Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина»

На правах рукописи

АГАХАНОВ Назар Хангельдыевич

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАБОТЫ С МАТЕМАТИЧЕСКИ ОДАРЁННЫМИ ДЕТЬМИ В МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ ПРЕДМЕТНЫХ ОЛИМПИАД И КОНКУРСОВ

5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания
(математика, уровень общего образования)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора педагогических наук

Научный консультант:
доктор педагогических наук,
профессор С.В. Щербатых

Елец – 2022

Содержание

Введение

Актуальность исследования. На протяжении последней четверти века система образования в России переживает интенсивные преобразования, направленные на утверждении гуманистических, личностно ориентированных принципов обучения, позволяющих максимально раскрыться индивидуальным качествам различных участников образовательного процесса. Одной из важнейших задач при этом является обеспечение условий для работы с одарёнными учащимися, обладающими теми или иными способностями. Постепенно в общественном сознании формируется понимание того, что переход в век наукоемких технологий невозможен без сохранения и приумножения интеллектуального и кадрового потенциала страны.

Создание условий для раннего выявления, обучения и поддержки одарённых детей и подростков рассматривается как значимая государственная проблема, решение которой обеспечивает формирование интеллектуального и творческого потенциала нации и повышает её конкурентоспособность. На государственном уровне это означает:

- нормативное выделение одарённых детей в особую категорию учащихся и создание условий всестороннего развития их творческого потенциала;

- актуализация проблемы «одарённости» в общественном сознании;

- акцентирование внимания на предметных областях обучения, в которых в наибольшей степени проявляются способности детей;

- учет социальных и психологических аспектов в работе с одарёнными детьми при реализации образовательных инициатив и др.

К настоящему времени в России уже немало сделано в области развития одарённости: созданы специальные образовательные учреждения, общественные организации и фонды, задачами которых выступают выявление, обучение и развитие способностей одарённых детей, разработаны соответствующие учебные и социальные программы. Растет интерес к изучению психологических закономерностей и механизмов развития одарённости, все шире проводятся практические исследования по выявлению и обучению одарённых детей, результаты которых находят своё отражение в образовательном процессе. Среди нормативно-правовых документов, регулирующих работу с одарёнными детьми, особое значение имеют:

- Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа» (утв. приказом Президента РФ от 4.02.2010 № Пр-271);
- Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов (утв. Президентом РФ 03.04.2012 N Пр-827);
- Положение «О Национальном координационном совете по поддержке молодых талантов России» (утв. постановлением Правительства РФ от 10.09.2012 № 897 (ред. от 24.06.2017));
- Постановление Правительства РФ от 17 ноября 2015 г. N 1239 «Об утверждении Правил выявления детей, проявивших выдающиеся способности, и сопровождения их дальнейшего развития»;
- Указ Президента Российской Федерации от 21.07.2020 № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года».

В последнем документе вторую позицию занимает национальная цель «Возможности для самореализации и развития талантов», которая декларирует «формирование эффективной системы выявления, поддержки и развития способностей и талантов у детей и молодёжи, основанной на принципах справедливости, всеобщности и направленной на самоопределение и профессиональную ориентацию всех обучающихся…»

При этом следует отметить, что в новом Федеральном законе «Об образовании в Российской Федерации» [266] термин одарённые дети не использован. Данная категория обучающихся обозначена как «лица, проявившие выдающиеся способности, а также лица, добившиеся успехов в учебной деятельности, научной (научно-исследовательской) деятельности, творческой деятельности и физкультурно-спортивной деятельности» (Гл. 11, ст. 77).

В Концепции общенациональной системы выявления и развития молодых талантов, утвержденной 3 апреля 2012 года, были определены базовые принципы построения и основные задачи общенациональной системы выявления и развития молодых талантов, а также основные направления её функционирования [132].

В ней, в частности, отмечается, что сегодня в России широко применяются зарекомендовавшие себя формы работы с одарёнными детьми и молодёжью – это специализированные школы для детей, проявивших выдающиеся способности, центры дополнительного образования и технического творчества; проводятся интеллектуальные, творческие и спортивные состязания; расширяется сотрудничество школ с университетами, учреждениями культуры, науки и спорта; организуются летние и зимние школы для учащихся по разным отраслям знаний, заочные и вечерние школы при вузах; осуществляются исследовательские проекты и научные экспедиции. Всё это в совокупности способствует формированию среды для проявления и развития одарённости.

Ежегодно в стране проводится всероссийская олимпиада школьников (далее ВсОШ), в начальном – школьном этапе по математике которой участвует около 2 миллионов учащихся 4-11 классов. В Приказе Министерства просвещения РФ от 27 ноября 2020 года №678, утвердившем Порядок проведения олимпиады, записано, что «Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности, в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам» [201].

Десятки тысяч школьников участвуют в предметных олимпиадах, которые проводятся Российским советом олимпиад школьников (далее - РСОШ), формируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Приказ Минобрнауки России от 04.04.2014 N 267 (с изменениями от 16 мая и 26 мая 2020 г. и 22 июля 2022 г. – зарегистрирован в Минюсте РФ 22 июля 2022 г., Регистрационный N 69363) «Об утверждении Порядка проведения олимпиад школьников»). В Приказе записано, что «Олимпиады проводятся в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской), инженерно-технической, изобретательской деятельности, пропаганды научных знаний, содействия профессиональной ориентации школьников». При этом «Экспертное и аналитическое сопровождение организации и проведения олимпиад осуществляет Российский совет олимпиад школьников (далее - РСОШ)».

Предметные олимпиады и конкурсы носят многоуровневый характер. Так, при проведении олимпиады РСОШ от степени диплома (победитель или призер) зависит льгота, которую может получить участник олимпиады при поступлении в ВУЗ. Абитуриент, успешно выступивший на олимпиаде, получает такую льготу в случае, если экспертным советом утверждается уровень олимпиады: первый, второй или третий. Статус олимпиады РСОШ определяется ежегодно с учетом «стажа» олимпиады, уровня её организационного и методического сопровождения, доступности информации об олимпиаде, количества и широты географии её участников, но, главное, уровня творческого содержания заданий.

Математические олимпиады являются наиболее распространённой и отработанной формой отбора математически одарённых детей. В олимпиадах по математике главную роль играют не сумма конкретных знаний молодого человека, а его способность за конечное время олимпиады построить и исследовать достаточно сложную модель или логическую конструкцию, с которыми он прежде никогда не сталкивался.

Анализ литературных источников и изучение образовательной практики выявили, что проблемы работы с математически одарёнными детьми стали предметом исследования широкого круга ученых. Вопросам развития математического образования посвящены труды ученых-математиков А. Д. Александрова [38], П. С. Александрова [39], И. К. Андронова [44], И. М. Виноградова [72], В. С. Владимирова [73], И. М. Гельфанда [41], Б. В. Гнеденко [87], Б. Н. Делоне [63], А. Н. Колмогорова [127], Л. Д. Кудрявцева [138], А. И. Маркушевича [159, 160], С. М. Никольского [178], А. В. Погорелова [196], Д. Пойа [197], В. А. Садовничего [222], А. Н. Тихонова [73], Г. Фройденталя [270], А. Я. Хинчина [271], Г. Н. Яковлева [288] и др.; методика обучения математике стала предметом исследования В. А. Гусева [168], Г. В. Дорофеева [100], Г. С. Евдокимовой [105], А. Н. Колмогорова [127], Ю. М. Колягина [129], Г. Л. Луканкина [129], А. Г. Мордковича [173], Д. Пойа [197], Н. Х. Розова [214], Е. И. Саниной [224], Г. И. Саранцева [225], Т. Ф. Сергеевой [227], В. А. Смирнов и И. М. Смирнова [241], А. А. Столяра [245], О. В. Тарасовой [250], С. В. Щербатых [282].

Современные концепции и модели развития одарённости представлены в работах зарубежных (Дж. Рензулли [341], Дж. Фельдхьюсен [311], Г. Гарднер [83], Р. Стернберг [244], А. Танненбаум [354], К. Тейлор [253], Б. Кларк [304], Дж. Стенли [351] и др.) и отечественных (Ю. Д. Бабаева [50], Д. Б. Богоявленская [206], В. Н. Дружинин [101], Н. С. Лейтес [142], А. М. Матюшкин [164], В. И. Панов [140], Т. Ф. Сергеева [231], В. Д. Ушаков [265], М. А. Холодная [272, 273], В. Д. Шадриков [276], Н. Б. Шумакова [281], В. С. Юркевич [286] и др.) ученых.

Теоретическому осмыслению олимпиадного движения способствовали исследования таких ученых и педагогов, как П. С. Александров [186], Г. И. Глейзер [86], А. Н. Колмогоров [127], Л. А. Люстерник [151], А. И. Маркушевич [158], И. С. Петраков [192], Д. Пойа [197], С. Л. Соболев [96], В. А. Тартаковский [251], Г. А. Тоноян [257], Г. М. Фихтенгольц [268], С. И. Шварцбурд [279], Л. Г. Шнирельман [82] и др., вопросы содержания, методического обеспечения олимпиад школьников раскрываются в трудах С. Д. Абдурахманова [40], Т. П. Адамович [34], А. Л. Брудно [64], П. Будруджака [66], Г. И. Васильевой [34], И. Вендти [40], С. У. Гончаренко [88], В. Горшковского [90], П. Л. Капицы [118], Л. И. Каплана [64], З. Квапневского [120], М. О. Кицай [40], С. М. Козела [125], Л. Г. Корнеевой [40], К. К. Кудава [116], М. А. Лаврентьева [154], В. И. Лукашика [148], Р. И. Малафеева [155], М. С. Маскиной [161], В. А. Орлова [116, 238], И. С. Петракова [192], П. Н. Протасова [40], В. Г. Разумовского [207], А. П. Савина [67], И. П. Середы [233], Л. Силверберга [40], И. Ш. Слободецкого [238], Г. А. Тонояна [257], А. Л. Тоома [68], В. Ю. Шадрина [277], Т. Шаршаневича [120] и др.

