне решения проблемы автором была разработана система работы на платформе GeoGebra.ru, которая позволяет использовать ее при реализации дистанционных форм работы со школьниками. При оформлении методики реализации ука-

занного подхода и системы применялись две ключевые формы занятий – консультации, непосредственные занятия и диагностика результатов. На уровне развития понятийных психических структур выполнялись экспресс-исследования; выявлялись обучающихся, которые мотивированы на работу в ЭОС и могут быть успешными в конкурсах и турнирах; планировалось развивающее взаимодействие с обучающимся на консультационных занятиях. Консультационные занятия проводятся в очной и дистанционной форме в период выполнения учащимися индивидуальных работ и имеют следующие цели: оказание помощи ученику в проведении анализа, в постановке задачи при доказательстве, в оформлении решения и т.п.

4. Результативность методического сопровождения проявляется в комплексном развитии рефлексивного, когнитивного, эмоционального и поведенческого компонентов понятийных психических структур обучающихся как продуктов освоения обобщенного умения по решению задач на геометрические построения. При определении формата и процесса развития у учащихся навыков решения задач на построение на уроках геометрии мы придерживались следующей системы характеристик: *системности, способности к рефлексии, гибкости, форме действия, навыкам формирования категорий, обратимости, ценностно-смысловой сферы, меры свернутости, меры развернутости, меры переноса, способностями к обобщению.* Как показала ОЭР, внедрение системы указанных ориентиров положительно влияет на показатели результативности обучения детей геометрии. При определении данных выводов мы также руководствовались статистическими методами исследования.

Достоверность результатов исследования подтверждается как изученными фундаментальными трудами по проблеме преподавания геометрии с применением систем дистанционного обучения, так и эмпирическими данными. В рамках работы были использованы метод сбора и обработки данных с высокой степенью надежности, что позволило подтвердить достоверность выдвинутой гипотезы.

Апробация диссертации. Основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, обсуждались на заседаниях кафедры математики и методики ее преподавания ЕГУ им. И.А. Бунина, докладывались на региональных и межвузовских конференциях, использовались в публикациях.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка и приложений.

Глава 1. Социокультурно-ориентированное обучение геометрии школьников в условиях электронной образовательной среды как педагогическая проблема

§ 1.1. Анализ развития взглядов на социокультурно-ориентированное обучение и возможность его реализации при обучении математике

Особенности процесса обучения как социокультурного явления рассматривали многие ученые.

В исследованиях Э.С. Маркаряна под культурой понимается один из способов функционирования жизни социума ([69], [72], [70], [71]).

О.И. Генисаретский [38] полагает, что указанные понятия связаны между собой как части единого целого – систем общественных отношений.

При исследовании работ Э.В. Соколова было установлено, что культура первична по отношению к обществу, а последнее скорее рассматривается как ее продукт и производная [101].

Исследования Л.Н. Когана и Ю.Р. Вишневского [57], [58] рассматривают культуру и общества как близкие, но не родственные понятия. В частности, отмечается, что социальные истоки культуры очевидны, поскольку без человека ее невозможно представить. Но социальные действия могут носить совершенно лишенный культурной составляющей характер. Следовательно, культурными признаются те действия, которые положительно влияют на развитие этой культуры [57], [93].

Образование всегда рассматривалось как одна из составляющей культуры и общественных отношений. С его помощью сохраняются и передаются традиции, знания и опыт общества. Следовательно, как общественный институт образование одновременно носит и личностный, и социальный характер и статус [79].

О социальном статусе образовательных систем писал Б.Д. Эльконин [123], [10]. Именно с их помощью осуществляется транслирование опыта следующим поколениям.

О.В. Долженко отмечал, что образование не показывает в целом характер существования и развития общества, но позволяет судить об отдельных обществах и их достижениях. Поэтому при формировании системы образования следует руководствоваться не только планами его развития, но и текущей общественной ситуацией, предпосылками и готовностью индивидуумов и социума в целом их принять. Следовательно, образование не только социализирует, но и продвигает человека к процессу саморазвития [46], [93].

О необходимости изучения научной категории «образование» и его составляющих говорил Б.С. Гершунский. Он говорил о нескольких сторонах данного явления – ценностной, системной, процессуальной и результативной [31] .

Исследованию структуры процесса обучения посвящены исследования Ю.К. Бабанского, С.П. Баранова, М.А. Данилова, Т.А. Ильиной, М.Н. Скаткина, И.Я. Лернера, В. Оконя, В. Куписевича [7], [52], [64], [80], [98].

В работах И.Ф. Харламова говорится о целенаправленности как одной из характеристик образовательного процесса. Он должен не просто учить, но и побуждать детей к получению этого знания и умений. Кроме того, в нем содержатся мировоззренческая и нравственно-этическая составляющие [46].

Обучение как педагогический процесс исследовал П.А. Сорокин. Автор говорит о том, что значение знания рассматривается в качестве ценностного ориентира конкретного человека [102].

Традиционные подходы к пониманию образования как способа передачи знаний и умений путем воздействий со стороны педагога сегодня устарели. Современный взгляд на проблему предполагает партнерские отношения между учителем и обучающимся. О потребности в поддержке, сопровождении, поиске механизмов взаимодействия и помощи писали Е.Н. Шиянов, И.Б. Котова [60].

С точки зрения социокультурного подхода образовательный процесс рассматривается как явление, обусловленное педагогическим взаимодействием между его субъектами.

Педагогическое взаимодействие рассматривается как обоюдное воздействие участников этих отношений друг на друга, в результате которого у каждого формируются некоторые навыки, умения или личностные качества. Важно, что каждый участник влияет на развитие другого.

С точки зрения развития и действия педагогического взаимодействия следует говорить о нескольких его факторах. Так имеет значение передача особенностей субъектов для развития друг друга во всех сферах жизни. В ходе образования, полученного в рамках реализации данного процесса, формируется «Я»-концепция обучаемого, происходит его социализация, формирование моделей поведения. Именно поэтому следует рассматривать педагогический процесс через понятия взаимодействия и партнерства, а не влияния свыше.

Личностная ориентация учащегося рассматривается нами в качестве установок, связанных с мотивами и смыслами деятельности человека.

Структура процесса обучения представляет собой совокупность следующих составляющих: участников, целей и предназначения, ценностей, норм и технологий. В целом можно говорить о сходстве со структурой любого социального феномена.

Следовательно, процесс обучения есть феномен общественной и культурной жизни общества. Поэтому в нашем исследовании мы ориентируемся и акцентируем внимание на наличии у него таких функций, как транслирующая и воспроизводящая социокультурный опыт поколениям.

Как отмечает в своих исследованиях О.В. Долженко, взаимосвязь между культурным и социальным достаточно устойчивая, что позволяет говорить о взаимопроникновении данных явлений и их воздействии друг на друга. Иными словами, любое социальное пространство выстраивается с учетом культурологических ориентиров и обуславливается ими, а субъекты общества одновременно несут в себе как черты культуры, так и социальности [46].

Интересно замечание автора относительно путей и барьеров для вхождения в культуру. Они рассматриваются как некие преграды, препятствующие насильственному погружению в ту или иную культурную среду: только личностная заинтересованность позволит это сделать. Культура открыта для тех, кто самостоятельно в нее входит. С одной стороны, культура изменчива и принимает воздействие на нее со стороны личности и общества, но в тоже время она сама становится теми рамками и ориентирами, которые регулируют деятельность и существование людей в указанной культурной среде. Одним из свойств культуры становится перспектива ее целостного восприятия и принятия как с позиций личностного опыта человека, так и социального [42], [46].

Рассмотрим процессы интеграции человека и культуры через понятия распредмечивания и опредмечивания [42].

Всего в культуре выделяется несколько составляющих и форм ее выражения: личностная, технико-технологическая и предметная. Последняя позволяет контролировать процессы интеграции людей, их объединения в социум с последующим преобразованием самой культуры. Такой подход подводит нас к понятию опредмечивания – передачи результатов индивидуального творчества для развития социума в целом. Две другие формы выступают также стадиями преобразования человеческого опыта: из предметной формы он переходит в технико-технологическую, а затем – в личностную. Обратный процесс также наблюдается, когда в результате творчества личностные установки, взгляды и убеждения трансформируются в конкретные предметные формы и выражения. Чем больше предметных форм становится доступно человеку для восприятия и понимания, тем более глубоким становится его признание действительности и открытость к ее пониманию. Распредмечивание и опредмечивание тесно связаны друг с другом. Вместе они гарантируют функционирование общества и сам процесс выполнения человеком определенных видов деятельности. О процессе передачи внутренних установок, сил, способностей человека обществу в виде определенных предметов внешнего мира писал в своих исследованиях Г.С. Батищев. Автор отмечает, что данный процесс рассматривается как возможность личности самоутвердиться и самовоплотиться в обществе, указывающий на субъектную позицию человека и его восприятие себя как части конкретного социума через предметную позицию [9], [31].

Возможности использования предмета в деятельности, а также осознание его функционала и сущностных характеристик следует рассматривать как результат процесса распредмечивания. Так предмет становится тем активным объектом, который вписывается в логику действий человека или общества [9], [72].

Следующим процессом, который выделяется в области культурно-общественного бытия, становится категоризация. Под ней понимается определение характеристик предметов или объектов с целью их дальнейшего отнесения к определенной группе или категории объектов или явлений [2].

Категоризация упорядочивает человеческую деятельность, позволяет рассматривать ее через призму собственных установок. Без распределения объектов по различным классам становится невозможной сама деятельность человека. Следовательно, категоризация предназначения для упорядочения информации и представления ее в доступном для учащихся виде [122], [41].

Социальные ценности также рассматриваются как одна из характеристик системы обучения. Они определяют сам стиль и формат учебной работы и мыслительных операций учащихся [49].

Ценность – это абстрактная цель, предназначенная для определения направления движения человека, а также определения эффективности развития относительно исходной точки и показателей, которые ей соответствовали. На основании ценностей человек оценивает собственные поступки и действия окружающих, делает выбор в пользу допустимого для него варианта. Однако единого подхода к пониманию ценностей в психологии на сегодняшний день не выработано.

Интересна теория универсального содержания и структуры ценностей, которую предложили М. Рокич и С. Шварц. Согласно ей, цели позволяют человеку ориентироваться в окружающей действительности. Ценности как элемент познавательного процесса были обозначены в работах А. Тэшфелу, что является продолжением указанной выше теории [43].

Ценности как ориентиры понимания и восприятия окружающей действительности рассматривались в работах П.Г. Щедровицкого. Автор вводит систему ценностей, в рамках которой выделяются различные уровни и свойства. Однако ценности следует оценивать с точки зрения личностного подхода, ведь их значение важно для конкретно взятого индивида. Система ценностей – сложное личностное образование, которое обусловлено как культурой человека, так и его личными установками. Автор ввел специальный термин для обозначения системы личностных ценностей – ценностное поле. Однако общекультурное значение ценностей рассматривается с позиций понимания их функции по сохранению и передаче тех ориентиров, которые необходимы социуму для существования [117].

Социум, с точки зрения П.Г. Щедровицкого, имеет в своем содержании два уровня – воспроизводственный и культурный. Оба они развиваются в процессе человеческой деятельности, поскольку воспроизвести тот или иной предмет возможно при участии человека и его активном освоении окружающей действительности. Деятельность в обязательном порядке передается процессу воспроизводства явлений и действий окружающей среды в экономике или жизни общества и культуры в целом [122].

Под воздействием деятельности формируется общественная структура или их совокупности, а также обеспечивается их взаимодействие. При передаче деятельности могут применяться различные варианты и каналы: знаки, символы, предметы, живые объекты. Указанные предметы не являются самостоятельными и непременно требуют присутствия не просто человека, а обладающего определенным набором умений, знаний и навыков. Деятельность одних воспроизводится другими при условии их компетентности. В противном случае передача деятельности как таковой нарушается. Для предотвращения этого процесса и создавалось обучение [122].

Обучение следует рассматривать как одну из функций общественного воспроизводства. Она выражается в развитии необходимых навыков у людей, которые необходимы для создания предметов на основе предложенных образцов и макетов деятельности, уже созданной в обществе.

Обучение предназначено не только для формальной передачи навыков выполнения того или иного действия, но и на формирование личности, то есть воспроизводство в социуме человеческих ресурсов, создание таких представителей культуры, которые в полной мере отражают ее современные реалии и ценности. В работах В.В. Мвениерадхе говорится о способности традиционной образовательной системы «производить» лишь потребителей знаний и навыков, в то время как следует выбрать курс на формирование мыслящего и самостоятельного человека. Именно субъектная позиция становится ориентиром для внедрения социокультурного подхода к пониманию общества в образовании. Знаниевая парадигма исключает возможности для духовно-нравственного развития, формирование таких качеств, как самостоятельность, саморазвитие. Образованный человек вполне может не соответствовать принятым стандартам воспитания, поэтому следует отказаться исключительно от формирования и повышения интеллектуальных способностей и перейти в сферу построения мировоззренческих ориентиров [48].

Ценности присутствуют во всех сферах жизнедеятельности человека, а также в самой структуре его личности. Так, *ценностное сознание* предполагает наличие у индивида морально-нравственных установок, идеалов, убеждений, мировоззренческих ориентиров, которые заложены в него окружением: семьей и обществом. Данное образование динамично и подвержено активному воздействию со стороны общества и принятых в нем ценностей.

Ценностные ориентации рассматриваются в качестве тех общественных ценностей, которые приобрели личностное значение и сложились в конкретную систему ценностей индивида. Такие убеждения отражают особенности его восприятия и отношения к различным аспектам общественной жизни, своему месту в обществе, наличию привязанностей [43], [48], [115].

Ценностное отношение применяется человеком по отношению к объектам, процессам и явлениям действительности. Оно также индивидуализировано и объективно выражается на практике. Понятие *ценностного подхода* несколько шире и рассматривает процессуальный аспект получения индивидом той совокупности ценностей, а также методологических ориентиров, которые впоследствии выражаются в виде ценностного отношения. При помощи подхода осуществляется процесс познания, а отношение скорее результативно, поскольку оценивает фактические явления и процессы. Оценка и формирование ценностного отношения может происходить на различных уровнях. Так самый низкий уровень сводится к пониманию системы ориентаций человека и бессознательного принятия или неприятия того или иного предмета или явления [118].

Более высокий уровень – теоретический. Он подробно описывается в работах И.Е. Шершова, который относит сюда концептуальные положения и оценки, в основе которых лежат не субъективные отношения и ценности, но принятые в данном обществе и в данном историческом периоде общественные ценности. Любая оценочная деятельность человека так или иначе субъективна и проводится через призму его собственного мировоззрения и восприятия. Важное значение в таком случае приобретает самооценка как регулятор отношения человека к миру. В зависимости от гармоничности образования, воспитания и культурного багажа человека она может быть адекватной, завышенной или заниженной.

При определении значения социокультурной функции процесса обучения автор придерживается той позиции, что указанный процесс основывается на понятиях ценностного подхода и ориентаций. При этом общественное знание также рассматривается с позиций нескольких подходов, что и определяет его структуру, функции и особенности.

Например, с позиций *ассоциативно-рефлекторной концепции* обучения, формирование знаний и навыков человека, т. е. его обучение, происходит через проведение и образование различных ассоциаций. В основе теории лежит учение И.И. Сеченова и И.П. Павлова о простых и сложных ассоциациях, а также условно-рефлекторной деятельности мозга. Особенностью обучения становится попеременная и непрерывная смена ассоциаций, а также построение ассоциативных рядов – конгломераций отдельных таких составляющих. При помощи ассоциаций ребенок проходит процесс социализации, что отражено в работах И.М. Сеченова, И.П. Павлова, С.Л. Рубинштейна, Н.А. Менчинской, Ю.А. Самарина и др. [96].

Наиболее распространенной и популярной стала теория *содержательного обобщения*, разработанная В.В. Давыдовым и Д.Б. Элькониным. Ученые рассматривают учебную деятельность в качестве наиболее эффективного средства усвоения общественных знаний. В качестве принципов ее организации рассматриваются дедуктивный и теоретический, а также повышение познавательного интереса учащихся в ходе занятий и подбора обучающего материала. Так учебная дисциплина позволяет формировать у детей представления об окружающем мире, его явлениях, предметах, их устройстве, свойствах, а также закономерностях и взаимосвязях.

Бихевиористские теории научения (Э. Торндайк, Д. Уотсон, Б. Скиннер) основываются на предположении о том, что социокультурный опыт усваивается учащимися через последовательное прохождение следующих стадий: внешнего стимулирования – реагирования – закрепления. Таким образом отрицается ведущая роль сознания, а предпочтение отдается поведенческим механизмам формирования названных умений и навыков. Механическое повторение способствует запоминанию, закреплению предлагаемой информации или опыта, а принцип организации обучения – дозированное и методичное предложение данных для изучения [107], [147].

Л.С. Выготский, П.Я. Гальперин, Н.Ф. Талызина предлагают *теорию поэтапного формирования умственных действий*, согласно которой структура человеческой деятельности рассматривается в единстве ее внешней и внутренней составляющих. Расширение интеллектуальных навыков производится путем преобразования внешних умений в соответствующие умственные операции и навыки. Данный процесс получил название интериоризации [27].

В учениях М. Вертхеймера, Г. Мюллера, В. Келера, К. Коффка и др. предлагается специфический подход к пониманию процессов научения и усвоения общественного знания. Представители гештальтпсихологии говорят о наличии в структуре человеческого сознания такого целостного представления об объекте, которое должно быть у него сформировано и достигнуто в ходе педагогической деятельности [96].

Суггестопедическая концепция обучения рассматривает данный процесс как возможность воздействия на эмоциональную сферу человека, которая позволяет внушать необходимые знания и информацию. Ключевое понятие системы – суггестия и соответствующие ей средства [66].

Теория нейролингвистического программирования (НЛП) задействует особые механизмы формирования человеческого сознания и базы знаний, умений и навыков. Специалисты при помощи данных методик воздействуют на конкретные участки нервной системы человека, тем самым активизируя познавательные и интеллектуальные процессы. Все объемы информации классифицируются по основанию их формы на вербальную и сенсорную. Так предлагается система процесса НЛП (вход, хранение, переработка и выход информации), модальности учащихся (аудиалы, визуалы, кинестетики). Эффективность методики определяется не только технологией и условиями, но и их соответствием конкретному психотипу субъекта воздействия [96].

Для нашего исследования наибольший интерес представляет теория *Л.С. Выготского культурно-исторической детерминации психики*. Она не только раскрывает внутренние механизмы формирования универсальных учебных действий, но и предлагает дидактические основания для их практического развития. Автор рассматривал высшие психические функции с позиций их общественно-исторической сущности и составляющей [22].

Главным достижением Л.С. Выготского стало обоснование целостной психологии личности. Ученый выделял составляющие процесса онтогенеза – начальную, связанную с созреванием нервных аппаратов, и вторичную – функциональную, которая и является следствием социализации. Также автору принадлежит тезис о роли деятельности в дальнейшем становлении и интериоризации личности обучаемого. Следовательно, в рамках педагогического процесса происходит формирование знаний, умений и навыков учащегося, его развитие исключительно в тех пределах, которые заданы определенными культурно-историческими рамками.

Становление психики происходит не спонтанно или в соответствии с заложенными природой механизмами, но под сильным влиянием со стороны социокультурной среды. Базовыми понятиями теории Л.С. Выготского становятся «знак» и «деятельность». Первый рассматривается автором как начальная стадия формирования психики, с которой начинается включение человека в социум. Второе понятие также связывается с обществом и его свойствами и особенностями: его формированию способствует встреча со значимым другим, который позволяет сформироваться высшим психологическим свойствам личности [22].

Экстериоризация по Л.С. Выготскому – это процесс формирования образовательного процесса таким образом, чтобы он максимально соответствовал запросам и потребностям субъекта, а также общества. Через указанный процесс сформированные системы знаний интериоризируются и закрепляются как устойчивые в сознании человека.

В современной педагогике признание социокультурной функции обучения предполагает существование технологии, с помощью которой осуществляется процесс воспроизводства общественного опыта. Она определяется как *социокультурная технология* и качественно характеризуется в контексте системно-деятельного подхода наличием целевого, коммуникативного, организационно-деятельностного и результативного компонентов. Основными характеристиками и ценностными установками описываемых технологий становится транслирование общественного знания в историческом контексте от одного поколения к другому, а также алгоритмов его получения и практического применения членами данного социума.

Система социокультурных ценностей при этом представляет собой совокупность нескольких компонентов – эталонов и шаблонов. Указанные компоненты получили название социально-культурных программ и отличаются своей устойчивостью и прикладным значением. Так, шаблон стереотипичен и не устойчив и не может рассматриваться как что-то современное, динамичное и развивающееся. Эталон же более устойчив во времени, закреплен нормами и позволяет решать определенный круг задач с высокой вероятностью получения желаемого результата. Применительно к образованию такая классификация используется весьма ограниченно, т. к. не дает возможности рассматривать перспективы саморазвития учащегося. Вместе с тем она придерживается идей индивидуализации в образовании, которые выражаются в учете темпов и особенностей развития ребенка, его способностей, доминирующих типов мыслительной активности. В ходе педагогического процесса формируются следующие знания, умения и навыки, а также способности: познавательные, творческие, интеллектуальные.

Второй важной функцией, разработанной автором системы, становится актуализация личностного опыта детей в ходе учебной работы. Такой подход позволяет не только формировать духовно-нравственные ориентиры и моральные ценности, но и задействовать сферу мировоззренческих ориентиров личности.

Окультуривание и социализация личности предполагают не просто принятие набора принятых в обществе ценностей, но и формирование внутренней духовности, культуры личности. Только тогда можно говорить о сформированности ценностного мышления.

Достижение указанных ориентиров предполагает использование механизмов взаимодействия между учеником и педагогом, поскольку только такая взаимозависимая деятельность приносит результаты. Такой тип субъект-субъектных отношений следует рассматривать в качестве коммуникативной составляющей технологии, рассматриваемой в данном исследовании. Важно, чтобы коммуникация выстраивалась на принципах диалога и партнерства, а ее итоги были выгодны и интересны всем участникам. Такая форма общения позволяет говорить о повышении учебной мотивации детей, их активности, а также осуществлении самостоятельного выбора персональной образовательной траектории.

В исследованиях В.С. Библера культурный диалог лежит в основе большинства социальных процессов и отношений, дает возможность расширения границ культурной среды, а также расширения взглядов ее представителей [12].

Следовательно, содержание процесса обучения должно быть не просто проекцией нормативного знания в виде стандарта. Построение учебного курса при таком подходе предполагает за обучаемыми право выбора оценочного отношения к изложенному материалу. Здесь ученик понимается как самоактуализирующийся субъект потребностей, реализующий себя в мире.

Исследования Н.Г. Подаевой, М.В. Подаева, Л.В. Жук посвящены [88], [89], [90] изучению вопросов построения дидактических систем, которые позволяли бы вести преподавание математики и геометрии с позиций социокультурного подхода к обучению. Авторы дают также определение математическому образованию, которое рассматривается как форма культуры, предназначенная для передачи имеющейся системы знаний навыков и опыта следующим поколениям, исходя из ценностной сущности этих знаний и опыта. Второй составляющей и целью математического образования становится формирование у учащихся необходимого уровня знаний, умений, навыков, необходимых для дальнейшей успешной социализации.

Культурные способности рассматриваются как система сформированных у ученика способов мышления и соответствующих им типов деятельности, позволяющих осуществлять эффективное взаимодействие с другими представителями сообщества. В число таких мыслительных операций и действий входят: понятийное мышление, рефлексивные навыки, умение обобщать, систематизировать, категоризировать, действовать, интеллектуальные способности в области математики и пр. Поэтому целесообразно ставить указанные ценности в качестве целей образовательного процесса, при этом отказавшись от подхода, в котором главной задачей курса математики становится формирование специальных знаний и навыков.

Предметные умения, несомненно, важны, однако именно социокультурные направлены на развитие целостной личности ребенка. Социальный опыт, который приобретается в учебном процессе, преображается во внутренний и приобретает субъектные черты. Применительно к математике можно говорить о наделении учебных материалов личностным смыслом, что позволяет их осваивать с большей степенью успешности по сравнению с «неживым» и абстрактным обучением [90].

Однако содержание предмета, как отмечают ученые, играет важное значение в становлении личности учащегося, его социализации и получении требуемого уровня сформированности компетенций. Таким образом, при формировании учебных программ по математике целесообразно придерживаться позиции органичного и пропорционального сочетания методы интеллектуального развития личности и ее обучения предметным знаниям. В свою очередь, предметная окружающая среда становится дополнительным фактором формирования образовательной среды, а также социокультурных смыслов, которые будут транслироваться в учебном процессе от педагога к учащемуся.

При определении тенденция развития и изменения системы образования в настоящее время ученые придерживаются двух точек зрения. Согласно первой или традиционной решающим результатом становится усвоение учащимися содержания образования и дисциплин. Следовательно, на это нацелен и весь учебный процесс. Вторая позиция или инновационная ориентируется на интеллектуальное развитие детей, что предполагает формирование соответствующей гибкой и адаптивной образовательной среды. Применительно к области математического знания ученые предлагают использовать концептуальную модель социокультурно-ориентированного обучения дисциплине. При этом основными направлениями становятся: методологическое, содержательное, процессуальное, оценочно-диагностическое, теоретическое. Данные направления находят свое отражение в соответствующих структурных планах, которые будут определены далее [90].

План целеполагания предполагает использование методологических ориентиров формирования и преподавания учебной дисциплины. В результате осуществляется социализация и социальное развитие ребенка. В рамках выбранной области знания следует рассматривать в качестве таких ориентиров систему базовых понятий и категорий математики и геометрии. Присвоение ребенком данных знаний осуществляется через применение педагогами механизмов ценностного, коммуникативного, побудительного и адаптивного уровней, что позволяет формировать у учащихся систему ценностей, установок и знаний.

При разработке методологического блока педагогам следует придерживаться положений следующих парадигм: когнитивно-поведенческой, интеракционной, гуманитарной, политехнической, социокультурной. Кроме того, применяются психологические идеи бихевиоризма и психоанализа.

Мотивационный план направлен на выбор методов формирования, указанных в методологическом плане целей и задач обучения математике. Выбранный инструментарий направлен на создание устойчивой мотивации школьников к получению знаний, коммуникации с педагогами, пониманию образовательных целей как базовых потребностей, подкрепленных системой внутренних устойчивых мотивов. Такая составляющая математического образования позволяет в полной мере реализовать его социокультурный и гуманитарный потенциал.

План содержания включает в себя разработку системы конкретных механизмов и принципов действий, которые направлены на обучение детей необходимым в соответствии с поставленными целями знаний, навыков, умений в области геометрии, а также отношения к ним как социокультурным ценностям. Данная часть модели содержит фактический учебный материал, дополнительные материалы, способы преподавания, культурные паттерны, которые должны транслироваться обучающимся.

При разработке выбранного плана применяется *модель динамики освоения субъектом ценностей*. Она предполагает, что процесс освоения математики в школе представляется в виде динамической и сложной структуры, в составе которой – *ценностная ориентация, побуждение, коммуникация, адаптация и продуцирование.* Далее рассмотрим подробнее механизм функционирования такой системы формирования мышления и познавательной активности.

Отметим, что речь не идет о ценностном отношении как отдельной структурной единице процесса. Напротив, оно отмечается как черта каждого из этапов и трансформируется на выходе в культурную ценность с личностными смыслами [44, с. 107].

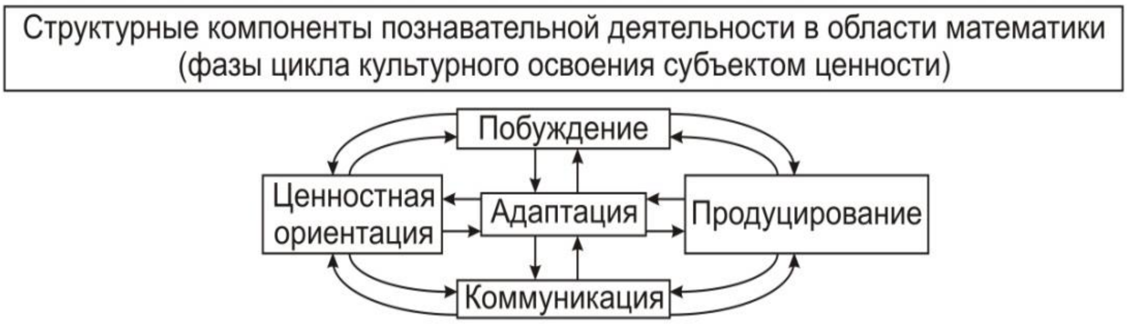


Схема 1. Модель динамики освоения субъектом ценности.

Рефлексивная составляющая ценности выражается через понятие ценностных ориентаций. Под ними в науке понимается становление у обучающегося умения видеть в изучаемых им математических процессах, явлениях и закономерностях не только предмет, но и его социокультурную (ценностную) составляющую. Так на уроках математики ученики должны погружаться в ретроспективу математических учений, чтобы иметь большее представление о роли науки в развитии науки, техники и повседневной жизни людей. Таким образом производится обучение не абстрактным понятиям, а их конкретно-научным представлениям.

Проведение указанного этапа предполагает сочетание различных форм работы, исследования и видов деятельности, в том числе оценочной, проектировочной, поисковой, исследовательской, познавательной и пр. С помощью педагога дети учатся находить смыслы и ценности в тех понятиях, которые кажутся им лишенными данных ценностей.

По мнению И.Ф. Шарыгина, школьник должен учиться переосмысливать значение математики. Наука может им восприниматься как способ формирования нравственности, на что и нацелена работа педагогов в разрезе социокультурной парадигмы. Автор ссылается на примеры воспитания из романа Л.Н. Толстого «Война и мир», где математические дисциплины рассматривались как наиболее эффективное средство формирования умственных и деятельностных способностей ребенка. Также отметим выделение ученым принципа доказательности как системообразующего во всем математическом образовании, а в частности – для курса геометрии. И.Ф. Шарыгин пишет, что человек, способный строить системы доказательств, меньше подвержен манипуляциям и воздействию извне на сознание и поведение [116, с. 74]. Аналогичной позиции придерживался и Н. Бурбаки, который говорил о том, что «математика – это доказательство». Следовательно, именно формирование навыков выстраивания логичных рассуждений с применением методов дедукции и индукции становится основной задачей педагогов на уроках геометрии.

Наконец отметим ключевые категории математической теории и образования, которые формируют методологическую основу всей отрасли знания. К ним относятся: *функции*, обозначающие движение и его характеристики; *математические структуры*[1]; *математические множества*[2]; *алгебраические операции* как способ выражения вычислений; *топологическое про-*

---

[1] Математическая структура рода Т представляет собой одно или несколько множеств $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ (образующих базу структуры), элементы которых произвольной природы (основные, неопределяемые понятия данной теории) и находятся в некоторых отношениях $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ (называемых основными неопределяемыми отношениями), удовлетворяющих аксиомам $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$.

[2] В 30-х годах XX века Н. Бурбаки определил математику как науку о математических структурах. Математические структуры подразделены им на три вида: алгебраические, порядковые и топологические.

странство[3] как характеристика процессов трансформации и перехода из одного состояния в другое.

На стадии побуждения формируются целостные мотивационные составляющие, на основании которых осуществляется эффективный и продуктивный процесс формирования ценностных ориентаций в рамках уроков по геометрии. Мотивационная составляющая этого процесса должна исходить изнутри и формироваться самим учащимся, а не педагогом, поскольку последний не имеет возможности в полной мере воздействовать на личностные установки детей. В качестве мотивов могут выступать интересы к новым знаниям, познавательному процессу, а поддержание этого интереса осуществляется за счет разнообразия содержания образовательного процесса, методов его организации, а также принципов, на которых строится обучение. Интересными для школьников должны быть все составляющие образовательного процесса: учебные материалы и пособия, программы, структура и форма проведения занятий, стиль преподавания, применяемые методики, применение педагогом принципов индивидуального и проблемного обучения и пр. Обозначенные содержательные компоненты рассматриваются в рамках данного исследования в качестве ключевых детерминант образовательного процесса вне зависимости от выбранного этапа этого цикла. Результатом должно стать формирование у детей такого качества, как принятие и понимание ценности математического знания в быту.

Кроме того, математика является межпредметной дисциплиной. Поэтому ее роль в формировании ценностных ориентаций школьников становится особенно значимой и высокой. Например, математические модели и функции используются не внутри самого предмета, а как инструменты для

---

[3] Говорят, что на множестве X определена топологическая структура T (топология), если на множестве P(X) всех его подмножеств задано унарное отношение T, удовлетворяющее следующим трем аксиомам: X,∅ принадлежат T; объединение любого конечного либо бесконечного семейства подмножеств из T принадлежит T; пересечение любого конечного семейства подмножеств из T принадлежит T. Множество X, на котором определена топологическая структура T, называется топологическим пространством [62].

описания и расшифровки процессов в других областях знания: биологии, географии, физике, экономике и пр.

Коммуникативный аспект формирования ценностных ориентаций сводится к перспективам использования получаемых знаний для побуждения к обучению конкретного школьника (студента). Коммуникативные связи устанавливаются системно через механизмы кодирования (использования определенной терминологии и знаковой системы), транслирования (процесса передачи данных); коммутации (принятия и расшифровки).

В педагогическом процессе коммуникация невозможна без ориентации педагогов и учащихся на формирование понимания материала. В частности, следует придерживаться таких форм работы со школьниками, как диалогические формы проведения занятий (дебаты, обсуждения и пр.), а также анализ в работе над учебными материалами. Для проведения содержательного анализа требуется навык определения и установления связей и закономерностей между составляющими процессов и явлений, определение их сущностных характеристик и пр. Вместе с тем самостоятельно такие навыки и процессы не запускаются: для этого требуется стимул, исходящий непосредственно от педагога, а не от учащегося. Задачей преподавателя в таком случае становится выбор методов проблемного обучения, отказ от директивных форм работы с детьми и традиционной парадигмы образования, построенной на передаче сухих фактов и готового знания. Диалогичность здесь следует рассматривать как характеристику двоичности взглядов, а не субъектов процесса коммуникации.

Коммутация – одна из важнейших составляющих математического образования. Она позволяет переводить абстрактные математические термины и понятия в плоскость доступного для понимания поля. Учитель стремится использовать такие приемы и средства обучения, которые позволят максимально эффективно решить образовательные задачи в социокультурной парадигме, а также визуализировать сложные процессы в виде графиков, схем, образов, понятных школьникам.

Обозначенные сложности требуют применения таких механизмов, как *осознание, обобщение и осмысление*, призванных передать, закрепить в сознании учащегося и сделать доступным для понимания учебный материал.

Адаптационный этап процесса связан с осмыслением сформированной системы знаний и опыта, ее принятием, признанием в качестве регуляторов деятельности и использования в повседневной и учебной деятельности. Способы работы с математическими объектами, операциями, явлениями позволяют формировать личностный опыт и интеллектуальные способности. С позиций ценностей происходит процесс их опредмечивания, перевода из категории абстрактного в позицию конкретно-практического. При определении формул усвоения обратимся к работам Ж. Пиаже, который говорил о следующих механизмах усвоения учебных материалов: *аккомодация* или использование имеющегося знания и системы действий по отношению к новому кругу предметов; *ассимиляция* – включение объекта в деятельность устоявшихся механизмов в качестве дополнения (процесс приспособления).

Применительно к учащимся данная закономерность проявляется следующим образом: новое знание осмысливается через сложившуюся систему ценностей, прогоняется через доступные для понимания механизмы и структуры. Затем происходит присвоение знания (ассимиляция или аккомодация), что позволяет расширить его знаниевый запас и опыт. Следовательно, ребенок либо объясняет новое с применением старых известных истин, либо меняет сам подход к пониманию, чтобы осмыслить новое явление. Вместе с интеллектуальным развитием происходит и аналогичное морально-нравственное.

Указанный алгоритм формирования адаптационных механизмов на уроках математики производится путем использования приемов запоминания, систематизации и профилактики забывания, применения материала (развитие умения и опыта).

Продуцирование выражается через понятия преобразования окружающей действительности и производство готового продукта с учетом личностных установок и интеллектуальных способностей. В процессе преобразования задействованы различные познавательные и мыслительные процессы, а также навыки коммуникации школьников. Данный процесс предполагает взаимодействие с самым широким кругом субъектов – культурой, обществом и пр. Через продуцирование завершается сам процесс формирования ценностных установок в ходе образовательной деятельности учащихся, формируется целостная личность, готовая к оперированию материалом на высшем продуктивно-творческом уровне.

Деятельностный план заключается в разработке и применении методов задач различного вида, которые нацелены на формирование знаний, умений, навыков и компетенций обучающихся.

Здесь на первый план выступает современная *психодидактическая парадигма образования,* предполагающая интеграцию дидактических и психологических аспектов процесса школьного обучения, тенденции к которой прослеживаются еще в исследованиях В.В. Давыдова, Л.Н. Занкова, В.П. Зинченко, Е.Н. Кабановой-Меллер, В.В. Серикова, Д.Б. Эльконина, И.С. Якиманской и др. Особенностью обучения школьников становится его зависимость от категория не только педагогической природы (знания, умения, навыки, методики, технологии), но и психологической (формирование среды для развития личности ребенка). Еще в 60-е гг. XX в. в работах Н.А. Менчинской была теоретически обоснована идея о необходимости построения обучения в соответствии с учетом закономерностей познавательной деятельности обучающихся. В работах Я.И. Груденова рассматривается возможность использования взаимосвязей между внутренними процессами и характеристиками школьников и той средой, в который осуществляется процесс их обучения. Автор оперирует термином «психолого-дидактические закономерности», который и выражает указанные выше положения [33, с. 12].

Применение психодидактического подхода максимально оправдано в области математического образования. В частности, это связано с внутренними противоречиями дисциплин математического цикла, которые, с одной стороны, должны планировать содержательный аспект преподавания с учетом ориентирования на развитие познавательной и интеллектуальной сфер психики школьника, а с другой предполагают создание специализированной среды, в которой такой подход будет реализован. О роли предметных знаний в общем процессе формирования интеллектуальных качеств личности ребенка писала И.С. Якиманская, отмечая, что абстрактное развитие мышления невозможно практически, поскольку должно быть опосредовано через конкретные формы, например, содержание предметных дисциплин [124, с. 66]. Второе положение предполагает возможность выбора учебных материалов и их усложнение для поддержания уровня заинтересованности учащихся.

Математика позволяет воздействовать одновременно и на интеллектуальную составляющую процесса формирования личности, и на морально-нравственную. Об этом говорится в исследованиях Н.В. Метельского [74], который говорит о наличии высокого потенциала математики в формировании общих интеллектуальных способностей детей, которые одновременно пересекаются с познавательными и учебными (предметными). Так установлена закономерность: дети, имеющие успехи в изучении математики, одинаково успешно справляются и с прочими интеллектуальными задачами.

Вместе с тем в структуре личности интеллект занимает лидирующие позиции, определяя особенности развития каждого индивида. Таким образом, мы считаем, что математическое образование направлено не только на формирование предметной системы знаний, но и позволяет развивать личностные качества школьников, повышать их уровень самооценки.

§ 1.2. Возможности электронной образовательной среды в методическом сопровождении социокультурно-ориентированного обучения геометрии учащихся основной школы

Проблеме внедрения автоматизации в образовательную среду посвящен целый ряд исследований. В своей работе Jari Kaivooja [136] выделяет следующие основные направления перспективного развития ИТ: инфокоммуникационные технологии; цифровизация; повсеместное развитие и использование роботов. По словам Jari Kaivooja, в ближайшем будущем существенно увеличится число информационных потоков, а общество трансформируется в «современное общество вездесущего знания» (modern ubiquitous knowledge society).

В исследованиях С.В. Циреля [151] встречается мнение о грядущем расслоении общества в соответствии со способностями и готовностью людей к занятию тем или иным видом трудовой деятельности. Это позволит выделять людей, которые обладают достаточными коммуникативными способностями или умением участвовать в инновационных разработках и научных исследованиях.

Проблемы роботизации и влияния этого процесса на развитие социума описывается в трудах Н. Зибермана. Помимо стандартных технологических сфер, автор не обходит вниманием и социальную, где, по его мнению, также найдется место машинам [139].

В обучении и образовательной деятельности также происходят серьезные изменения, связанные с процессами: цифровизации [130], геймификации, информатизации, дистанционного обучения и роли дизайна в повышении его эффективности и привлекательности [153].

Влияние процессов информатизации на развитие общества и трансформацию образовательных процессов и системы образования в целом изучалось новозеландскими учеными [138]. Базу экспериментального исследования составили студенты (799 чел.) и аспиранты (81 чел.), которые были разделены на три группы в зависимости от возраста. Первая – лица младше 20 лет, вторая – 20-30 лет, третья – студенты старше 30 лет. Предметом изучения стала работа и учеба, а также степень включения для ее реализации различных типов информационных технологий и компьютеров. Задачей исследования было установление тех типов информационных технологий, которые доминируют у каждой возрастной группы. Результаты показали, что максимально отличаются предпочтения у лиц старше 30 лет, в то время, как остальные испытуемые показали примерно одинаковый уровень предпочтений, касающихся информационных технологий.

Одним из опасений расширения сферы влияния информационных технологий становится возможность снижения роли педагога в образовательном процессе, а также изменение его функционала. Среди наиболее перспективных направлений в области российских исследований в области инновационных технологий выделяются вопросы: создания «умных городов»; информатизации экономических процессов [77]; оперирование цифровыми данными на законной основе через принятие соответствующих нормативно-правовых актов [63].

Несмотря на существующие опасения, отметим ведущую роль учителя в педагогическом процесса вне зависимости от выбранных средств и средовых особенностей обучения. Так, ряд ученых придерживается мнения о том, что профессиональная деятельность преподавателей в век информационных технологий не может стоять на месте, изменяются подходы к обучению и коммуникации с детьми [132]. Но сам учитель остается ключевой фигурой образовательного процесса.

Однако существуют исследования, опровергающие данный тезис ([135], [150], [129], [140]). Так для поддержания высокой квалификации педагога и его навыка взаимодействия с детской аудиторией предлагается совершенствование его информационной грамотности, переход к системе непрерывного обучения на протяжении всей жизни [135].

Особенной популярностью пользуется теория информационных сред, которые повсеместно внедряются в системы образования России и других стран. Так, в исследованиях И.Н. Голицыной говорится о смене образовательных ориентиров в связи с принятием концепции Образование 3.0 ([32], [154]). Теперь в центре процесса остается учащийся, а не само знание. Индивидуальный подход выражается в разработке персональных образовательных траекторий, формировании компетенций, а не системы знаний, умений и навыков, оценка комплексная, а не предметная. Технологические новинки и информационные образовательные среды позволяют с большей эффективностью достичь поставленных законодателем результатов в формировании требуемого объема компетенций учащихся.

В процессе исследования нами были проанализированы работы, посвященные вопросам классификации и типологизации автоматизированных цифровых сред и технологий. Ученые говорят о наличии следующих их видов:

1) модульных, в основе которых лежит представление о разработке отдельных элементов, которые могут быть скомбинированы в различных вариациях с учетом индивидуального образовательного маршрута учащегося. В числе таких систем PIES [154] (personalized integrated educational system). В ряде исследований, например, «The Role of Automation in Undergraduate Computer Science Education» [155], раскрываются достоинства, перспективы и слабые стороны указанной технологии. Второй пример модульной среды – технология NGDLE (next generation digital learning environment) [128], авторами которой стали ученые Фонда Билла и Мелинды Гейтс. Задачей образовательной среды становится разработка такой образовательной среды, в которой ключевыми составляющими станут устойчивые связи и закономерности работы данных цифровых систем. При этом исследователям удалось интегрировать идеи модульного обучения в проекты NGDLE, тем самым расширив их функциональные возможности. Авторы выявили

следующие характеристики среды, обеспечивающие ее стабильное и устойчивое функционирование: интерактивность, индивидуализация, аналитические способности, консультирование, взаимодействие с третьими лицами, диагностика успеваемости, дизайнерское решение. Такая образовательная оболочка позволяет проводить занятия с упором на личностный аспект, но не работает самостоятельно – для ее обеспечения требуется помощь куратора (преподавателя);

2) дистанционных и MOOC технологий. MOOC (massive online open course) представляют собой образовательные платформы, в рамках которых осуществляется сразу две функции: инструментальная и организационная. Первая отвечает за содержание технологии обучения, а вторая – за формирование цифровой среды. Такие платформы применяются при разработке онлайн-курсов по всему миру. Наибольшее распространение получили следующие оболочки – Coursera, edX, XeuetangX, FutureLearn и Udacity [63].

Одной из тенденций последних лет в области педагогических исследований становится возможность и пути использования MOOC в инклюзивном образовании, а также различных способов организации дистанционного обучения ([65], [68]). Ведущие вузы придерживаются тактики разработки онлайн-лекций для студентов и слушателей, для чего создаются специализированные платформы (Открытое образование, Лекториум, Универсариум и пр.). Однако у данных систем имеются и недостатки, выявленные Н.Г. Валеевой, М.А. Рудневым. Среди них: низкий процент студентов, завершивших обучение; недостаточность данных для определения фактической эффективности MOOC. Поэтому сегодня осуществляется научный поиск направлений применения указанных платформ, поиск источников их эффективности и дисциплин, где они могли бы применяться [14].

В работах S. N. Uribe, M. Vaughan отмечается третий недостаток системы – самостоятельное обучение без преподавателя. Обратная связь является важнейшим инструментом формирования эффективного образовательного процесса, а MOOC не в состоянии ее обеспечить [152]. Педагог также является наставником для учащегося, мотивирует его, заставляет посмотреть на собственные достижения под другим углом. Четвертый недостаток системы MOOC – ее стабильность и стандартность. В рамках ее функционала допускается запись лекций и проверка знаний путем тестирования. Мы приходим к выводу, что для повышения педагогической эффективности таких платформ следует предоставить возможность включения в педагогический процесс работы педагога, который будет контролировать и следить за выполнением плана учащимися. Например, возможно введение услуг наставника на платной основе, что повлияло бы положительно на число лиц, которые оканчивают курсы.

3) LMS (learning management system) [54] и LCMS LCMS (learning content management system) системы предназначены для организации дистанционного обучения. Их изучением занимались А.Б. Классов и О.В. Классова, которые определили, что указанные платформы позволяют получать доступ к учебным материалам сразу нескольким субъектам образовательного процесса, которые осваивают курсы, получают дополнительные материалы и консультации, отрабатывают полученные навыки в ходе практики. Фактически такая среда формирует цифровое образовательное пространство, в котором присутствует и педагог (как разработчик и куратор процесса), так и современные информационные технологии для обучения. Наиболее крупными системами LMS обучения стали Adobe Captivate Prime, Moodle, Claroline, Нетология, LMS НИУ ВШЭ и др.

Платформа GeoGebra также активно исследовалась учеными. Так, в работах Л. Фальберг-Стояновской и В. Стояновского [131] говорится о высокой роли образовательной среды данной платформы в процессе формирования мотивации студентов или школьников. Исследования H. Aydin и J. Monaghan [127] доказали практико-ориентированный характер платформы, что позволяет сделать обучение более доступным и наглядным. Повышение уровня знаний учащихся, которые имели доступ к ресурсам GeoGebra, было доказано в работах N. Thambi, L.K. Eu [149]. Так, средние баллы по итогам опытно-экспериментальной работы между учащимися контрольной и экспериментальной групп отличались на порядок в пользу последней. Следовательно, традиционные методы обучения не доказали свою конкурентоспособность по сравнению с инновационными цифровыми. Положительная динамика освоения раздела тригонометрии школьниками, обучающимися с применением платформы GeoGebra, была отмечена в работе Y. Zengin, H. Furkan, T. Kutluca [157].

Перспективность включения рассматриваемой цифровой платформы в образовательный процесс школ для преподавания дисциплин математического цикла рассматривается в исследованиях J. Hall и G. Chamblee [134]. Данная разработка позволяет в большей степени реализовывать цели и задачи обучения старшеклассников, воздействовать на процесс самообразования педагогов, формировать познавательный и интеллектуальный типы мышления у учащихся.

Выводы E. Zakaria и L.S. Lee [156] свидетельствуют о принятии данного методического программного обеспечения со стороны педагогов. Так учителя математики рассматривают GeoGebra как эффективный инструмент в формировании необходимых навыков, знаний и умений, а также формирования интерактивной среды для взаимодействия субъектов образования при изучении разделов алгебры и геометрии в школе. Применение платформы обеспечивает неограниченные возможности как для преподавателей, так и для студентов, открывает простор для творчества и исследования, наделяет учителя функциями куратора и наставника. Мы считаем, что данное приложение может использоваться в качестве инструмента усиления методической составляющей образовательного процесса, а также механизма, с помощью которого осуществляется доступная подача материала и абстрактных понятий из геометрии для их быстрого освоения учащимися.

Очередной эксперимент с применением функционала GeoGebra проводился учеными D. Takaci, G. Stankov, I. Milanovic [148]. Авторам удалось определить, что изучение основ математики при помощи информационной среды было проще и доступнее, чем с использованием традиционных дидактических средств. Достоинствами программы стали возможность коллективного решения задач, групповой работы, построения графиков и функций.

О потребности в разнообразии подходов к преподаванию математики писали N. Arbain, N.A. Shukor [126]. Авторы отмечают, что такой подход позволит удерживать внимание и заинтересованность учащихся на протяжении долгого времени, повышать результативность занятий. Однако для достижения таких итогов следует использовать педагогический потенциал педагога как главного наставника и куратора процесса.

В работе В.Ф. Очкова и Е.П. Богомоловой [142] говорится о том, что применение компьютерных технологий в рамках математического образования позволяет расширить возможности педагогов, отказаться от исполнения рутинных обязанностей в пользу подбора современных методик и приемов обучения.

§ 1.3. Методологические основы социокультурно-ориентированного обучения геометрии школьников в электронной образовательной среде

§ 1.3.1. Понятийные психические структуры как специфический результат социокультурно-ориентированного обучения геометрии школьников

В контексте социокультурной концепции образования содержание учебного предмета, рассматриваемое как фактор интеллектуального развития учащихся, должно быть проекцией не столько нормативного научного знания, сколько основных закономерностей интеллектуального развития личности в процессе обучения, в том числе психических закономерностей формирования научных понятий у учащихся разного возраста. Именно сформированные понятийные психические структуры, обеспечивающие усвоение способа понимания, применения научных понятий, ценностное признание, принятие, осмысление знаково-символических конструкций дисциплинарного знания школьниками, следует рассматривать как основной результат обучения геометрии.

Понятийное мышление как категорию дидактики и психологии рассматривал Л.С. Выготский ([1], [21]). Данный процесс – постепенный, а его результатом становится умение оперировать системой понятий, а также заниматься изучением наук и интересом к ним. Вместе с тем автор отмечает, что данный тип мышление не всегда успешно формируется, из-за чего не каждый взрослый индивид может выполнять указанные мыслительные операции. Дальнейшее подтверждение выводы Л.С. Выготского получили в работах Л.М. Веккера [15], который проводил эксперимент по выявлению типов мышления у студентов и их педагогов. Исследования показали, что отсутствие логики при построении системы выводов, навыков дедукции, а также иные нарушения понятийного мышления встречаются в равной степени у индивидов любого возраста. Следовательно, понятийное мышление нельзя считать строго привязанным к определенному уровню образования, развития или возрасту.

В работе Л.М. Веккера встречаем следующее описание примера, который предлагалось разрешить испытуемым. Задача: в списке предложены три ведра, два камня, семь собак и две лошади. Необходимо назвать, какие из предметов лидируют по численности – физические тела или живые существа. Для взрослого человека указанные понятия должны быть известными, однако это не исключает неверные ответы со стороны испытуемых.

В исследования Ж. Пиаже ([82], [83]) поднимается вопрос о разработке классификации познавательных форм, которые в свою очередь соотносятся с категориями состояния и преобразования как общее и частное. Опираясь на законы логики, философ пробует выделить соответствующие психологические дескрипторы и операторы, которые бы позволили составить полноценную картину сущности процесса оперирования и формирования понятийного мышления у детей и взрослых. Учитывая возможность проведения экспериментальных исследований в области психологии личности, Ж. Пиаже предлагает рассматривать в качестве дескрипторов фигуративные функции объектов окружающего мира, т. е. те из них, которые могут быть выражены в виде состояний.

Отметим также ряд исследований, которые позволили сформировать целостную и полноценную научно-методологическую базу теории понятийного мышления в психолого-педагогических исследованиях. В частности, были установлены:

– стадии формирования научных понятий (Н.Ф. Талызина) [104];

– приемы и способы формирования понятийного мышления с применением личностного опыта и ментальных способностей человека (М.А. Холодная) [112];

– дидактические основы и психологические закономерности формирования представлений школьников о математических понятиях посредством введения специализированных курсов логики в дополнение к урокам математики (Ю.И. Веринг) [16];

– потенциал уроков математики в процессе формирования понятийного мышления школьников и развития личности в целом (Н.Я. Виленкин) [17];

– исследования потенциала школьного курса геометрии в процессе становления личности и необходимых психологических свойств и качеств (Г. Х. Воистинова [20] и др.).

Для нашего исследования представляет интерес концепция социокультурно-ориентированного обучения математике, предложенная Н.Г. Подаевой и др. В рамках данной теории формирование понятийного мышления школьников происходит путем воздействия на три сферы его деятельности. Для этого авторами разработана типология видов обучения данной дисциплине, в которую включаются *инструментально-ориентированный*, *ценностно-ориентированный* и *предметно-ориентированный* виды. Особенность такой типологизации заключается в возможности соотнесения выделенных типов обучения с видами научного знания (декларативный, процедурный, ценностный) и разделом математической теории (процессуальный, содержательный, процессуальный). Подробнее типология представлена в таблице 1.

Таблица 1.

Виды обучения математике

<table>
<tr><td colspan="2">Предметно-ориентированное обучение</td><td>Инструментально-ориентированное</td><td>Ценностно-ориентированное обучение</td></tr>
<tr><td colspan="4">Области математического знания</td></tr>
<tr><td colspan="2">Содержательная</td><td>Процессуальная</td><td>Контекстная</td></tr>
<tr><td colspan="4">Типы научных знаний</td></tr>
<tr><td colspan="2">Декларативный
(знания о том, «что»)</td><td>Процедурный
(знания о том, «как»)</td><td>Ценностный
(знания о том,
«какой и зачем»)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Развитие понятийных психических структур</td></tr>
<tr><td>Этапы</td><td>Компоненты</td><td>Уровни</td><td>Закономерности</td></tr>
<tr><td>Мотивировка</td><td rowspan="2">Рефлексивный: семантические структуры</td><td rowspan="2">1. Понимание материала</td><td rowspan="2">Рефлексивное отношение: осознание, обобщение, осмысление</td></tr>
<tr><td>Развитие семантических структур (категоризация)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Формирование понятийных психических структур (обогащение, перенос, свертывание)</td><td>Когнитивный: ценностные представления</td><td>2. Усвоение</td><td>Запоминание, систематизация, профилактика забывания</td></tr>
<tr><td>Эмоциональный: ценностные отношения</td><td>3. Переживание ценностных позиций</td><td>Эмоционально-оценочное отношение</td></tr>
<tr><td>Поведенческий: ценностные ориентации и личностные смыслы</td><td>4. Применение</td><td>Формирование умений, стандартное применение, творческое применение</td></tr>
</table>

В этой связи основная цель декларативных знаний – обеспечение *понимания* учебного материала. С этой точки зрения речь идет о *формировании семантических структур* – индивидуальной системы значений математических терминов, что является ключевым фактором успешности овладения школьной математикой. Причем, как отмечают психологи, понимание значений может быть *имплицитным* (скрытым) либо *эксплицитным* (осознанным).

Так, в исследовании Т.Н. Ушаковой [109] показано, что в сознании учащихся формируются устойчивые словесные ассоциации, способствующие образованию семантических структур – индивидуальных систем значений. Роль семантических структур заключается в их способности систематизировать ту систему знаний ценностей, которую учащийся получает в процессе обучения. К таким структурам относятся «вербальные сети», «семантические поля», «семантические пространства», словесные ассоциации и др. Обозначенные структуры относятся к категории вербальных, т. е. выражаемых при помощи слов. Невербальные включают в себя жесты, геометрические фигуры и прочие несловесные знаки и символы. Проиллюстрирует действие данной закономерности через описание семантической сети геометрической фигуры «четырехугольник»: в центре «сети» находится «квадрат», на ее ближайшей периферии – «прямоугольник», «ромб», «параллелограмм», а в наибольшем отдалении – другие виды четырехугольников. Подобного рода структуры подвержены вербальному воздействию, что способствует их изменениям в структурном плане, а также установлению механизмов передачи определенных импульсов.

Развитию семантических структур в рамках обучения математике способствует организация работы со значением соответствующих математических терминов с учетом тех затруднений, которые испытывают обучающиеся при усвоении материала на уровне слова. Целесообразно использовать учебные задания, направленные на формирование представлений школьников о том или ином термине не абстрактно, а через исторические примеры и определение соответствующего контекста. Ребенок должен понимать, в какой области знания или практической деятельности пригодится данный термин, а также представлять себе его как часть системы категорий.

Основная цель ценностных и процедурных знаний – обеспечение *усвоения, переживания* и *применения* материала. С этой точки зрения речь идет о *формировании ценностно-смысловой сферы личности* обучающегося как социально обусловленной направленности, в структуре которой выделяются *когнитивный, эмоциональный* и *поведенческий компоненты,* включающие соответственно *ценностные представления, ценностные отношения, ценностные ориентации* и *личностные смыслы. Ценностные представления* являются некими знаниями о математических категориях и методах. *Ценностные отношения* обучающихся к математическим категориям, объектам и методам как носителям культурных ценностей представляют эмоциональный компонент, поскольку ценностные представления должны быть включены в личностно признанную систему ценностей через отражение в сознании. Обучение следует понимать в качестве поэтапного процесса формирования системы знаний ребенка, в том числе и ценностного характера. Особенностью данного вида знаниевой системы становится ощущений «личного присутствия» субъекта обучения, а также использования таких языковых конструктов, как оценочные суждения. В их числе «важный (бесполезный)», «рациональный (нерациональный)», «изящный (громоздкий)», «любопытный (неинтересный») и т.п. Важным шагом в данном процессе становится отказ от традиционного подхода к пониманию структуры и содержания курса геометрии учащимися. Сенсорно-эмоциональный метод кодирования данных становится тем прогрессивным механизмом, который отличается повышенной эмоциональной составляющей. Только ценностное отношение к предметному материалу позволит закрепить его в сознании, а в дальнейшем свободно оперировать не как данными, но как одной из ценностных ориентаций.

Ценностные ориентации тесно связаны с личностными смыслами, в совокупности с которыми образуют базовые формы поведенческих механизмов личности. Поэтому включение задач на построение в программу курса геометрии в средней школе позволяет работать на более высоком уровне сложности, который всегда мотивирует подростков к активному учению.

Этапы задач на построение – анализ, выбор оптимального пути построения (синтез), возможность проконтролировать себя самостоятельно (этап доказательства) и исследование – позволяют формировать ценностные знания, выражающиеся в виде оценочных суждений. С этой точки зрения речь идет о *развитии понятийных психических структур.* Анализ психологических исследований позволил выделить в процессе обучения ключевые этапы: *мотивировку, формирование семантических структур, формирование понятийных психических структур*.

Ключевые характеристики концепции социокультурно-ориентированного обучения школьников математике опубликованы (Н.Г. Подаева), что позволяет говорить о следующей системе понимания обученности детей (таблица 2). Автором предлагается рассмотрение процессов формирования названных качеств через прохождение субъектами образовательного процесса через три уровня: понимание, усвоение, применение.

Таблица 2.

Социокультурно-ориентированное обучение школьников математике: уровни, закономерности, фазы, этапы

<table>
<tr><th>Уровни</th><th>Психодидактические закономерности</th><th>Фазы цикла освоения ценности</th><th>Этапы</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Понимание (легитимация ценностного отношения)</td><td rowspan="2">Рефлективное отношение: осознание, обобщение, осмысление содержания и процесса деятельности</td><td rowspan="2">Побуждение, коммуникация-трансляция деятельности</td><td>Мотивировка</td></tr>
<tr><td>Развитие семантических структур (категоризация)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Усвоение</td><td>Запоминание</td><td rowspan="4">Адаптация</td><td rowspan="7">Формирование понятийных психических структур (обогащение, перенос, свертывание)</td></tr>
<tr><td>Систематизация</td></tr>
<tr><td>Профилактика забывания</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Применение (освоение ценности)</td><td>Формирование умений</td></tr>
<tr><td>Стандартное применение</td><td rowspan="2">Продуцирование</td></tr>
<tr><td>Творческое применение</td></tr>
<tr><td>Ценностное отношение</td><td>Эмоционально-оценочное отношение: переживание ценностных позиций</td><td>Ценностная ориентация</td></tr>
</table>

Следовательно, образовательный процесс в школе в рамках уроков математики должен основываться на принципе целостности системы знаний – ценностных, декларативных, процедурных. То есть ребенок должен не просто понимать, о каком процессе, предмете или явлении идет речь, но и понимать, для чего он необходим (*зачем?*). Так обеспечивается выстраивание рефлекторного отношения учащихся к предмету, а также эмоционально-оценочного. С этой точки зрения речь идет не только о передаче с помощью символов значения информации (формирование семантических структур), но прежде всего о процессе ***формирования понятийных психических структур***. К рассмотрению этой проблемы обратимся далее.

С учетом исследованных особенностей школьной методики обучения математике и специфики традиционного введения новых понятий было установлено, что в традиционной методике процесс введения новых понятий опирается преимущественно на декларативные знания. Введение понятия «рассматривается как процесс вычленения некоторого класса чувственно воспринимаемых объектов на основе выделения их существенных черт» (С.А. Владимирцева [19]). Акцент ставится на работе с определением: формирование умений различать объекты с опорой на признаки понятия, относить данный объект к определенному классу с помощью тех же признаков и др. Таким образов, много времени и усилий отводится математическому объекту, в то время как образование понятий непосредственно связано с освоением мыслительных операций, общих интеллектуальных, обобщенных учебных умений, составляющих внешнюю структуру деятельности обучающихся. В связи с этим деятельность по освоению понятия должна способствовать трансформации декларативных знаний в процедурные и ценностные. Эффективное овладение основными геометрическими понятиями как системой мыслительных действий и операций возможно в процессе обучения задачам на геометрические построения. Происходит освоение обучающимися графических схем, способности подбирать их к существующим геометрическим предметам, развитие сенсорных систем, обучающихся – умения оперировать образами, формирование понятийных структур – процесс «превращения определенных единиц объективно существующего знания в субъективные ментальные структуры, существующие уже «внутри» опыта человека в качестве психических новообразований». Однако процесс заучивания становится инструментом механического запоминания информации, но не ее осмысления или дальнейшего перевода в ценности. Поэтому Л.М. Веккер придерживается мнения о необходимости поэтапного получения и структурирования данных в структуре личности учащегося.

С точки зрения психологии формирование понятийных структур представляется сложным процессом, который направлен на преобразование поступающей новой информации об объектах или явлениях в доступные данные, которые могут встроиться в существующую систему мировоззрения и мышления человека. В результате формируется новая психологическая структура, качество личности или навык, ассоциирующийся с данным понятием. Для формирования понятийного типа мышления следует придерживаться подхода, который предполагает опережающее и проблемное обучение, а не традиционный подход и методы заучивания. Об этом, как отмечалось ранее, писал в своих трудах Л.М. Векккер [15].

Ключевым понятием в данном случае становятся понятийные психические структуры, под которыми понимаются такие новообразования в психике учащегося, которые позволяют оперировать понятиями, использовать их в практической деятельности и повседневности. При этом кодирование информации в данном случае не подвергается жесткому регламентированию, а понятия между собой соединяются различными формами интегративных связей на основании тех или иных присущих им признаков (М.А. Холодная) [112, с. 93]).

Понятийное мышление есть интегральное свойство личности, которое формируется путем соединения таких составляющих мыслительных действий, как модальное, тактильное, образно-пространственное и вербальное. Через трансформацию и интеграцию мыслительных операций составляются определенные визуальные схемы, с помощью которых учащийся интерпретирует и осваивает более сложное и абстрактное геометрическое понятие.

Применительно к понятийным структурам допускается использование системного подхода, а также построение иерархий от основополагающих понятий к зависимым. Сам термин «понятие» был введен в научный оборот Л.С. Выготским [26, с. 53], который понимал под ним специфический вид и структурное образование систем обобщения, которому присущи такие черты, как наличие общих черт и характеристик объекта, наличие устойчивых связей между составляющими, а также интегрирующего качества, которое может оцениваться как достоверность или социальная ценность явления или научного процесса. Такое психическое свойство должно приобретать значимость не только для общества, но и для самого субъекта образовательного процесса, как носителя культуры.

Понятийное мышление у подростка не сформировано в достаточной степени, однако играет важную роль во всем процессе его развития. Вероятно, этим объясняется повышенный интерес к данной проблеме со стороны исследователей. При помощи понятий учащиеся постигают окружающий и внутренний мир, составляют выводы и закономерности.

Анализ психологических исследований ([112], [29]) позволил в качестве основных этапов процесса формирования «субъективного образа содержания понятия» выделить следующие: мотивировку, категоризацию, обогащение, перенос, свертывание.

Мотивировка – подготовительный этап, на котором у учащихся актуализируются потребности в получении нового знания или опыта, происходит осмысление ценности образования как источника инструментов для решения интеллектуальных проблем за счет введения новых понятий.

Категоризация – процесс введения в программу нового термина. Иными словами, это знакомство школьников со значением, характеристиками, закономерностями, свойствами того или иного математического объекта. Алгоритм такого ознакомления следующий: 1) называние понятия или его графическое изображение; 2) обобщение (свойства, признаки); 3) определение (составление полноценной словесной характеристики).

В школьной методике обучения математике рассматриваются два традиционных подхода к введению понятия: *конкретно-индуктивный* (начинается с рассмотрения примеров изучаемых объектов, затем выявляются их общие свойства, составляющие определяющий признак, вводится новый термин и обозначение, формулируется определение) и *абстрактно-дедуктивный* (введение понятия начинается непосредственно с определения). Рассмотрим применение каждого из подходов при введении понятия «параллелограмм». При *конкретно-индуктивном* подходе обучающимся вначале показывают изображения четырехугольников, которые являются параллелограммами. Задается вопрос: «Как расположены противоположные стороны четырехугольников?». Учащиеся при помощи учителя приходят к выводу: «Обе пары противоположных сторон параллельны». Вводится определение: «Четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны, называется параллелограммом». При *абстрактно-дедуктивном* подходе вводится приведенное выше определение параллелограмма. Далее организуется учебная деятельность по его усвоению.

Обогащение – знакомство со структурой и свойствами понятия. Алгоритм данного процесса предполагает: 1) знакомство с понятиями признака и свойств явлений и процессов; 2) развитие навыков школьников самостоятельно выдвигать гипотезы, которые оказываются либо верными, либо научно опровержимыми и ложными.

Перенос – умение использовать новое понятие не только по заданной схеме, но и в других процессах. Способствует развитию указанного навыка учебно-познавательная деятельность школьников, которая организуется под руководством педагога. Так свойства и признаки присущи не только математическим категориям, но каждому объекту вне зависимости от его классовой принадлежности. Поэтому задача учителя – конкретизировать возможность использования данных терминов в различных предметных областях.

Свертывание – внедрение нового понятия в существующую систему знания. Иными словами, это закрепление материала путем обращения к нему в ходе дальнейшего освоения дисциплины. При этом подробно понятие уже не рассматривается, поскольку требует лишь систематизации полученных знаний, их обобщения и интериоризации.

В психологических исследованиях выделяются способы кодирования информации при изучении математики (Л.М. Веккер [15]). Это субъективные средства, с помощью которых человек отображает (представляет) в своем опыте окружающий мир и которые он использует в целях организации этого опыта для будущего поведения. В структуре интеллекта переработка информации одновременно идет в системе четырех основных модальностей опыта: словесно-речевого (в виде знаков), визуально-пространственного (в виде образов), предметно-практического (в виде двигательных действий), сенсорно-эмоционального (в виде ощущений и переживаний) (М.А. Холодная [112]).

Знак *(словесно-символический* способ кодирования) представляет собой отображение эмпирических или теоретических данных в кодированном виде с применением принятой в математике знаковой системы – формул, графиков, выражений, матриц и пр. При этом школьники учатся переводить такую информацию на человеческий язык.

Образ *(визуально-пространственный* способ) – это формирование представлений о математических объектах и закономерностях через их образное представление. Такой процесс связан с моделированием и предполагает активное участие самого учащегося. Через образы осуществляется процесс интенсивного развития и формирования понятийной сферы и категориального аппарата учащихся. Как отмечалось ранее, наглядное представление информации делает обучение математике упрощенным и эффективным. При отказе от образов происходит интеллектуальная стагнация, когда результаты учебной деятельности стремительно снижаются, о чем свидетельствуют выводы психологов (Р. Агнхейм, Л.М. Веккер, В.П. Зинченко, Л.Ф. Обухова, М.А. Холодная, Н.И. Чуприкова, И.С. Якиманская и др.). Формирование навыков образного мышления облегчит детям не только изучение математики, но будет способствовать формированию навыков логического мышления и абстрагирования, предотвратит забывание.

Предметное действие (*предметно-практический* способ кодирования информации) заключается в необходимости совершения некоторых операций с применением той системы навыков и умений, которая уже сформирована в сознании школьника.

Э***моциональное впечатление*** (*сенсорно-эмоциональный* способ кодирования) основывается на соответствующей сфере человеческой психики, формировании таких образов и знаков, которые воздействуют на эмоции школьника, побуждают его фантазировать и размышлять.