Можно утверждать, что существуют определённые теоретические и практические предпосылки для решения проблемы создания системы работы с математически одарёнными детьми, которая бы обеспечивала развитие их способностей. При этом следует отметить, в настоящее время имеется ряд противоречий, связанных с развитием математически одарённых детей в отечественной системе образования:

- между объективной потребностью в создании системы выявления, отбора и сопровождения развития математически одарённых детей и недостаточной разработанностью теоретически обоснованных её компонентов с учётом достижений современных психолого-педагогических исследований;

- между существующим опытом проведения предметных олимпиад и конкурсов по математике, ориентированным преимущественно на выявление математически одарённых детей, и необходимостью формирования многоуровневой системы их отбора, последующего сопровождения и развития;

- между сложившимся профессионально-субъективным подходом к научно-методическому обеспечению олимпиад и конкурсов по математике и необходимостью его научно-обоснованной разработки и масштабирования для системы образования в целях предоставления равных условий и возможностей для выявления и дальнейшего развития математически одаренных детей независимо от места проживания и получения образования.

Эти противоречия обусловили **проблему** диссертационного исследования: каковы теоретико-методологические основы и организационно-методическое обеспечение работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов?

Обозначенная проблема определила выбор **темы** диссертационного исследования: *«Научно-методическое обеспечение работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов»*.

Объектом исследования являются процесс и система образования математически одарённых детей.

Предмет исследования – организация работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

Цель исследования состоит в разработке методологических, концептуальных, организационно-методических основ организации работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов и экспериментальной проверки их эффективности.

В качестве **гипотезы исследования** выдвинуто предположение о том, что организация работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов будет результативной, если:

- методологической основой её проектирования будут системный, личностно ориентированный, полисубъектный, культурологический, индивидуально-творческий, деятельностный и средовой подходы, в совокупности определяющие целевой, содержательный и организационный аспекты деятельности по выявлению и развитию математически одарённых детей;

- её концептуальное обоснование базируется на принципах: самоактуализации, индивидуальности, субъектности, выбора, творчества и успеха, доверия и поддержки;

- её реализация предусматривает создание мотивирующей образовательной среды, обеспечивающей интеллектуальное, коммуникативное, кооперативное и личностное развитие математически одарённых учащихся;

- содержание образования ориентировано на обучение математической деятельности с учетом типологии математических способностей и включает: освоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей, что позволяет охватить основные компоненты математической деятельности;

- организация образования математически одарённых детей предполагает использование различных форм обучения адекватно их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям.

Задачи исследования:

1. Определить основные тенденции развития математически одарённых детей в контексте современных концепций одарённости на основе анализа российского и международного научно-педагогического опыта.

2. Определить методологические основы организации работы с одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

3. Разработать концепцию работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

4. Описать реализацию системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов посредством создания мотивирующей образовательной среды.

5. Определить содержание образования математически одарённых учащихся, обеспечивающее обучение математической деятельности с учётом типологии математических способностей.

6. Систематизировать формы образования математически одарённых детей, адекватные их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям.

7. Осуществить педагогический эксперимент по проверке гипотезы исследования в условиях различных моделей региональных образовательных систем по работе с математически одарёнными детьми.

Методологической базой для проведения исследования послужили:

- общенаучный принцип системности, принципы единства и развития мира;

- положения философского конструктивизма и синергетики о самодостаточности субъекта и обусловленности его активности в сложноорганизованных системах;

- идеи соотношения индивидуального и коллективного субъекта;

- идея понимания человека как целеустремлённой, свободной и развивающейся личности;

- идеи системного подхода (В. Г. Афанасьев [49], Ю. К. Бабанский [51], К. Л. фон Берталанфи [56], В. П. Беспалько [57], А. А. Богданов [59], П. Друкер [102], Т. А. Ильина [112], Ф. Ф. Королев [133], Л. М. Панчешникова [189], Г. Саймон [223], Г. Н. Сериков [234], А. В. Усова [264], А. Чандлер [301, 302], В. А. Черкасов [274] и др.);

- идеи и принципы личностно ориентированного подхода (Л. И. Божович [60], Е. В. Бондаревская [61], Л. С. Выготский [77], А. В. Кирьякова [121], И. С. Кон [131], А. Н. Леонтьев [143], В. А. Петровский [193], С. Л. Рубинштейн [217], А. В. Усова [264], И. С. Якиманская [287] и др.);

- полисубъектный подход (К. А. Абульханова [1], Г. И. Аксенова [36], И. В. Вачков [69], С. Д. Дерябо [98], Е. И. Исаев [239], Т. Б. Казачкова [117], В. А. Петровский [193], С. Л. Рубинштейн [217], Е. А. Сергиенко [232], В. И. Слободчиков [239], В. О. Татенко [252], Е. В. Улыбина [263] и др.);

- деятельностный подход (Л. С. Выготский [79], А. Н. Леонтьев [143], С. Л. Рубинштейн [216]; впоследствии были раскрыты в трудах Л. А. Безбородовой [54], П. Я. Гальперина [81], Л. М. Гура [92], В. В. Давыдова [95], В. Г. Кочетковой [134], Л. В. Занкова [108], Н. Ф. Талызиной [248], Д. Б. Эльконина [284] и др.);

- культурологический подход (Л. С. Выготский [78], А. Н. Леонтьев [144], А. Р. Лурия [149], В. П. Зинченко [111], А. Г. Асмолов [47], В. М. Розин [213], в западной психологии – В. Вундт [76]);

- индивидуально-творческий подход (В. В. Грачев [91], Н. Г. Руденко [219], В. Н. Сластенин [237]);

- средовой подход (В. Я. Барышников [52], А. К. Белоусова [55], Л. В. Волкова [74], Р. А. Кассина [119], Ю. С. Мануйлов [156], А. В. Растянников [208], В. И. Слободчиков [240], С. Ю. Степанов [208], Д. В. Ушаков [208], В. А. Ясвин [289] и др.).

Теоретической основой диссертационного исследования явились:

- нормативные документы в образовательной сфере (Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации», Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов, Положение о Национальном координационном совете по поддержке молодых талантов России, Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа», Указ Президента Российской Федерации «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года»);

- современные концепции одарённости (концепция возрастного подхода Н. С. Лейтеса [142]; одарённость как проявление творческого потенциала А. М. Матюшкина [164]; интеллектуально-личностный подход к развитию общей одарённости В. С. Юркевич [286]; динамическая теория одарённости Ю. Д. Бабаевой [50]; экопсихологический подход В. И. Панова [187]; психодидактический подход В. П. Лебедевой, В. А. Орлова, В. И. Панова [140] и др.)

- представления о стратегии развития образования в современном мире и принципах образовательной политики государства (А. Г. Асмолов [47], И. В. Бестужев-Лада [58], Г. А. Бордовский [62], Б. С. Гершунский [84], А. А. Гусейнов [93], В. В. Давыдов [95], В. И. Загвязинский [106], А. С. Запесоцкий [109], А. М. Матюшкин [164], Л. М. Митина [171], Н. В. Наливайко [176], Н. Д. Никандров [177], А. М. Новиков [179], В. В. Рубцов [218], М. В. Рыжаков [220], В. С. Степин [243], А. И. Субетто [247], Д. И. Фельдштейн [267], Н. И. Чуприкова [275], В. Д. Шадриков [276], Д. Б. Эльконин [285], И. С. Якиманская [287] и др.);

- теория конструирования содержания образования (Ю. К. Бабанский [51], В. В. Краевский [135], В. С. Леднев [141], И. Я. Лернер [254] и др.);

- психолого-педагогические исследования когнитивных процессов и концепция учебной мотивации (Э. Г. Гельфман [273], А. К. Маркова [157], Ж. Пиаже [194], Г. И. Щукина [283] и др.);

- труды в области учебной деятельности, условий её формирования и развития (В. В. Давыдов [95], И. Я. Зимняя [110], А. К. Маркова [157], Д. Б. Эльконин [284] и др.);

- теория дифференцированного обучения математике (В. А. Гусев [168], Г. В. Дорофеев [100], Ю. М. Колягин [130], Г. Л. Луканкин [129], В. М. Монахов [172], Н. Х. Розов [214], М. В. Ткачева [130] и др.);

- теория проблемного обучения (В. И. Загвязинский [107], А. М. Матюшкин [165], М. И. Махмутов [166], Н. А. Менчинская [167], И. С. Якиманская [287] и др.);

- исследования, посвящённые вопросам педагогической диагностики (С. Д. Дерябо [98], К. Ингенкамп [114], В. П. Симонов [235], А. В. Усова [264], Т. И. Шамова [278], В. А. Ясвин [289]);

- работы по методологическим основам математики и методологии математического образования (Ж. Адамар [33], А. Д. Александров [38], В. И. Арнольд [45], Г. Вейль [70], Д. Гильберт [85], Б. В. Гнеденко [87], В. А. Гусев [168], Ф. Клейн [122], А. Н. Колмогоров [127], Ю. М. Колягин [129], Л. Д. Кудрявцев [138], Г. Л. Луканкин [129], В. Л. Матросов [163], Д. Пойа [197], Н. Х. Розов [214], В. А. Садовничий [222], Г. И. Саранцев [225], Т. Ф. Сергеева [230], Е. И. Смирнов [242], В. М. Тихомиров [256], А. Я. Хинчин [271] и др.).

Методы исследования. Для решения поставленных задач и проверки гипотезы применялся комплекс взаимодополняющих методов исследования: теоретический анализ монографий, диссертационных исследований, авторефератов, статей и других научных публикаций, отражающих состояние изученности проблемы. В качестве теоретических методов применялись также теоретическое моделирование и проектирование. В качестве эмпирических методов исследования использовались: опрос, наблюдение, анкетирование, контент-анализ, методы математической обработки данных.

Базой исследования являлись региональные системы Кировской области (Кировское областное государственное автономное образовательное учреждение дополнительного образования детей – «Центр дополнительного образования одарённых школьников»), Ярославской области (Региональный портал «Математика для всех» Государственного учреждения Ярославской области «Центр телекоммуникаций и информационных систем в образовании» департамента образования Ярославской области), Республики Адыгея (Республиканская естественно-математическая школа).

Исследование проводилось в несколько этапов.

На первом этапе (2007 – 2008 гг.) осуществлялся теоретический анализ философской, психолого-педагогической и методической литературы по различным аспектам работы с математически одарёнными детьми. Результатом первого этапа стало осмысление проблемы и обоснование актуальности исследования, выделение объекта, предмета, целей и задач исследования, определение его методологии и методов.

На втором этапе (2008 – 2012 гг.) проводился анализ современного состояния работы с одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов, осуществлялась систематизация теоретического и накопленного эмпирического опыта в аспекте поставленной проблемы, проверялась и уточнялась гипотеза исследования, разрабатывалась его концептуальная основа. Результатом этого этапа явилась разработка концепции работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

На третьем этапе (2012 – 2019 гг.) разрабатывалось содержание и организационные формы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов, осуществлялась их апробация, определялись критерии эффективности; осуществлялась обработка результатов опытно-экспериментальной работы и их анализ, систематизация и корректировка основных теоретических положения исследования.