Таким образом, понимание как психический процесс предполагает навыки вербального выражения данного термина, его образное представление, умение соотносить с тем или иным действием и эмоциональное принятие. Мы полагаем, что для формирования указанной системы умений требуется научить ребенка преобразовать и синтезировать между собой два типа кодирования – словесно-символический и визуально образный.

Следовательно, при формировании понятий формируются такие их составляющие, как механизмы кодирования, их сочетание в деятельности, использование приемов категоризации и типологизации, формирование в сознании учащегося образов явлений и процессов геометрии – понятий. Инструментами становятся когнитивные схемы, признаки и свойства явлений. Процесс формирования понятийной системы достаточно сложный и требует применения достаточно развернутой системы механизмов. В результате получаемое в ходе образовательного процесса знание преобразуется учащимся в личностно значимые конструкты, которые составляют его жизненный опыт и системы психических структур. Поэтому для формирования понятийного мышления требуется системный подход и длительное формирование обозначенных функций, а не заучивание материала.

При формировании понятийного мышления происходит параллельное обучение ребенка методам исследования и познания: анализу и синтезу, сравнению и обобщению, индукции и дедукции, абстрагированию и пр. Все указанные методы реализуются успешно в рамках математического образования. Также формируются: интеллектуальные навыки, умения планировать, выполнять математические операции, выбирать рациональные пути решения и пр.

В процессе изучения геометрии у детей формируются компетенции, навыки и умения, которые трансформируются в особые психические структуры. Алгоритмы такого формирования могут быть выражены через следующую формулу: образование представления – формирование образа-концепта – понятие – ценностное отношение. Такая схема позволяет наглядно отобразить процесс преобразования в виде элементов блочной структуры, которая выражает этапы формирования понятийного мышления в целом и его составляющих в частности. Любые геометрические понятия могут быть выражены через указанную схему, благодаря ее структуре и природе данного вида деятельности [87], [144].

Вместе с тем в практике школьного обучения геометрии речь не всегда идет именно о математических понятиях. Педагоги могут рассматривать его как синоним математического объекта, что не вполне корректно. При таком подходе реализуются только первые два этапа указанной выше схемы, а само целостное понятие и ценностное отношение к нему не формируется у учащегося.

Определимся с понятием математического объекта. Под ним понимается результат выделения из предметов и явлений окружающего мира количественных и пространственных отношений и абстрагирование от всех других[4]. Вместе с тем объекты сами по себе не являются целью и ценностью: они предназначены для обозначения явлений, в совокупности образуя сложные

---

[4] К математическим объектам относятся прямая линия, треугольник, число 3, бинарное отношение равенства фигур на множестве всех фигур плоскости и др.

структуры и образования: классы, разделы и пр. Именно эти сложные понятия лежат в основе педагогического процесса.

Таким образом, с позиций формальной логики **математическое понятие** (или математическая теория данного понятия) – это сложная система взаимосвязанных, логически упорядоченных суждений, возникающая при изучении соответствующего математического объекта. Вот почему средством эффективного развития понятийных психических структур обучающихся выступает учебная деятельность по освоению обобщенного способа решения геометрических задач на построение в электронной образовательной среде.

§ 1.3.2. Модель системы методического сопровождения социокультурно-ориентированного обучения геометрии в электронной образовательной среде

В рамках настоящего исследования разработана модель системы методического сопровождения обучения геометрии учащихся основной школы в электронной образовательной среде, которая основывается на положениях теории социокультурного подхода и идеях индивидуализации обучения геометрии в школе. В основе построения образовательного процесса лежат такие принципы, как: независимость, рассматриваемая автором как способ снятия видимых барьеров для получения образования; гибкость; интегративность как возможность включения принятых принципов преподавания математики в современную парадигму построения образовательного процесса; нелинейность (результат непропорционален и неадекватен усилиям; целое не есть сумма его частей); индивидуализация, означающая способность системы методического сопровождения отвечать целям обучаемого, его мотивам, индивидуальным особенностям; принцип открытости, означающий, что система методического сопровождения может быть изменяемой, расширяемой, все изменения могут быть осуществлены не только по инициативе обучающего, но и обучаемых. Открытая система дистанционного обучения математике способна интегрироваться с другими системами, а также должна предоставлять ряд альтернатив по освоению образовательных программ, что может быть выражено в том числе и в предоставлении выбора типов занятий синхронно или асинхронно, в режиме реального времени или отсрочено, индивидуально или в группе и пр.; принцип социокультурно-ориентированного обучения, согласно которому социокультурное содержание обучения математике понимается как состоящее в усвоении математических знаний, навыков, умений, опыта, культурных базовых способностей как форм освоения культурных ценностей, носители которых – математические понятия, категории, методы.

Таким образом, принципы позволяют говорить о необходимости формирования методического сопровождения, призванного обеспечить их практическую реализацию. Данный процесс рассматривается нами как доступная, открытая и вариативная система, основанная на принципах интеграции современных и традиционных подходов к обучению и предполагающая применение средств ИКТ в процессе формирования личности школьников в рамках преподавания им геометрии с применением материалов ресурса GeoGebra. Формирование личного опыта учащихся протекает поэтапно и предполагает прохождение следующих стадий: предметно ориентированной; ценностно-ориентированной; инструментально-ориентированной. Для каждой из стадий характерно использование соответствующего методологического инструментария, а также нацеленность на подходящий тип научного знания.

Обучение геометрии в социокультурно-ориентированной парадигме заставляет педагогов пересматривать также содержательную сторону этого процесса. Целесообразно говорить о трех направлениях совершенствования данной области: 1) подготовка учащихся к развитию навыков в области геометрии; 2) углубленное изучение отдельных тем и разделов, повторение пройденных материалов, формирование требуемых компетенций; 3) переход от тотального контроля к самоконтролю успеваемости, что позволит повысить мотивацию и ответственность учащихся за результаты собственного обучения.

Модель системы методического сопровождения процесса освоения обобщенного умения по решению геометрических задач на построение в электронной образовательной среде состоит из следующих компонентов:

– обучающая подсистема, представленная целями, содержанием, методами, средствами, формами организации методического сопровождения;

– контрольно-диагностическая подсистема, содержащая методы и формы диагностики результативности методического сопровождения, проявляющаяся в комплексном развитии рефлексивного, когнитивного, эмоционального и поведенческого компонентов понятийных психических структур, обучающихся как продуктов освоения обобщенного умения по решению задач на геометрические построения.

Вместе с тем особенностью рассматриваемой методической системы становится применение интернет-ресурса как основного источника знаний и средства обучения. Следовательно, можно говорить о такой ее структуре, состоящей из нескольких составляющих:

технологической – методические ресурсы и материалы, размещенные на платформе GeoGebra.ru. В совокупности они формируют не только информационную систему, но и образовательную среду;

методическая, включающая в себя весь комплекс материалов, разрабатываемых педагогом для формирования необходимых знаний, умений и навыков учащихся, их ценностей и смыслов, типов мышления. В качестве практического примера приведем использованные экспресс-тесты, на основании которых принималось решение о проведении более крупных форм работы со школьниками: конкурсов, турниров, консультаций и пр. также предполагалось проведение консультаций как очно, так и дистанционно в зависимости от потребностей учащихся. Их цель – помощь и поддержка детей при выполнении ими самостоятельных заданий и исследовательских работ, направление в процессе доказательства или анализа, решения геометрических задач.

Технологическая система в нашем исследовании рассматривается как интернет-ресурс, позволяющий реализовать цели и задачи обучения в концепции социокультурно-ориентированного обучения. Методический же компонент позволяет практически наделять ценностным смыслом имеющееся содержание образования.

С процессуальной стороны модель системы методического сопровождения носит циклический характер и содержит следующие циклы:

– психодидактический – обеспечивает включение субъектов в процесс развития понятийных психических структур на основе целостного цикла, содержащего фазы:

1) формирование семантических структур – рефлексивного отношения, предполагающего *понимание* школьником математической информации;

2) развитие индивидуальных стилей кодирования информации;

3) формирование ценностно-смысловой сферы на уровнях *усвоения* математических понятий (формирование *ценностных представлений), переживания* ценностных позиций *(формирование ценностного отношения*), *применения* (формирование *ценностных ориентаций* и *личностных смыслов)*; причем третья фаза также обеспечивает возможность рефлексии – анализа, осмысления и обобщения обретенного знания, ибо подлинное понимание предполагает наличие знания о знании; с позиций социокультурного подхода основным принципом выступает ориентация на легитимацию – понимание ценностных позиций, что предполагает воспроизводство (коммуникацию-трансляцию) не столько математической информации, сколько ее значения и смысла (ценностного содержания) с помощью предметно-символьных систем;

– учебный цикл – отражает структуру учебной деятельности (в рамках формирования определенного понятия) и включает последовательно сменяющие друг друга фазы: предметно-ориентированная (содержательная) фаза – обеспечение декларативных знаний, понимания учебного материала; с этой точки зрения речь идет о формировании когнитивных схем и семантических структур – индивидуальной системы значений математических терминов, что является ключевым фактором успешности овладения школьной математикой; ценностно-ориентированная (контекстуальная) фаза – обеспечение ценностных знаний, переживания ценностных позиций. С этой точки зрения речь идет о формировании ценностно-смысловой сферы личности обучающегося как социально обусловленной направленности, в структуре которой выделяются когнитивный, эмоциональный и поведенческий компоненты, включающие соответственно ценностные представления, ценностные отношения, ценностные ориентации и личностные смыслы; в этой связи этапы задач на построение – анализ, синтез (построение), этап доказательства и исследование – позволяют формировать ценностные знания, выражающиеся в виде оценочных суждений; инструментально-ориентированная (процессуальная) фаза – обеспечение процедурных знаний, усвоения и применения научных понятий; с этой точки зрения речь идет о развитии понятийных психических структур;

– завершающий цикл – ориентирован на проверку достигнутого уровня сформированности системы математических понятий, который проявляется в комплексном развитии рефлексивного, когнитивного, эмоционального и поведенческого компонентов понятийных психических структур обучающихся как продуктов освоения обобщенного умения по решению задач на геометрические построения; используются следующие независимые характеристики для формируемых действий в составе обобщенного умения: системность, рефлексивность, обратимость, гибкость, форма действия, степень обобщения и категоризации, мера развернутости, мера переноса, мера освоения и обогащения, ценностно-смысловая сфера, мера свернутости.

На наш взгляд, при построении равновесной модели системы методического сопровождения социокультурно-ориентированного обучения геометрии требуется выделение как минимум пяти блоков: ценностно-смысловой блок, блок обучения в ЭОС, развивающий блок, контрольно-диагностический блок, блок рефлексии и последующей коррекции следующего цикла.

Ценностно-смысловой блок позволяет решить задачи формирования ценностно-смысловой сферы личности обучающегося как социально обусловленной направленности, в структуре которой выделяются когнитивный, эмоциональный и поведенческий компоненты, включающие соответственно ценностные представления, ценностные отношения, ценностные ориентации и личностные смыслы. В этой связи задачи на построение являются для подростка ценностными знаниями, выражающимися в виде оценочных суждений. Этапы задач на построение – анализ, построение (синтез), этап доказательства (возможность самостоятельного самоконтроля) и исследование – являются новой формой деятельности, которая формирует ценностные ориентации и личностные смыслы.

Блок обучения в ЭОС преимущественно реализует инвариантную составляющую обучения математике и отражает процессуальный аспект личностно и социально ориентированной деятельности учащихся по овладению математическим содержанием, следовательно, в данном блоке решается задача освоения обобщенного умения по решению геометрических задач на построение в электронной образовательной среде. В составе данного умения выделяются целостные единицы мышления, в структуре каждой из которых – четыре вида действий: 1) реальные операции, относящиеся к плоскости содержания понятия и представляющие «движения» по чертежу; 2) действия, обеспечивающие переход от чертежа к формальным отношениям; 3) формальные операции, относящиеся к плоскости знаковой формы; 4) интерпретация полученного результата на чертеже. Развивающий блок позволяет реализовать развитие понятийных психических структур обучающихся как процесс формирования определенной системы действий и операций, продуктом которых они являются и без формирования которых понятие не осваивается обучающимся, то есть не понимается (психодидактические закономерности осознания, осмысления и обобщения), не усваивается (закономерности запоминания, систематизации и профилактики забывания) и не применяется (закономерности формирования умений, стандартного применения, творческого применения) в дальнейшем к решению задач.

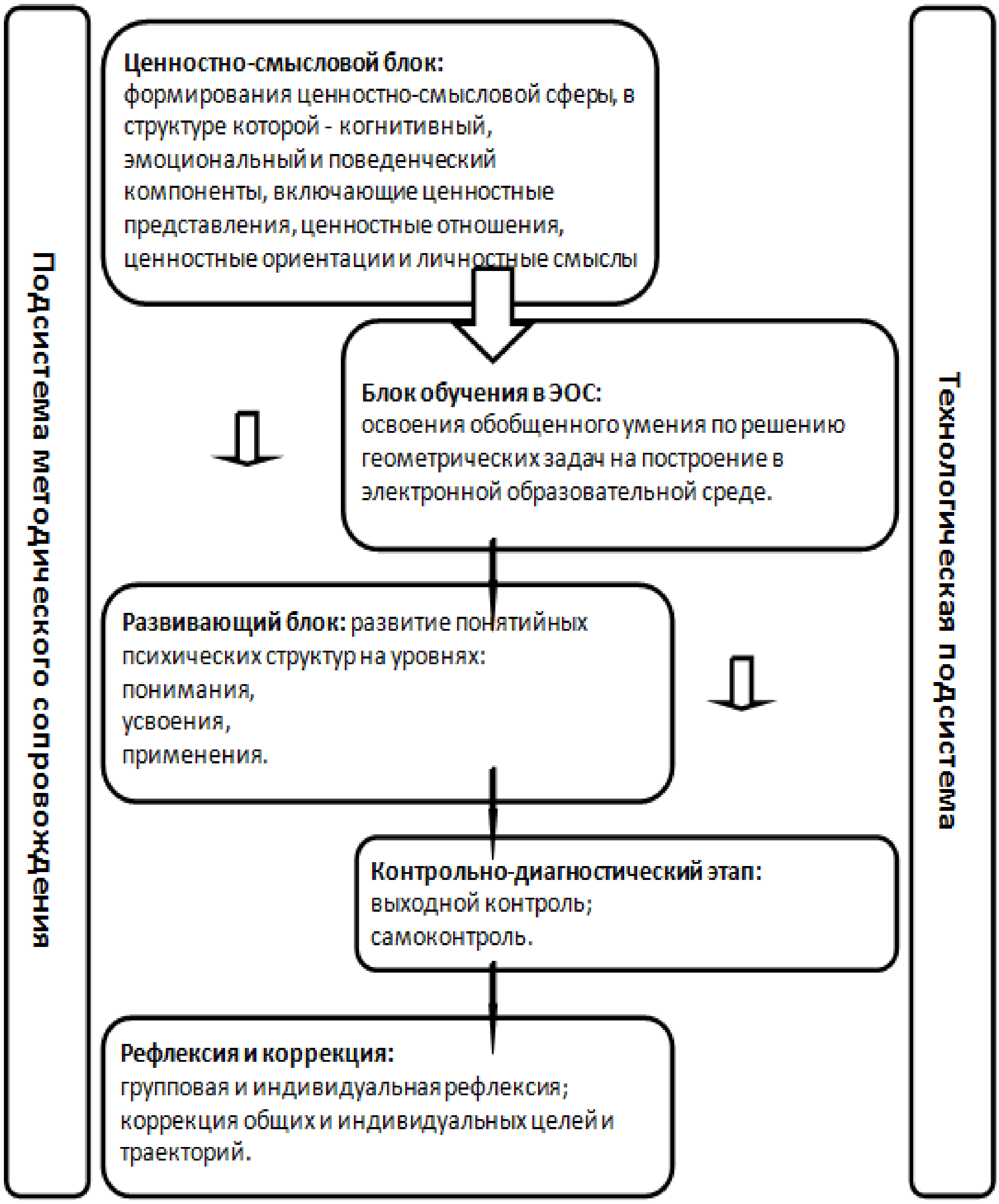


Схема 2. Модель системы методического сопровождения

Далее представим структуру описанного процесса, в который включаются следующие составляющие:

блок контрольно-диагностический, позволяющий оперативно отслеживать динамику реализации образовательного процесса;

блок рефлексивный, чьей задачей становится корректировка имеющихся целей, задач и средств обучения на основании полученных в ходе диагностики данных и их обработки.

На рисунке представлена блок-схема процесса сопровождения, что дает возможность наглядно представить описанные выше положения.

При разработке системы использовался инновационный потенциал современных образовательных технологий, предполагающий:

- формирование системы диагностики результативности обучения школьников, включая материалы для оценки сформированности у них семантических структур;
- проведение сравнительного анализа двух систем обучения детей геометрии, а также степени их эффективности в достижении поставленных исследовательских и педагогических задач.

В ходе эксперимента также анализировалась позиция учителя, оценивались возможности отказа от стандартного подхода к пониманию его как носителя и транслятора знаний, пересмотра его роли в формировании личности обучающегося. При проведении ОЭР педагоги занимались разработкой индивидуальных образовательных маршрутов школьников, проводили консультации, контрольно-измерительные действия, оказывали методическое сопровождение обучения.

§ 1.3.3. Организация освоения школьниками обобщенного умения по решению геометрических задач на построение в электронной образовательной среде как условие развития понятийных психических структур

Проблема обучения учащихся решению задач на построение занимала и занимает в методике обучения математике одно из ведущих мест. Хорошо известно, что геометрические задачи на построение позволяют организовать систематическое повторение материала, способствуют развитию образно-пространственного, логического, эвристического и алгоритмического компонентов мыслительной деятельности. С их помощью реализуются межпредметные связи геометрии с другими дисциплинами. На основании геометрических построений учащиеся овладевают основными геометрическими понятиями как системой мыслительных действий и суждений. Вместе с тем у учителя возникают проблемы с обучением умению решать конструктивные задачи по геометрии. Учитель – основной фактор успешности любого обучения. Его умение оценивать, думать, свободно мыслить, слушать и слышать позволяет добиваться желаемых результатов. Вместе с тем учитель не перестает учить, ведь, как говорил И.Ф. Шарыгин, «…геометрия невозможна без доказательств. Именно умение выстраивать аргументы, логически выстраивать систему доказательства говорить о сформированности математических навыков у школьника» [116].

Вопросам понимания сущности решения задачи на построение, обучения решению этих задач посвящено достаточно много исследований. Однако в методике обучения математике до сих пор нет общего представления о феномене «навык геометрического построения». Традиционно этот навык принято относить к учебным навыкам, основу которых составляют практические действия – так называемые предметные действия «на вещах». Они реализуются во внешних проявлениях, доступны наблюдению со стороны учителя, их легко описать, задать для усвоения, проверить и оценить правильность выполнения. Проблеме формирования навыков геометрических построений как предметных умений посвящено множество методических пособий и исследований. Но суть в том, что обучение детей на предметном уровне не позволяет сформировать у них ценностное отношение к самим геометрическим понятиям, отражающим не абстрактное, а конкретные физические явления и процессы. Чтобы их выделить, описать и задать для усвоения, необходимо раскрыть их структуру, операциональный состав, что еще очень мало изучено. Очевидно, что широкий резонанс проблема формирования и развития умений по выполнению геометрических построений может вызвать только при наличии единого научно обоснованного представления о феномене «навык геометрического построения». Как, например, задачи на построение как вид учебной деятельности со специфическим понятийным аппаратом способствуют развитию речи подростка? Чем обусловлено огромное значение задач на построение в развитии сенсорных систем и внимания? Какова природа проблем, возникающих у детей при решении задач на построение? Как помочь ребенку их преодолеть? Всегда ли они являются следствием уровня общих способностей или причиной может быть ценностно-смысловая сфера личности подростка? И, наконец, какова роль задач на построение в развитии теоретического мышления, в формировании способности устанавливать максимальное количество символьных связей в окружающем мире? Как известно, подростковый возраст – достаточно напряженный этап жизни ребенка. В это время помимо физиологических и психологических изменений его личности, происходит повышение учебной нагрузки. Следовательно, всё, что изучается в школе, так или иначе воздействует на психические структуры и образования обучающегося.

В современных учебниках геометрии методика обучению учащихся проводить построения имеет ряд недостатков. Так, например, в учебниках для 5-6 классов задачи на построение практически не рассматриваются как самостоятельные и выполняются не с помощью циркуля и линейки, а с помощью расширенного набора чертежных инструментов. На основании геометрических построений учащиеся знакомятся со многими геометрическими понятиями и фактами. Теоретические сведения при этом усваиваются на основе практических действий. К таким заданиям относятся практические задачи, например, на построение. Они составляют основу содержания курса геометрии: в 5 классе занимают 39% от всего объема заданий, в 6 классе – 34%. Вместе с тем фактически эти цифры не соответствуют действительности. Если проанализировать количество задач на построение фигур по отношению ко всему объему учебника математики для этих классов, то значения снизятся до 4 и 6% соответственно.

При обучении геометрии как самостоятельной дисциплине в 7 классе количество заданий на построение увеличивается. Они становятся самостоятельной формой работы и предполагают выполнение простых операций, например: построение луча или отрезка, деление отрезка на заданное количество частей, построение перпендикуляров, углов, биссектрис. Метод решения, предлагаемый школьникам – метод геометрического места точек [6].

Дальнейшее усложнение учебного материала осуществляется в направлении расширения спектра учебных задач. Так школьникам в 8-9 классах предлагается построить фигуры по отдельным данным, например, по сторонам, диагоналям, углам. Следующий уровень – обучение принципам вписывания окружности или ее описывания вокруг той или иной фигуры.

Анализ современных учебников по геометрии показал, что с каждым годом количество заданий на построение фигур в них сокращается. Так к 9 классу школьники практически не выполняют данный вид учебной деятельности. Вместе с тем диагностируется недостаточно высокий уровень сформированности у подростков навыков построения, образного мышления, логического мышления, что ставит под сомнение адекватность предложенной методической системы обучения геометрии. Указанные типы задач формируют основы чертежных навыков, учат школьников понимать схемы и чертежи, читать их самостоятельно, повышают в целом уровень графической культуры учащихся. Поэтому с течением времени такой пробел становится препятствием к расширению математических навыков, его способности воспринимать усложняющийся теоретический материал [34, с.82]. Задачи на построение формируют образное мышление и восприятие, а также учат сопоставлять, анализировать, делать выводы. В области геометрического образования такие навыки позволяют также не просто заучивать законы и принципы, но понимать источники формирования той или иной фигуры, упрощают понимание и запоминание материала.

Как отмечает М. Клякля [56], авторы учебников не обучают школьников правилам и приемам рассуждения, а увлекаются «готовой математикой». Автор говорит о слепом копировании теоретического материала из научных трудов и исследований, отличающихся краткостью, сухостью фактов, отсутствием пространных и лишних рассуждений. Однако, когда школьникам предлагают заучивать факты из области «готовой математики», это не дает желаемого результата – дети не видят логической связи между разделами математики и отдельными фактами, не в состоянии прочувствовать и понять логику того или иного постулата. Такой подход приводит к замыканию в себе, а также выводам о неспособности понять и выучить данный школьный предмет [56, с. 34]. В то же время принцип развивающего обучения и исследовательского метода постулирует: перед учениками необходимо ставить небольшие проблемы, чтобы они всегда были в творческом поиске. Однако применению этого принципа препятствует недостаточно высокий в 8-9 классах уровень их логического и понятийного мышления. Это противоречие можно разрешить умелым использованием конструктивных задач, которые представляют с этой точки зрения настоящие математические исследования в миниатюре и позволяют создавать условия детям для исследовательского поиска собственных решений.

Как говорилось в работах Г. Фройденталя, суть математических работ сводится к краткому изложению выводов. Но их адресатом является не ученик, а специалист и ученый. Для этой категории читателей дополнительные описания излишне, т. к. логику доказательства они прослеживают между строк. Однако такой подход неприемлем для составителей учебников, где требуется внимательность к деталям, чуткость и забота о школьниках. Ведь юный ученик еще не способен понять, как начать решение предложенной задачи или текста [56, с. 78].

Словом, практика свидетельствует о низком уровне владения школьниками навыками геометрических построений. Причиной такого положения становится упор школьной программы на заучивание, а не на исследование. Поэтому для выпускника не составит труда решить задачу на построение, найти теоретические подходы, но выполнить сам чертеж многие оказываются неспособными. Также школьники теряются при изменении условий уже известных им задач, т. к. не обладают необходимым для решения уровнем сформированности пространственного мышления. Для оформления и преподавания задач на конструирование учителям следует учитывать возможные сложности, среди которых:

- отсутствие ценностного отношения к ним со стороны учащихся;
- низкий уровень мотивации к построениям;
- сложности с пониманием условий задачи, указанных в ней данных и требований;
- низкие методологические, инструментальные и аналитические навыки школьников;
- сложности с логическим понимаем и умением выстраивать систему доказательства того или иного построения и процесса решения исследовательской задачи;
- процессуальные сложности, связанные с особенностями учебно-исследовательской деятельности.

Источник указанных проблем во многом лежит в области ценностей и смыслов, которых сформированы или формируются у учащихся. Так следует формировать у детей такой принцип и отношение к построениям, при котором они воспринимаются как необходимая составляющая всего образовательного процесса. Дети должны понимать, для чего в глобальном смысле им необходимы эти навыки и как они повлияют на формирование их как личности.

Именно смысловая и мотивационная оставляющие выделяются нами в качестве основных сложностей процесса обучения навыкам геометрических построений. Показательны ответы детей на вопросы о видах деятельности, которыми они занимались на уроках по геометрии. Так семиклассники чаще всего говорят о том, что построения выполнялись учителем на доске и на основании полученных чертежей происходил процесс доказательства в решении задач. Результаты такого подхода выражаются в отказе от методики заучивания и переходе к личностно-ориентированным методикам обучения и работы со школьниками.

Ценностно-ориентированное обучение – принципиально новый подход в области математического образования, который дает возможность рассматривать педагогический процесс с точки зрения его пользы для формирования целостной личности, способной к саморазвитию и самообразованию, а также со сформированными логическим и понятийным мышлением. В основе процесса лежит личность ученика, а также его ценностные ориентиры и установки.

В процессе обучения рекомендуется оперировать историческими и любопытными фактами, которые подогревают интерес к предмету, дают возможность понять логику отдельных явлений и процессов, источники тех или иных геометрических правил, закономерностей, построений.

Математическое понятие рассматривалось нами ранее, поэтому отметим лишь, что оно не сводится к предмету математики. В данном явлении сочетаются как предметные характеристики, так и взаимосвязи, образующие системы понятий и ценностей. Поэтому для раскрытия сущности понятий требуется контекст, условия и наличие сопутствующих понятий и терминов. Следовательно, понятие должно рассматриваться как система суждений, а не просто форма того или иного объекта.

Рассмотрим данное утверждение на примере анализа геометрической фигуры ромб. С точки зрения ценностно-ориентированного подхода он понимается, как следующая система суждений. Ученик, как правило, ответит, что это параллелограмм с равными противоположными углами, диагоналям, которые при пересечении образуют прямой угол. Однако такое описание можно оценивать лишь как перечисление отдельных свойств данной геометрической фигуры. Другой подход может основываться на анализе признаков ромба как геометрической фигуры, следовательно, идти от обратного: сначала описываются две диагонали, пересекающиеся под углом в 90 градусов, а лишь затем указывается на то, что эта фигура – ромб. Чтобы сформировать подобный знаниевый и методологический подход к пониманию геометрических понятий учащимся следует принимать участие в решении задач.

В рамках нашего исследования процесс изучения сущности геометрических понятий не сводится к «зубрежке». Поэтому термин «математический объект» не будет рассматриваться как синоним понятию в силу имеющихся между ними противоречий. В качестве предмета геометрии принято рассматривать совокупность идеальных форм и объектов, которые не являются реальными, но позволяют строить модели и оценивать свойства конкретных процессов и объектов. При помощи теоретического рассмотрения объектов осуществляется процесс их логического осмысления. Вместе с тем многие свойства, присущие идеальным объектам, не могут наблюдаться в реальности, что не мешает их определять и оценивать. Например, бесконечность линии на практике не наблюдается.

В наиболее обобщенном виде объект в геометрии рассматривается как некая геометрическая фигура или их совокупность, а также составляющие, в результате объединения которых получается данная фигура. Так, в исследованиях Г.П. Щедровицкого треугольник рассматривается с позиций целостного подхода как совокупность линий, углов, которые при их соединении и слиянии дают возможность оценивать полученную фигуру как треугольник со всеми присущими ему свойствами. Понятийное мышление позволяет устанавливать взаимосвязи и закономерности между самим понятием, его составляющими, а также восстанавливать структуру объекта по его характеристикам [120, с. 175].

Автор также говорит о том, что, как и сам треугольник, его составляющие представляют собой геометрические объекты. Это говорит об их иерархичности и устойчивой системе взаимосвязей. Следовательно, процесс анализа и описания геометрических понятий сводится к их поэтапному и логическому разложению на составляющие элементы, которые в совокупности образуют целостное свойство. Такой подход получил название «матрешечного». Иными словами, когда мы характеризуем геометрическое понятие, мы говорим одновременно и о конкретном объекте, и о его структурных элементах, и о связях между ними, двигаясь от простого к сложному или наоборот. Можно говорить о том, что геометрическое понятие отражает всё многообразие отношений, возникающих между объектами, а также уровнями знания. Однако диалогический метод не свойственен аксиологическому подходу к преподаванию геометрических понятий. В данном случае рассмотрение геометрических объектов происходит от наиболее простых форм к сложным с учетом родовых отношений [120, с. 175].

При работе с геометрическими объектами могут выполняться различные действия: определение, когда называются его свойства и характеристики; оперирование понятием, когда рассматриваются присущие объекту связи и отношения [120, с. 37].

С точки зрения психологических исследований, геометрические понятия позволяют мыслить образами и системами, а объекты сводятся только к знаковому отображению, то есть не имеют вербального воплощения. Таким образом, понятийное мышление мы рассматриваем как способ разворачивания мыслительных механизмов и операций с целью получения более полной информации о геометрических объектах, понятиях и способах их применения. [120, с. 37].

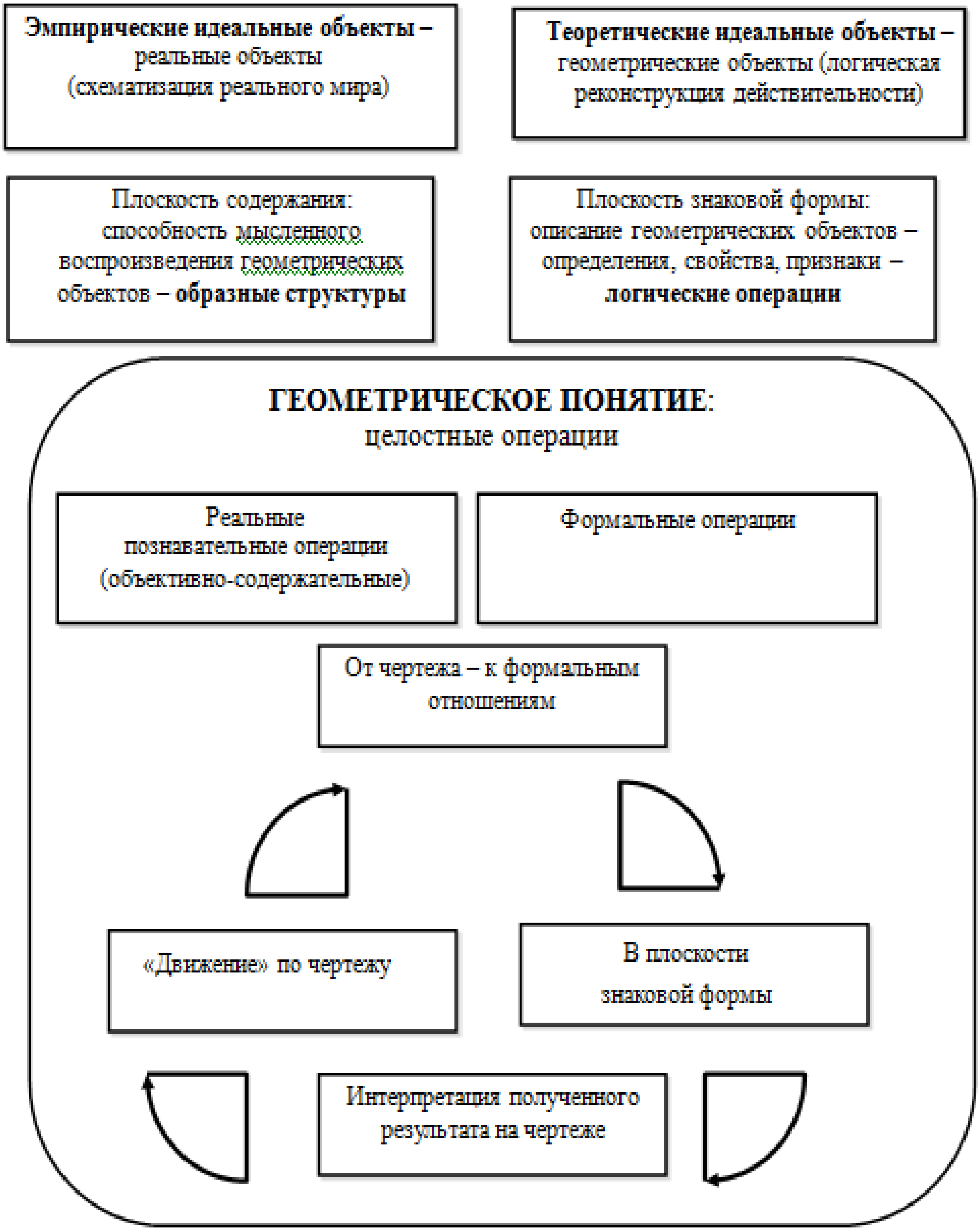


Схема 3. Модель процесса освоения геометрических понятий на основе взаимосвязи образных структур и логических операций

В работах Г.П. Щедровицкого также солидная часть отводится измерениям как способам действия с геометрическими объектами. Родственным понятием в данном случае становится наложение, которое показывает отдельные параметры фигур, но не является личностным образованием и ценностным отношением. Результативность данного действия крайне низкая [120, с. 135]. Для предотвращения разрывов между способами деятельности и самими объектами принимаются особые механизмы оперирования ими. Моделирование позволяет накладывать геометрические фигуры друг на друга с целью анализа, однако оно также предполагает включение прочих видов деятельности, которые связаны со знаковыми системами. Описанные действия являются характеристиками геометрии как отдельной области научного знания [120, с. 135].

При изучении геометрии автор призывает придерживаться принципов выполнения нескольких видов операций: целостных, реальных и формальных [120, с. 164]. При таком подходе производится комплексная работа с объектом как на уровне формы, так и содержания (знаков). Характеризуя указанные виды операций, отметим, что содержательная составляющая выражается через реальные их виды; процессуальные и учебные – с формальными операциями. К слову, последние не являются способами получения новых данных и знаний об объекте, но позволяют его исследовать и анализировать, рассматривать различные их объекты и составляющие. Познавательный потенциал таких операций высок, хотя и не результативен.

Для формирования новой системы знаний требуется выполнение целостных операций с геометрическими объектами. Процесс их образования тесно связан с навыками и способностями к образному мышлению, ведь именно через системы образов происходит формирование новых психических образований и структур. Постепенно увеличивая свой багаж знаний, учащиеся могут не прибегать к целостным операциям, поскольку сформированных образов оказывается достаточно для решения возникающих задач. Вместе с тем при необходимости образы раскрываются в более серьезные и подробные структуры, позволяющие выполнять последовательность исследовательских действий [119].

В результате проведенного исследования особенностей целостных единиц мышления мы приходим к выводам о том, что в ходе выполнения школьниками целостных операций происходит сложный процесс деятельности. В него включаются следующие действия: работа с чертежами и выполнение реальных операций; 2) переход к формальным действиям; 3) проведение знаковых операций; 4) аналитическая деятельность и формулирование выводов.

Таким образом, для нашего исследования представляют интерес следующие выводы:

- геометрическое знание не является синонимом объекта или изложения;
- для каждого вида мыслительной деятельности выработан собственный способ действий – реальные, формальные и целостные операции, каждая из которых решает собственные задачи.

Выводы по первой главе

1. Необходимость развития понятийных психических структур обучающихся определяет специфику процесса обучения геометрии в школе, основанную на целостной модели, компоненты которой представлены в виде блоков: 1) формирование когнитивных схем, семантических структур – рефлексивного отношения, предполагающего *понимание* школьником математической информации; 2) развитие индивидуальных стилей кодирования информации; 3) формирование ценностно-смысловой сферы на уровнях *усвоения* математических понятий (формирование *ценностных представлений),переживания* ценностных позиций *(формирование ценностного отношения*), *применения (*формирование *ценностных ориентаций* и *личностных смыслов)*.

2. В качестве средства развития выступает методическое сопровождение процесса освоения обобщенного умения по решению геометрических задач на построение в электронной образовательной среде. В составе данного умения выделяются целостные единицы мышления, в структуре каждой из которых – четыре вида действий: 1) реальные операции, относящиеся к плоскости содержания понятия и представляющие «движения» по чертежу; 2) действия, обеспечивающие переход от чертежа к формальным отношениям; 3) формальные операции, относящиеся к плоскости знаковой формы; 4) интерпретация полученного результата на чертеже.

3. Система методического сопровождения обучения решению геометрических задач на построение, опосредующего развитие понятийных психических структур обучающихся, основывается на личном опыте ученика, его развертывании в рамках трех фаз. Предметно-ориентированная (содержательная) фаза – обеспечение декларативных знаний, понимания учебного материала. С этой точки зрения речь идет о формировании семантических структур – индивидуальной системы значений математических терминов, что является ключевым фактором успешности овладения школьной математикой. Ценностно-ориентированная (контекстуальная) фаза – обеспечение ценностных знаний, переживания ценностных позиций. С этой точки зрения речь идет о формировании ценностно-смысловой сферы личности обучающегося как социально обусловленной направленности, в структуре которой выделяются когнитивный, эмоциональный и поведенческий компоненты, включающие соответственно ценностные представления, ценностные отношения, ценностные ориентации и личностные смыслы. В этой связи задачи на построение являются для подростка принципиально новой формой деятельности, которая делает его более взрослым в своих собственных глазах. Этапы задач на построение позволяют формировать ценностные знания, выражающиеся в виде оценочных суждений. Инструментально-ориентированная (процессуальная) фаза – обеспечение процедурных знаний, усвоения и при-

менения научных понятий. С этой точки зрения речь идет о развитии понятийных психических структур.

4. Основная идея исследования состоит в том, что в процессе становления понятий должны учитываться не только и не столько декларативные знания, сколько процедурные, обеспечивающие усвоение и применение материала, а также ценностные знания, которые выражаются в виде оценочных суждений и предполагают переживание ценностных позиций. С этой точки зрения речь идет о формировании ценностно-смысловой сферы личности обучающегося как социально обусловленной направленности, в структуре которой выделяются когнитивный, эмоциональный и поведенческий компоненты. Ценностные представления являются декларативными знаниями о математических категориях и методах и составляют когнитивный компонент. Эмоциональный компонент представлен ценностными отношениями обучающихся к математическим категориям, объектам и методам как носителям культурных ценностей, обеспечивающими включенность ценностных представлений в личностно признанную систему ценностей посредством их включения как нового психического образования. При выборе способов кодирования информации следует ориентироваться на сенсорно-эмоциональный его вид, который позволяет при помощи педагогического инструментария формировать у учащихся необходимую систему ценностных отношений. Ценностные ориентации, образующиеся в результате такого процесса, изменяют саму структуру личности школьника, позволяют ему успешно развиваться как профессионалу. Кроме того, ценности выполняют регуляторную функцию, определяя особенности поведения школьников в различных ситуациях. Следовательно, правильное преподнесение задач на построение позволит замотивировать школьников к учебе, а также повысить их значимость в собственных глазах.

5. С учетом исследованных особенностей школьной методики обучения математике было установлено, что в традиционной методике процесс введения новых понятий опирается преимущественно на декларативные зна-

ния. Много времени и усилий отводится математическому объекту, работе с его определением, выработке умений различать объекты, относить их к определенному понятию с помощью признаков и др. В то же время образование понятий непосредственно связано с освоением мыслительных действий и операций, общих интеллектуальных и учебных умений, составляющих внешнюю структуру деятельности обучающихся. В связи с этим деятельность по освоению понятия должна способствовать трансформации декларативных знаний в процедурные и ценностные. Эффективное овладение основными геометрическими понятиями как системой мыслительных действий и операций возможно в процессе обучения задачам на геометрические построения. Происходит освоение обучающимися графических схем, способности подбирать их к существующим геометрическим объектам, развитие сенсорных систем обучающихся, таких как: навыки образного и понятийного мышления, оперирования данными образами, формирование опыта деятельности, подкрепленного личностно-ценностным отношением и смыслами. Для достижения этих целей предполагается отказ от системы заучивания информации в пользу концепции индивидуализации обучения и определения путей для осмысленного обучения.

6. С учетом особенностей существующих исследований, посвященных вопросам понимания сущности решения задачи на построение, было установлено, что в методике обучения математике до сих пор нет общего представления о феномене «навык геометрического построения». Традиционно его принято относить к учебным навыкам, основу которых составляют предметные действия «на вещах». Они реализуются во внешних проявлениях, доступны наблюдению со стороны учителя, их легко проверить и оценить. Проблема в том, что в основе навыков геометрических построений лежат не предметные действия, а составляющие структуру деятельностной компоненты геометрических понятий реальные, формальные и целостные операции, которые интериоризированы и недоступны для объективации. Очевидно, что широкий резонанс проблема формирования умений по выполнению геомет-

рических построений может вызвать только при наличии единого научно обоснованного представления о феномене «навык геометрического построения». Какова природа проблем, возникающих у подростков при решении задач на построение? Как помочь ребенку их преодолеть? Всегда ли они являются следствием уровня общих способностей или причиной может быть ценностно-смысловая сфера личности подростка? И, наконец, какова роль задач на построение в формировании способности устанавливать максимальное количество символьных связей в окружающем мире? Для подростков они становятся способом формирования представлений об устройстве не только окружающих предметов и явлений, но и готовят их к будущей профессиональной деятельности через формирование понятийного мышления и соответствующих психических структур.

Многие барьеры, с которыми сталкивается учитель в школе при обучении умению решать конструктивные задачи, связаны с ценностно-смысловой сферой личности обучающегося и объясняются отсутствием ценностных представлений, ценностного отношения – принятия ими геометрических построений как ценности, которое способствовало бы формированию личностных смыслов, ценностных ориентаций и динамическому изменению личности обучающегося в соответствии с принятой ценностью.

Глава 2. Опытно-экспериментальная работа по социокультурно-ориентированному обучению геометрии школьников в условиях электронной образовательной среды

§ 2.1. Методическое сопровождение обучения геометрии учащихся 8-9 классов на занятиях факультатива «Конструктивная геометрия на евклидовой плоскости»

В данном параграфе будет проанализирована возможность организации в рамках школьного курса преподавания геометрии систем методического сопровождения, основанного на принципах ценностно-ориентированного подхода в образовании. Исследование проводилось с учащимися 8-9 классов в рамках факультатива «Конструктивная геометрия на евклидовой плоскости». Цель курса – развитие у школьников понятийных психических структур через формирование навыков построения геометрических фигур и решение задач с их применением для закрепления полученных навыков.

В рамках ОЭР были поставлены следующие педагогические задачи: анализ возможностей применения средств цифровых платформ GeoGebra для формирования у учащихся обозначенных ранее навыков и систем ценностных установок; анализ способов и форм организации самостоятельной работы студентов с использованием ресурсов электронных платформ; применение систем консультаций для поддержки и сопровождения школьников на сайте GeoGebra. При формировании содержания и форм организации факультативных занятий автор придерживался следующих педагогических принципов: равноправия субъектов; добровольности участия, индивидуализации, использование в качестве ориентира зоны ближайшего развития. Основу образовательной программы составили конструктивные задачи по геометрии, в которых предлагалось построить геометрические фигуры и их комбинации.

Задачи находятся в открытом доступе, познакомиться с ними учащиеся могут на официальной странице дисциплины. При разработке учебных заданий использовались стандартные задачи, взятые автором из открытых источников. При составлении их иерархии и порядка использовался принцип последовательности освоения темы, повышения уровня сложности заданий, их разнообразие. Применялись методы опоры на известные понятия и др.

При проведении занятий в рамках факультатива доминировали две основные формы работы: дистанционная и очная. Структура курса предполагает проведение следующих видов занятий:

- консультаций;
- тренировочных занятий;
- контрольных (диагностических).

На долю тренировочных занятий отводилась большая часть учебного времени, что позволило с большей степенью эффективности отрабатывать необходимые навыки и умения учащихся. Алгоритм такого занятия был следующий:

1) аналитический этап – изучение условий задачи, а также подготовка к проведению компьютерного эксперимента и моделирования;

2) конструктивный – построение фигур по заданию в тетрадях письменно;

3) доказательный – работа в тетради;

4) итоговый – оформление ответа и результатов на личной странице в специальной форме платформы GeoGebra.ru.

Несколько отличалась структура контрольных видов занятий, которые начинались с диагностики предполагаемого уровня сформированности того или иного понятия у учащегося. При этом педагогом фиксировались следующие показатели – ценности и смыслы, вкладываемые в него; знания и способы их усвоения; навык применения на предметном уровне владения системой компетенций; мотивация к работе с предлагаемыми интернет-ресурсами и платформами, в том числе готовность к прохождению дополнительных занятий, участию в олимпиадах, конкурсах и пр. Наконец, в финале диагностического блока определялись перспективы работы с учащимися, в том числе тематика и особенности проведения с ними консультаций. Средство фиксации и регистрации контрольных данных для их последующей обработки и анализа – индивидуальная карта достижений школьников, составляемая по определенным понятиям, выбранным педагогом в качестве предмета диагностики. На основе полученных данных вносятся коррективы в индивидуальный образовательный маршрут учащегося в части целей, методов и средств их достижения.

При проведении консультаций также могли применяться возможности электронной среды. Основная задача такой формы работы – сопровождение учащегося, помощь и поддержка при выполнении самостоятельных работ, в том числе на отдельных этапах работы над заданием по построению фигур.

Указанные положения легли в основу спецкурса, разработанного автором для занятий с учащимися 8-9 классов общеобразовательных школ. Учебно-методический комплекс имеет практико-ориентированную направленность и предназначен для закрепления и расширения знаний, умений и навыков школьников в области геометрии и решения конструктивных задач. Главной целью экспериментального обучения является формирование понятийных психических структур обучающихся через освоение ими обобщенных умений по решению задач на геометрические построения в рамках факультатива «Конструктивная геометрия на евклидовой плоскости». Основная ориентация – учащийся регулирует свою мыслительную деятельность, различая способ решения и обобщенный способ деятельности по решению задачи. При этом он пользуется обобщенным алгоритмом, который позволяет отразить структуру и взаимосвязи между составляющими единого знания: проанализировать условие задачи – посмотреть, что дано и что требуется построить; на этапе анализа задачи на построение сделать предположение, что задача решена (косвенный анализ) и выводы из этого предположения, касающиеся взаимосвязи искомой и данных фигур (от движения по чертежу к формальным операциям); вспомнить все известные признаки искомого понятия и сопоставить их с тем, что дано (движение в плоскости знаковой формы), а также с чертежом (интерпретация полученных результатов на чертеже) и др. При этом в каждом пункте указного алгоритма рекомендуется выполнять действия, составляющие содержание умения по решению задач на геометрические построения: содержательный анализ того, что дано и что требуется построить; умение выполнять косвенный (нисходящий) анализ (метод от противного или анализ Евклида, несовершенный анализ) с использованием ресурса динамической системы GeoGebra (этап анализа); умение рассуждать синтетическим методом, методом восходящего анализа (или анализа Паппа, совершенного анализа) (этап построения); умения выполнять элементарные построения циркулем и линейкой; умение устанавливать связи между методами построений (метод пересечений, движений, гомотетии, инверсии, алгебраический метод); умение выделять идеи построения, доказательства и исследования в задачах на построение; умение переносить идеи в нестандартные ситуации; умение решать конструктивные задачи в нестандартных ситуациях; умение самостоятельно использовать обобщенные приемы решения задач на построение в электронной образовательной среде и др.

Предварительно были отработаны со школьниками такие категории, как понятие, свойство, признак и т.д. Далее была проведена работа по отработке таких действий в составе обобщенного способа деятельности по решению конструктивных задач, как, например, подведение заданных в условии геометрических явлений под системы признаков искомых понятий и т.д. Отметим, что традиционно в исследованиях, посвященных проблеме обучения геометрическим построениям, действия, составляющие содержание умения по решению задач на геометрические построения, не выступают в качестве специального предмета усвоения. В традиционной школьной методике абсолютно не уделяется внимания тому, каким методом решается задача на геометрические построения (метод пересечений, гомотетии, движения, алгебраический и др.). Единственное исключение – это метод геометрических мест точек. В рамках экспериментальной методики действия, составляющие содержание умения по решению конструктивных задач, выступали в качестве специального предмета усвоения. Акцент ставился на этапе анализа, позволяющем определить ориентировочную основу деятельности при построении: с чего начать и в каком направлении двигаться, чем обусловлена необходимость тех или иных дополнительных построений и т.п. Благодаря этому в качестве единиц мыслительного процесса выступали *целостные операции,* которые включают в себя *реальные операции* (объективно-содержательные) и *формальные операции,* что обеспечивает единство *плоскости содержания* (плоскости геометрического объекта) и *плоскости знаковой формы*. Целостные операции фиксируются в сознании в виде образов, которые отражают сам процесс получения знания, фиксируют объект, связи знаний. Покажем это на примере отдельных занятий в рамках авторского факультативного курса.

Рассмотрим формирование обобщенного умения выполнять элементарные построения циркулем и линейкой на примере отдельных занятий в рамках авторского элективного курса в 8 классе.

Тема 1: **«Общие аксиомы конструктивной геометрии. Аксиомы математических инструментов».**

Учитель начинает объяснение нового материала. Основное содержание (определения, постулаты) дети записывают в тетрадь под диктовку учителя.

Сообщается, что раздел геометрии, в котором изучаются геометрические построения, называется конструктивной геометрией.

Вводится основное понятие конструктивной геометрии – понятие построения геометрической фигуры. Это понятие принимается без определения, конкретный его смысл известен из практики, где оно означает: начертить, провести (линию), отметить (точку). В интересах логической строгости изложения основное понятие конструктивной геометрии – построить фигуру – характеризуется через основные требования (общие аксиомы конструктивной геометрии).

Раскрывается сущность конструктивной задачи: во всякой задаче на построение требуется по каким-либо данным фигурам построить искомую фигуру, удовлетворяющую тем или иным условиям. При этом указывается, с помощью каких инструментов можно выполнить построения: линейка, угольник; транспортир, циркуль с данным раствором, линейка с параллельными краями и т.д. В дальнейшем, где не оговорено противное, предполагается, что все построения должны быть выполнены с помощью циркуля и линейки. Причем линейка не имеет масштабных делений, и с ее помощью можно лишь провести прямую через две точки. Никаких других операций выполнить линейкой нельзя. С помощью циркуля как элемента геометрических построений можно лишь описать окружность с центром в данной или построенной точке и радиусом, равным данному или построенному отрезку.

Вводится понятие основной плоскости как некоторой плоскости пространства. Предполагается, что все рассматриваемые фигуры лежат в этой плоскости. Даются следующие определения.

Определение 1. *Основными фигурами* называются точки, прямые и окружности основной плоскости.

Определение 2. Кроме основных существуют *простейшие фигуры*: отрезки, лучи, углы, полуплоскости, многоугольники, дуги окружностей.

Делается замечание: всякая простейшая фигура определяется заданием основных фигур – точек, прямых, окружностей.

Например, отрезок определяется двумя точками, луч – начальной точкой, прямой, которой он принадлежит, и еще одной точкой.

В дополнение к обычным обозначениям вводятся следующие обозначения:

отрезки (AB, BCи т.д.) - $\bar{a}$, $\bar{b}$ и т.д., их длины - a, b и т.д.;

углы - $\bar{\varphi}, \bar{\phi}$ и т.д., их градусные меры - φ, ϕ и т.д.;

окружности - $\omega(O, \bar{r})$ или $(O, \bar{r})$ или (O, AB) или ω, γ и т.д.

Определение 3. Всякую операцию, позволяющую присоединить к множеству построенных основных фигур новые точки, прямые, окружности, называют *шагом построения.*

Определение 4. Утверждения, в которых указано, какие шаги построения считаются выполнимыми, называют *постулатами построений*.

Перечисляются постулаты построений с помощью циркуля и линейки:

П1. Построение прямой, проходящей через две точки.

П2. Построение окружности с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.

П3. Построение точки пересечения двух непараллельных прямых.

П4. Построение точек пересечения окружности и прямой, если они пересекаются.

П5. Построение точек пересечения двух окружностей, если они пересекаются.

Учитель может задать детям следующие вопросы, которые актуализируют введенные ранее понятия в основном курсе геометрии:

1. Что называется лучом?

Ответ: Лучом называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной её точки.

2. Что называется отрезком?

Ответ: отрезком называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными её точками.

Далее переходят к выполнению элементарных построений (ЭП).

Тема 2: **«Постановка задачи на построение. Элементарные построения».**

Учитель напоминает сущность задачи на построение: задача на построение состоит в том, что требуется построить указанными инструментами фигуру, если дана некоторая другая фигура и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и данной. Каждая фигура, удовлетворяющая условию задачи, называется решением задачи. Найти решение задачи на построение – значит указать конечную последовательность основных построений, после выполнения которых искомая фигура будет считаться построенной в силу принятых аксиом конструктивной геометрии.

Далее переходим к рассмотрению элементарных задач на построение как «опорных». Сообщаем, что непосредственное расчленение решения на основные построения даже в простейших задачах приводит к большому числу логических «шагов». В случае сложных задач это может привести к тому, что за общей логической структурой решения уследить будет трудно. Поэтому в практике решения геометрических задач на построение поступают несколько иначе. Если найдено решение какой-либо задачи, то в дальнейшем разрешается пользоваться этим решением «в целом», т.е. не расчленяя его на основные построения. Такие задачи называем «опорными».

Существует ряд простейших «опорных» геометрических задач на построение, которые особенно часто входят в качестве составных «кирпичиков» в решение более сложных задач. Задачи такого рода рассматриваются преимущественно в первых главах школьного курса геометрии. Они называются элементарными геометрическими задачами на построение. Список элементарных задач является, конечно, условным. К числу элементарных задач относят обычно следующие:

ЭП 1. Отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному отрезку.

ЭП 2. Отложить от данного луча в данной полуплоскости угол, равный данному углу.

ЭП 3. Построить треугольник по трем сторонам.

ЭП 4. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

ЭП 5. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим углам.

ЭП 6. Построить биссектрису данного неразвернутого угла.

ЭП 7. Построить серединный перпендикуляр данного отрезка.

ЭП 8. Построить середину данного отрезка.

ЭП 9. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой. (При этом данная точка может как лежать на данной прямой, так и не лежать на ней.)

ЭП 10. Построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

ЭП 11. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

ЭП 12. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

ЭП 13. Построить касательную к окружности, проходящую через данную на ней точку.

ЭП №1.

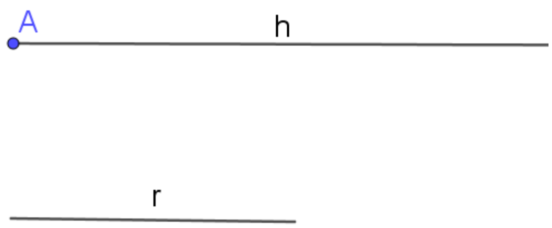
Отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному отрезку.

1 этап. Выделяется то, что дано, и что надо построить.

2 этап. Построение (записываются шаги построений, составляющие алгоритм; указывается соответствующий постулат).

1 этап

Дано:



Требуется построить: AB= ŕ

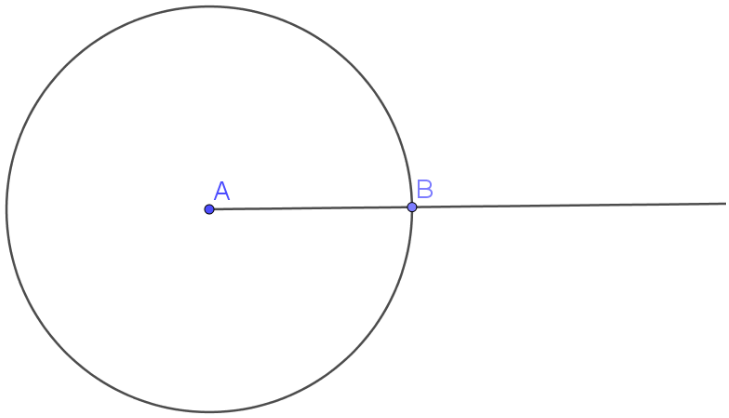
2 этап

Построение:

1) ω (A,r) – действие соответствует П2;

2) ω ∩h = B – П4;

AB – искомый отрезок.



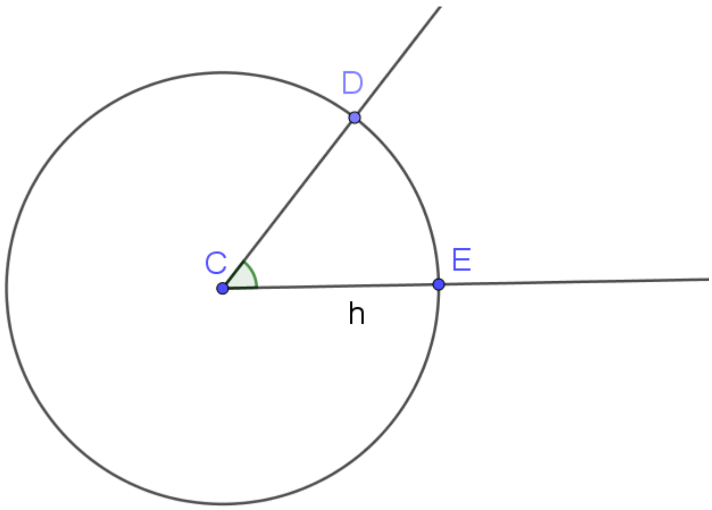
Состав данного умения определяют два действия, соответствующие постулатам построений с помощью циркуля и линейки.

ЭП №2.

Отложить от данного луча в данной полуплоскости угол, равный данному.

1 этап

Дано:



Требуется построить: ∠AOB=$\acute{\alpha}$

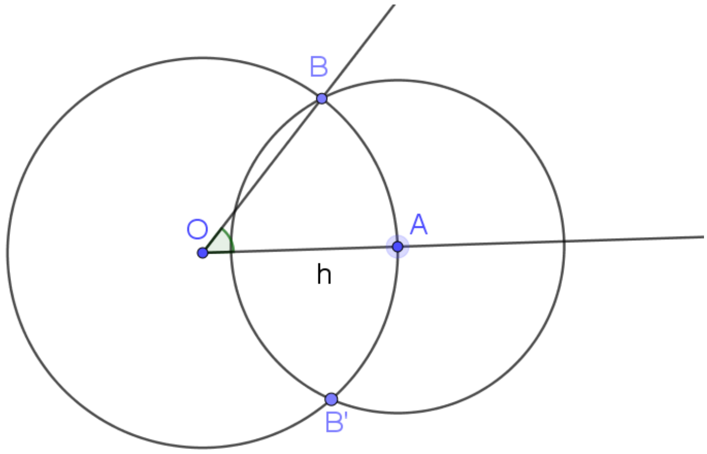
2 этап

Построение:

1. ω_1(C, $\acute{r}$) - действие соответствует П2;

2. $\omega_1 \cap \acute{\alpha}$={Д, Е} – П4;
3. ω_2 (О, $\acute{r}$) – П2;
4. ω_2 ∩h=А – П4;
5. ω_3 (А, ДЕ) – П2;
6. $\omega_2 \cap \omega_3$= {В, В′} – П5;

∠АОВ – искомый.



Состав данного умения определяют 6 действий, соответствующие постулатам построений с помощью циркуля и линейки.

Выполнение остальных элементарных построений рассматривается в приложении 1.

Тема 3: **«Схема решения задач на построение. Метод пересечений».**

Рассматривается схема решении задач на построение (Платон, V век до н. э.): I. Анализ. II. Построение. III. Доказательство. IV. Исследование.

Раскрывается сущность метода пересечений: задачу сводят к построению одной точки X (основного элемента построений), которая удовлетворяет каким-либо двум условиям α_1 и α_2, вытекающим из постановки задачи.

Пусть F_1 – множество (геометрическое место) точек, удовлетворяющих условию α_1, а F_2 – множество (геометрическое место) точек, удовлетворяющих условию α_2. Тогда искомой точкой X будет любая точка множества $F_1 \cap F_2$.

С использованием ресурса динамической системы GeoGebra рассматриваются образы (геометрические места точек) F_1 и F_2, которые могут представлять собой любой из следующих геометрических объектов:

1. Серединный перпендикуляр к отрезку AB (множество точек, каждая из которых равноудалена от двух данных точек A и B).

2. Две прямые, параллельные данной прямой и отстоящие от нее на данном расстоянии (множество точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой).

3. Прямая – ось симметрии двух данных параллельных прямых (множество точек, каждая из которых равноудалена от двух данных параллельных прямых).

4. Две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых содержит биссектрисы углов, образованных двумя пересекающимися прямыми (множество точек, каждая из которых равноудалена от двух пересекающихся прямых).

5. Окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре (множество точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом).

6. Две дуги с общими концами A и B (без точек A и B), симметричных относительно прямой AB и вмещающих данный угол ϕ (множество точек, из которых отрезок AB виден под углом ϕ ($\phi \neq 90^0$,$\phi \neq 180^0$).

И т.д.

Рассматривается решение следующей системы задач на построение геометрических объектов, при котором в качестве единиц мыслительного процесса выступают целостные операции, которые фиксируют объект, связи и отношения.

1. Найти точку, отстоящую от данной точки A на расстояние a, и от данной точки B – на расстояние b.

2. Найти точку, равноудаленную от всех трех вершин треугольника ΔABC.

3. Найти точку, которая находится на расстоянии a от прямой AB и на расстоянии b от прямой CD.

4. Построить окружность, касательную к двум данным параллельным прямым a и b и проходящую через данную точку M.

5. Дана окружность $\omega(O,\bar{r})$ и точка A, не лежащая на ней. Построить касательную к окружности, проходящую через точку A.

6. Построить окружность, касательную к сторонам угла $\angle ABC$, причем одну из его сторон она касается в точке F.

7. Построить параллелограмм по двум сторонам и диагонали.

8. На данном отрезке AB описать дугу, вмещающую данный угол φ.

9. Построить треугольник ΔABC по стороне $\bar{a}$, углу $\bar{\alpha}$ при вершине A и радиусу $\bar{r}$вписанной окружности.

10. Построить треугольник ΔABC по стороне $\bar{a}$, углу $\bar{\alpha}$ при вершине A и медиане $\bar{m}_b$ к стороне AC.

11. Построить треугольник ΔABC, зная углы при вершинах B и Cи медиану $\bar{m}_a$, проведенную к стороне BC.

12. Построить треугольник ΔABC по стороне $\bar{a}$, углу $\bar{\alpha}$ при вершине A и высоте $\bar{h}_a$, выходящей из этой вершины.

13. Построить треугольник ΔABC по периметру $2\bar{p}$, углу $\bar{\alpha}$ при вершине A и высоте $\bar{h}_a$, выходящей из этой вершины.

14. Дан отрезок AB и точка C, принадлежащая прямой AB. Построить геометрическое место точек $F=\{X \vee AX:XB=AC:CB\}$ (окружность Аполлония).

15. Построить треугольник ΔABC по стороне $\bar{a}$, углу $\bar{\alpha}$ при вершине A и точке D пересечения стороны BC с биссектрисой внутреннего угла при вершине A.

16. Построить треугольник ΔABC по стороне $\bar{a}$, высоте $\bar{h}_a$, проведенной из вершины A, и точке D пересечения стороны BC с биссектрисой внутреннего угла при вершине A.

Среди перечисленных задач – две опорные, связанные с понятиями «*дуга, вмещающая данный угол*» и «*окружность Аполлония*». Формирование понятия «*дуга, вмещающая данный угол*» (рис. 1) начинается с рассмотрения центрального и вписанного углов.

Далее, подробно выполняя классические этапы решения конструктивных задач – анализ, построение, доказательство и исследование, рассматриваем опорную задачу 8: «На данном отрезке AB описать дугу, вмещающую данный угол φ», а также задачи 9-13, при решении которых она используется.

В результате изучения дуги как математического объекта формируется понятие «*дуга, вмещающая данный угол*», которое в результате простого заучивания сформировать невозможно.

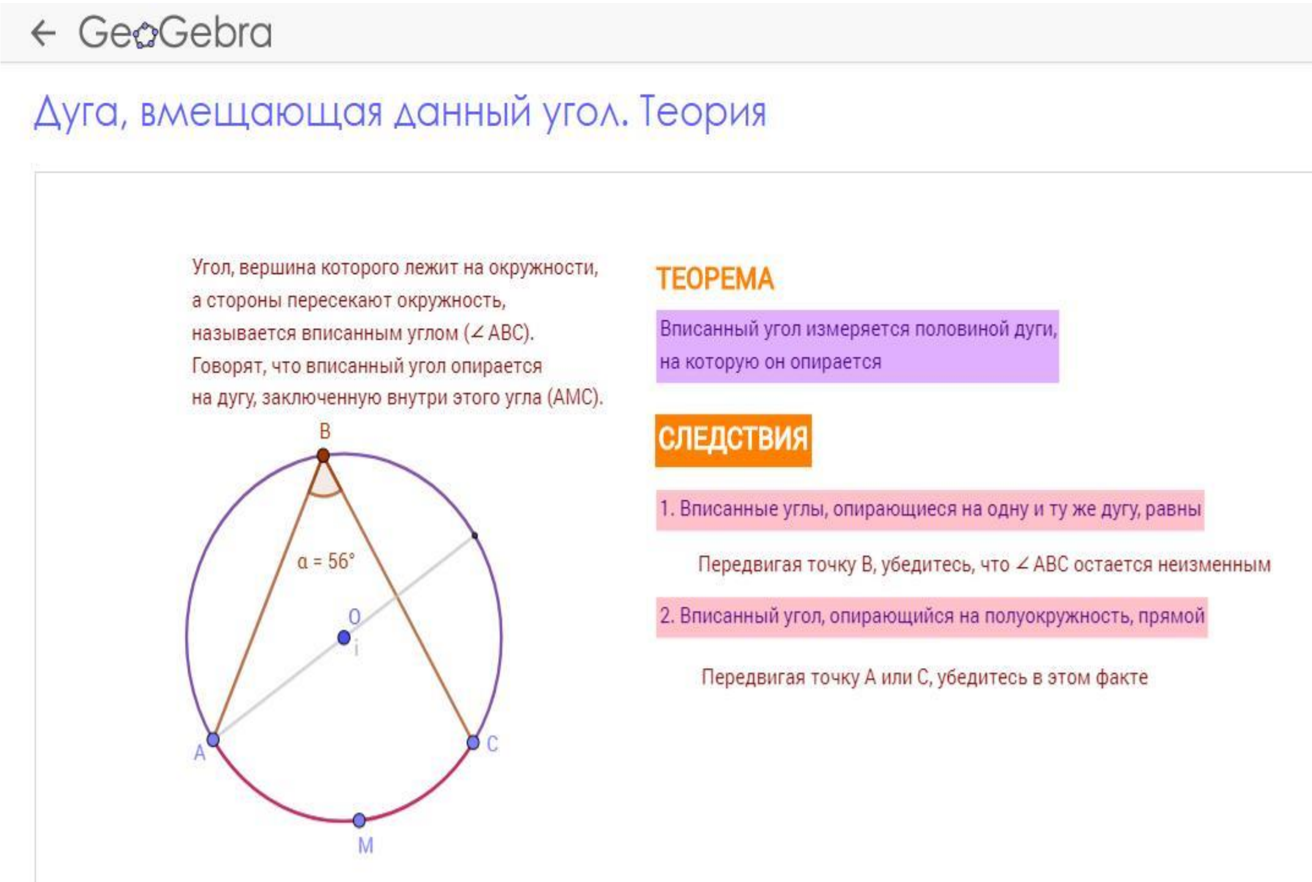


Рис. 1. Дуга, вмещающая данный угол (теория)

Предлагается ряд задач на доказательство, опирающихся на понятие дуги, вмещающей данный угол (рис. 2, рис. 3).