На четвёртом этапе (2020 – 2021 гг.) проводилось обобщение результатов исследования, формулировались его выводы и рекомендации по внедрению разработанных материалов в образовательную практику; определялись перспективы дальнейшего исследования поставленной проблемы.

Результаты, полученные лично соискателем, и их научная новизна:

- в контексте современной образовательной парадигмы разработаны методологические основы организации работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов, которые включают системный, личностно ориентированный, полисубъектный, культурологический, индивидуально-творческий, деятельностный и средовой подходы, в совокупности определяющих целевой, содержательный и организационный аспекты деятельности по выявлению и развитию математически одарённых учащихся;

- разработана концепция работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов, определяющая: цели проведения предметных олимпиад и конкурсов как средства выявления, отбора, самореализации и профессиональной ориентации математически одарённых школьников;

- описан способ реализации системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов посредством создания мотивирующей образовательной среды, способствующей развитию четырёх сфер математически одарённых учащихся: интеллектуальной (овладение математической деятельностью), коммуникативной (формирование навыков общения у субъектов образовательной среды, которое происходит в процессе совместной деятельности), кооперативной (отвечает за организацию взаимодействия субъектов образовательной среды в различных типах (сотрудничество, конкуренция) и формах) и личностной (обеспечивает возможности для самореализации обучающихся и педагогов посредством представления их учебных и творческих достижений в разнообразных интеллектуальных и творческих состязаниях);

- раскрыты особенности конструирования содержания (направленного на обучение математической деятельности и включающего освоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей);

- определены формы образования на каждом возрастном этапе обучения математически одарённых школьников с учетом их возможностей, образовательных потребностей и психолого-педагогических особенностей;

- определены подходы к разработке олимпиадных и конкурсных заданий (посредством специального вида творчества – задачного композиторства);

- описана классификация олимпиадных заданий, согласованная с логической структурой их содержания и методов решения;

- описана актуальная учебно-методическая модель работы со школьниками, направленная на поиск и выявление детей, обладающих математическими способностями;

- раскрыты особенности конструирования содержания образования, ориентированного на обучение математической деятельности с учетом типологии математических способностей, которое включает два направления: логическое (задачи по комбинаторике и геометрии) и техническое (задачи по алгебре, теории чисел (арифметике), основам математического анализа) и определены возрастные этапы наиболее благоприятные для освоения каждого направления;

- определены условия создания мотивирующей образовательной среды и представлены соответствующие им региональные модели системы работы с математически одарёнными детьми.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что:

- систематизированы современные исследования отечественных и зарубежных ученых о структуре математических способностей и математической одарённости;

- определены принципы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов: *самоактуализации, индивидуальности, субъектности, выбора, творчества и успеха, доверия и поддержки*;

- установлено, что условием формирование мотивирующей образовательной среды для развития математически одарённых школьников является многоуровневое и многовекторное партнерство, что подразумевает развитие сетевого взаимодействия;

- выявлены условия организации продуктивного сетевого взаимодействия при организации работы с математически одарёнными детьми;

- введен термин «задачное композиторство» и раскрыты требования к комплектам заданий для математических олимпиад и конкурсов;

- приведена классификация задач математических олимпиад на основе логической структуры их решений;

- описана новая учебно-организационная модель дополнительного образования для работы по выявлению и профессиональной ориентации математически одарённых детей;

- уточнены компетенции педагогов, работающих с математически одарёнными детьми: выявления, предоставления учащимся углублённого математического содержания, отвечающего познавательным потребностям и интересам одарённых школьников и созданием условий для его освоения, организации процесса социализации одарённых учащихся посредством выявления трудностей личностного и социального развития и предоставлением им педагогической поддержки в разных формах.

Практическую значимость представляют следующие результаты исследования:

- определено содержание образования математически одарённых школьников, основанное на формировании у них умений проведения анализа данных и построения новых логических конструкций и моделей;

- разработаны организационные формы работы с математически одарёнными детьми с учетом возрастных особенностей обучаемых;

- разработаны методические рекомендации по организации и проведению школьного, муниципального, регионального и заключительного этапов всероссийской олимпиады школьников по математике;

- описаны региональные модели работы с математически одарёнными школьниками в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов;

- подготовлены учебно-методические материалы, включая сборники олимпиадных задач и методики их решения;

- введено понятия «задачное композиторство» и описана связь содержания олимпиадных заданий и решаемых ими спортивно-творческих задач;

- создана классификация олимпиадных заданий не по тематическому принципу, а на основе логической структуры их решений;

- описана актуальная учебно-методическая модель работы со школьни-ками, направленная на поиск и выявление детей, обладающих математическими способностями.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивается четкостью методологических, философских, математических, психолого-педагогических и методических позиций, положенных в основу исследования; корректным применением к исследуемой проблеме системного, личностно ориентированного, полисубъектного, культурологического, индивидуально-творческого, деятельностного и средового подходов, а также выбором комплекса методов, адекватных объекту, предмету, целям и задачам исследования; существенной продолжительностью опытно-экспериментальной работы диссертанта в качестве члена жюри Всесоюзной с 1974 года (в 1992 году – Межреспубликанской, с 1993 года – Всероссийской) олимпиады школьников по математике, лидера национальной команды России на международной математической олимпиаде с 1995 по 2019 годы, члена Координационного совета Международной математической олимпиады (2000-2022 гг.), председателя Центральной предметно-методической комиссии всероссийской олимпиады школьников по математике с 2007 года по настоящее время, руководителя и преподавателя математических смен в ОЦ «Сириус» момента его открытия по настоящее время.

Апробация теоретических положений и результатов исследования осуществлялась на Международных и Всероссийских научных конференциях, проходивших в разное время (с 1994 по 2021 гг.), в том числе, на Международной конференции «Математическое образование: сегодня и завтра» (Москва, 28-29 ноября 2013 г.), V Всемирном Конгрессе математиков тюркоязычных стран (Иссык-куль, Кыргызстан, 5-7 июня 2014 г.), Всероссийской научно-практической конференции «Развитие математического образования в школе как фактор конкурентоспособности науки и высокотехнологических производств» в рамках XIV Сибирского образовательного форума (Томск, 25 марта 2015 г.), III Всероссийском съезде «Школьное математическое образование» (Новосибирск, 17-18 ноября 2015 г.), в рамках III Всероссийского съезда «Школьное математическое образование», I Всероссийской научно-практической конференции «Университеты в системе поиска и поддержки математически одарённых детей и молодежи» (Майкоп, 8-10 октября 2015 г.), семинара для учителей «Региональный, муниципальный и школьный этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике: составление заданий, проведение, проверка и оценка работ» (Сочи, Образовательный центр «Сириус», 12-15 мая 2016 г.), семинара для учителей «Интеллектуальные соревнования как среда развития профильной одарённости школьников и некоторые аспекты преподавания углублённого курса математики» (Сочи, Образовательный центр «Сириус», 22-27 июня 2016 г.), Всероссийской конференции «Вопросы дополнительного образования одарённых школьников в области точных и естественных наук» (Киров, 2-4 октября 2016 г.), регионального Форума учителей (педагогов, преподавателей) математики, физики, химии, биологии, географии образовательных организаций ЯНАО «Современное математическое и естественнонаучное образование ЯНАО: состояние, проблемы и перспективы развития» (г. Ноябрьск, 8-10 ноября 2016 г.), IX Международной конференции "Математическое образование в школе и вузе" MATHEDU"2019 (Казань, 23-27 октября, 2019 г.), Всероссийского съезда учителей математики (Сочи, Образовательный центр «Сириус»,15-18 августа 2021 г.), семинара для учителей «Геометрическое образование в современной школе» (Сочи, Образовательный центр «Сириус», 14-20 июня 2022 г.).

Внедрение результатов исследования также осуществлялось через публикацию монографий, учебных пособий, учебных программ, статей в научных сборниках и журналах: «Математика в школе», «Математика», «Математика – 1 сентября», «Квант», «Потенциал», «Труды научной конференции Московского физико-технического института (государственного университета)», «Известия Смоленского государственного университета», «Вестник ТГПУ», «Профильная школа», «Вопросы образования», «Continuum» и др. Разработанные научно-методические материалы и опыт работы с математически одаренными детьми отражены в 223 публикациях, общим объемом более 172 п. л., среди которых 2 монографии и 89 статей в журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ. Научно-практическая разработка «Система развития всероссийских предметных олимпиад школьников, отбора и подготовки национальных сборных команд России на международные олимпиады по физике и математике» удостоена премии Правительства Российской Федерации в области образования за 2010 год.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Исследования зарубежных и отечественных ученых демонстрируют единство взглядов на проблему математических способностей, которые включают способности к усвоению математических знаний, к их репродуцированию и самостоятельному применению, и творческие математические способности, связанные

с самостоятельным созданием оригинального и имеющего общественную ценность продукта в сфере математической деятельности.

Главными признаками математических способностей признаются способность к обобщению, логичность и формализованность мышления, гибкость и глубина, систематичность, рациональность и аргументированность рассуждений, математическое восприятие и память.

2. Методологическими основаниями проектирования системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов выступает совокупность подходов: системного, личностно ориентированного, полисубъектного, культурологического, индивидуально-творческого, деятельностного и средового. Каждый из подходов определяет отдельные аспекты организации работы с математически одарёнными детьми, а их совокупность – проектирование целостной системы выявления, обучения и развития.

3. *Система работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе математических олимпиад и конкурсов* основана на следующих концептуальных положения:

а) в современном мире высоких технологий важнейшей задачей становится подготовка и формирование большой группы высококвалифицированных кадров, что инициирует усиление внимания и создание условий для развития одарённых детей;

б) повышение роли математики в современном обществе вызвано всё возрастающей потребностью математизации различных сфер человеческой деятельности;

в) математические олимпиады и конкурсы выступают средством выявления, отбора и самореализации математически одарённых школьников;

г) успехи на интеллектуальных состязаниях помогают школьнику в определении сферы деятельности, способствуют его профессиональной ориентации;

д) задания олимпиад и конкурсов по математике формируются из новых задач и требуют специального вида творчества – задачного композиторства;

е) в подготовке к математическим соревнованиям большую роль играет тренер, который должен научить школьника придумывать новые идеи и методы;

ж) содержание образования математически одарённых учащихся, направленное на обучение математической деятельности, должно включать освоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей;

з) при организации дополнительного образования математически одарённых детей необходимо использовать разнообразные формы и содержание обучения адекватно их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям;

и) интеллектуальные состязания школьников выступают стимулом для профессиональной самореализации педагогов;

к) работа с математически одарёнными детьми нуждается в обеспечении управленческой поддержки территориальными органами управления образованием.