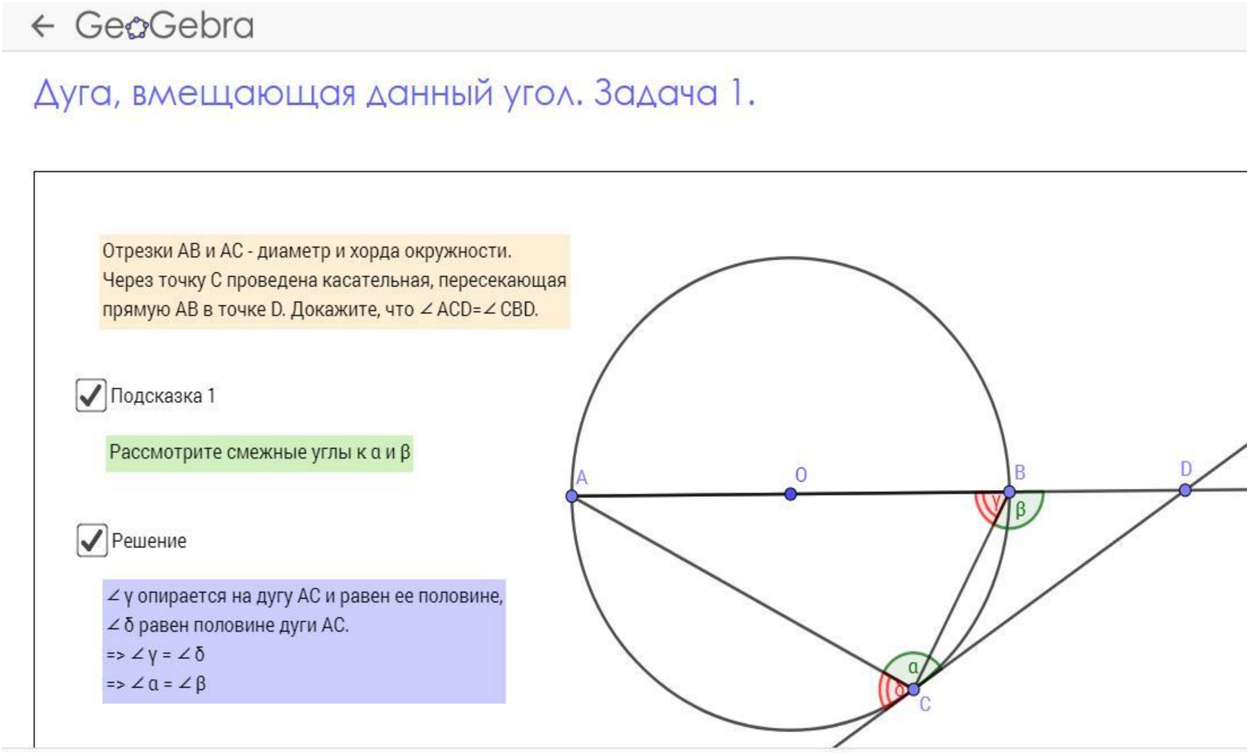


Рис. 2. Дуга, вмещающая данный угол (практика)

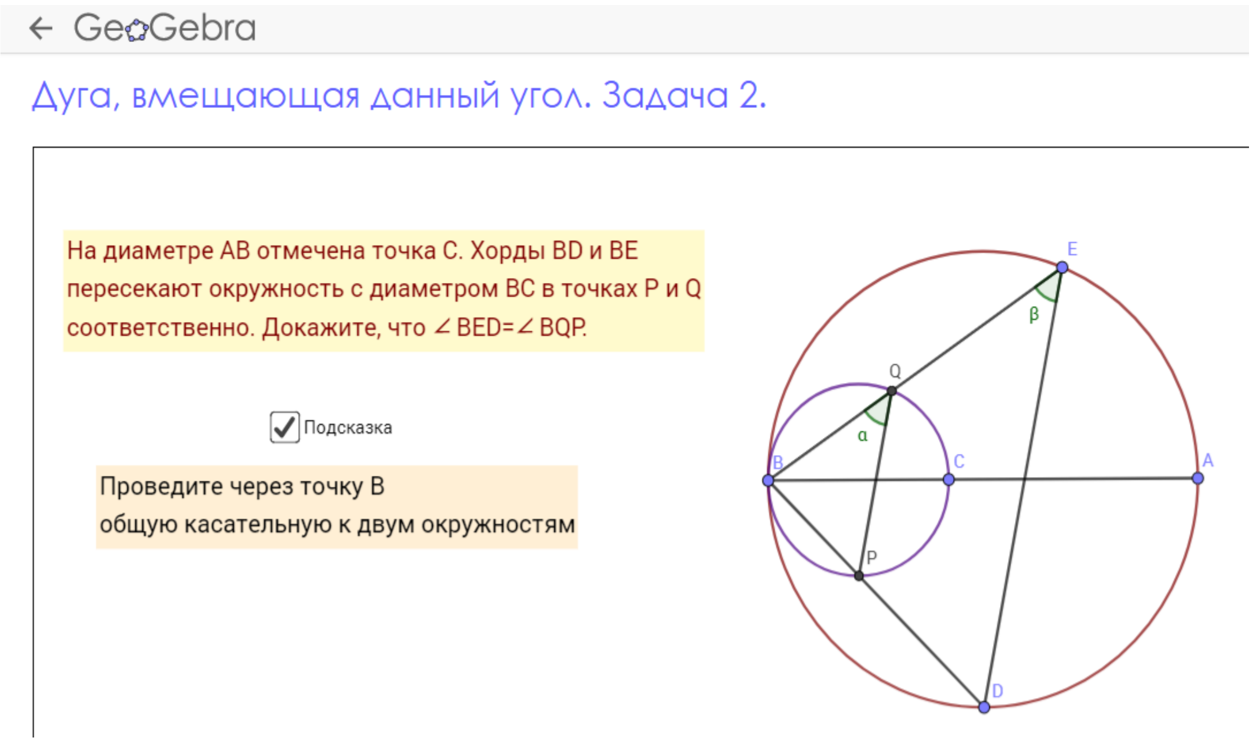


Рис. 3. Дуга, вмещающая данный угол (практика)

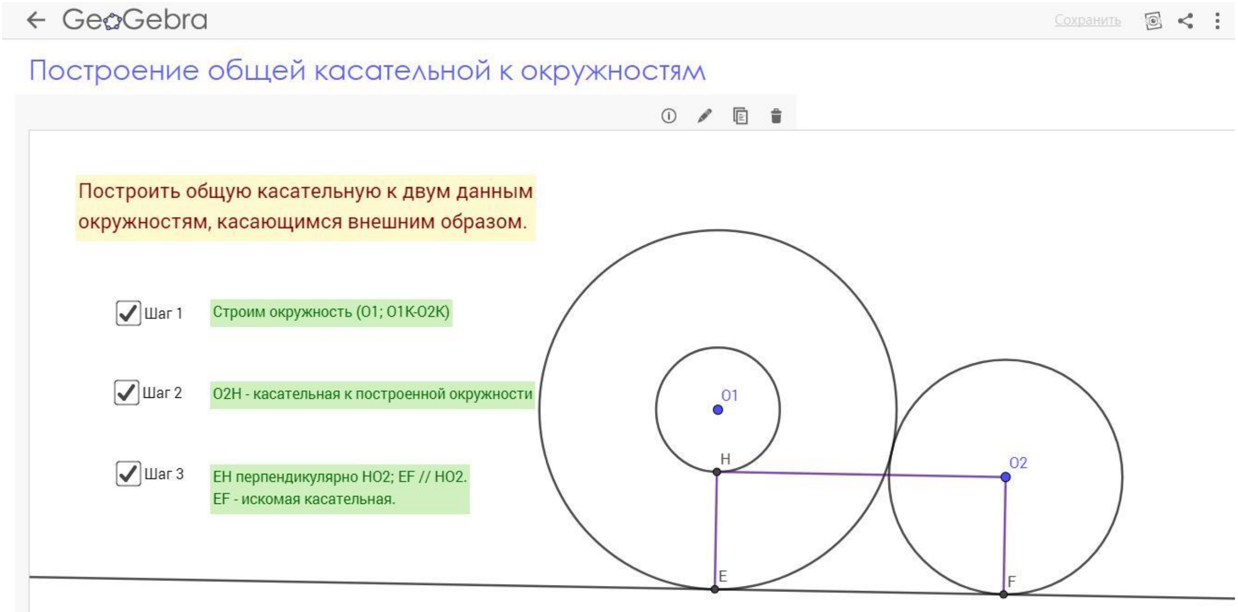


Рис. 4. Построение общей касательной к окружности

Далее, подробно выполняя классические этапы решения конструктивных задач – анализ, построение, доказательство и исследование, рассматриваем опорную задачу 14: «**Дан отрезок AB и точка C, принадлежащая прямой AB. Построить геометрическое место точек $F = \{X \vee AX{:}XB = AC{:}CB\}$ (окружность Аполлония)**», а также задачи 15-16, при решении которых она используется.

Формально-дедуктивные рассуждения предваряются математическим экспериментом в системе GeoGebra. Здесь необходимо подчеркнуть, что эксперимент не может быть доказательным, поскольку основной метод математики – дедуктивный (от общих аксиом к частным следствиям из них). Учащийся, регулируя свою мыслительную деятельность, пользуется обобщенным алгоритмом. Проанализировав условие, на этапе анализа делается предположение, что задача решена, то есть X – одна из точек искомого множества F. Из этого вытекает, что XC – биссектриса угла AXB. Рассматривается точка D на прямой AB, такая, что прямая XD перпендикулярна XC. Делается вывод, что XD – биссектриса угла, внешнего для AXB. Следовательно, $\angle CXD = 90^0$ и точка X лежит на окружности с диаметром CD. Затем проводятся обратные рассуждения и доказывается, что любая точка окружности с диаметром CD принадлежит множеству F. Делается вывод о том, что множество F и есть окружность, которая называется окружностью Аполлония. Далее проводятся рассуждения методом восходящего анализа (или анализа Паппа, совершенного анализа): для того чтобы построить окружность Аполлония, достаточно найти точку D и провести окружность с диаметром CD. Учащиеся задаются вопросом: как построить точку D? Ответ дает теорема Фалеса (рис. 5)

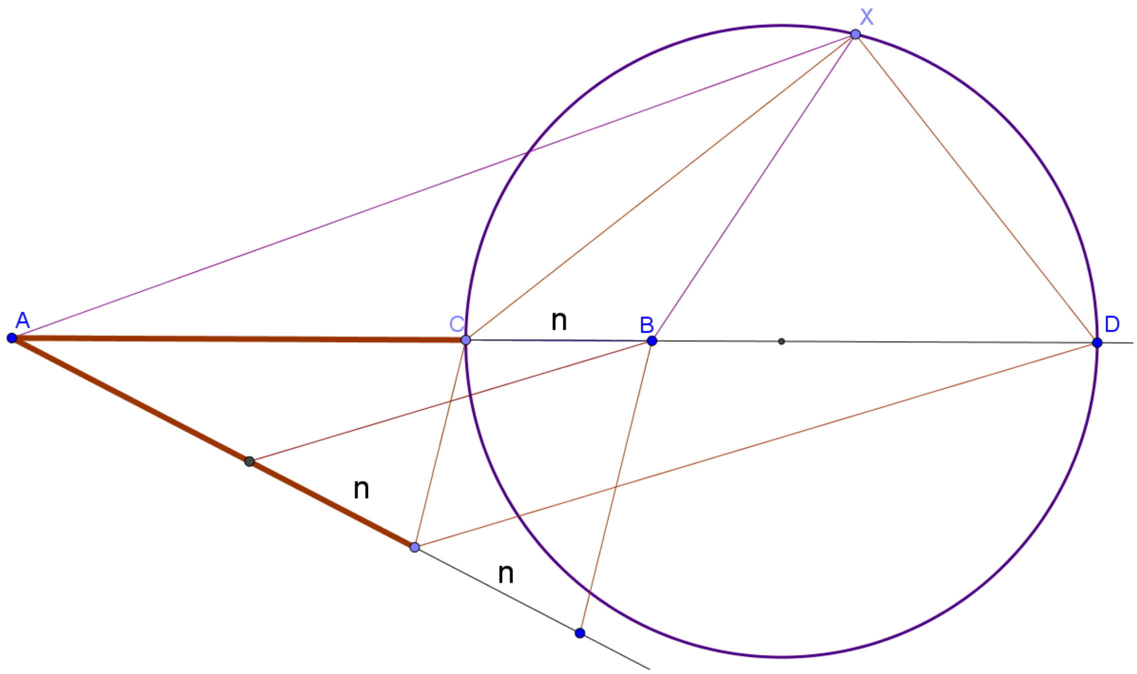


Рис 5.

Далее предлагается решить ряд задач, способствующих формированию понятия «окружность Аполлония» (см. приложение 2).

Следует отметить, что в выше рассмотренных примерах предполагалась опора на инструментально-ориентированный и предметно-ориентированный типы обучения, представляющие соответственно содержательную и процессуальную области математического знания. В то же время приоритетной в нашей методике является система задач на выход в ценностно-ориентированное обучение, представляющее так называемую контекстную область математического знания. Ее характеристическая особенность – любой объект рассмотрения характеризуется по отношению к ученику, его нормам, идеалам и целям. В этом смысле обучение рассматривается как постепенное накопление системы ценностных (оценочных) знаний, которые выражаются в виде оценочных суждений. Предполагается сенсорно-эмоциональный способ кодирования информации, формирующийся благодаря вопросам, подводящим учащихся к эмоциональным оценкам предметного материала, созданию виртуальных ситуаций, в которых ученик может использовать метафоры, воображение и фантазию.

В качестве одного из средств, обеспечивающих выход в ценностно-ориентированное обучение, мы использовали обращение к понятию культурно-исторических аналогов, отражающих основы наук, искусств, технологий и выражаемых в форме понятий, законов, принципов и методов. Как отмечает А.В. Хуторской [113], культурно-исторические аналоги – это продукты, созданные учеными, писателями и др., содержащие в себе образцы для сопоставления с образовательными продуктами учеников. Причем культурно-исторический аналог не означает сходства с продуктом ученика, его не следует расценивать в координатах «правильный – неправильный». Он может принадлежать иному миропониманию и быть образован в иных по отношению к ученическому продукту мировоззренческих координатах.

Имеются различные виды культурно-исторических аналогов. Мы обращались к одному из них – разнонаучным способам решения одних и тех же проблем. Так, например, мы обращались к одному из фундаментальных образовательных объектов, не входящих в школьную программу по геометрии, – задачам оптимизации, этимология которых неразрывно связана с геометрическими задачами на построение, в частности, с методом симметрии.

При введении понятия «метод симметрии для решения задач на построение» школьникам предлагались культурно-исторические аналоги его интерпретации – задача Герона, задача Фаньяно, задача Ферма-Торричелли-Штейнера.

Предварительный отбор материала обеспечил условия для того, чтобы школьники увидели роль геометрических задач на построение в общечеловеческой культуре, мировоззренческие аспекты этой проблемы, осознали генезис научных взглядов, открытий, познакомились с творчеством ученых-математиков и др. Все это способствовало созданию «образовательной напряженности», требующей от обучающихся выбора из предложенных учителем аналогов соответствующего их мировоззренческим координатам.

Тема 3: **«Метод симметрии для решения задач на построение. Задачи оптимизации».**

В качестве эпиграфа можно использовать известное высказывание Л. Эйлера: «В мире не происходит ничего, в чём бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума».

После рассмотрения сущности метода симметрии как частного случая метода движений (описание оставляем за рамками диссертационного исследования) рассматриваются знаменитые исторические задачи оптимизации, при решении которых используется данный метод.

Задача Герона. *На плоскости дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой точку M, для которой сумма AM+BM наименьшая.*

Для решения отразим точку B относительно прямой l, получим точку B′ (рис. 1). Отрезок BM переходит при симметрии в отрезок B′M, следовательно, AM+BM=AM+B′M. Согласно неравенству треугольника, сумма AM+B′M принимает наименьшее значение, когда точка M лежит на отрезке AB′. Таким образом, M – точка пересечения прямой l с отрезком AB′; для этой точки сумма AM+BM равна длине отрезка AB′, при другом выборе точки M эта сумма будет больше AB′.

Обращаясь к методу культурно-исторических аналогов, сообщаем школьникам, что один из американских школьных учебников по геометрии начинается не с понятий «точка», «прямая» и не с первых аксиом, а сразу с разбора этой задачи. С её помощью можно объяснить закон отражения света («Угол падения равен углу отражения»), поскольку в однородной среде свет распространяется по кратчайшему пути.

Считается, что впервые задача о кратчайшем пути между двумя точками с заходом на прямую, или задача об отражении света, была решена древнегреческим математиком Героном Александрийским (I век н. э.) в трактате «О зеркалах». Поэтому её иногда называют задачей Герона. Её можно интерпретировать и как сугубо практическую: где на прямой дороге нужно поставить автобусную остановку, чтобы суммарный путь до неё от деревень A и B был наименьшим? Однако обобщить задачу Герона и её решение не так-то просто. Что будет, например, если деревень не две, а три?

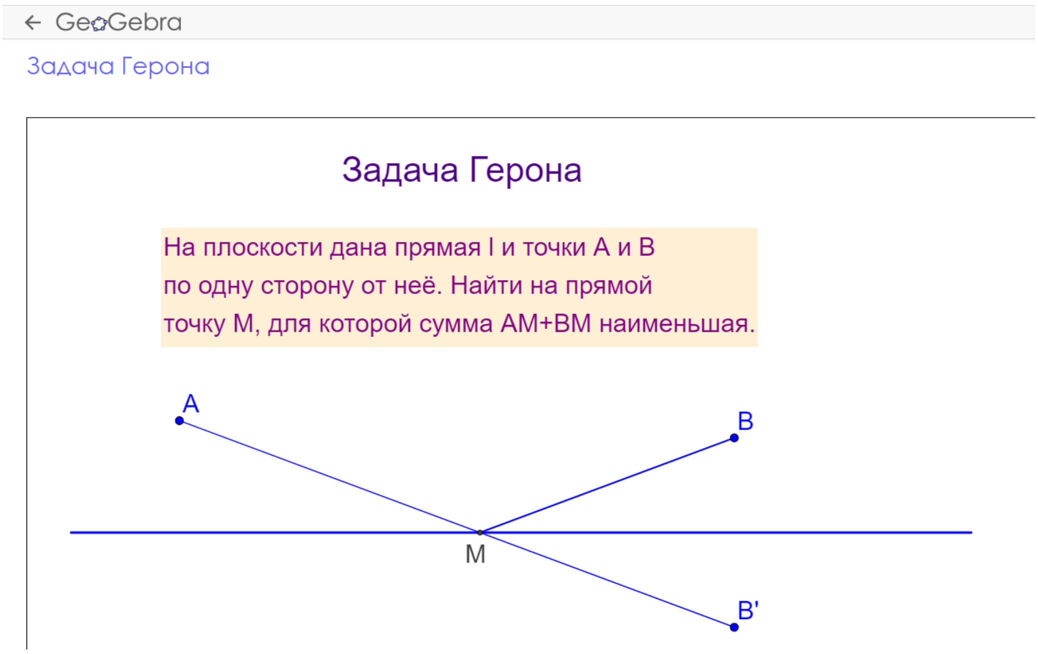


Рис. 6. Задача Герона

Задача Фаньяно.

В начале XVIII века итальянский инженер и математик Фаньяно деи Тоски (1682-1766) поставил следующую задачу.

Вписать в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала одна вершина треугольника.

Воспользуемся тем же приёмом: с помощью движений плоскости попробуем выстроить стороны вписанного треугольника в ломаную линию. Тогда периметр будет не меньше отрезка, соединяющего концы этой ломаной.

А наименьший периметр будет соответствовать случаю, когда стороны ломаной лежат на одной прямой. Итак, пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC (A_1– на стороне BC и т.д.). Отразим точку A_1 симметрично относительно сторон AB и AC, получив точки A_2 и A_3 соответственно (рис. 7).

Длина трёхзвенной ломаной $A_3B_1C_1A_2$ равна периметру треугольника $A_1B_1C_1$. Для того, чтобы периметр был наименьшим (равным отрезку A_2A_3), нужно, чтобы вершины B_1, C_1 лежали в точках пересечения отрезка A_2A_3 со сторонами треугольника AB и AC. Осталось понять, как выбрать точку A_1 на стороне BC таким образом, чтобы длина отрезка A_2A_3 была наименьшей. Для этого заметим, что треугольник A_2AA_3– равнобедренный (A_3A=A_2A=A_1A), а угол при его вершине А равен 2∠BAC и потому не зависит от выбора точки A_1 (рис. 4). Итак, при движении точки A_1 по стороне BC углы треугольника A_2АA_3 не меняются. А его линейные размеры будут наименьшими, когда наименьшей будет сторона A_2A, которая равна A_1А. Значит, A_1А – высота, опущенная на сторону BC. Мы видим, что существует единственный вписанный треугольник наименьшего периметра, его вершина A_1– основание высоты. Если провести те же рассуждения с вершинами B_1,C_1, получим, что они также являются основаниями высот (поскольку треугольник минимального периметра – единственный).

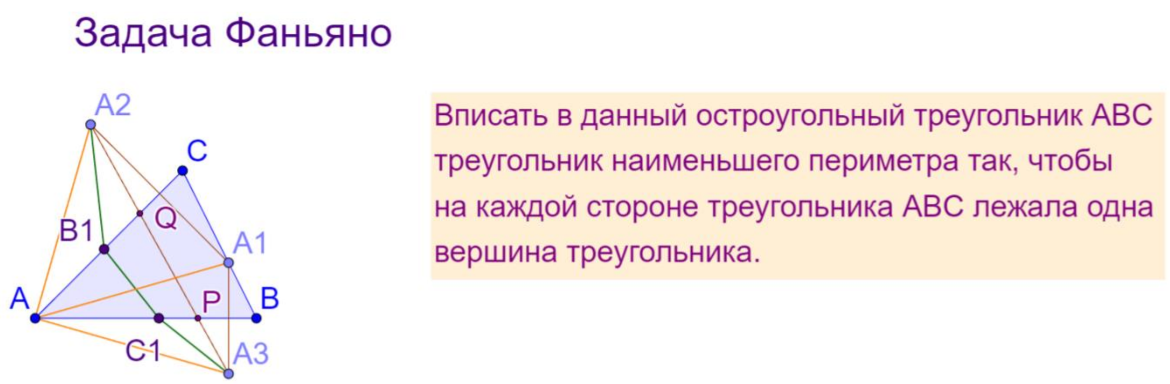


Рис. 7. Задача Фаньяно

Теорема Фаньяно. *Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортотреугольник (т.е. треугольник с вершинами в основаниях высот).*

Задача Ферма-Торричелли-Штейнера.

История этой задачи насчитывает более трёх с половиной столетий. Она была помещена в книге итальянского физика и механика Вивиани «О максимальных и минимальных значениях» в 1659 году. Винченто Вивиани (1622-1703) был учеником великого Галилео Галилея. Нам он более известен как изобретатель ртутного барометра (прибора для измерения атмосферного давления), а своим современникам – как один из лучших специалистов по задачам на максимум и минимум, а также по теории конических сечений. Своему сочинению Вивиани, следуя традициям того времени, дал длинное название: «Пятая книга сочинений Аполлония Пергского о конических сечениях, заключает в себе первые исследования о наибольших и наименьших величинах и признаётся самым замечательным памятником этого великого геометра» («De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonii Pergoei nunc desideratum»). Среди множества задач на максимум и минимум, помещённых в этой книге, есть следующая.

На плоскости даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Для какой точки T плоскости сумма расстояний AT+BT+CT наименьшая?

Ещё до книги Вивиани этой задачей интересовался итальянский математик Бенавентура Кавальери (1598-1647), автор знаменитого «принципа Кавальери» для вычисления площадей и объёмов, предвосхитившего интегральное исчисление, а также математик и физик Эванджелиста Торричелли (1608-1647). Говорят, что именно Торричелли получил первое решение этой задачи (скорее всего, основанное на физических соображениях). Торричелли, как и Вивиани, был учеником Галилея. Именно им в конце своей жизни уже ослепший Галилей диктовал главы из своей книги «Беседы о механике». Подобно многим учёным позднего Возрождения, Торричелли был разносторонним человеком. Будучи профессором математики Флорентийского университета, он много занимался задачами физики (его закон распределения давления жидкости известен теперь каждому школьнику), а также механики, баллистики и оптики, и даже написал несколько работ по конструированию оптических приборов и шлифовке линз. Согласно другим источникам, независимо от Торричелли, эту задачу решил и величайший французский математик Пьер Ферма (1601-1665). А первое чисто геометрическое решение принадлежит, по-видимому, швейцарскому геометру Якобу Штейнеру (1796-1863), о котором речь ещё впереди.

Решение. Вновь воспользуемся тем же приёмом: выстроим отрезки AT, BT и CT в ломаную линию. Вместо симметрии применим поворот. Повернём плоскость на 60◦ вокруг точки A, при этом точка C перейдёт в некоторую точку D, а точка T – в точку N. Треугольник AND равен треугольнику ATC, поскольку переходит в него при повороте на 60◦, значит TC=ND. Треугольник ANT – равносторонний, так как AT=AN и ∠TAN=60◦, поэтому TA=TN. Итак, сумма AT+BT+CT равна длине ломаной BTND, а значит, она не меньше длины отрезка BD (рис. 8).

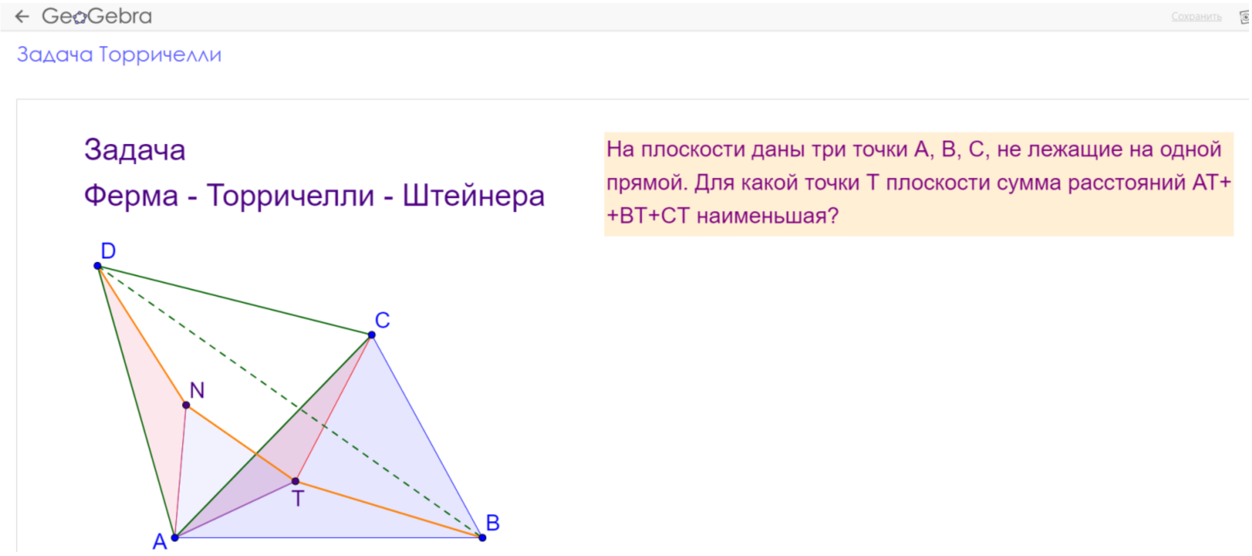


Рис. 8. Задача Ферма

Равенство достигается, когда точки B, T, N, и D лежат на одной прямой (в указанной последовательности). Это означает, что $\angle BTA + \angle ATN = 180^\circ$ и, следовательно, $\angle BTA = 120^\circ$; а также $\angle AND + \angle ANT = 180^\circ$, значит, $\angle AND = 120^\circ$, поэтому $\angle ATC = 120^\circ$. Таким образом, лучи TA, TB и TC образуют два угла в 120°, поэтому и третий угол между ними также равен 120° (рис. 14). Точка T, из которой все стороны треугольника видны под углами 120°, имеет несколько названий.

Иногда её называют точкой Ферма, иногда – точкой Торричелли, иногда – точкой Штейнера. Доказательство, которое мы привели с поворотом плоскости на 60°, принадлежит Якобу Штейнеру. С его замечательными результатами мы ещё не раз встретимся в этой книге. А первым по времени из этих трёх математиков был Торричелли. Поэтому мы будем называть эту точку, по праву первенства, точкой Торричелли (мы и обозначили её буквой T). Это ещё одна замечательная точка треугольника, наряду с центром тяжести (точкой пересечения медиан), ортоцентром (точкой пересечения высот), центрами вписанной и описанной окружностей. Правда, в отличие от четырёх замечательных точек, точка Торричелли существует не у любого треугольника. Однако мы уже доказали, что, если у треугольника есть точка Торричелли, то она является единственной точкой минимума суммы расстояний до вершин треугольника.

Теорема Торричелли-Ферма-Штейнера. *Если все углы треугольника меньше 120°, то точкой минимума суммы расстояний до его вершин является точка Торричелли. Если же один из углов больше или равен 120°, то такой точкой является вершина этого угла.*

Анализ данных задач позволяет сделать вывод, что опора на синтетические рассуждения (дано – цепочка шагов построений – решение) приводит к тому, что до самого завершения построения ученику непонятно, откуда берется цепочка шагов, возникает мысль, что решение задачи единственно возможное и т.п. В нашей методике акцент делался на аналитическом методе, позволяющем определить ориентировочную основу деятельности при построении: с чего можно начать и в каком направлении строить, чем обусловлена необходимость тех или иных дополнительных построений и т.п. Благодаря этому в качестве единиц мыслительного процесса выступали *целостные операции,* которые включают в себя *реальные познавательные* и *формальные операции,* что обеспечивает единство *плоскости содержания* (плоскости геометрического объекта) и *плоскости знаковой формы.* Как отмечал Г.П. Щедровицкий, результатом выполнения целостных операций, которые фиксируются в сознании в виде образов, являются новые знания и связи знаний. Такие образы отражают сам процесс получения знания, фиксируют объект, содержательные и формальные операции, связи знаний. Результатом освоения целостных операций является геометрическое понятие.

§ 2.2. Педагогический эксперимент и обработка его результатов

Экспериментальная апробация авторской методики проводилась в течение 2017-2020 гг. в ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы КШО (Коммунарское Школьное Отделение) и ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы БШО (Бунинское Школьное Отделение). Участниками эксперимента были определены предпрофильные классы (физико-математического профиля): ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы КШО (Коммунарское Школьное Отделение) – 8 «а» и 9 «а» классы; ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы БШО (Бунинское Школьное Отделение) – 8 «в» и 9 «в» классы. Дистанционное обучение в рамках факультатива «Конструктивная геометрия на евклидовой плоскости» выступало дополнительной необязательной формой предметной подготовки и являлось значимым механизмом, поддерживающим очные занятия по данному предмету.

При проведении количественной и качественной оценки результатов экспериментального исследования по развитию понятийных психических структур обучающихся, мы исходили из того, что они являются продуктом освоения обобщенного умения по решению задач на геометрические построения. То есть речь идет о единстве декларативных (о том, что) и процедурных знаний (о том, как). На этапе построения формируется определенная система мыслительных действий – реальные операции, составляющие навык геометрического построения. На этапах анализа, доказательства и исследования происходит освоение системы формальных операций – дедуктивных суждений. Благодаря этому в качестве единиц мыслительного процесса выступают *целостные операции,* которые включают в себя *реальные* и *формальные операции,* фиксируются в сознании в виде образов, фиксирующих объект, связи знаний. Результатом освоения целостных операций является геометрическое понятие.

В качестве субъективной меры овладения мыслительными действиями в составе обобщенного умения по решению задач на геометрические построения, опосредующими развитие понятийных структур, выступали следующие независимые характеристики: *системность, рефлексивность, обратимость, гибкость, форма действия, степень обобщения и категоризации, мера развернутости, мера переноса, мера свернутости, мера освоения и обогащения, ценностно-смысловая сфера.*

Следующий показатель для диагностики – *форма действия.* Что касается *формы действия*, то в составе обобщенного способа по решению конструктивных задач каждый из компонентов рассматривался в двух планах: геометрическое знание как таковое (*плоскость содержания геометрического знания*) и его дедуктивное изложение (*плоскость знаковой формы*). Единицы геометрического мышления – *целостные операции* – включают реальные познавательные и формальные операции, что обеспечивает единство этих планов – плоскости содержания (плоскости объектов) и плоскости знаковой формы.

Что касается *степени обобщения и категоризации*, то рассматриваемое мыслительное умение носит обобщенный характер, так как в этом случае имеет место овладение приемами, применяемыми по отношению к разному содержанию, что свидетельствует об уровне их обобщенности, следовательно, указывает и на обобщенный характер сформированного умения.

Широта *переноса* приемов при проведении различных геометрических построений свидетельствует о применении усваиваемого понятия в разных ситуациях, в том числе в условиях самостоятельного выстраивания отдельных аспектов его содержания.

Для того чтобы умение было *развернутым*, при формировании умения по решению конструктивных задач необходимо строгое и последовательное выполнение учащимся всех операций, составляющих содержание этого умения. В результате при переходе с этапа на этап состав реально выполняемых операций уменьшается, действие становится сокращенным, свернутым.

Мера освоения и обогащения включает в себя быстроту выполнения действия и степень автоматизированности. Мыслительное умение (умение успешно решать задачи на геометрические построения в электронной среде), в отличие от навыка, не проходит стадию автоматизации. Каждый раз, когда приходится приводить в действие то или иное умение, это осуществляется при полном осознании как самой задачи, так и тех способов, с помощью которых она решается. Происходит накопление и дифференциация опыта оперирования понятием, расширение возможных ресурсов осмысления его содержания (за счет включения разных вариантов его интерпретации, увеличения числа варьирующих по степени существенных признаков, наращивания межпонятийных связей и т.д.).

Свертывание – экстренная реорганизация имеющихся сведений относительно данного понятия и превращение их в обобщенную единицу знания. Развернутый на предыдущих этапах субъективный образ понятия должен быть представлен в сжатой форме, что на уровне решения задач может обеспечиваться такими приемами, как опорные задачи. Эффект «свертывания» характеризует завершенность процесса образования понятийного знания. Напомним, что В.А. Крутецкий рассматривал данный эффект как ключевой признак математических способностей.

Ценностно-смысловая сфера личности обучающегося описана выше и представлена когнитивным, поведенческим и эмоциональным компонентами, включающими соответственно ценностные представления, ценностные ориентации, личностные смыслы и ценностные отношения.

Для сопоставительного анализа оценки сформированности уровня обобщенного умения решения геометрических задач на построение в электронной образовательной среде и оценки уровня развития понятийных психических структур обучающихся была использована таблица 3.

Таблица 3.

№	Уровень сформированности обобщенного умения по решению конструктивных задач	Психодидактические закономерности	Характеристика уровня развития понятийных психических структур	Характеристика критерия развития понятийных психических структур
1.	**Уровень понимания**	Осознание, обобщение, осмысление содержания и процесса деятельности	Формирование **когнитивных схем, семантических структур, способов кодирования информации**. Обеспечено понимание значений математических терминов, которое может быть имплицитным либо эксплицитным.	**Рефлексивный критерий**: знания характеризуются как декларативные; умение по решению задач носит обобщенный характер, но не характеризуется быстротой выполнения действий; школьник выполняет построения, обосновывая их результатами анализа, но слабо аргументирует свою точку зрения или испытывает затруднения. **Когнитивный критерий**: ценностные представления восприняты, но не приняты личностью обучающегося; школьник в процессе выполнения построений нуждается в поддержке взрослого. **Эмоциональный критерий**: ценностное отношение не сформировано.