4. *Необходимым условием о*бразования и самореализации математически одарённых учащихся *является формирование мотивирующей образовательной среды*, которая обеспечивает их развитие в интеллектуальной, коммуникативной, кооперативной, личностной сферах.

Интеллектуальная сфера ориентирована на овладение математической деятельностью. Коммуникативная сфера предполагает формирование навыков общения у субъектов образовательной среды, которое происходит в процессе совместной деятельности. Кооперативная сфера отвечает за организацию взаимодействия субъектов образовательной среды в различных типах (сотрудничество, конкуренция) и формах. Личностная сфера обеспечивает возможности для самореализации обучающихся и педагогов посредством представления их учебных и творческих достижений в разнообразных интеллектуальных и творческих состязаниях.

5. *Содержание образования математически одарённых школьников в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов должно обеспечивать* элемент новизны, когда учащийся должен продемонстрировать умение «нестан-

дартно мыслить», а также овладение математической деятельностью, что включает усвоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей.

В содержании образования должны быть представлены два направления: логическое и техническое. К первому относятся задачи по комбинаторике и геометрии, ко второму – по алгебре, теории чисел (арифметике), основам математического анализа. Восприятие каждого из указанных направлений наиболее успешно проходит в разном возрасте. Логического – в среднем звено школы, когда математический аппарат ещё недостаточен, но школьник уже воспринимает понятие доказательства; к техническому школьник может быть подготовлен только в результате овладения им всем необходимым математическим инструментарием, т.е. в старших классах школы.

6. *Формы математических состязаний на каждом возрастном этапе обучения математически одарённых детей* должны выбираться с учётом их возможностей, образовательных потребностей и психолого-педагогических особенностей. Базовые сценарии математических соревнований как личные, так и командные, различаются подходами к решению задач и включают три варианта. На о*лимпиаде* участники сдают полные решения задач, жюри их проверяет и выставляет баллы. Вариант *блиц* предполагает жёсткое ограничение времени решения и только ответы, без обоснований и объяснений. При использвании *теста с*писок вариантов ответа для каждой задачи приведен изначально, нужно только сделать правильный выбор.

7. *Реализация концепции работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов* может осуществляться посредством создания различных организационных структур, осуществляющих работу с математически одарёнными детьми в условиях региона, обусловленных его особенностями, возможностями и сложившимися традициями. Наиболее продуктивными являются модели, основанные на использовании сетевого взаимодействия между организациями общего и высшего образования, обеспечивающие дистанционную поддержку и предоставление различных форм математических со-

стязаний, популяризацию математики, вовлечение и стимулирование педагогов к работе с математически одарёнными детьми.

Глава I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ С МАТЕМАТИЧЕСКИ ОДАРЁННЫМИ УЧАЩИМИСЯ

1.1 Актуализация проблемы одарённости на современном этапе развития образования: зарубежный и российский опыт

Феномен одарённости уже несколько десятилетий находится в центре внимания научной и педагогической общественности во всем мире.

Несмотря на множественность подходов к определению одарённости, одной из наиболее популярных для выявления одарённости и составления программ обучения одарённых детей является разработанная Дж. Рензулли [211, 341] трёхкольцевая модель одарённости (Рисунок 1). В соответствии с этой моделью одарённость является сочетанием интеллектуальных способностей, креативности и включенности в задачу (мотивации).

Рисунок 1 – Модель одарённости Дж. Рензулли [211]

Дж. Фельдхьюсен усовершенствовал модель одарённости Дж. Рензулли, добавив к указанным трем компонентами позитивную Я-концепцию [312]. Мотивацию он рассматривал как мотивацию достижения. Когнитивная концепция Дж. Фельдхьюсена подчеркивает активную роль учащегося как исследователя окружающего мира и себя в нём.

Дифференциация одарённости впервые была осуществлена Г. Гарднером [83]. В его теории множественности видов интеллекта представлены лингвистический, логико-математический, пространственный, музыкальный, мышечно-двигательный, и межличностный. Выделенные Гарднером виды интеллекта аналогичны видам одарённости, признанным в психологии в настоящее время.

Теорию триархичной интеллектуальной одарённости предложил Р. Стернберг [244]. Изучая её структуру, он выделил три подсистемы, соотносящие интеллект с внутренним и внешним миром индивида в каждом персональном случае. Он полагал, что интеллектуальная одарённость не является монолитной, а может проявляться по-разному за счёт различных сочетаний выделенных подсистем.

В модель структуры одарённости А. Танненбаума, помимо общих и специальных способностей, а также неинтеллектуальных факторов (мотивации), включается фактор среды [354, 355].

Позднее В. Майкл, К. Тейлор [253, 353], Б. Кларк [304], Дж. Стенли [351] и другие американские учёные попытались раскрыть особенности академической одарённости, выделяя её как особую склонность к какой-то области научного знания. Б. Кларк составила перечень отличительных характеристик одарённых детей, их потребностей и возможных проблем, которые могут обнаружиться как результат проявления одарённости. Её исследования показали, что восприимчивость интеллектуально одарённых детей к необычному, интерес к решению задач, установлению причинно-следственных связей, их аналитическое мастерство могут существовать и наряду с некоторыми негативными характеристиками.

Таким образом, главная мысль, которая пронизывает работы зарубежных исследователей, заключается в том, что необходимы разработка и осуществление специальных программ образования для одарённых детей, что обусловливает необходимость принятия долгосрочного развивающего похода к одарённому, особенно креативному поведению. Исследования процессов обучения и мышления, протекающих на высоком уровне, смогут предоставить необходимые данные для распознавания, поддержки и актуализации способностей.

В российской науке наиболее разработанными как в теоретическом, так и в прикладном плане оказались проблемы специальных способностей. В самом общем виде *одарённость* определялась как повышенный уровень развития одной или нескольких способностей человека, на основе которых появляется возможность достигать высоких результатов в социально значимых видах деятельности. Само по себе это определение, а также анализ теоретического и методического состояний проблемы показывают, что одарённость рассматривали чаще всего с феноменальной стороны как уже проявившее себя свойство психики ребёнка. Поэтому её изучали и выявляли с точки зрения либо индивидуальных свойств (природных задатков, склонностей, способностей), либо психических процессов (интеллектуальная, творческая одарённость и т. п.).

Российские исследователи отмечали взаимосвязь понятий одарённости, способностей и задатков. Так, выдающийся отечественный психолог Б. М. Теплов рассматривал одарённость как синтетическое понятие, понимая его как качественно своеобразное сочетание способностей, от которого зависит возможность достижения большего или меньшего успеха в выполнении той или другой деятельности [255]. Своеобразие понятий одарённости и способностей заключается в том, что свойства человека рассматриваются в них с точки зрения тех требований, которые ему предъявляет та или другая практическая деятельность. Поэтому нельзя говорить об одарённости вообще. Можно только говорить об одарённости к чему-нибудь, к какой-нибудь деятельности. Это обстоятельство имеет особое значение при рассмотрении вопроса о так называемой общей одарённости.

По мнению Б. М. Теплова, при установлении основных понятий учения об одарённости наиболее удобно исходить из понятия способности [255]. Он отмечал, что, в нем заключаются три признака. Во-первых, под способностями разумеются индивидуально-психологические особенности, отличающие одного человека от другого. Никто не станет говорить о способностях там, где дело идет о свойствах, в отношении которых все люди равны. Во-вторых, способностями называют не всякие вообще индивидуальные особенности, а лишь такие, которые имеют отношение к успешности выполнения какой-либо деятельности или многих деятельностей. Такие свойства, как, например, вспыльчивость, вялость, медлительность, которые, несомненно, являются индивидуальными особенностями некоторых людей, обычно не называются способностями, потому что не рассматриваются как условия успешности выполнения каких-либо деятельностей. В-третьих, понятие способности не сводится к тем знаниям, навыкам или умениям, которые уже выработаны у данного человека.

Наряду с другими представителями так называемого *личностно-деятельного подхода* к понятию способностей (С. Л. Рубинштейном [216], А. Г. Ковалевым [124], В. Н. Мясищевым [124], К. К. Платоновым [195] и др.), Б. М. Теплов [255], отрицая понимание способностей как врожденных особенностей человека, не отвергал того, что в основе их развития в большинстве случаев лежат врождённые особенности, задатки.

А. Н. Леонтьев и А.Р. Лурия также говорили о необходимых внутренних условиях, делающих возможным возникновение способностей [145, 146]. Способности не заключены в задатках. В онтогенезе они не проявляются, а формируются. Задаток – не потенциальная способность (а способность – не задаток в развитии), так как анатомо-физиологическая особенность ни при каких условиях не может развиваться в психическую особенность.

Л. А. Венгер считает [71], что способности, достаточные для усвоения всех предметов школьной программы, плодотворного творческого труда в самых различных (если и не во всех) областях производства, науки, искусства, могут быть сформированы у любого здорового ребёнка. Вот почему можно утверждать, что определённый уровень математических способностей присущ каждому школьнику. Несколько иное понимание задатков дается в работах А. Г. Ковалева и В. Н. Мясищева [124]. Под задатками они понимают психофизиологические свойства, в первую очередь те, которые обнаруживаются в самой ранней фазе овладения той или иной деятельностью (например, хорошее цветоразличение, зрительная память). Однако и при таком понимании задатков сохраняется основное положение: способности в собственном смысле слова формируются в деятельности, являются прижизненным образованием.

В последние десятилетия XX в. сформировался ещё один подход к понятию способностей, который называют функционально-генетическим. Его сторонники (Е. П. Ильин [113], В. Д. Шадриков [276] и др.) признают генетическую обусловленность, врождённость способностей. В. Д. Шадриков определяет способности как свойства функциональных систем, реализующих отдельные психические функции, которые имеют индивидуальную меру выраженности, проявляющуюся в успешности и качественном своеобразии освоения и реализации отдельных психических функций.

Общая позиция ведущих отечественных специалистов в области психологии одарённости нашла своё отражение в «Рабочей концепции одарённости» [206]. Концепция создала единую теоретическую базу для решения ключевых проблем одарённости: определения одарённости, её видов и путей идентификации. Одарённость в данной Концепции трактуется как системное качество, характеризующее психику ребёнка в целом. При этом именно сама личность, присущая ей направленность и система ценностей способствуют развитию способностей и определяют особенности реализации индивидуального дарования. Такой подход делает приоритетной задачу воспитания, а не обучения одарённого ребёнка. Этим определяется гуманистическая направленность Концепции, в которой особое внимание уделено бережному отношению к одарённому ребёнку, предполагающему понимание не только преимуществ, но и трудностей, которые несет с собой его одарённость.

В нашем исследовании в качестве исходных были использованы следующие концептуальные представления (Рисунок 2).

Рисунок 2 – Современные концепции одарённости

Главным стержнем, объединяющим все перечисленные подходы, является рассмотрение одарённости как процесса целостного развития личности и сознания одарённых детей, реализующего их творческий потенциал (Рисунок 3). Учитывая это, в качестве базовой характеристики одарённости была выделена творческая активность человека как проявление творческой природы психики и её развития.

Характеристика одарённости как процесса целостного развития личности и сознания одарённых детей

ОДАРЁННОСТЬ	
	системное свойство психики, возникающее в результате познавательного и/или иного деятельностного взаимодействия между индивидом и образовательной средой
	развивающееся свойство психики, для проявления и развития которого необходимым условием является наличие не только природных задатков, но и соответствующей (вариативной и развивающей) образовательной среды, включая соответствующие виды деятельности (экопсихологический аспект одарённости)
	индивидуальная характеристика познавательного, эмоционального и личностного развития учащегося, выражающаяся в индивидуально-своеобразном сочетании свойств познавательной, эмоциональной и личностной сфер сознания данного индивида, обеспечивающем возможность достижения им наиболее высоких результатов развития способностей

Рисунок 3 – Характеристика одарённости как процесса целостного развития личности и сознания одарённых детей

Создание условий для раннего выявления, обучения и поддержки одарённых детей и подростков рассматривается как значимая государственная проблема, решение которой обеспечивает формирование интеллектуального и творческого потенциала нации и повышает её конкурентоспособность.

Зарубежный опыт работы с одарёнными детьми отражает разнообразие подходов и моделей, реализующих особенности государственной политики.

В Европе с 1975 года ведёт свою работу Всемирный совет по одарённым и талантливым детям (World Council for Gifted and talented children, сокращенно WCGTC) [354]. Один раз в два года Совет проводит конференции, на которых исследователи и представители организаций со всего мира определяют основные проблемы и предлагают свои варианты концепции поддержки одарённых и талантливых детей.

В состав Всемирного совета входят 500 представителей из 23 государств. Исполнительный комитет Совета представлен 8 учёными, за каждым из которых закреплен тематический комитет по направлениям:

1. Написание учебных программ.
2. Исследование феномена «одарённости».
3. Актуализация и популяризация проблемы «одарённости».
4. Консультирования по проблемам «одарённости».

5. Подготовка творческого педагогического контингента, способного руководить одарёнными детьми.

6. Разработка программ для дополнительных, факультативных занятий с одарёнными детьми.

7. Разработка обогащённых программ и учебников для занятий с одарёнными детьми.

8. Проведение научных исследований проблем «одарённости».

Совет ставит своей целью привлечь внимание общественности и мировых правительств к проблеме «одарённости», к психологическим особенностям таких детей. В ходе осуществления проектной деятельности Совета решаются основные задачи:

- поддержка международных научно-исследовательских проектов в данной сфере;

- реализация мероприятий, направленных на выявление и дальнейшее сопровождение одарённых и талантливых детей;

- ведение единой базы национального состава «одарённости» в странах – участницах совместных проектов;

- оказание финансовой помощи семьям, в которых воспитываются одарённые дети.

Наряду со Всемирным советом по одарённым и талантливым детям, с 1988 года действует Европейский комитет по образованию одарённых детей (Евроталант – Eurotalent) [335]. С 1992 года эта международная неправительственная организация наделена консультативным статусом при Совете Европы. В состав Евроталанта входят представители 11 европейских объединений по работе с одарёнными детьми. Деятельность Евроталанта разворачивается по трём направлениям:

1. Законотворческая деятельность при Совете Европы.

2. Исследовательская деятельность, то есть разработка концепции «одарённости», проведение научных исследований и образовательных подходов к одарённым детям.

3. Практическая деятельность, то есть всесторонняя, в том числе и материальная поддержка одарённых детей, методологическая и финансовая помощь специализированным учебным заведениям, летним лагерям, консультативным центрам.

В 1993 году по инициативе ЮНЕСКО в Париже была основана Международная федерация по развивающему обучению и игровой педагогике – Фиджип (Centres de FIDJIP) [300]. Плодотворное сотрудничество между Евроталантом и Фиджип началось в 1997 году.

В 1994 году Парламентской ассамблеей Евросоюза были одобрены «Рекомендации по развитию образования одарённых и талантливых детей» [210]. В данном документе странам – участницам Евросоюза были предложены положения, которых рекомендовано придерживаться в ходе осуществления внутренней образовательной политики:

- на государственном уровне, нормативно выделять одарённых детей в особую категорию учащихся для всестороннего развития творческого потенциала;

- способствовать популяризации проблемы «одарённости»;

- в рамках государственной системы образования акцентировать внимание на те предметные области обучения, в которых проявляются наиболее высокие способности детей;

- при апробации любой образовательной инициативы в обучении одарённых детей учитывать социальные и психологические аспекты.

Следует отметить, что часть стран, в большей степени это касается северных европейских стран (Швеции, Дании, Норвегии, Финляндии), не выделяет одарённых детей в особую категорию, для которой требуются специальные условия. Государственная политика образования в этих странах направлена на предоставление равных условий для получения образования всем категориям обучающихся при одновременном обеспечении индивидуализации обучения. Тем не менее, и в этих странах в последние годы наблюдается все большее возрастание интереса к исследованию проблемы одарённости, разработки и реализации образовательных программ для одарённых учащихся.

К странам, в которых на государственном уровне осуществляется организация работы с одарёнными детьми, относятся Великобритания, Австрия и Германия, а также целый ряд восточноевропейских стран, таких как Венгрия, Болгария и др.

Рассмотрим наиболее общие и специфические для этих стран подходы.

Великобритания

История образования одарённых в Великобритании берет своё начало в 1944 году, когда был принят новый закон о школе и появились возможности для талантливых детей учиться в гимназиях [299]. Однако позже их стали рассматривать как элитарные, и местным органам власти было рекомендовано их закрыть или заменить типовыми школами, которые должны были обеспечить равные возможности для всех категорий. Тем не менее, некоторые из гимназий удалось сохранить.

В пределах самой Великобритании есть различия в понимании того, кого считать одарённым. Например, в Англии термины «одарённые» и «талантливые» используются в отношении 5 – 10% учащихся каждой школы, в Уэльсе до 20% школьников считаются более талантливым, а в Шотландии используется термин «возможность» (Monks F. andPfluger R., 2005 [328]).

Английская модель реализует комплексный подход к образованию одарённых детей. Каждая школа признает индивидуальные различия и планирует учебную программу для удовлетворения особых потребностей одарённых. Один из способов заключается в разделении класса на группы в зависимости от способностей. Для учащихся с 14 до 19 лет разрабатываются индивидуальные образовательные траектории с учётом образовательных потребностей. Функция школа заключается в том, чтобы обеспечить оптимальное соответствие между потребностями обучаемых и их возможностями. Каждый учитель школы одновременно является учителем для одарённых, и каждый учитель решает, кого считать одарённым (Eyre, 2009 [310]). Учитывая сложности выявления одарённых детей и подростков, к этому процессу подключен и психолог.

В Великобритании существуют несколько организаций, созданных для поддержки одарённых детей. Национальная ассоциация для одарённых детей была создана в 1967 году, чтобы обеспечить поддержку социальных, эмоциональных и учебных потребностей детей с высоким потенциалом.

Национальная ассоциация ABLE (Ассоциация по улучшению жизни и образования) была создана в 1983 году для поддержки и обучения учителей [181]. В 2002 году при Университете Уорика была создана Национальная академия одарённых детей и талантливой молодежи (NAGTY) для оказания помощи правительству в разработке специальных программ для одарённых до 19 лет (DE, 2009 [330]). В 2008 году была разработана государственная политика по поддержке одарённых детей в рамках Национальной программы для одарённых детей и талантливой молодежи (DCSF, 2008 [306]). Она ориентирована на стимулирование школ к работе с детьми, преимущественно 11 – 19 лет, которые более одарены и талантливы в сравнении со своими сверстниками в своём классе и в школе. Благодаря этой программе более 200000 детей получили поддержку, тысячи учителей прошли подготовку. Несмотря на это, NAGTY закрыли в 2010 году (Henry, 2010 [322]; Muray, 2010 [329]).

В 2012 г. в Великобритании были введены новые стандарты обучения, которые ориентированы на достижение прогресса для всех учащихся и, в том числе, одарённых.

Австрия

Поддержка детей со специальными образовательными потребностями в Австрии имеет давнюю традицию. Впервые вопрос о создании специальных условий для одарённых в законодательстве Австрии был поднят в 1962 году. В 1970-е годы одарённые дети получили возможность не посещать уроки, а заниматься самостоятельно. В 1999 году был создан австрийский научно-исследовательский Центр поддержки одарённых и талантливых (ÖZBF) с целью обеспечить систему поддержки одарённых детей, их родителей и воспитателей. Указом Министерства образования в 2009 году о содействии развитию одарённости и таланта (M. W. Weilguny, C. Resch, E. Samhaber, B. Hartel, 2013 [361]), все австрийские школы должны развивать потенциал одарённых и талантливых детей. Школы должны также определить характеристики одарённых и талантливых, применить конкретную меру воспитательного воздействия и обеспечить обратную связь таким образом, чтобы повысить мотивацию обучаемых.

Австрийское законодательство реализует общую идею индивидуализированного образования, ускорения и обогащения образовательных программ в традиционных школах, а также в рамках специальных школ. Одарённые дети могут перешагивать через классы, могут быть освобождены от обязательного образования, посещения занятий в университетах и начинать обучение в университетах в возрасте от 15 лет. Наиболее распространенно образование одарённых учащихся в традиционных классах, где им уделяется особое внимание путем обогащения образовательных программ, предоставления индивидуальных наставников, дополнительных программ по математике, естествознанию, музыке или спорту. Тем не менее, существуют школы, которые предпочитают обособленную модель обучения одарённых детей. На всех уровнях образования проводятся региональные, национальные и международные олимпиады. Кроме того, для одарённых детей устраиваются летние профильные школы. Выявление одарённых детей осуществляется педагогами и психологами, которые используют стандартизированные тесты (Oswald и соавт, 2005 [337]).