				Поведенческий критерий: ценностные ориентации либо отсутствуют, либо ограничены; личностные смыслы не сформированы; преобладают широкие познавательные мотивы; внутренние мотивы подчинены внешним.
2.	**Уровень усвоения**	Запоминание, систематизация, профилактика забывания	Формирование **ценностных представлений**. Обеспечено усвоение системы реальных и формальных операций, составляющих навык решения задач и являющихся процедурными знаниями, которые, однако, не включены в личностно признанную систему ценностей.	**Рефлексивный критерий**: знания учащихся определяются как процедурные, мыслительное умение по решению задач носит обобщенный характер, характеризуется степенью автоматизированности; школьник выполняет построения, обосновывая их результатами анализа, аргументирует свою точку зрения. **Когнитивный критерий**: ценностные представления приняты личностью обучающегося. **Эмоциональный критерий**: ценностное отношение находится на стадии формирования. **Поведенческий критерий**: ценностные ориентации и личностные смыслы находятся на стадии преобразования широких познавательных мотивов в учебно-познавательные; внутренние и внешние мотивы сбалансированы.
3.	**Эмоционально-оценочный уровень**	Переживание ценностных позиций	Формирование **ценностного отношения**. Ценностные	**Рефлексивный критерий**: действия учащихся характеризуются как ценностные, выражаются в виде оценочных суждений; происходит

			представления включены в личностно признанную систему ценностей через отражение в сознании.	опора на сенсорно-эмоциональный способ кодирования информации. **Когнитивный критерий:** ценностные представления о геометрических категориях, объектах, методах как носителях культурных ценностей включены в личностно признанную систему ценностей обучающегося. **Эмоциональный критерий**: ценностные отношения сформированы. **Поведенческий критерий**: ценностные ориентации и личностные смыслы выражены в реализации принятых обучающимся ценностей в поведении и деятельности; наблюдается динамическое изменение личности обучающегося в соответствии с принятой целью; школьник легко включается в деятельность, задания выполняет увлеченно, демонстрируя осознание смысла, сформированность понятий, положительную направленность поведения; внутренние мотивы носят доминирующий характер.
4.	**Уровень применения (освоения)**	Формирование умений, стандартное применение, творческое применение	Формирование **ценностных ориентаций** и **личностных смыслов.**	**Рефлексивный критерий:** действия учащихся обеспечивают сформированность обобщенного способа решения задач на уровнях стандартного и творческого применения. Широта переноса приемов при проведении различных геометрических построений указывает

				на обобщенный характер сформированного умения. Мыслительное умение не проходит стадию автоматизации. Каждый раз, когда приходится приводить в действие то или иное умение, это осуществляется при полном осознании как самой задачи, так и тех способов, с помощью которых она решается. **Когнитивный критерий:** ценностные представления включены в личностно признанную систему ценностей обучающегося через отражение в сознании. **Эмоциональный критерий:** ценностные отношения сформированы. **Поведенческий критерий:** принятые обучающимся ценности реализуются в поведении и деятельности; обеспечено усвоение школьниками системы целостных операций, результатом освоения которых является геометрическое понятие. С этой точки зрения речь идет о сформированности понятийных психических структур.

Полученные данные свидетельствуют, что уровень развития геометрических понятий у пришедших на факультатив учеников не поднимался выше первого вне зависимости от их базовой математической подготовки.

Для диагностики ценностного отношения обучающихся использовалась модификация методики Т.Д. Дубовицкой [45], так как мотивационный план предполагает формирование ценностного отношения к математическим категориям и методам как носителям культурных ценностей, а также сформированность устойчивых мотивов к получению знаний, формированию умений, культурных базовых способностей, личностных качеств, активное отношение к учению, к социокультурной составляющей математики. При этом мотивация имеется в виду внутренняя, психическая по отношению к субъекту-обучающемуся, а не внешняя (мотив достижения, материальный стимул) по отношению к процессу учения.

Учащиеся выражали свое отношение к занятиям факультатива, заполнив анкету (таблица 4), предполагающую следующие обозначения:

Верно	+
Скорее верно	±
Скорее неверно	∓
Неверно	−

Таблица 4. Диагностическая анкета

Оценочное суждение	Ответ
1. Занятия на факультативе дадут мне возможность стать более взрослым и реализовать свои способности.	
2. Мне достаточно школьных знаний по геометрии.	
3. Мне неинтересно решать задачи на построение, посещаю факультативные занятия по просьбе родителей.	
4. Мне интересно больше узнать о конструктивной геометрии и динамических системах математики.	
5. Люблю решать задачи на построение в электронной среде, трудности, возникающие при их решении, делают их более увлекательными.	
6. Мне неинтересно решать задачи, но делаю это, потому что требует учитель.	
7. Занятия факультатива с интересом обсуждаю в свободное	

время со своими одноклассниками (друзьями, родителями).	
8. При решении трудной задачи стараюсь разобраться и дойти до сути.	
9. Считаю, что трудные задачи можно было бы и не решать.	
10. Кроме учебников по геометрии я самостоятельно читаю дополнительную литературу по этим предметам.	
11. Если по болезни (или по другим причинам) мне придется пропустить факультативные занятия, то особо не расстроюсь.	
12. Хочу заняться самостоятельным исследованием, но не знаю какую выбрать тему.	
13. Испытываю желание сделать новое математическое открытие.	
14. На факультативных занятиях у меня часто бывает состояние выученной беспомощности – «совсем не хочется учиться».	
15. Мне нравится, что на факультативных занятиях мы используем компьютер.	
16. Мне приходится заставлять себя выполнять задания на факультативных занятиях.	
17. Хочу участвовать в математических конкурсах и турнирах.	
18. Считаю не нужным доказывать, что построенная фигура является искомой.	
19. Посещаю факультативные занятия только для того, чтобы общаться с друзьями.	
20. Если бы было можно, я бы не стал посещать факультативные занятия.	

В обследовании принимали участие все школьники, которые посещали факультатив в течение трёх лет, общее количество их составило 337 человек.

Подсчет результатов диагностики ценностного отношения обучающихся производился в соответствии с ключом (таблица 5). В ключе в строке «Да» указаны номера суждений, на которые учащиеся должны были дать ответы «верно», «скорее верно», а в строке «Нет» – номера суждений, на которые учащиеся должны дать ответы «неверно», «скорее неверно».

Таблица 5.

Да	1	4	5	7	8	10	12	13	15	17
Нет	2	3	6	9	11	14	16	18	19	20

За каждое совпадение с ключом начисляется один балл. Чем выше сумма баллов, тем выше показатель сформированности ценностного отношения обучающихся (таблица 6).

Таблица 6.

Сумма баллов	**Уровень ценностного отношения обучающихся**	**Характеристика уровня и критерия**
0-5	Сниженный	Ценностные преставления восприняты, но не приняты личностью обучающегося; школьник в процессе выполнения построений нуждается в поддержке взрослого. Ценностное отношение не сформировано; школьник не проявляет интерес к деятельности. Ценностные ориентации либо отсутствуют, либо ограничены; личностные смыслы не сформированы; преобладают широкие познавательные мотивы; внутренние мотивы подчинены внешним.
6-14	Норма	Ценностные представления приняты личностью обучающегося. Ценностное отношение находится на стадии преобразования широких познавательных мотивов в учебно-познавательные; внутренние и внешние мотивы сбалансированы.

15-20	Высокий	Ценностные преставления о геометрических категориях, объектах, методах как носителях культурных ценностей включены в личностно признанную систему ценностей обучающегося через отражение в сознании. Ценностные отношения выражены в реализации принятых обучающимся ценностей в поведении и деятельности; наблюдается динамическое изменение личности обучающегося в соответствии с принятой целью; школьник легко включается в деятельность, задания выполняет увлеченно, демонстрируя осознание смысла, сформированность понятий, положительную направленность поведения; внутренние мотивы носят доминирующий характер.

Анализ собранных данных показал, что уровень сформированности ценностного отношения обучающихся в процессе дополнительного изучения математики в рамках факультатива «Конструктивная геометрия на евклидовой плоскости» у большинства посещающих факультатив (73%) находится в рамках возрастной нормы, у остальных учеников – ниже нормы. Впоследствии часть из этих учеников прекратила посещение факультатива.

Экспериментальное обучение проводилось на тех же базовых площадках:

База проведения эксперимента	Учебный год	Количество учащихся
ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы КШО (Коммунарское Школьное Отделение) 8 «а» и 9 «а» классы	2017-2018 2018-2019 2019-2020	60 58 56
ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы БШО (Бунинское Школьное Отделение) 8 «в» и 9 «в» классы	2017-2018 2018-2019 2019-2020	57 54 52
Итого:		337

Данные об уровне развития понятийных психических структур обучающихся через освоение умений решения задач на геометрические построения у учащихся экспериментальной группы (8 «а», «в», 9 «а», «в» классов КШО (Коммунарского Школьного Отделения) и БШО (Бунинского Школьного Отделения) ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы) сравнивались с данными контрольных групп – 8 «б» и 9 «б» классов КШО (Коммунарского Школьного Отделения) и БШО (Бунинского Школьного Отделения) ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы.

Задания составлялись таким образом, чтобы была возможность сопоставить уровень сформированности понятийных психических структур обучающихся с уровнем освоения обобщенного умения по решению задач на геометрические построения:

Задача 1 – проверка сформированности системы реальных познавательных операций в составе понятийных психических структур, отнесенных к этапу оценки результатов решения задач на элементарные построения. В ней предлагалось выполнить построения в электронной среде и на бумажном носителе, не выполняя анализа и доказательства.

Задача 2 – проверка сформированности системы формальных дедуктивных операций в составе понятийных психических структур, отнесенных к этапу оценки результатов решения задач на геометрические построения. В ней предлагалось решить задачу методом пересечений в электронной среде и на бумажном носителе, осуществляя все этапы.

Задача 3 – проверка сформированности системы реальных и формальных дедуктивных операций в составе понятийных психических структур, отнесенных к этапу оценки результатов решения задач на геометрические построения. В ней предлагалось решить задачу методом симметрии в электронной среде и на бумажном носителе, подробно осуществляя этапы анализа и доказательства.

Задача 4 – проверка сформированности системы реальных и формальных дедуктивных операций в составе понятийных психических структур, отнесенных к этапу оценки результатов решения задач на геометрические построения. В ней предлагалось решить задачу методом поворота в электронной среде и на бумажном носителе, подробно осуществляя этапы анализа и доказательства.

Задача 5 – комплексная проверка сформированности системы целостных операций в составе понятийных психических структур, отнесенных к этапу оценки результатов решения задач на геометрические построения. В ней предлагалось решить задачу методом гомотетии в электронной среде и на бумажном носителе, подробно осуществляя этап анализа.

Задача 6 – проверка сформированности системы целостных операций в составе понятийных психических структур, отнесенных к проведению модифицирующего компьютерного эксперимента. В ней предлагалось решить как можно больше новых задач на основе экспериментирования с компьютерной моделью объекта исследования.

Приведем примеры перечисленных выше видов заданий, которые были предложены учащимся разных классов, а также их решения и критерии оценки.

Задание 6 для 8 класса (max 8 баллов). (Задача предложена профессором Н.Г. Подаевой).

Построить две касающиеся внешним образом окружности ω_1 и ω_2 с радиусами, равными данным отрезкам r_1 и r_2, а также их общую касательную, не проходящую через точку касания.

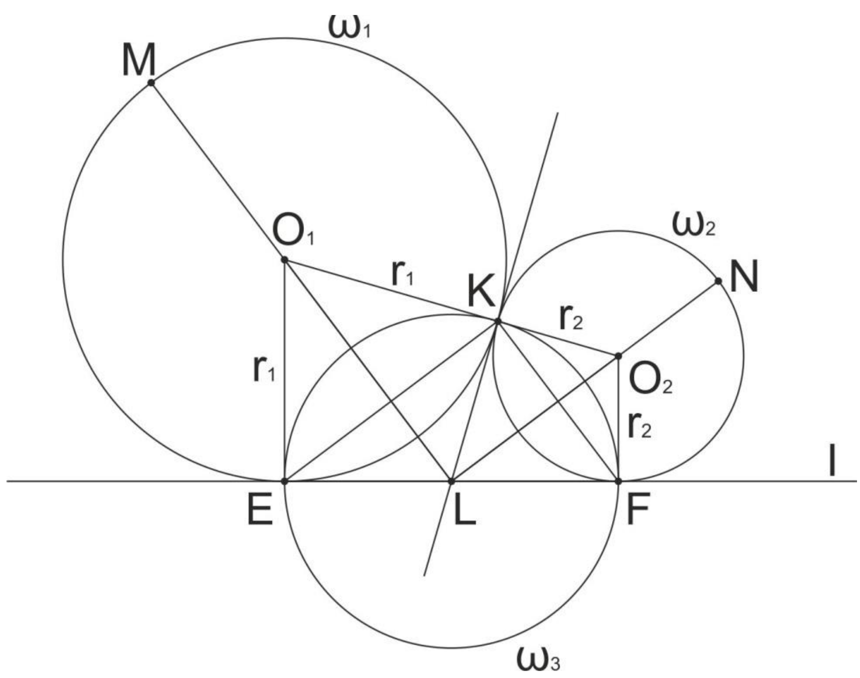


Рис. 8. Диагностическая задача

Баллы	Критерии (8 класс)
1	В результате компьютерного эксперимента в системе GeoGebra построены касающихся внешним образом окружности с данными радиусами и их общая касательная, не проходящая через точку касания.
3	В процессе анализа проделаны следующие рассуждения. Пусть K– точка касания окружностей ω_1 и ω_2 (рис. 1), L – точка пересечения касательной l с общей касательной, проходящей через точку K. Пусть дуга EMK окружности ω_1 вмещает некоторый угол φ. Тогда угол EKL равен φ.
5	В процессе анализа проделаны следующие рассуждения. Пусть K– точка касания окружностей ω_1 и ω_2 (рис. 1), L– точка пересечения касательной l с общей касательной, проходящей через точку K. Пусть дуга EMK окружности ω_1 вмещает некоторый угол φ. Тогда угол EKL равен φ. Аналогично, угол FKL равен некоторому углу ψ. Т.к. длины касательных, проведенных из точки K к окружности, равны, то $LK = LF = x$. Значит, точка L– центр окружности ω_3,

	проходящей через точки E, K и F. Следовательно, угол EKF - прямой (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Но угол EKF равен сумме углов φ и ψ. Сл., $\varphi+\psi=\frac{\pi}{2}$. Ход рассуждений описан в корректных математических терминах.
8	В процессе анализа проделаны следующие рассуждения. Пусть K– точка касания окружностей ω_1 и ω_2 (рис. 1), L– точка пересечения касательной l с общей касательной, проходящей через точку K. Пусть дуга EMK окружности ω_1 вмещает некоторый угол φ. Тогда угол EKL равен φ. Аналогично, угол FKL равен некоторому углу ψ. Так как длины касательных, проведенных из точки K к окружности, равны, то $LK=LF=x$. Значит, точка L– центр окружности ω_3, проходящей через точки E, K и F. Следовательно, угол EKF– прямой (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Но угол EKF равен сумме углов φ и ψ. Сл., $\varphi+\psi=\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник O_1KL. Угол $\angle O_1LK=90^0-\varphi=\psi$. Аналогично, $\angle O_2LK=\varphi$. Следовательно, $\angle O_1LO_2=\varphi+\psi=90^0$. То есть треугольник O_1LO_2– прямоугольный. Его высота $LK=x$ является средним геометрическим проекций катетов, то есть $x=\sqrt{r_1r_2}$. Тогда расстояние $EF=2x=2\sqrt{r_1r_2}$. Представлен алгоритм построений, вытекающий из результатов анализа. Чертеж выполнен в системе GeoGebra. Проведено доказательство и исследование. Ход рассуждений описан в корректных математических терминах.

Задание 6 для 9 класса (max 10 баллов).

Дана окружность ω с центром в точке O радиуса r. Точка A такова, что $OA=d(d>r)$. Через точку A проведены две касательные AP и AQ к окружности ω (P и Q– точки касания). Провести третью касательную к окружности, пересекающую отрезки AP и AQ в точках M и N, такую что угол $\angle MON=\angle OPA$.

Баллы	Критерии (9 класс)
1	В результате компьютерного эксперимента в системе GeoGebra построены касательные AP и AQ к окружности.
3	В процессе анализа проделаны следующие рассуждения. Пусть K - точка касания окружности ω и прямой MN (рис. 1). Рассмотрим дугу PRQ, опирающуюся на отрезок PQ и вмещающую некоторый угол φ. Тогда имеем: $\angle POA = \angle QOA = \varphi, \quad \angle POQ = 2\varphi$.
5	В процессе анализа проделаны следующие рассуждения. Пусть K - точка касания окружности ω и прямой MN (рис. 1). Рассмотрим дугу PRQ, опирающуюся на отрезок PQ и вмещающую некоторый угол φ. Тогда имеем: $\angle POA = \angle QOA = \varphi, \quad \angle POQ = 2\varphi$. Обозначим $\angle POK = \alpha, \quad \angle QOK = \beta$. Тогда $\angle MOK = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle NOK = \frac{\beta}{2}$. Следовательно, $\angle MON = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Но $\angle POQ = \alpha + \beta = 2\varphi$. Значит, $\angle MON = \varphi$. Ход рассуждений описан в корректных математических терминах.
8	В процессе анализа проделаны следующие рассуждения. Пусть K - точка касания окружности ω и прямой MN (рис. 1). Рассмотрим дугу PRQ, опирающуюся на отрезок PQ и вмещающую некоторый угол φ. Тогда имеем: $\angle POA = \angle QOA = \varphi, \quad \angle POQ = 2\varphi$. Обозначим $\angle POK = \alpha, \quad \angle QOK = \beta$. Тогда $\angle MOK = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle NOK = \frac{\beta}{2}$. Следовательно, $\angle MON = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Но $\angle POQ = \alpha + \beta = 2\varphi$. Значит, $\angle MON = \varphi$. Представлен алгоритм построений, вытекающий из результатов анализа. Чертеж выполнен в системе GeoGebra. Проведено доказательство и исследование. Ход рассуждений описан в корректных математических терминах.

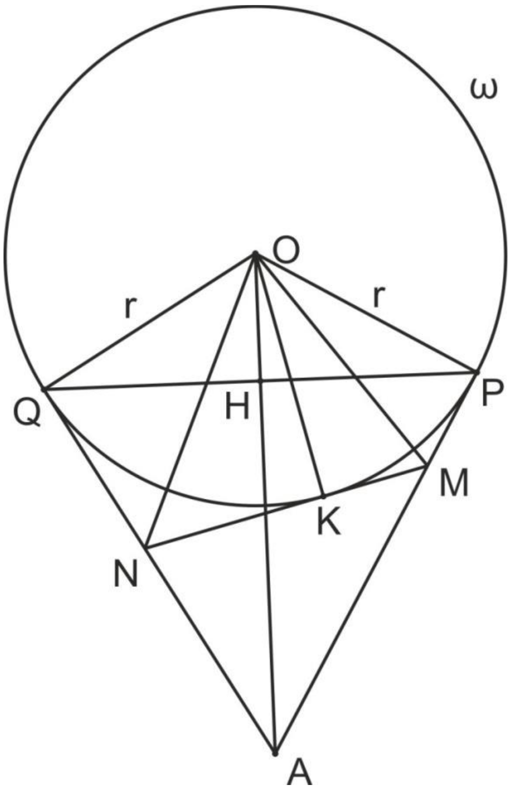


Рис. 9. Диагностическая задача

Уровень развития понятийных психических структур обучающихся через освоение умений решения задач на геометрические построения по каждому заданию определялся согласно таблице 7.

Таблица 7.

	Форма действия	**Степень обобщения, категоризации и переноса**	**Мера развернутости**	**Мера освоения и обогащения**	**Мера свернутости**	**Ценностно-смысловая сфера**
I	Владеет навыками геометрических построений на уровне	Владеет приемами проведения отдельных геометри-	Выполняет отдельные операции, составляющие со-	Автоматизировано выполняет действия, не осознавая	Субъективный образ понятия не представлен в сжа-	Ценностные представления не усвоены

	реальных операций	ческих построений	держание умения	как самой задачи, так и тех способов, с помощью которых она решается	той форме	
II	Владеет формально-дедуктивными операциями, обеспечивающими умение успешно выполнять этапы анализа и доказательства	Владеет приемами, применяемыми по отношению к разному содержанию геометрических задач на построение, что свидетельствует об уровне их обобщенности	Последовательно выполняет большинство операций, составляющих содержание умения	Мыслительное умение решать задачи на геометрические построения в электронной среде не автоматизировано	Развернутый на предыдущих этапах субъективный образ понятия представлен в сжатой форме, что на уровне решения задач может обеспечиваться усвоением опорных задач	Ценностные представления усвоены, но не включены в личностно признанную систему ценностей
III	Владеет целостными операциями, обеспечива-	Владеет широтой переноса приемов	Строго и последовательно выполняет	Умение осуществляется при полном осо-	Реорганизация имеющихся сведений	Сформировано ценностное отно-

	ющими умение выполнять все этапы решения задачи	при проведении различных геометрических построений.	все операции, составляющие содержание умения	знании как самой задачи, так и тех способов, с помощью которых она решается	относительно данного понятия и превращение их в обобщенную единицу знания	шение
IV	Сформированы реальные познавательные и формальные операции, что обеспечивает единство плоскости содержания (плоскости объектов) и плоскости знаковой формы.	Применяет усваиваемое понятие в разных ситуациях, в том числе в условиях самостоятельного выстраивания отдельных аспектов его содержания	Состав реально выполняемых операций уменьшается, действие становится сокращенным, свернутым	Накопление и дифференциация опыта оперирования понятием, расширение возможных ресурсов осмысления его содержания (за счет включения разных вариантов его интерпретации, увеличения числа варьирую-	Эффект «свертывания» характеризует завершенность процесса образования понятийного знания	Принятые обучающимся ценности реализованы в поведении и деятельности

				щих по степени существенных признаков, наращивания межпонятийных связей).		

Проверялось влияние на уровень развития понятийных психических структур обучающихся через освоение умений решения задач на геометрические построения таких факторов, как уровень математической подготовки, условия обучения и продолжительность обучения, а также влияние уровня владения системой динамической математики (СДМ).

Таблица 8

Уровень развития понятийных психических структур обучающихся контрольной группы до и после экспериментального обучения (чел.)

	Уровень			
	репродуктивный	*низкопродуктивный*	*среднепродуктивный*	*высокопродуктивный*
До экспериментального обучения	12	124	22	5
После экспериментального обучения	9	117	30	7

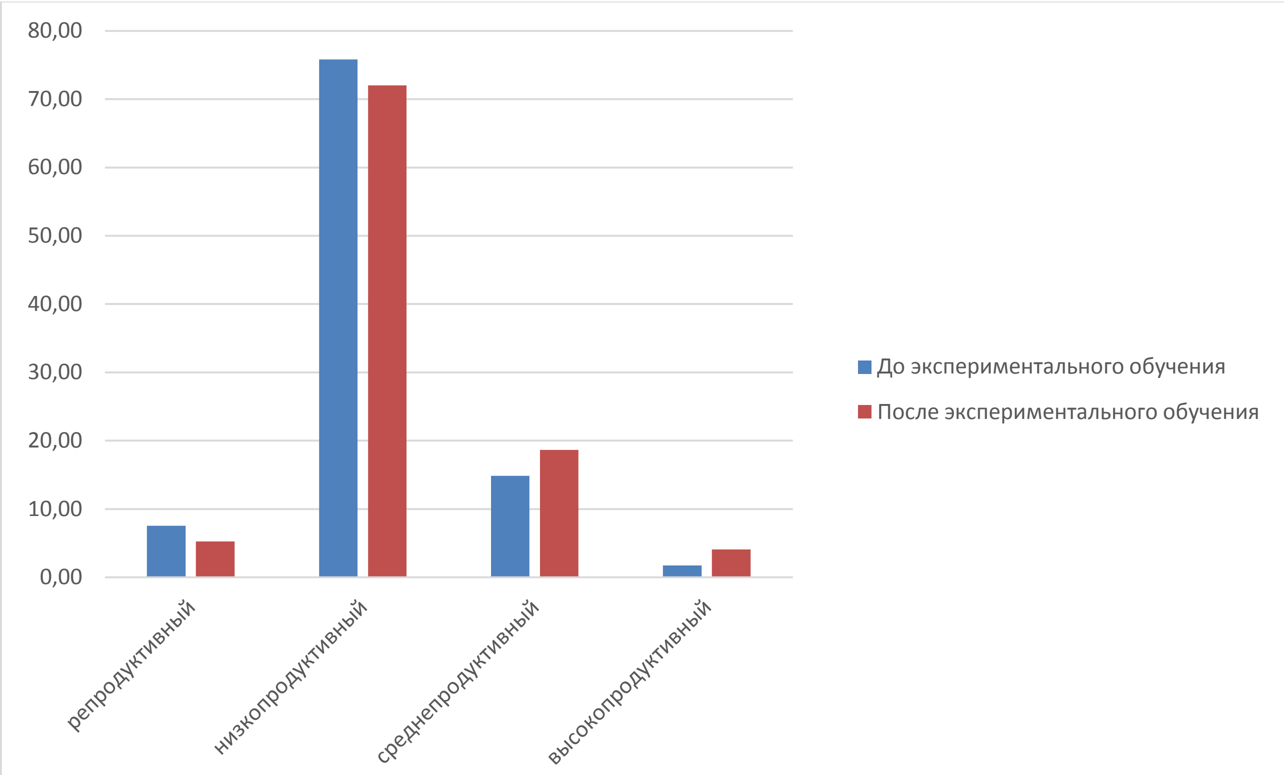


Рис.10. Уровень развития понятийных психических структур обучающихся контрольной группы (%)

Таблица 9

Уровень развития понятийных психических структур обучающихся экспериментальной группы до и после экспериментального обучения (чел.)

	Уровень			
	репродуктивный	*низкопродуктивный*	*среднепродуктивный*	*высокопродуктивный*
До экспериментального обучения	22	121	27	5
После экспериментального обучения	9	92	50	23

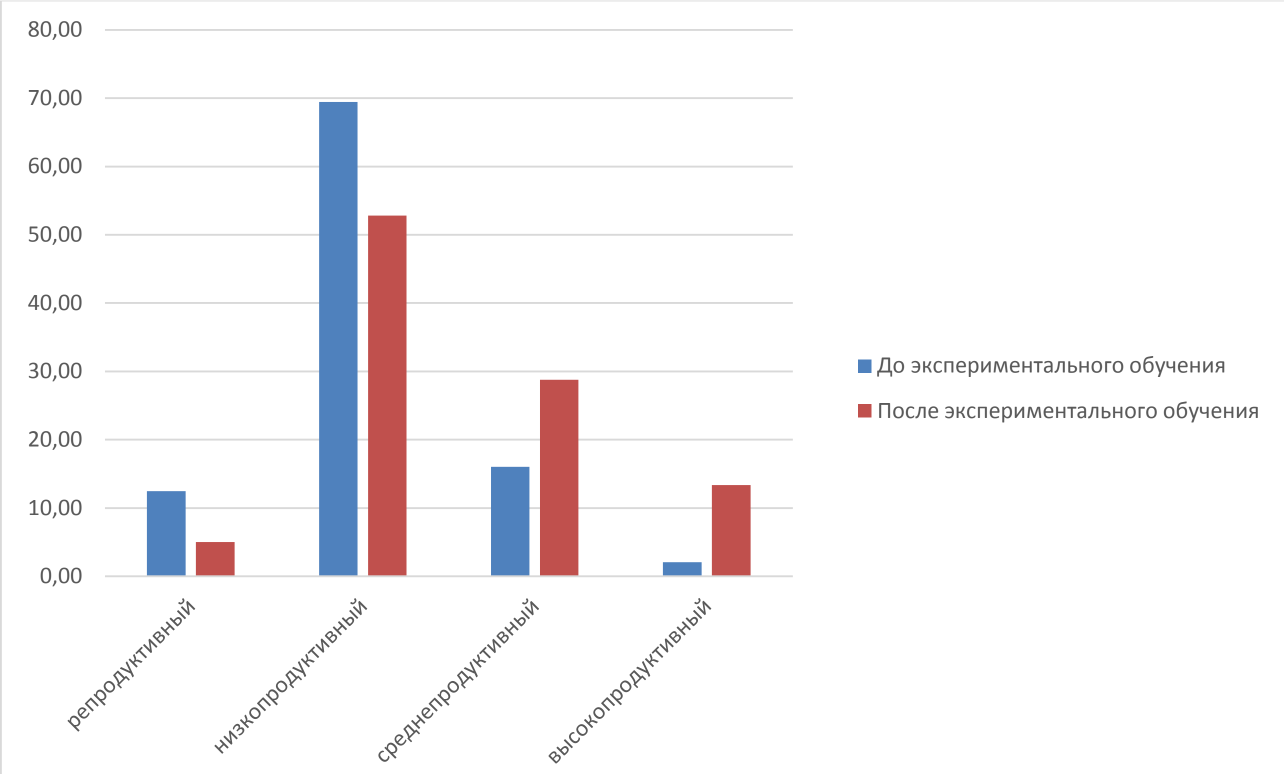


Рис.11. Уровень развития понятийных психических структур обучающихся экспериментальной группы (%)

Установим значимость различий между контрольной и экспериментальной группами до экспериментального обучения. Метод исследования – непараметрический критерий Пирсона, который позволит достоверно установить однородность в 2-х независимых эмпирических распределений одного и того же признака в экспериментальной и контрольной группах.

Нулевая гипотеза: H_0 – различий между эмпирическими распределениями контрольной и экспериментальной группами до экспериментального обучения нет.

Альтернативная гипотеза H_1 – различия между двумя эмпирическими распределениями контрольной и экспериментальной группами до экспериментального обучения не случайны.

Подсчитаем эмпирическое значение критерия по формуле:

$$\chi^2_{эмп} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_1 x_i - n_2 y_i)^2}{x_i + y_i}.$$

Имеем:

$$\chi^2_{эмп} = \frac{1}{163 \cdot 174} \left[\frac{(163 \cdot 12 - 174 \cdot 22^2}{12+22} + \frac{(163 \cdot 124 - 174 \cdot 121)^2}{124+121} + \frac{(163 \cdot 22 - 174 \cdot 27)^2}{22+27} + \atop + \frac{(163 \cdot 5 - 174 \cdot 5)^2}{5+5} \right] = 3{,}066.$$

Так как данное эмпирическое значение меньше критического при уровне значимости 0,05 ($\chi^2_{эмп} = 3{,}066 < \chi^2_{кр}(0{,}05;3) = 7{,}815$), то нулевую гипотезу принимаем, то есть расхождения между распределениями не достоверны.

В следующей части ОЭР определим степень сформированности у школьников понятийных структур для каждой из групп после экспериментального воздействия. В качестве материала для анализа выступят данные итогового среза. Метод исследования – непараметрический критерий Пирсона.

Нулевая гипотеза: H_0 – различий между эмпирическими распределениями (контрольной и экспериментальной группами) после экспериментального обучения нет.

Альтернативная гипотеза H_1– различия между двумя эмпирическими распределениями (контрольной и экспериментальной группами) после экспериментального обучения не случайны.

$$\chi^2_{эмп} = \frac{1}{163 \cdot 174} \left[\frac{(163 \cdot 9 - 174 \cdot 9)^2}{9+9} + \frac{(163 \cdot 117 - 174 \cdot 92)^2}{117+92} + \frac{(163 \cdot 30 - 174 \cdot 50)^2}{30+50} + \atop + \frac{(163 \cdot 7 - 174 \cdot 23)^2}{7+23} \right] = 16{,}285 \cdot$$

Так как полученное эмпирическое значение больше критического при уровне значимости 0,05 ($\chi^2_{эмп} = 16{,}285 > \chi^2_{кр}(0{,}05;3) = 7{,}815$), то нулевую гипотезу отклоняем, то есть расхождения между распределениями статистически значимы.

Проведенный формирующий эксперимент, анализ и статистическая обработка его результатов позволяют сделать следующий **вывод, подтверждающий справедливость гипотезы исследования:** методическое сопровождение социокультурно-ориентированного обучения геометрии учащихся основной школы с использованием СДМ способствует повышению уровня развития понятийных психических структур; большинство учащихся, посещающих факультатив в течение трех лет, имеют 3–4 уровень развития.

Выводы по второй главе

1. Система методического сопровождения обучения в деятельности педагогов средних общеобразовательных школ рассматривается нами как вид технологического процесса. При его формировании и внедрении на практике следует придерживаться дидактических принципов интегративности классических и инновационных подходов к обучению школьников геометрии, а также ориентации на положения социокультурной образовательной парадигмы. При разработке методических материалов и программы математического образования по указанной схеме были использованы возможности интернет-ресурса GeoGebra.ru, предназначенного для осуществления образовательного процесса в рамках цифровой образовательной среды. Таким образом реализуется принцип индивидуализации образования при помощи дистанционных технологий. Система и содержание курса предполагают проведение нескольких видов учебных занятий: консультаций, тренировочных уроков (кружков) и контрольных. Степень достижения целей курса определялась посредством проведения экспресс исследований и тестирования школьников. Основными параметрами для диагностики выступали: мотивы, навыки, психические структуры. По итогам проводился анализ диагностических карт с последующим внесением изменений в индивидуальные образовательные маршруты учащихся. Форма проведения занятий – очная и дистанционная.

2. Результативность технологии методического сопровождения проявляется в комплексном развитии рефлексивного, когнитивного, эмоционального и поведенческого компонентов понятийных психических структур обучающихся, которые рассматриваются нами как результат обучения по программам математического цикла. Основным средством формирования указанных

навыков становятся задачи на построение геометрических фигур. При оценке степени сформированности обозначенных психических структур автором применялась разработанная им система показателей умения решать указанный тип задач. Среди них – системность и гибкость, умение анализировать и делать выводы, навык обобщения, развернутость, категоризация, ценностно-смысловая составляющая, свернутость, мера переноса. Разработанная программа и технология обучения показали высокий уровень достоверности и эффективности, что подтверждается результатами опытно-экспериментальной работы. Как показало исследование, динамика указанных показателей в экспериментальной группе была положительной. При анализе эмпирического материала применялись методы математической статистики.

.

Заключение

С учетом исследованных особенностей школьной методики обучения математике и специфики традиционного введения новых понятий было установлено, что в традиционной методике процесс введения новых понятий опирается преимущественно на декларативные знания. Акцент ставится на работе с определением, много времени и усилий отводится математическому объекту, в то время как образование понятий непосредственно связано с освоением мыслительных операций, общих интеллектуальных, обобщенных учебных умений, составляющих внешнюю структуру деятельности обучающихся. В связи с этим деятельность по освоению понятия должна способствовать трансформации декларативных знаний в процедурные и ценностные. Эффективное овладение основными геометрическими понятиями как системой мыслительных действий и операций возможно в процессе обучения задачам на геометрические построения. У школьников формируются понятийные структуры в результате целенаправленной и системной деятельности педагога, включающей в себя процесс передачи знаний, который в результате трансформируется и закрепляется в сознании ребенка в виде специальных психических образований. По словам Л.М. Веккера, данный процесс требует индивидуального подхода к использованию внутренних резервов психики, осмысленного обучения, а не простого заучивания готового знания.