Германия

В Германии среднее образование находится в ведении земельных министров культуры, а на федеральном уровне координируется Конференцией земельных министров культуры. Образование одарённых упоминается в законодательстве некоторых земель и в качестве мер, направленных на их поддержку предусматривает раннее поступление в школу, ускорение, перешагивание через классы, сотрудничество с университетами, внеклассный учебный план, соревнования и летние лагеря (Ziegler, Stoeger, Harder, Balestrini, 2013 [367]). Для выявления одарённых детей используется информация, полученная от учителей, родителей и самих детей. Некоторые программы используют IQ тесты для идентификации одарённых детей (Fisher и др., 2005 [313]).

В 1978 году была создана общенациональная некоммерческая организация Die Gesellschaft für Deutsche (DGhK, 2015 [308]), которая предоставляет помощь и специальные курсы для одарённых детей, родителей, педагогов и психологов. Сегодня DGhK имеет 15 региональных организаций и более 3000 членов. В 1994 родителями одарённых детей была учреждена организация Hochbegabtenförderung. Она работает в 25 городах Германии, и организует дополнительные курсы для одарённых детей и консультирование для родителей и учителей в выходные дни или во второй половине дня (Persson R. S., Joswig X., Balogh L, 2000 [339]). Деятельностью этой организации охвачено более 13 тысяч детей.

Наиболее интенсивно сегодня развивается образование одарённых в странах азиатского региона (Китай, Корея, Сингапур и др.).

Китай

Впервые класс для одарённых детей появился в одной из Пекинских школ в 1985 году, который был организован совместно с Китайской академией наук. За тридцать лет существования этой программы, названной «Shaoer», ещё в 70 начальных и средних классах были созданы аналогичные классы, через которые прошло более 900 учащихся.

В настоящее время в Китае предусмотрены следующие меры поддержки одарённых учащихся:

- более раннее поступление или перешагивание через класс для детей, которые выдержали определённые экзамены;

- обучение в специализированных классах, которые организованы в 50 начальных / средних школах по всему Китаю, а также при некоторых университетах;

- обучение в специализированных школах для одарённых детей по специальным образовательным программам;

- дополнительное образование во «дворцах детства», где проводятся курсы науки и искусств, организована исследовательская и конструкторская деятельность одарённых детей;

- программы выходных дней и каникул, которые организуют школы;

- индивидуальные планы для одарённых учащихся.

Интересный опыт работы с одарёнными детьми существует в *Гонконге.* Впервые национальное правительство обратилось к этой проблеме в 1990 году, когда группа педагогов предложила создать комиссию по изучению возможностей предоставления специальных условий для одарённых детей. В этом же году Комиссия по образованию инициировала разработку школьных программ для одарённых учащихся [309].

В 1994 году Департаментом образования был запущен пилотный проект для академически одарённых учащихся [315]. Система работы с одарёнными учащимися включает три основных уровня, которые подразделяют на общее обогащение и специализированные учебные программы.

1-й уровень

А: С учащимися всех классов осуществляется работа по формированию личностно-социальной компетентности обучаемых, навыков мышления высокого порядка и творчества.

В: дифференцированное обучение с учетом потребностей групп с обогащением и расширением учебных программ по всем предметам в традиционных классах.

Уровень 2

С: специальные программы для обучения одарённых учащихся соответственно их уровню способностей, которые создаются в сотрудничестве с учителями и родителями. Учащиеся сдают тест на интеллект, и IQ в 130 баллов или выше, что является основанием для признания учащегося одарённым. В настоящее время к одаренным стали относить учащихся с высоким уровнем способностей в различных сферах: общий интеллект, предметные области, искусство, творческие способности, лидерские навыки и другие. Существуют законы, допускающие более раннее поступление в школу и пропуск классов.

На Тайване существует три основных подхода к обучению одарённых детей: обогащение, ускорение и группировка. Обогащение подразумевает расширенные учебные программы, углублённые учебные материалы, а также большее разнообразие учебной деятельности, чем для обычных учащихся. Ускорение включает в себя ускоренное освоение учебных программ, пропуск классов, а также освобождение от некоторых (например, при поступлении в университет) экзаменов. Группировка включает развитие способностей высокоодарённых учащихся в классах с использованием специальных ресурсов обучения (ресурс означает, что талантливые студенты сгруппированы в специальные классные комнаты, имеющие более разнообразные материалы и / или оборудование) [359].

Настоящей Меккой для талантов является *Сингапур*, который всего за полвека превратился из развивающей страны в высокоразвитую с доступной и качественной системой народного образования.

В 1981 году была создана комиссия по изучению опыта различных стран по образованию одарённых детей и талантливой молодежи. Выводы комиссии подтвердили насущную необходимость создания условия для образования одарённых детей с учетом актуальности развития человеческих ресурсов для такой страны как Сингапур.

В 1984 году был запущен пилотный проект Министерства образования, который стал основой для национальной политики «Одарённые. Программа по образованию» [316, 327].

Учащиеся, которые по результатам экзаменов попадают в верхние десять процентов, имеют право на дополнительное тестирование для определения потребностей в дополнительном образовании.

Выявление одарённых основано на следующей информации: психологическая диагностика, достижения и способности, образцы работ ребёнка, и рекомендации учителя.

Основными мерами для одарённых учащихся предусмотрены следующие:

- обогащение образовательных программ;

- онлайн-курсы углублённого уровня;

- наставничество (студенту предоставляется наставник, который обеспечивает освоение углублённого содержания).

В Сингапуре нашли уникальный способ увеличить ряды одарённых детей и талантливой молодежи. Национальное правительство предложило привлекать одарённых из других стран с целью предоставления местожительства в Сингапуре. Одним из ярких примеров является так называемая программа «китов», которая спонсируется Сингапурским агентством по науке, технологиям и исследованиям [365, 366]. Иностранные учащиеся средних и старших классов, обладающие высоким уровнем способностей к математике и естественным наукам имеют право на получение стипендий и прохождения всех уровней образования, включая докторантуру. Необходимым условием для этого является получение принятие гражданства, а также работа по контракту в течение 3 лет после окончания учебы. Жители Сингапура также имеют право на получение таких стипендий.

Соединенные Штаты Америки

В Соединенных Штатах Америки проблема одарённости актуализируется в конце XIX – начале XX века, когда появляется целый ряд исследований ученых, и педагогическая общественность начинает осознавать значимость развития одарённых детей для будущего страны.

Старт образования для одарённых детей в США был дан после запуска Советским Союзом спутника в конце 50-х как необходимость повышения конкурентоспособности страны [35].

В 1990-х годах были утверждены нормативные акты и государственные образовательные проекты, в определённой степени связанные с проблемой одарённости. Так, 18 апреля 1991 года администрацией президента Дж. Буша была представлена программа «Цели 2000. Образование Америки» (Goals 2000: Educate America Act) [35]. Во втором разделе этой программы ставится задача реорганизации образования и создания школ нового поколения. В программе указывается на то, что эти школы должны стать лучшими в мире, направленными на достижение стратегических общенациональных целей государства.

В начале 2000-х годов федеральное правительство США опубликовало доклады «Нация в опасности» (A Nation at Risk), «Обманутая нация» (A Nation Deceived) и «Национальное совершенство: аргументация для развития американских талантов» (National excellence: the argument for the development of American talent), в которых признает свои ошибки и упущения в деле определения и предоставления услуг одарённым ученикам на государственном уровне [291]. Существующая система образования была критически оценена как изжившая себя и не справляющаяся с поставленными задачами, также было предложено сформулировать новые национальные стандарты выявления одарённых и талантливых детей в условиях реалий современного мира.

К концу XX века была разработана федеральная программа «Закон Джейкоба Джевитса об образовании талантливых учеников» (Jacob H. Javits Gifted and Talented Students Education Act) [303]. Также было объявлено о стимулировании создания программ дополнительного образования для одарённых. Выпуск стандартов Национальной ассоциации одарённых детей способствовал активизизации этой работы и обеспечил школьные округа по всей стране условиями для создания программ.

С целью повышения осознания потребностей одарённых детей и влияния на политику, которую проводит Конгресс, Национальная Ассоциация США создала «Сеть актов законодательной власти» (Legislative Action Network), которая помогает всем заинтересованным лицам и организациям в развитии одарённых. Общая цель поддержки Национальной Ассоциации состоит в усилении федеральной образовательной политики в ряде ключевых областей деятельности, таких как программы подготовки учителя, поддержка «Закона Джейкоба Джевитса об образовании талантливых учеников» и др. [236].

Почти все решения об образовании одарённых детей принимаются на уровне штата. Несмотря на то, что практически во всех школьных округах признают, что одарённые и талантливые ученики – это индивидуальности с уникальными потребностями, работа в области обучения одарённых детей напрямую зависит от внутренней политики и предпочтений отдельных штатов. В каких-то регионах проблема «одарённости» считается актуальной и достойной внимания, а в ряде штатов данная тема не рассматривается вообще.

В этой связи, инициативы по внедрению рабочих образовательных программ, а также субсидии на составление и внедрение программ для одарённых детей финансируются, как правило, неправительственными организациями, например такими, как:

- Национальная ассоциация для одарённых детей (The National Association for Gifted Children – NAGC),

- Национальный центр исследований по вопросам одарённых и талантливых детей (The National Research Center on the Gifted and Talented – CPH / GT),

- Американская психологическая ассоциация (American Psychological Association – APA),

- Ассоциации американских колледжей и университетов,

- Ассоциации родителей и учителей и другие.

В системе среднего образования США одним из оптимальных условий обучения одарённых детей считается дифференцированное обучение. Кроме обучения в общеобразовательных школах в «разнородных классах», одной из наиболее популярных форм работы с одарёнными детьми в США является обучение их в специализированных школах. Другое направление обучения одарённых – разработка «уровней обучения», где все школьники занимаются по одному из 10 уровней. В каждой возрастной группе учебный материал по изучаемому предмету может быть представлен на разных уровнях. В США существует система поиска одарённых детей, которая имеет свои отличительные особенности. Выявление способностей детей на основе тестирования осуществляется с самого раннего детства. Целью системы поиска одарённых детей является достижение оптимального соответствия конкретной учебной программы потребностям определённой группы детей и подростков.