В нашем исследовании в качестве методологического ориентира был выбран равновесный подход к изучению методики формирования психических качеств личности (Л.М. Веккер, М.А. Холодная).

В контексте данных идей в диссертации было установлено, что наиболее адекватной моделью развития понятийных психических структур обучающихся при обучении геометрии в школе является целостная модель, компоненты которой представлены в виде блоков:

1) формирование когнитивных схем, семантических структур – рефлексивного отношения, предполагающего понимание школьником математической информации;

2) развитие индивидуальных стилей кодирования информации;

3) формирование ценностно-смысловой сферы на уровнях усвоения математических понятий (формирование ценностных представлений), переживания ценностных позиций (формирование ценностного отношения), применения (формирование ценностных ориентаций и личностных смыслов).

С учетом особенностей данной модели система методического сопровождения обучения геометрии школьников определяется как самостоятельная, открытая, развивающаяся образовательная система. В ее основе должны лежать мотивы и заинтересованность школьников, включая их особенности и уровень развития, сформированные умения, навыки, знания и опыт. В образовательном процессе происходит развертывание этого опыта по трем видам деятельности. В результате дети овладевают всеми тремя видами научного знания и способами работы с ним.

Действенность системы методического сопровождения обучения геометрии школьников, опосредующего процесс освоения ими научных понятий, обусловлена соблюдением ряда методологических подходов. Основополагающие принципы лежат в зоне концепции социокультурно-ориентированного образования. Следовательно, при формировании личности школьника на уроках математики и геометрии следует ориентироваться в первую очередь на формирование у них ценностного отношения к получаемому знанию, которое выражается в формировании понятийного и логического мышления.

В ходе исследования было установлено и подтверждено опытно-экспериментальным путем, что развитие понятийных психических структур обучающихся представляет собой системы действий, направленных на преобразование личности школьника с целью его личностного развития и роста. Понятийное мышление предполагает отказ от заучивания и переход к деятельностному подходу в обучении, поскольку именно действия становятся маркером сформированности у ребенка понятийной системы. В дальнейшем школьники приобретают возможность практического использования имеющихся знаниево-ценностных систем и понятий в учебе.

Обучение ребенка на уроках геометрии принципам логического и понятийного мышления, навыкам построения геометрических фигур, доказательного решения задач различного типа значительно облегчается в результате методического сопровождения образовательного взаимодействия в электронной образовательной среде, идентифицируемой с ресурсом динамической системы GeoGebra.

Была подтверждена гипотеза о положительном влиянии на динамику развития понятийных психических структур обучающихся следующих факторов: образовательного уровня учащихся, степени их подготовки; навыков работы с информационными системами на примере GeoGebra; длительность учебного курса. Последний фактор напрямую связан с итоговыми значениями результативности обучения, поскольку демонстрирует, насколько у школьников сформировались заданные исследователем показатели и качества (психические структуры).

Дальнейшее проведение опытно-экспериментальной работы позволит повысить качество математической подготовки старшеклассников.

Список литературы

1. Александров А.Д. Геометрия: учебное пособие для студ. вузов, обучающихся по спец. «Математика» / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – Москва: Наука, 1990. – 672 с.

2. Андреева Г.М. Психология социального познания / Г.М. Андреева. – Москва: Аспект-Пресс, 1997. – 239 с.

3. Антонов Н.С. Современные проблемы методики преподавания математики: учебное пособие для студентов мат. и физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Н.С. Антонов, В.А. Гусев. – Москва: Просвещение, 1985. – 304 с.

4. Аргунов Б. И. Геометрические построения на плоскости / Б. И. Аргунов, М.Б. Балк. – Москва: Просвещение, 1957. – 268 с.

5. Асмолов А.Г. Оптика просвещения / А.Г. Асмолов. – Москва: Просвещение, 2012. – 447 с.

6. Атанасян Л.С. Геометрия: учеб. для 7 – 9 кл. сред. шк. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 4-е изд. – Москва: Просвещение, 1994. – 335 с.

7. Атанасян Л. С. Геометрия. 7 – 9 классы: учебник для общеобразовательных организаций / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э.Г. Позднякc, И.И. Юдина. – Москва: Просвещение, 2013. – 383 с.

8. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения: общедидактический аспект / Ю.К. Бабанский. – Москва: Педагогика, 1977. – 254 с.

9. Батищев Г.С. Деятельная сущность человека как философский принцип / Г. С. Батищев // Проблемы человека в современной философии. – Москва: Наука, 1969. – 259 с.

10. Бачинин В. А. Духовная культура личности: философские очерки. – Москва: Политиздат, 1986. – 108 с.

11. Белошистая А.В. Задачи на построение в школьном курсе геометрии / А. В. Белошистая // Математика в школе. – 2002. – №9. – С. 47-50.

12. Библер В.С. От наукоучения – к логике культуры. – Москва: Политиздат, 1991.

13. Блудов В.В. К изучению темы «Геометрические построения» (в школе) / В.В. Блудов // Математика в школе. – 1994. – №4. – С. 14-15.

14. Валеева Н.Г. Массовые открытые онлайн-курсы в обучении студентов экологического факультета английскому языку для профессиональной коммуникации / Н.Г. Валеева, М.А. Руднева // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Экология и безопасность жизнедеятельности. – 2016. – № 3.

15. Веккер Л.М. Психические процессы. Мышление и интеллект / Л.М. Веккер. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1976. – С. 75.

16. Веринг Ю.И. Формирование у учащихся умений строить доказательство: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.01 / Юлия Ивановна Веринг; Латвийский государственный университет им. П. Стучки. – Рига, 1989. – 24 с.

17. Виленкин Н.Я. Определение в школьном курсе математики и методика работы над ними / Н.Я. Виленкин, С.К. Абайдулин, Р.К. Таварткиладзе // Математика в школе. – 1984. – №4. – С. 64.

18. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005 – 252 с.

19. Владимирцева С.А. Теория и методика обучения математике: Общая методика / С.А. Владимирцева. – Барнаул: Издательство БГПУ, 2007. – 189 с.

20. Воистинова Г.Х. Задачи на построение как средство формирования приёмов мыслительной деятельности учащихся основной школы: дис. ... канд. пед. наук / Гюзель Хамитовна Воистинова; Московский педагогический государственный университет. – Москва, 2000. – 183 с.

21. Выготский Л.С. Педагогическая психология / Л.С. Выготский / под ред. В.В. Давыдова. – Москва: АСТ: АСТРЕЛЬ, 2008. – 670 с.

22. Выготский Л.С. Педагогическая психология / Л.С. Выготский / под ред. В.В. Давыдова. – Москва: Педагогика-Пресс, 2010. – С. 12-15.

23. Выготский Л.С. Собрание сочинений. В 6 т. Т.1. Проблема сознания / Л.С. Выготский. – Москва: Наука, 1982. – 487 с.

24. Выготский Л.С. Собрание сочинений. В 6 т. Т. 2. Мышление и речь / Л.С. Выготский. – Москва: Педагогика, 2016. – С. 23-25.

25. Выготский Л.С. Собрание сочинений. В 6 т. Т. 2. Мышление и речь. / Л.С. Выготский. – Москва: Педагогика, 1982.

26. Выготский Л.С. Собрание сочинений. В 6 т. Т. 4. Детская психология / Л.С. Выготский. – Москва: Педагогика, 1984.

27. Гальперин П.Я. Методы обучения и умственное развитие / П.Я. Гальперин. – Москва: Просвещение, 1985. – 102 с.

28. Гальперин П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий / П.Я. Гальперин // Исследование мышления в советской психологии / под ред. Е.В. Шороховой. – Москва: Наука, 1966.

29. Гельфман, Э. Г. Психодидактика школьного учебника: учебное пособие для вузов / Э. Г. Гельфман, М. А. Холодная. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Юрайт, 2019. – 328 с.

30. Герасимова Е. Инвестиции в учителей всегда самые выгодные: итоги очередного международного исследования математических знаний школьников / Е. Герасимова // Независимая газета: [интернет-портал]. – URL: http://www.ng.ru/education/2013-12-17/8_teachers.html. (дата обращения 15.03. 2021).

31. Гершунский Б.С. Философия образования для XXI века / Б.С. Гершунский. – Москва: Изд-во «Совершенство», 1989. – 608 с.

32. Голицына И.Н. Технология Образование 3.0 в современном учебном процессе / И.Н. Голицына // Образовательные технологии и общество. – 2014. – Т. 17. – № 3. – С. 646-656.

33. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Я.И. Груденов. – Москва: Педагогика, 1987. – 159 с.

34. Гусев В.А. Методика обучения геометрии / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др. / под ред. В.А. Гусева. – Москва: Издательский центр «Академия», 2004. – 368 с.

35. Гусев В.А. Методика обучения геометрии / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др. / под ред. В.А. Гусева. – Москва: Издательский центр «Академия», 2004. – 368 с.

36. Гусев В.А. Преподавание геометрии в 6-8 классах: сборник статей / сост. В.А. Гусев. – Москва: Просвещение, 1979. – 281 с.

37. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В.А. Гусев. – Москва: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия», 2003. – 432 с.

38. Давидович В.Е. Сущность культуры / В.Е. Давидович, Ю.А. Жданов. – Ростов: Изд-во Ростовского университета, 1979. – 268 с.

39. Давыдов В.В. Психологическая теория учебной деятельности и методов начального обучения, основанных на содержательном обобщении / В.В. Давыдов. – Томск: Издательство «Пеленг», 1992. – 112 с.

40. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений / В.А. Далингер. – Москва: Просвещение, 2006. – 256 с.

41. Диалектика деятельности и культуры. – Киев: Наукова думка, 1983. – 186 с.

42. Динамика ценности населения реформированной России. – Москва: Наука, 1996. – 46 с.

43. Дискин И.Е. Культура. Стратегия социально-экономического развития / И.Е. Дискин. – Москва: Наука, 1990. – 103 с.

44. Добреньков В.И. Общество и образование / В.И. Добреньков, В.Я. Нечаев. – Москва: ИНФРА-М, 2003. – 379 с.

45. Дубовицкая, Т. Самоактуализация личности в контекстном обучении: монография / Т. Дубовицкая. – Москва: Альфа, 2004. – 131 с.

46. Дурай-Новакова К.А. Профессиональная готовность как подструктура личности учителя / К.А. Дурай-Новакова. – Москва: Просвещение, 1982. – 203 с.

47. Жафяров А.Ж. Конструктивная геометрия: учебно-дидактический комплекс по реализации элективного курса / А.Ж. Жафяров, Е.С. Никитина, З.Н. Родина. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2008. – 105 с.

48. Жуков Ю.М. Ценности как детерминанты принятия. Психологические проблемы социальной регуляции поведения / Ю.М. Жуков. – Москва: Наука, 1976. – 99 с.

49. Здравомыслов А.Г. Потребности. Интересы. Ценности / А.Г. Здравомыслов. – Москва: Просвещение, 1986. – 156 с.

50. Зимняя И.А. Педагогическая психология: учебное пособие / И.А. Зимняя. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1997. – 480 с.

51. Ильин Е.П. Умения и навыки: нерешенные вопросы / Е.П. Ильин // Вопросы психологии. – 1986. – № 2. – С. 138-148.

52. Историко-этимологический словарь современного русского языка / под ред. П.Н. Черных. – Москва: Просвещение, 1982. – 458 с.

53. Кабанова-Меллер Е.Н. Психология формирования знаний и навыков школьников / Е.Н. Кабанова-Миллер. – Москва: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 376 с.

54. Классов А.Б. Использование системы дистанционного обучения в учебном процессе / А.Б. Классов, О.В. Классова // Научный альманах. – 2016. № 3-2. – С. 165-169.

55. Клименченко Д.В. Задачи на построение треугольников по некоторым данным точкам / Д.В. Клименченко, Т.Д. Цикунова // Математика в школе. – 1990. – №1. – С. 19-21.

56. Клякля М. Многоэтапные задания в формировании творческой математической деятельности учащихся классов с углубленным изучением математики в школах Польши / М. Клякля. – Плоцк, 2003. – 189 с.

57. Коган Л.Н. Очерки теории социалистической культуры / Л.Н. Коган, Ю.Р. Вишневский. – Свердловск: Свердловский университет, 1972. – 86 с.

58. Козловский В.П. Культурный смысл: генезис и функции / В.П. Козловский. – Киев: Наукова думка, 1990. – 152 с.

59. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе: общ. методика: учеб. пособие для физ-мат. фак. пед. институтов / Ю.М. Колягин и др. – Москва: Просвещение, 1975. – 462 с.

60. Котова И.Б. Профессия и личность / И.Б. Котова, Е.Н. Шиянов. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского педуниверситета, 1997. – 144 с.

61. Кузовлев В.П. Основы геометрии: учебное пособие для 5-6 классов / В.П. Кузовлев, М.В. Подаев. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011. – 150 с.

62. Кузовлев В.П. Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии: учебное пособие для вузов / В.П. Кузовлев, Н.Г. Подаева. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 208 с.

63. Куприяновский В.П. Информационные технологии в системе университетов, науки и инновации в цифровой экономике на примере Великобритании / В.П. Куприяновский, С.А. Синягов, Д.Е. Намиот, А.П. Добрынин, К.Ю. Черных // International Journal of Open Information Technologies. – 2016. – Т. 4. – № 4.

64. Кучинский Г.М. Психология внутреннего диалога / Г.М. Кучинский. – Минск: Изд-во БГУ, 1988. – 306 с.

65. Лебедева М.Б. Массовые открытые онлайн-курсы как тенденция развития образования / М.Б. Лебедева // Человек и образование. – 2015. – № 1 (42).

66. Лозанов Г. Суггестология и суггестопедия / Г. Лозанов. – София, 1973. – 108 с.

67. Любимов Л.Л. Общество без молчунов и коррупционеров / Л.Л. Любимов // Учительская газета. – 2011. – № 24. – С. 4-5.

68. Маковейчук К.А. Перспективы использования курсов в формате МООК в высшем образовании в России / К.А. Маковейчук // Международный научно-исследовательский журнал. – 2015. – № 63. – С. 66.

69. Маркарян Э.С. Вопросы системного исследования общества / Э.С. Маркарян. – Москва: Наука, 1976. – 201 с.

70. Маркарян Э.С. Очерки теории культуры / Э.С. Маркарян. – Ереван, 1969. – 341 с.

71. Маркарян Э.С. Теория культуры и современная наука / Э.С. Маркарян. – Москва: Просвещение, 1983. – 224 с.

72. Маркарян Э.С. О генезисе человеческой деятельности и культуры / Э.С. Маркарян. – Ереван, 1973. – 214 с.

73. Маслова Г.Г. Методика обучения решению задач на построение в восьмилетней школе. – Москва: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1961. – 152 с.

74. Метельский Н.В. Дидактика математики / Н.В. Метельский. – Минск, 1982. – 256 с.

75. Методика обучения геометрии: учебное пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчишина и др. / под ред. В.А. Гусева. – Москва: Академия, 2004.

76. Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика / В.И. Мишин. – Москва: Просвещение, 1987. – 414 с.

77. Намиот Д.Е. Умные города и образование в цифровой экономике / Д.Е. Намиот, В.П. Куприяновский, А.В. Самородов, О.И. Карасев, Д.Г. Замолодчиков, Н.О. Федорова // International Journal of Open Information Technologies. – 2017. – Т. 5. – № 3.

78. Немов Р.С. Психология: учеб. для студ. высш. пед. учеб. заведений: в 3 кн. / Р.С. Немов. – Москва: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003. – Кн. 1: Общие основы психологии. – 688 с.

79. Образование и культура: история и современность (методологический аспект). – Томск: Изд-во Томского университета, 1989. – 238 с.

80. Оконь В. Введение в общую дидактику / В. Оконь. – Москва: Высшая школа, 1990. – 359 с.

81. Петровский А.В. Возрастная и педагогическая психология: учебное пособие для пединститутов / А.В. Петровский / под ред. проф. А.В. Петровского. – Москва: Просвещение, 1973. – 288 с.

82. Пиаже Ж. Как дети образуют математические понятия / Ж. Пиаже // Вопросы психологии. – 1966. – №4. – С. 121-126.

83. Пиаже Ж. Роль действий в формировании мышления / Ж. Пиаже // Вопросы психологии. – 1965. – № 6. – С. 33-51.

84. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Психология интеллекта / Ж. Пиаже / пер. с фр. В.А Лекторского и др. – Москва: Просвещение, 1969. – 659 с.

85. Погорелов А.В. Геометрия в 7-9 классах: метод. рекомендации к преподаванию курса геометрии по учеб. пособию А.В. Погорелова: пособие для учителя / А.В. Погорелов. – Москва: Просвещение, 1990 – 334 с.

86. Погорелов А.В. Геометрия: учебник для 7-11 классов средней школы / А.В. Погорелов. – Москва: Просвещение, 1993. – 383 с.

87. Подаева Н. Г. Формирование понятий в процессе обучения геометрии школьников в электронной образовательной среде / Н.Г. Подаева, М.В. Подаев, П.А. Агафонов // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2019. – № 6 (июнь). – URL: http://e-koncept.ru/2019/191040.htm. (ВАК) DOI 10.24411/2304-120X-2019-11040. (дата обращения 18.02.2021)

88. Подаева Н.Г. Социокультурная концепция математического образования: монография / Н.Г. Подаева. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2012. – 205 с.

89. Подаева Н.Г. Обновление содержания школьного математического образования: социокультурный подход: монография / Н.Г. Подаева, М.В. Подаев. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2014. – 224 с.

90. Подаева Н.Г. Технология социокультурно-ориентированного обучения геометрии в общеобразовательной школе: монография / Н.Г. Подаева, М.В. Подаев. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2016. – 187 с.

91. Рогановский Н. М. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие / Н.М. Рогановский. – Минск: Выш. шк., 1990. – 267 с.

92. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии / С.Л. Рубинштейн. – Санкт-Петербург: Питер, 2010. – 713 с.

93. Рычков А.К. Социально-философские проблемы образования / А.К. Рычков. – Москва: Просвещение, 1982. – 121 с.

94. Савицкая Н. Урок математики PISA / Н. Савицкая // Независимая газета: [интернет-портал]. – URL: http://www.ng.ru/education/2014-01-21/8_pisa.html/ (дата обращения 10.01. 2021).

95. Саранцев Г.И. Цели обучения математике в средней школе в современных условиях / Г.И. Саранцев // Математика в школе. – 1999. – №6. – С. 36-41.

96. Селевко Г. К. Современные образовательные технологии: учебное пособие / Г.К. Селевко. – Москва: Народное образование, 1998. – 256 с.

97. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии / Е.В. Сидоренко. – Санкт-Петербург: ООО «Речь», 2004. – 350 с.

98. Скаткин М.Н. Проблемы современной дидактики / М.Н. Скаткин. – Москва: Просвещение, 1984. – 187 с.

99. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: методическое пособие / З.И. Слепкань. – Киев: Рад.школа, 1983. – 192 с.

100. Смирнова И.М. Геометрия. 7 класс: методические рекомендации для учителя / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – Москва: Мнемозина, 2007.– 269 с.: ил.

101. Соколов Э.В. Культура и личность / Э.В. Соколов. – Ленинград: Наука, 1972. – 228 с.

102. Сорокин П.А. Человек. Цивилизация. Общество / П.А. Сорокин / общ. ред., сост. и предисл. А. Ю. Согомонова. – Москва: Политиздат, 1992. – 542 с.

103. Столяр А.А. Методика преподавания математики в средней школе: общая методика: учеб.пособие по спец. «Математика» и «Физика» / А.А. Столяр, Р.С. Черкасов. – Москва: Просвещение, 1985. – 336 с.

104. Талызина Н.Ф. Пути усвоения научных понятий // Дидакт. – 1994, – №4-5. – С. 10-13.

105. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний: (Психол. основа) / Н. Ф. Талызина. – 2-е изд., доп. и испр. – Москва: Изд-во МГУ, 1984. – 344 с.

106. Уледов А.К. К определению специфики социального явления / А.К. Уледов // Философские науки. – 1972. – № 9. – С. 27-28.

107. Уотсон Дж.-Б. Бихевиоризм / Дж.-Б. Уотсон // Хрестоматия по истории психологии / ред. П.Я. Гальперина, А.Н. Ждан. – Москва: МГУ, 1980. – С. 34-35.

108. Устиловская А.А. Психологические механизмы преодоления знаковой натурализации идеального содержания геометрических понятий: дис. ... канд. псих. наук: 19.00.07 / Алла Алексеевна Устиловская; Психологический институт Российской академии образования. – Москва, 2008. – 160 с.

109. Ушакова Т.Н. Функциональные структуры второй сигнальной системы / Т.Н. Ушакова. – Москва: Наука, 1970. – 248 с.

110. Фетисов А.И. Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы: пособие для учителя / А.И. Фетисов. – Москва: Просвещение, 1967. – 272 с.

111. Харламов И.Ф. Педагогика: учебное пособие / И.Ф. Харламов. – Москва: Гардарики, 2003. – 519 с.

112. Холодная М.А. Психология интеллекта. Парадоксы исследования / М.А. Холодная. – Санкт-Петербург: Питер, 2002. – 264 с.

113. Хуторской А.В. Метапредметный подход в обучении: научно-методическое пособие / А.В. Хуторской. – Москва: Изд-во «Эйдос», 2012. – 73 с.

114. Четверухин Н.Ф. Методы геометрических построений: учеб. пособие для пед. ин-тов / Н.Ф. Четверухин. – 2-е изд. – Москва: Учпедгиз, 1952. – 148 с.

115. Чучин-Русов А.Е. Образование и культура / А.Е. Чучин-Русов // Педагогика. – 1998. – № 1. – С. 8-12.

116. Шарыгин И. Ф. Нужна ли школе 21-го века Геометрия? / И.Ф. Шарыгин // Математическое просвещение. – Москва: Изд-во МЦНМО, 2004. – С. 37-52.

117. Шевелева С.С. Открытая модель образования (синергетический подход) / С.С. Шевелева. – Москва: Магистр, 1997. – 47 с.

118. Шершов И.Е. Динамика культуры / И.Е. Шершов. – Минск: БГУ, 1980. – 183 с.

119. Щедровицкий Г. П. Избранные труды / Г.П. Щедровицкий. – Москва: Изд-во шк. культ. политики, 1995. – 759 с.

120. Щедровицкий Г.П. Заметки к определению понятий «мышление» и «понимание» / Г.П. Щедровицкий, С.Г. Якобсон // Мышление и общение: материалы Всесоюзного симпозиума. – Алма-Ата, 1973.

121. Щедровицкий Г.П. Процессы и структуры в мышлении: курс лекций / Г.П. Щедровицкий // Из архива Г.П. Щедровицкого. – Москва, 2003. – Т.6. – 320 с.

122. Щедровицкий П.Г. Очерки по философии образования / П.Г. Щедровицкий. – Москва: Наука, 1989. – 157 с.

123. Эльконин Д.Б. К проблеме периодизации психического развития в детском возрасте / Д.Б. Эльконин // Вопросы психологии. – 1971. – № 4. – С. 12-16.

124. Якиманская И.С. Психологические основы математического образования: учеб.пособие для студ. вузов / И.С. Якиманская. – Москва: Академия, 2004. – 319 с.

125. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников: монография / И.С. Якиманская. – Москва: Педагогика, 1980.

126. Arbain N., Shukor, N. A. The effects of GeoGebra on Students achievement. Procedia-Social and Behavioral Sciences. – 2015. – 208-214.

127. Aydin H., Monaghan J. Bridging the divide--Seeing mathematics in the world through dynamic geometry. Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA. – 2011. – 30(1), 1-9.

128. Brown M., Dehoney J., Millichap N. The next generation digital learning environment // A Report on Research. ELI Paper. Louisville, CO: Educause April. 2015.

129. Bruce D.L., Chiu M.M. Composing with new technology: Teacher reflections on learning digital video // Journal of Teacher Education. – 2015. – T. 66. – № 3. – C. 272–287. – URL: http://dx.doi.org/10.1177/0022487115574291

130. Dicheva D. Dichev C., Agre G., Angelova G. Gamification in education: a systematic mapping study. Journal of Educational Technology & Society. 2015. – T. 18. – № 3. – C. 75. – URL: http://dx.doi.org/10.1145/3134302.3134305

131. Fahlberg-Stojanovska L, Stojanovski V. GeoGebra- freedom to explore and learn. Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA. – 2009. – 28(2). – S. 49-54.

132. Fenwick T., Edwards R. Exploring the impact of digital technologies on professional responsibilities and education // European Educational Research Journal. – 2016. – T. 15. – № 1. – C. 117–131.

133. Freitas S. I., Morgan J., Gibson D. Will MOOCs transform learning and teaching in higher education? Engagement and course retention in online learning provision // British Journal of Educational Technology. – 2015. – T. 46. – № 3. – C. 455-471.

134. Hall J., Chamblee G. Teaching algebra and geometry with GeoGebra: Preparing pre-service teachers for middle grades/secondary mathematics classrooms. Computers in the Schools. – 2013. – 30(1-2). – S. 12-29.

135. Instefjord E. Appropriation of digital competence in teacher education // Nordic Journal of Digital Literacy. – 2015. – T. 10. – № Jubileumsnummer. – S. 155-171.

136. Kaivo-oja J., Roth S. The Technological Future of Work and Robotics. 2015. – URL: http://hdl.handle.net/10419/118693

137. Kaplan A. M., Haenlein M. Higher education and the digital revolution: About MOOCs, SPOCs, social media, and the Cookie Monster // Business Horizons. – 2016. – T. 59. – № 4. – C. 441–450.

138. Lai K. W., Hong K. S. Technology use and learning characteristics of students in higher education: Do generational differences exist? // British Journal of Educational Technology. – 2015. – T. 46. – № 4. – C. 725-738.

139. Lukina N.P., Slobodskaia A.V., Zilberman N.N. Social dimentions of labour robotization in postindustrial society: issues and solutions // Man In India. – 2017. – T. 96(7). – C. 2367-2380.

140. Ng'ambi D., Bozalek V. Massive open online courses (MOOCs): Disrupting teaching and learning practices in higher education // British Journal of Educational Technology. – 2015. – T. 46. – № 3. – C. 451–454.

141. Nielsen W., Miller K. A., Hoban G. Science teachers' response to the digital education revolution // Journal of Science Education and Technology. 2015. T. 24. № 4. C. 417–431. URL:https://doi.org/10.1007/s10956-014-9527-3

142. Ochkov, V. F., & Bogomolova, E. P. (2015). Teaching Mathematics with Mathematical Software. Journal of Humanistic Mathematics, 5(1), 265-285.

143. Piaget, J. Piaget's theory / J. Piaget // P.H. Mussen (ed.). Carmichaets Manuel of child Psychology. N.Y.; Sydney; Toronto, 1970. V.1.

144. Podaeva N.G., Podaev M.V., Agafonov P.A. The social and cultural approach to forming geometric concepts among schoolchildren // Amazonia Investiga. – 2019. – Vol. 8. № 20. – URL:

http://www.udla.edu.co/revistas/index.php/amazonia-investiga/article/view/1466 (WoS)

145. Poincaré H. An Essay On The Psychology Of Invention In The Mathematical Field / H. Poincaré, J. Hadamard. – Princeton Univ Press (1949).

146. Poulova P., Simonova I., Manenova M. Which one, or another? Comparative analysis of selected LMS // Procedia-Social and Behavioral Sciences. 2015. T. 186. C. 1302-1308. – URL: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.052

147. Skinner B.F. Selection by consequences. // Behavour and Brain Sci. – 1984. – V. 7. – № 4. – P. 477-481.

148. Takaci D., Stankov G., Milanovic I. Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. Computers & Education. – 2015. № 82. – S. 421-431.

149. Thambi N., Eu L. K. Effect of students' achievement in fractions using GeoGebra. SAINSAB. – 2016. – №16. – S. 97-106.

150. Tømte C., Enochsson A.B., Buskqvist U., Kårstein A. Educating online student teachers to master professional digital competence: The TPACK-framework goes online // Computers & Education. – 2015. – T. 84. – S. 26–35. – URL: https://doi.org/10.1016/j.compedu.2015.01.005

151. Tsirel S. V. The economy of the nearest future // Terra economicus. – 2017. – T. 15. – № 1. – S. 44–67.

152. Uribe S. N., Vaughan M. Facilitating student learning in distance education: a case study on the development and implementation of a multifaceted feedback system // Distance Education. – 2017. – T. 38. – № 3. – C. 288–301. URL: https://doi.org/10.1207/s15389286ajde1903_2

153. Viberg O., Grönlund Å. Understanding students' learning practices: challenges for design and integration of mobile technology into distance education // Learning, Media and Technology. – 2017. – T. 42. – № 3. – C. 357–377. URL: https://doi.org/10.1080/17439884.2016.1088869

154. Watson W. R., Watson S. L., Reigeluth C. M. Education 3.0: Breaking the mold with technology // Interactive Learning Environments. – 2015. – T. 23. – № 3. – C. 332–343. URL: https://doi.org/10.1080/10494820. 2013. 764322

155. Wilcox C. The role of automation in undergraduate computer science education // Proceedings of the 46th ACM Technical Symposium on Computer Science Education. ACM. – 2015. – C. 90-95. – URL: https://doi.org/10.1145/2676723.2677226

156. Zakaria E., Lee L. S. (2012). Teacher's perceptions toward the use of GeoGebra in the teaching and learning of Mathematics. Journal of Mathematics and Statistics. – 8(2). – S. 253-257.

157. Zengin, Y., Furkan, H., Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software GeoGebra on student achievement in teaching of trigonometry. Procedia: Social and Behavioral Sciences, 31, 183-187. – URL: https://doi:10.1016/j.sbspro.2011.12.038

Приложение

Приложение 1

Предварительно рассматривается теорема о взаимном расположении двух окружностей.

Пусть $(O_1, \bar{r}_1)$ и $(O_2, \bar{r}_2)$ - две окружности, центры которых различны; $d = O_1O_2, r_1 \geq r_2$. Тогда, если

1) $d < r_1 + r_2 \wedge d > r_1 - r_2$ то окружности пересекаются;

2) $d = r_1 + r_2 \vee d = r_1 - r_2$, то окружности касаются друг друга внешним или внутренним образом;

3) $d > r_1 + r_2 \vee d < r_1 - r_2$, то окружности не имеют общих точек внешним или внутренним образом.

Мы уже выполнили первые два элементарных построения, теперь выполним ЭП 3.

ЭП № 3.

Построить треугольник по трем сторонам.

1 этап

Дано:

$\acute{a}$

$\acute{b}$

$\acute{c}$

Требуется построить Δ ABC

2 этап

Построение:

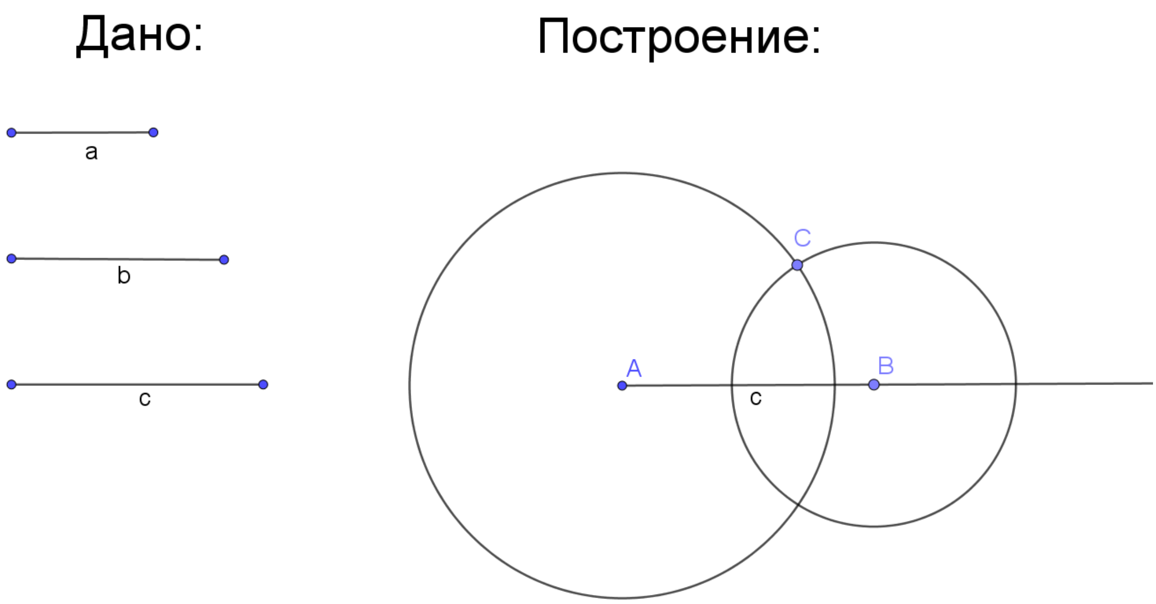
1.Проведем произвольную прямую – П1.

2.Произвольно выбираем две точки А и В.

3.Проведем окружности $\omega_1(A, \acute{b})$ и ω_2 (B, $\acute{a}$) – П2.

4.$\omega_1 \cap \omega_2$ ={C, C′} – П5.

Δ ABC – искомый.



Состав данного умения определяют 4 действия, которые состоят из простейших действий, соответствующих постулатам построений с помощью циркуля и линейки.

ЭП №4.

Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

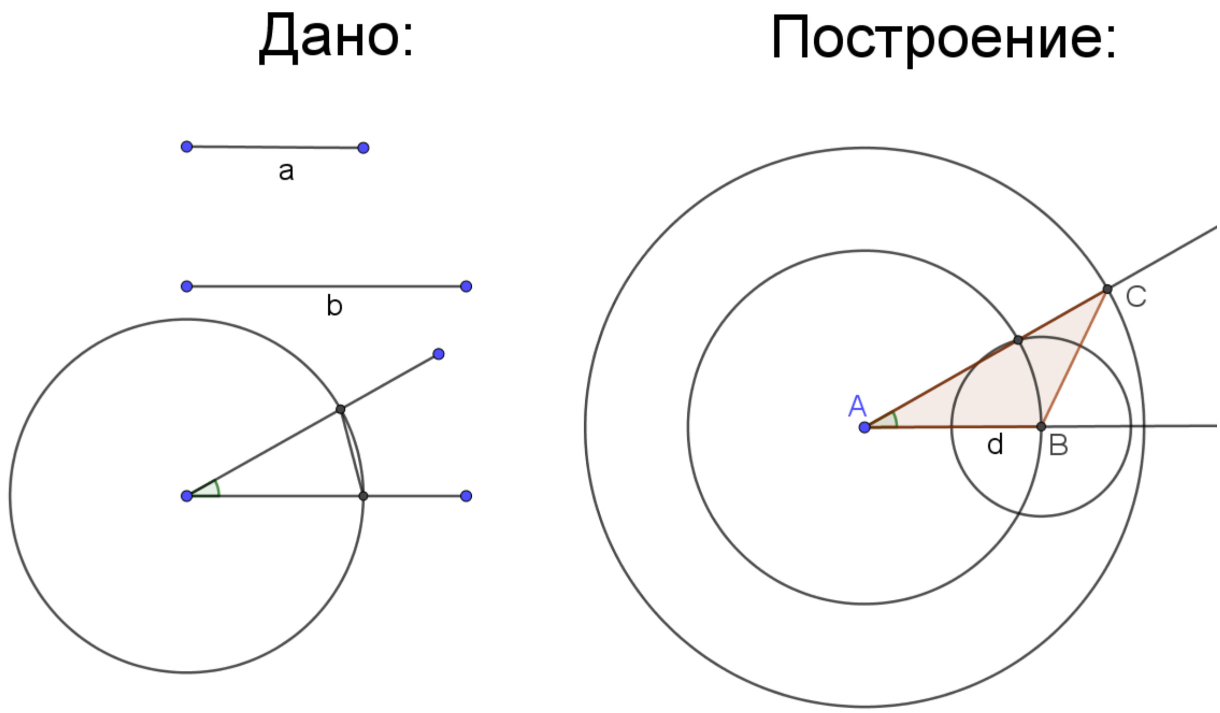
1 этап

Требуется построить ∆ ABC.

Построение:

1. Проведем произвольную прямую d – П1.
2. Отложим на d отрезок $\acute{b}$ – ЭП №1.
3. Построим $\angle\alpha$ (задача 2) – ЭП №2.
4. На прямой с отложим отрезок $\acute{a}$ – ЭП №1.
5. Соединим A и C – П1.

∆ ABC – искомый.



Состав данного умения определяют 5 действий, которые относятся как к простейшим действиям, соответствующим постулатам построений с помощью циркуля и линейки, так и к ЭП.

ЭП №5

Построить треугольник по стороне и двум прилежащим углам.

1 этап

Требуется построить ∆ ABC

Построение:

1. Берем произвольный луч h.

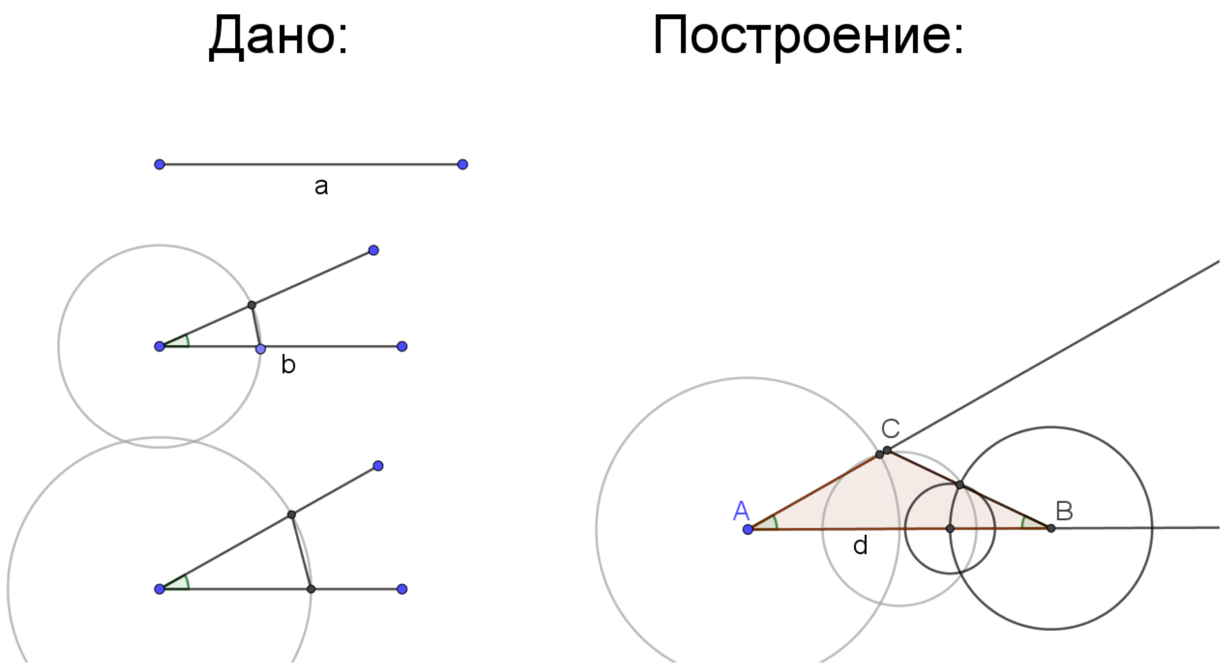
2. Откладываем отрезок $\acute{a}$= CB – ЭП №1.

3. Строим угол γ=∠BCF – ЭП №2.

4. Строим угол β=∠CBH – ЭП №2.

5. CF∩BH=A – П3.

∆ ABC – искомый.



Здесь следует задать учащимся следующий вопрос: вспомните, что мы называем биссектрисой угла?

Ответ: биссектрисой угла называется луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам.

ЭП № 6.

Построить биссектрису данного неразвернутого угла.

1 этап

Дано:

α

Требуется построить биссектрису.

2 этап

Построение:

1.ω (В, $\acute{r}$) – П2.

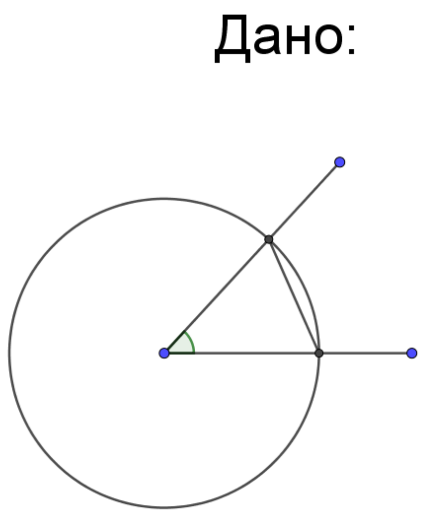
2.$\omega \cap$ АВС = {E, F} – П4.

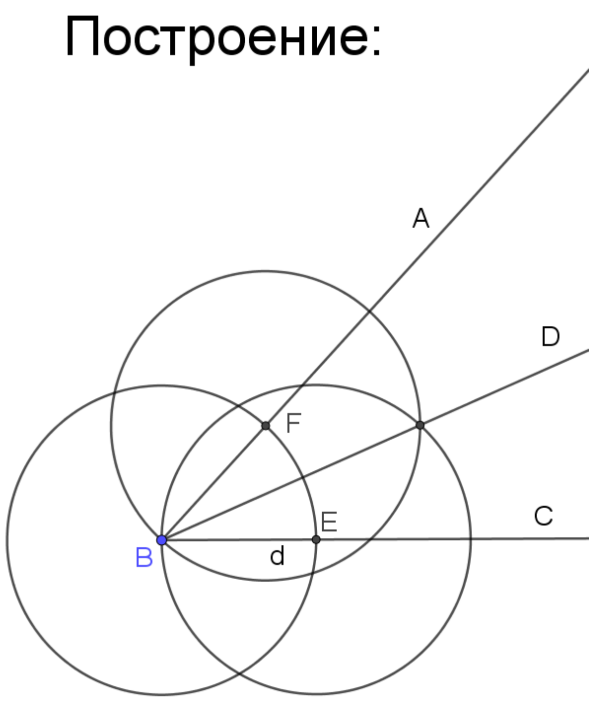
3.ω_1(Е, $\acute{r}$) – П2.

4.ω_2(F, $\acute{r}$) – П3.

5.$\omega_1 \cap \omega_2$={Д, Д′} – П5.

ВД – биссектриса.





Состав данного умения определяют 5 действий, соответствующих постулатам построений с помощью циркуля и линейки.

ЭП №7.

Построить серединный перпендикуляр данного отрезка.

1 этап

Дано:

A B

Требуется построить EF – серединный перпендикуляр отрезка AB.

2 этап

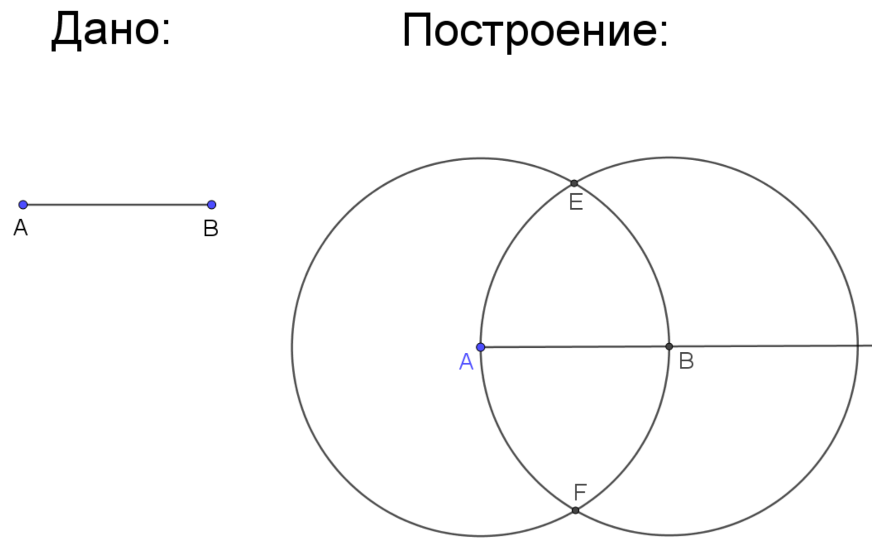
Построение:

1. $\omega_1(\mathrm{A}, \acute{r})$ – П2.

2. $\omega_2(\mathrm{B}, \acute{r})$ – П2.

3. $\omega_2 \cap \omega_1 = \{\mathrm{E}, \mathrm{F}\}$ – П5.

EF – искомая прямая.



ЭП № 8.

Построить середину данного отрезка.

1 этап

Дано:

$\acute{a}$

Требуется построить О – середину данного отрезка.

2 этап

Построение:

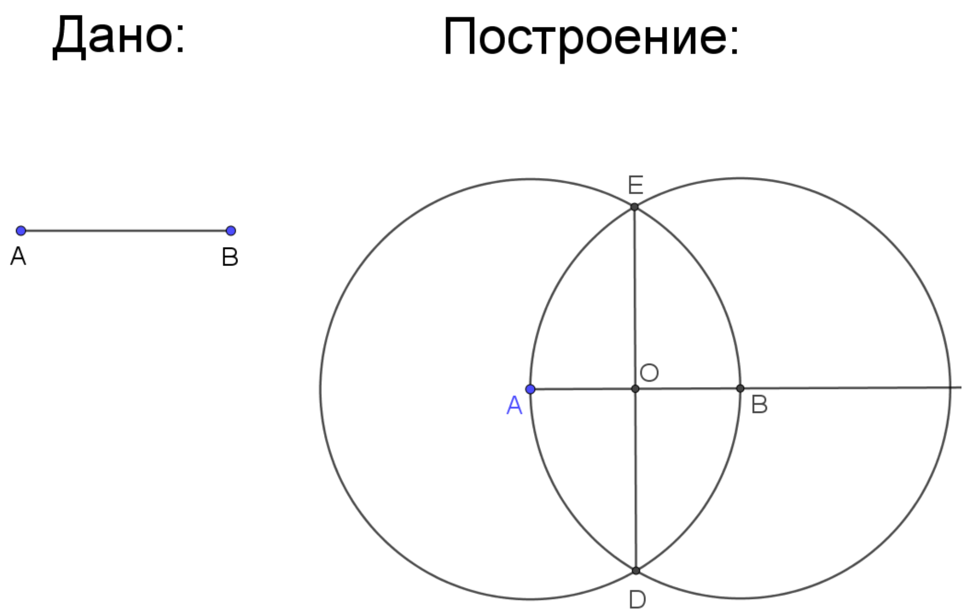
1. ω (А, $\acute{r}$) – П2.

2. ω_1(В, $\acute{r}$) – П2.

3. $\omega \cap \omega_1$ $=\{$Е, Д$\}$ – П5.

4. ЕД$\cap$ АД=О – П3.

О – середина отрезка.



ЭП №9.

Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой. (При этом данная точка может как лежать на данной прямой, так и не лежать на ней.)

1 случай (точка не лежит на прямой)

1 этап

Дано:

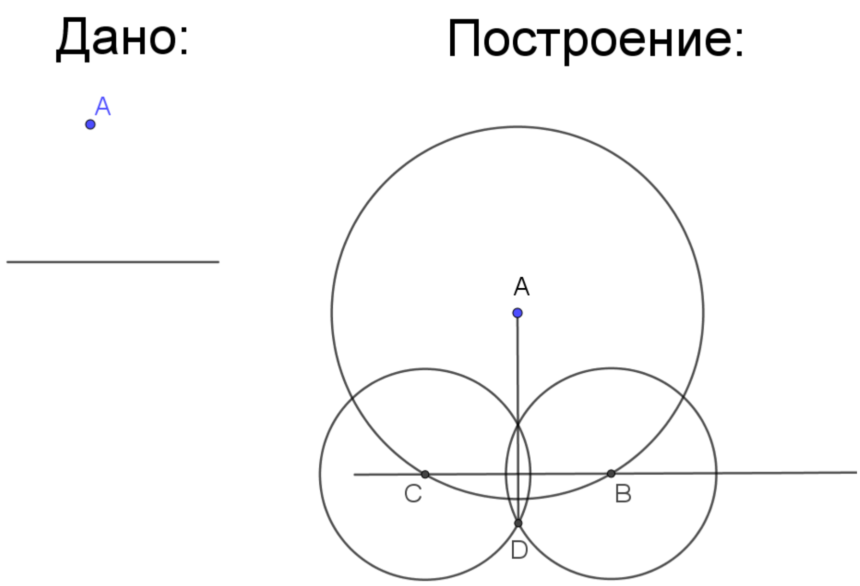
Требуется построить АД

2 этап

Построение:

1. ω (A, $\acute{r}$) –П2.
2. $\omega \cap \acute{a}$ = {C, B} – П4.
3. ω_1(B, $\acute{r}_1$) – П2.
4. ω_2(A, $\acute{r}_1$) – П2.
5. $\omega_1 \cap \omega_2$=Д – П5.

АД – искомая прямая.



2 случай (точка лежит на прямой)

1 этап

Дано:

$\acute{a}$

A

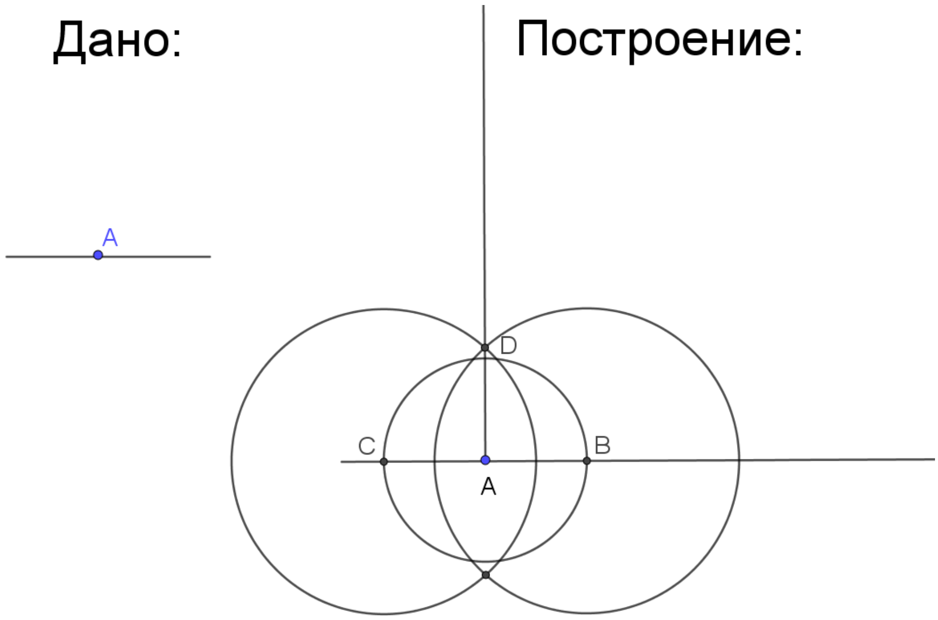
Требуется построить АД

2 этап

Построение:

1. ω (А, $\acute{r}$) – П2.
2. $\omega \cap \acute{a}$ = {С, В} – П4.
3. ω_1(В, $\acute{r}_1$) – П2.
4. ω_2(А, $\acute{r}_1$) – П2.
5. $\omega_1 \cap \omega_2$=Д – П5.

АД – искомая прямая.



Состав данного умения определяют 5 действий, которые соответствуют постулатам построений с помощью циркуля и линейки.

Задаем учащимся следующий вопрос: какие прямые мы называем параллельными?

Ответ: две прямые называются параллельными, если они не пересекаются.

ЭП 10. Построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

1 этап

Дано:

A

á

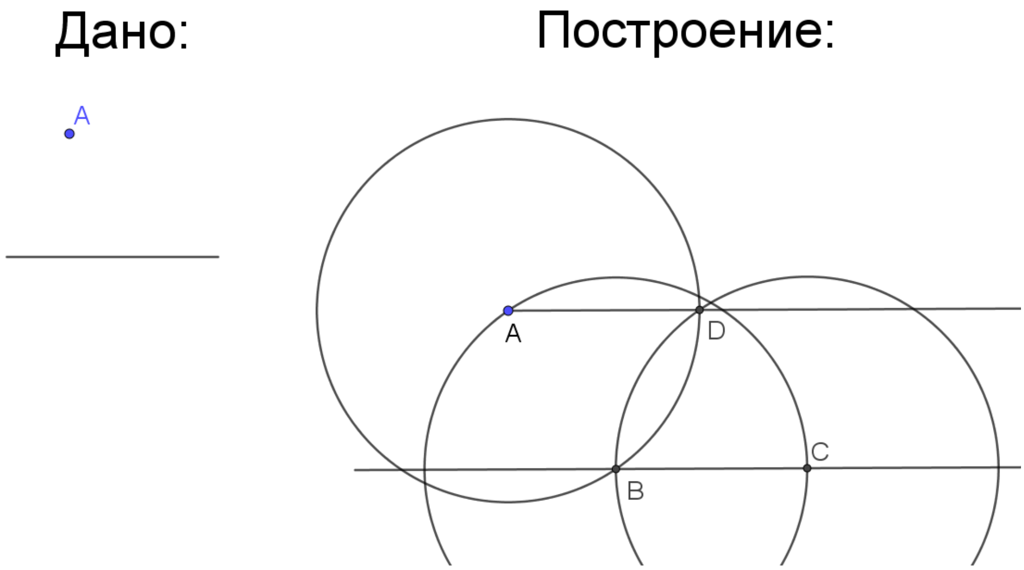
Требуется построить АД

2 этап

Построение:

1. $\omega_1(\text{А}, \acute{r}\ )$ –П2
2. В$\in \omega_1 \cap \acute{a}$ – П4
3. $\omega_2(\text{В}, \acute{r}\ )$ – П2
4. С$\in \omega_2 \cap \acute{a}$ – П4
5. $\omega_3(\text{С}, \acute{r}\ )$ – П2
6. Д$\in \omega_1 \cap \omega_2$ – П5

АД – искомая прямая



Состав данного умения определяют 6 действий, соответствующих постулатам построений с помощью циркуля и линейки.

Далее целесообразно задать вопросы: какой треугольник называется прямоугольным?

Ответ: треугольник называется прямоугольным, если у него есть прямой угол.

Давайте вспомним, какой угол мы называем острым?

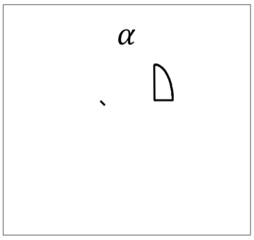
Ответ: угол, меньший 90°, назвается острым углом.

ЭП 11. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

1 этап

Дано:

ć



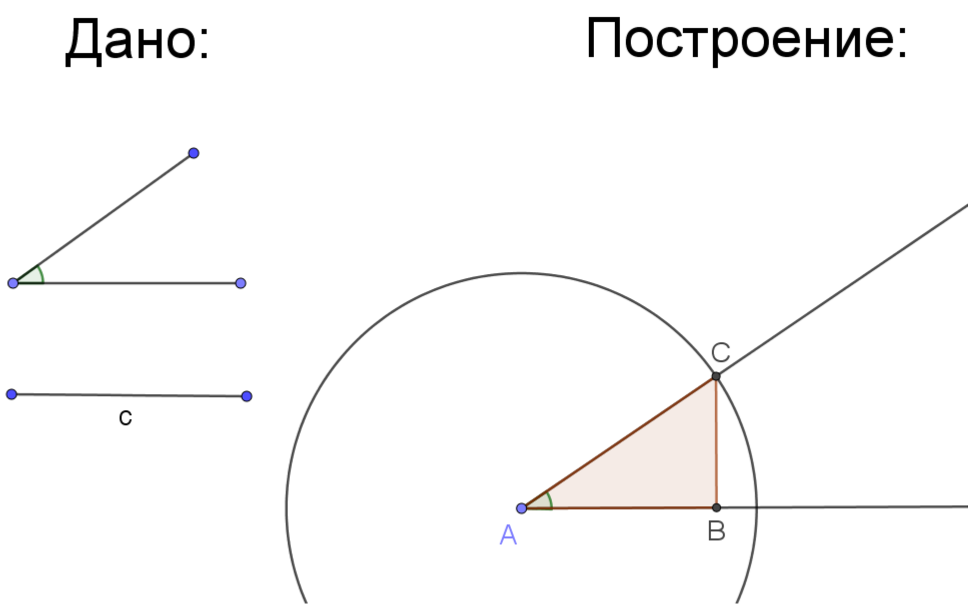
Требуется построить ΔABC.

2 этап

Построение:

1. Откладываем на луче h отрезок AB = ć – ЭП №1.
2. Откладываем угол ∠BAF $=\alpha$ – ЭП №2.
3. ω (A, ć) – П2.
4. AF $\cap\ \omega$=C – П4.

Δ ABC – искомый.



Состав данного умения определяют 4 действия, которые соответствуют постулатам построений с помощью циркуля и линейки и ЭП.

ЭП №12.

Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

1 этап

Дано:

$\acute{a}$

$\acute{b}$

Требуется построить ΔABC.

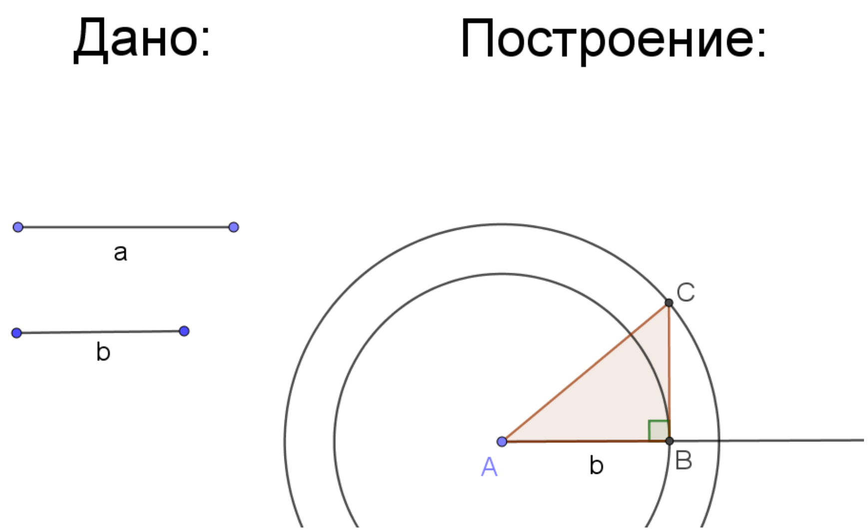
2 этап

Построение:

1. AB = $\acute{a}$ – отрезок – П1.
2. ω (A, $\acute{b}$)_- П2.
3. $\acute{a} \perp l$ - ЭП №9 (2 случай).

4. $\omega \cap l$=C – П4.

ΔABC – искомый треугольник.



Состав данного умения определяют 4 действия, соответствующих постулатам построений с помощью циркуля и линейки и ЭП.

Задаем учащимся следующие вопросы: «Что такое окружность? Касательная к окружности?»

Ответ: окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется центром окружности.

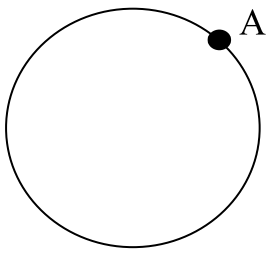
Касательной называется прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку.

ЭП №13.

Построить касательную к окружности, проходящую через данную на ней точку.

1 этап

Дано:

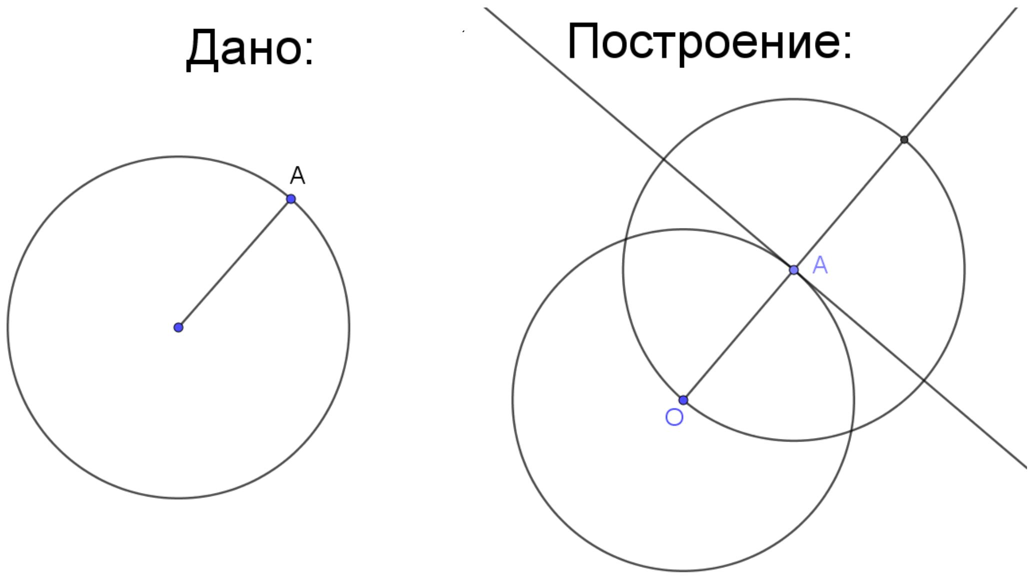


Требуется построить касательную к окружности.

2 этап

Построение:

1. Провести луч OA – П1.
2. Через точку A провести прямую $l \perp OA$ – ЭП №7.



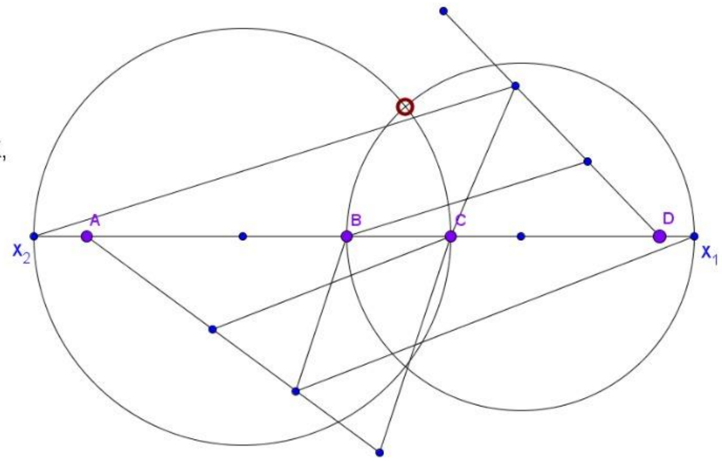
Состав данного умения определяют 2 действия, соответствующие постулату построений с помощью циркуля и линейки и ЭП №7.

Приложение 2

Дано

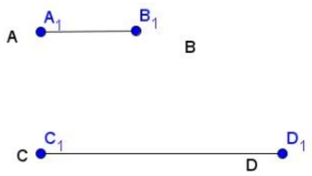
На прямой даны четыре точки A, B, C, D
в указанном порядке. Постройте точку M,
из которой отрезки AB, BC, CD
видны под равными углами.

Построение

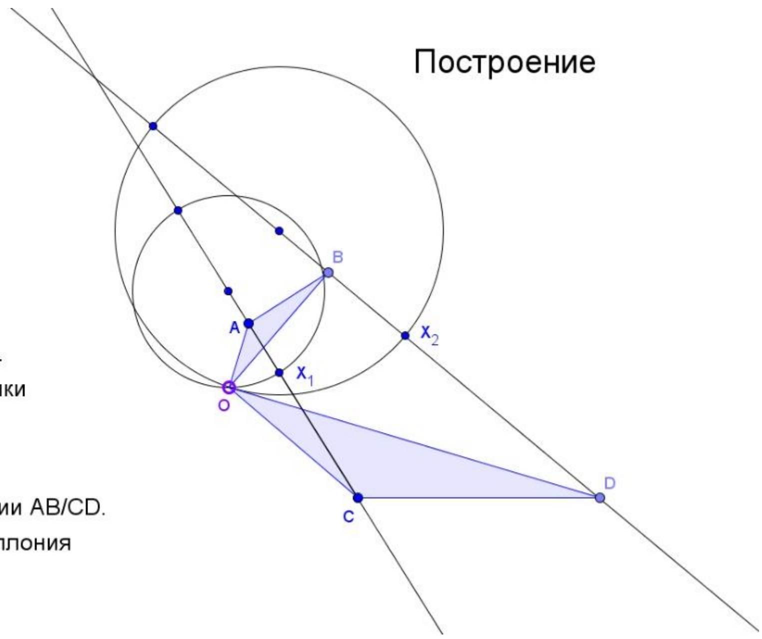


Точка M является точкой пересечения ГМТ X,
для которых AX : CX = AB : CB,
и ГМТ Y, для которых BY : DY = BC : DC
(эти ГМТ могут не пересекаться).
Строим две окружности Аполлония
для точек A,B,C и B,C,D. M лежит
на их пересечении.

Дано



Построение



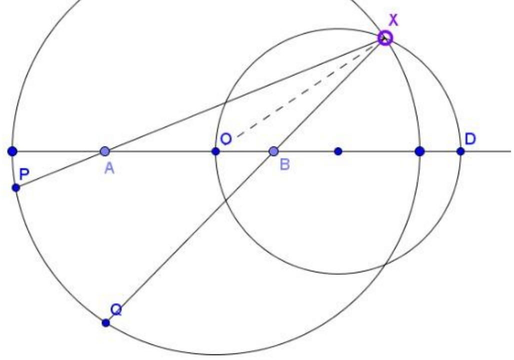
На плоскости даны два отрезка AB и CD.
Постройте точку O так, чтобы треугольники
AOB и COD были подобны.

X_1 и X_2 делят соотв. AC и BD в отношении AB/CD.
O - точка пересечения окружностей Аполлония
троек точек AX_1C и BX_2D.

Дано

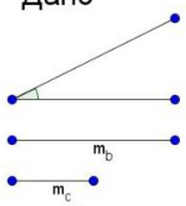
Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.

Построение



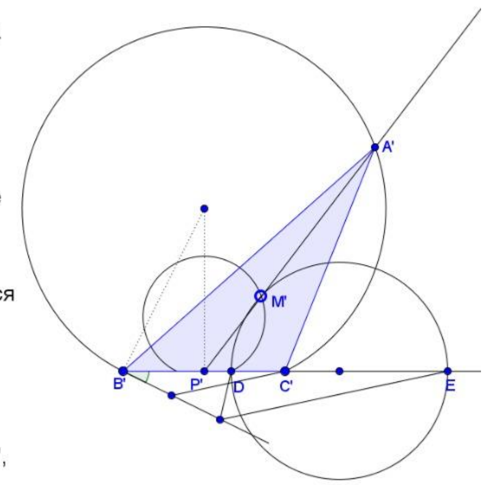
Пусть O — центр данной окружности. Хорды XP и XQ, проходящие через точки A и B, равны, тогда и только тогда, когда XO — биссектриса угла PXQ, т. е. AX : BX = AO : BO. Искомая точка X является точкой пересечения соответствующей окружности Аполлония с данной окружностью.

Дано



Постройте треугольник ABC по углу A и медианам, проведенным из вершин B и C.

Построение



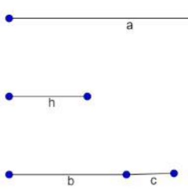
Построим сначала некоторый треугольник A'B'C', подобный искомому. Для этого выберем произвольный отрезок B'C' и построим геометрическое место точек, из которых он виден под данным углом α (см. рис.). Пусть P' — середина B'C'. Так как PM'=1/3 PA' , где M' — центр тяжести треугольника A'B'C', то точка M' должна лежать на дуге, которая получается из построенной гомотетией с центром P' и коэффициентом k=1/3.

С другой стороны, так как B'M'/C'M'=BM/CM=BD/CE, то M' лежит на окружности Аполлония точек B' и C'. Следовательно, M' является пересечением указанной дуги и этой окружности. Зная положение точки M', восстанавливаем треугольник A'B'C'.

Искомый треугольник ABC получается из него преобразованием подобия с коэффициентом, равным BD/B'D'.

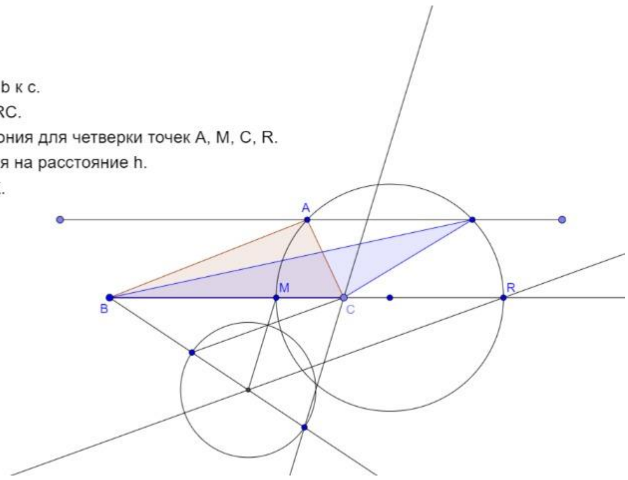
Дано

Постройте треугольник по $a, h_a, \frac{b}{c}$.

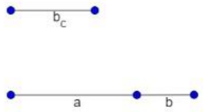


Построение

1) M - делит BC в отношении b к c.
2) R - такая, что AM/MC=AR/RC.
3) ГМТ X - окружность Аполлония для четверки точек A, M, C, R.
4) l - прямая // AC и удаленная на расстояние h.
5) A - точка пересечения l и X.



Дано



Постройте треугольник ABC, если известны длина биссектрисы CD и длины отрезков AD и BD, на которые она делит сторону AB.

Построение

1) D - лежит на AB.
2) R - такая, что AB/BD=AR/RB.
3) ГМТ X - окружность Аполлония для четверки точек A, D, B, R.
4) Y - окружность с радиусом b_c.
5) C - точка пересечения Y и X.