Одним из современных подходов в системе поиска одарённых в США является использование комплексного подхода при выявлении одарённости, как общей интеллектуальной одарённости, так и творческой одарённости, а также специальных видов одарённости личности. Американские ученые используют преимущественно лонгитюдный метод в исследовании одарённости (Л. Термен [356], Л. Холлингвоус [324], П. Уитти [364], Г. Хилдрес [323]).

При выявлении одарённых детей в школах США используются различные методы [212]:

1. Стандартизированные методы измерения интеллекта:

- Шкала интеллекта Станфорд-Бине [293],

- Векслеровская шкала интеллекта для дошкольников и младших школьников [360],

- Тест Слоссона для измерения интеллекта детей и взрослых [260],

- Колумбийская шкала умственной зрелости [128]).

2. Стандартизированные тесты достижений:

- Национальный тест готовности к школе, уровень I [94];

- Станфордский тест достижений для начальной школы, уровень I (Stanford achievement test) [246];

- Тест общей подготовленности, уровень I [35].

3. Стандартизированные тесты на перцептивно-двигательное развитие:

- Тест на основные двигательные навыки;

- Тест на зрительно-двигательную координацию;

- Тест Пурдье.

4. Стандартизированные тесты оценки социального развития:

- Калифорнийская шкала социальной компетенции дошкольников и младших школьников;

- Вайнлендская шкала социальной зрелости.

Необходимо отметить и большое разнообразие методов и форм обучения одарённых детей в системе школьного образования США. Существует большое разнообразие учебных заведений, классов для одарённых детей: «магнитные школы», «классы почета», «неградуированные школы», обучение в группах «смешанных способностей». Широко применяются интенсивные летние и зимние программы. И как уже отмечено, при этом практикуются следующие формы углубления дифференциации обучения одарённых учащихся: «ускорение», «обогащение», «междисциплинарное обучение». Преподавание основных предметов по методу уровневой и профильной дифференциации осуществляется с помощью разнообразных форм внутришкольного группирования учащихся («бендинг», «стриминг», «сеттинг).

«Бендинг» (banding – деление на «ленты», «полосы»). Эта форма основана на распределении всех учащихся данной возрастной группы в зависимости от уровня интеллекта на три широкие «полосы». Уровень интеллекта определяется с помощью тестов на вербальные и мыслительные способности, которые измеряют уровень способностей к обучению. После окончания начальной школы 25% учащихся переводятся в верхнюю полосу (top band), 50% в среднюю полосу (middle band) и 25% в нижнюю полосу (bottom band). Следующей формой является «Стриминг» (streaming – деление на «потоки») – метод группирования по способностям, похож на деление на «ленты», при этом образуется много разных потоков, что создаёт возможность делать группы ещё более однородными, чем при делении на «полосы». «Стриминг» начинает применяться в средней школе на втором, третьем году обучения. Однако в некоторых штатах (Флорида, Нью-Йорк) этот метод используется в начальной школе. Считается, что здесь меньше «навешивания ярлыков», так как нет жесткого деления на три группы. Но одарённые дети не всегда могут найти место в этой системе, поэтому в отдельных школах для них создаются специальные потоки (express stream), где вводятся такие предметы, как латинский и греческий языки и т. д. Тем самым обеспечивается более высокий темп обучения.

Третья форма – «Сеттинга» (setting – деление на «сеты», группы), основанным на группировании детей в процессе обучения на основе успеваемости по отдельным предметам. Один и тот же учащийся может быть в первом «сете» по естествознанию и в последнем «сете» по математике. Американские педагоги считают, что «сеттинг» имеет значительные преимущества по сравнению с другими организационными формами обучения. Во-первых, занятия с однородным по составу классом позволяют учителю определять содержание, формы и методы обучения, согласно уровням способностей учащихся, соизмерять степень сложности учебного материала с уровнем подготовки каждого школьника. Это в значительной степени, на наш взгляд, способствует повышению мотивации к обучению и росту показателей успеваемости. Во-вторых, однородный состав учащихся стимулирует каждого из них к повышению индивидуальных показателей успеваемости, даёт возможность сравнивать свои собственные успехи с успехами столь же способных школьников. В-третьих, одарённые дети, способности которых проявляются не во всех предметах, имеют условия для развития своего потенциала. Эта форма обучения является более справедливой в социальном плане, поскольку основана на различии интеллектуальных возможностей. «Сеттинг» является наиболее гибкой формой обучения, поскольку по результатам успеваемости в конце триместра учащийся может быть переведен в другой сет. Таким образом, меньше возможности образования жестких рамок обучения, когда определение способностей в раннем возрасте (а тестирование в этот период начинается в 7 лет) может привести одарённых детей из семей с низким социально-экономическим статусом на уровни для менее способных. «Сеттинг» даёт возможность раскрытия способностей всех детей, их своеобразия, кроме того, в определённой мере продолжает сохраняться коллектив класса, так как на некоторых уроках учащиеся работают в группах «смешанных способностей». Одним из условий функционирования «сеттинга» является наличие гибкого расписания и четкой организации учебного процесса. При этой форме нередко каждый учащийся имеет своё собственное расписание.

Анализ существующих государственных подходов в области воспитания одарённых детей в зарубежных странах позволит критически посмотреть на свой собственный опыт и определить эффективную образовательную политику в Российской Федерации.

Российская Федерация

На протяжении последней четверти века система образования в России переживает интенсивные преобразования. Главная цель этих реформ заключается в утверждении личностно ориентированных принципов обучения, позволяющих максимально раскрыться индивидуальным качествам различных участников образовательного процесса. Одной из важнейших задач при этом является обеспечение условий для работы с одарёнными учащимися, обладающими теми или иными способностями. Постепенно в общественном сознании формируется понимание того, что переход в век наукоемких технологий невозможен без сохранения и приумножения интеллектуального и кадрового потенциала страны.

К настоящему времени в России уже немало сделано в указанном направлении: созданы специальные образовательные учреждения, общественные организации и фонды, задачами которых выступает выявление, обучение и развитие способностей одарённых детей, разработаны соответствующие учебные и социальные программы. Растет интерес к изучению психологических закономерностей и механизмов развития одарённости, все шире проводятся практические исследования по выявлению и обучению одарённых детей, результаты которых находят своё отражение в образовательном и воспитательном процессе.

Среди нормативно-правовых документов, регулирующих работу с одарёнными детьми, важное значение имеют:

- Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа» (утв. приказом Президента РФ от 4.02.2010 № Пр-271) [203];

- Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов (утв. Президентом РФ 3.04.12) [132];

- Положение о Национальном координационном совете по поддержке молодых талантов России (утв. постановлением Правительства РФ от 10.09.2012 № 897) [200];

- Правила выявления детей, проявивших выдающиеся способности, и сопровождения их дальнейшего развития (утв. постановлением Правительства РФ от 17.11.2015 № 1239) [202];

- О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года (Указ Президента Российской Федерации от 21.07.2020 № 474) [262].

В этом документе вторую позицию занимает национальная цель «Возможности для самореализации и развития талантов», которая декларирует «формирование эффективной системы выявления, поддержки и развития способностей и талантов у детей и молодёжи, основанной на принципах справедливости, всеобщности и направленной на самоопределение и профессиональную ориентацию всех обучающихся…».

При этом следует отметить, что в новом Федеральном законе «Об образовании в Российской Федерации» [266] термин одарённые дети не использован. Данная категория обучающихся обозначена как «лица, проявившие выдающиеся способности, также лица, добившиеся успехов в учебной деятельности, научной (научно-исследовательской) деятельности, творческой деятельности и физкультурно-спортивной деятельности» (Гл. 11, ст. 77).

В Концепции общенациональной системы выявления и развития молодых талантов, утвержденной 3 апреля 2012 года были определены базовые принципы построения и основные задачи общенациональной системы выявления и развития молодых талантов, а также основные направления её функционирования [132].

В частности, в ней отмечается, что сегодня в России широко применяются зарекомендовавшие себя формы работы с одарёнными детьми и молодёжью: специализированные школы для детей, проявивших выдающиеся способности, центры дополнительного образования и технического творчества, проводятся интеллектуальные, творческие и спортивные состязания, расширяется сотрудничество школ с университетами, учреждениями культуры, науки и спорта, организуются летние и зимние школы для учащихся по разным отраслям знаний, заочные и вечерние школы при вузах, осуществляются исследовательские проекты и научные экспедиции. Всё это способствует формированию условий для проявления и развития одарённости.

Сотни тысяч школьников участвуют в различных конкурсах и олимпиадах. Однако они не всегда находят себя во взрослой жизни. В связи с этим задача обеспечения «социального лифта» для талантливой молодёжи в условиях изменчивой и конкурентной экономики становится приоритетной.

Миссия государства в сфере поиска и поддержки одарённых детей и молодёжи состоит в том, чтобы создать эффективную систему образования, обеспечив условия для обучения, воспитания, развития способностей всех детей и молодёжи, их дальнейшей самореализации, независимо от места жительства, социального положения и финансовых возможностей семьи.

Основными направлениями функционирования общенациональной системы выявления и развития молодых талантов являются:

1. Развитие и совершенствование нормативно-правовой базы в сфере образования, экономических и организационно-управленческих механизмов.

2. Развитие и совершенствование научной и методической базы научных и образовательных учреждений, включая:

- развитие отечественных научных школ;

- внедрение современных технологий обучения (в т.ч. дистанционных);

- разработку разноуровневых образовательных программ, а также соответствующих им учебников, учебных и методических пособий.

3. Развитие системы подготовки педагогических и управленческих кадров.

4. Реализация системы мероприятий, направленных на решение поставленных задач на федеральном, региональном и местном уровнях, включая:

- разработку и реализацию региональных и муниципальных целевых программ по выявлению и развитию задатков и способностей детей и молодёжи;

- развитие сети образовательных организаций высшей категории для детей, подростков и молодых людей, проявивших выдающиеся способности, детских спортивных школ, школ искусств, центров технического творчества, зимних и летних школ и лагерей, дистанционных школ;

- организацию научных и творческих мероприятий для детей и молодёжи;

- создание и обеспечение функционирования национального информационно-образовательного интернет-портала;

- поддержку специализированных журналов, теле- и радиопрограмм для детей и молодёжи по различным отраслям знаний в области науки, техники, культуры, искусства, спорта;

- поддержку сообществ (в том числе интернет-сообществ) детей и молодёжи по интересам в области науки, техники, культуры, искусства, спорта;

- развитие системы дополнительного образования детей и молодёжи.

5. Развитие и совершенствование системы интеллектуальных, творческих и спортивных состязаний.

6. Формирование условий для профессиональной самореализации молодёжи.

1.2 Сущность и структура математической одарённости

Математическую одарённость часто рассматривают как специфический вид одарённости, что ставит вопрос о соотношении общей и специальной одарённости, являющийся сложным и не до конца решенным в психологии. Известный советский психолог Б. М. Теплов отрицал наличие общей одарённости, безотносительно к конкретной деятельности [255]. Он полагал, что понятия способности и одарённости имеют смысл только в соотношении с конкретными формами и видами общественно-трудовой деятельности. По мнению Б. М. Теплова, следует говорить о более общих и более специальных моментах в одарённости. О взаимосвязи общей и специальной одарённости писали и Б. Г. Ананьев [42]. Так, С. Л. Рубинштейн отмечал, что наличие специальных способностей оказывает влияние на общую одарённость, а наличие общей одарённости сказывается на характере специальных способностей [216]. Б. Г. Ананьев подчеркивал различие общего и специального развития и, соответственно, общих и специальных способностей, которые взаимосвязаны. Он также подчеркивал роль общего развития в становлении специальных способностей [42].

В. А. Крутецкий определял общие умственные способности как способности, необходимые для выполнения не одного, а нескольких видов деятельности [136]. К общим умственным способностям он относил, в частности, умственную активность, критичность, систематичность, быстроту ориентировки, высокий уровень аналитико-синтетической деятельности, сосредоточенное внимание. Специальные способности же требуются для успешного выполнения одной определённой деятельности – музыкальной, изобразительной, математической, литературной, конструктивно-технической и т.п.

Каждый из учебных предметов в школе требует, наряду с более общими способностями, специальных способностей, обусловленных его своеобразием. Для успешного выполнения любой деятельности необходимы как более общие, так и более специальные способности. Все это в полной мере относится к математическим способностям как определённому виду общих способностей.

Исследованием математических способностей занимались психологи А. Бинэ [293], Э. Торндайк [258], Г. Ревеш [209] и др., математики А. Пуанкаре [205], Ж. Адамар [33], А. Колмогоров [126], В. Тихомиров [256] и др. При этом все исследователи сходятся в одном: следует различать обычные школьные способности к усвоению математических знаний, к их репродуцированию и самостоятельному применению, и творческие математические способности, связанные с самостоятельным созданием оригинального и имеющего общественную ценность продукта в сфере математической деятельности.

Единство взглядов проявляют зарубежные исследователи по вопросу о врожденности или приобретённости математических способностей. По их мнению, творческие способности ученого-математика являются врожденными, благоприятная среда необходима только для их проявления и развития. В отношении школьных (учебных) способностей доминирует теория параллельного действия двух факторов – биологического потенциала и социальной среды.

Основным вопросом в исследовании математических способностей (учебных и творческих) за рубежом был и остается вопрос о сущности этого сложного психологического образования. В этом плане можно выделить три важные проблемы:

1. Специфичности математических способностей.
2. Структурности математических способностей.
3. Типологических различий математических способностей.

Взгляды учёных на специфику математических способностей представлены на рисунке 4.

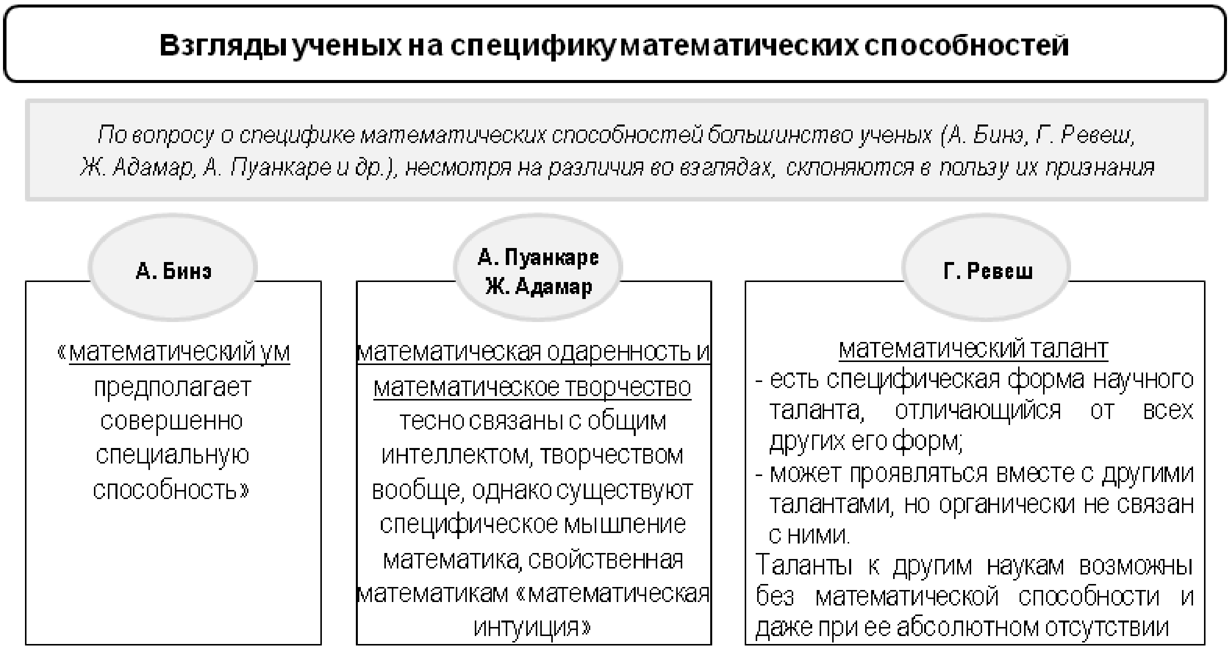


Рисунок 4 – Взгляды ученых на специфику математических способностей

Особое внимание в исследованиях посвящено вопросу о структуре математических учебных способностей. Так, А. Пуанкаре считал [205], что для математика обладать хорошей памятью и вниманием недостаточно и указывал на творческий характер математических способностей, выделяя в них такие важнейшие компоненты, как математическую интуицию; умение логически выстроить цепь операций, позволяющих решить задачу; способность оперировать математическими символами; умение уловить порядок, в котором следует расположить элементы, необходимые для математического доказательства; математическое творчество.

Ж. Адамар видел разницу между решением учеником задач по алгебре или геометрии и математическим творчеством лишь в уровне и в качестве, так как обе работы, по его мнению, носят аналогичный характер [33].

Согласно В.А. Крутецкому, математическая одарённость представляет собой уникальную совокупность математических способностей, что открывает возможность для успешной математической деятельности [137]. Его работы были посвящены всестороннему исследованию математических способностей, их природы и структуры. Он определил способность как личный признак, что даёт возможность выполнить поставленную задачу быстро и хорошо, и противопоставляет это привычке или навыку, который относится к качествам или особенностям деятельности человека, её осуществляющего. В. А. Крутецкий [136] использует термин «математический склад ума», включая в него способность к быстрому и широкому обобщению математических отношений и операций, а также гибкость психических процессов. Учитывая специфичность математической одарённости, он рассматривает её как совокупность определённых математических способностей и личностных качеств.

Современные подходы зарубежных психологов, изучающих проблему математической одарённости, рассматривают её в контексте культурной дифференциации (Irvine S. H., Berry J.W. [325]) в тесной связи с наукой математикой. По мнению Фройденталя «Определение математики меняется. Каждое поколение и каждый математик внутри каждого нового поколения формулирует определение, которое соответствует его идеям» [270]. Следовательно, преобладающие философские представления о математике влияют на концепцию математической одарённости, а это значит, существует структурная связь между математической одарённостью и самой математикой.

Группой зарубежных исследователей (Florence Mihaela Singer, Linda Jensen Sheffield, Viktor Freiman, Matthias Brandl [348]) выделены структурные компоненты математической одарённости, которые разделены на специфические способности и черты личности.

К ***специфическим компонентам*** относятся:

- математическая интуиция, хорошая память, способность к абстрагированию, интерес к математике, способность выявлять закономерности и связи, способность к длительной концентрации внимания, обобщению и сворачиванию математических процессов.

Черты личности включают:

- интеллектуальное любопытство;
- интерес к решению проблем;
- настойчивость в решении сложных задач.

Многими исследователями установлено, что не все учащиеся, имеющие высокие учебные достижения математически одарёны, и не все одарённые дети отличаются высокой успеваемостью (Brandl M., Barthel C. [297]; Öystein H. P. [338]).

В своей последней книге Дж. Бойлер [296] пишет, что обучение должно отражать новую науку о мозге и постулирует, что каждый человек имеет потенциал, чтобы эффективно изучать математику. Придерживаясь этой точки зрения, некоторые авторы пытаются определить профили или черты математически перспективных студентов (Budak I. [298], Printer C. P. и др. [340]), сосредоточить внимание на их выявлении (Vilkomir T., O’ Donoghue J. [358]). Они используют термин математически перспективных студентов для того, чтобы охватить большой диапазон способностей и условий окружающей среды, чтобы понять, что может помочь таким студентам достичь гораздо более высоких уровней в освоении математики.

За рубежом выявление одарённых студентов часто связано с использованием тестов интеллекта и, следовательно, выявление математически одарённых студентов также строится на общей идентификации одарённости. Однако этот подход подвергается критике, что одарённость, как интеллект, может быть измерена тестами IQ. Другая же часть исследователей считает, что необходимо сосредоточиться на развитии математической одарённости, а не на её идентификации.

Вслед за работой В. А. Крутецкого [137], многие авторы и исследовательские группы разработали перечни когнитивных характеристик одарённых детей (например, DiezmannC. M., WattersJ. J. [307]). Так, F. Käpnick [326] провел исследование и выделил характеристики математически одарённых учащихся в начальной школе:

- запоминание математических фактов;

- структуризация математических фактов; математическая интуиция и математическая фантазия;

- перенос математических структур.

Более детальные аспекты математической одарённости обнаружили S. Winkler, M. Brandl [363], D. Assmus [292] при исследовании второклассников:

- способность запоминать математическую информацию,

- умение строить и использовать математические структуры,

- способность обратного направления мысли,
- способности улавливать сложные структуры и работать с ними,
- умение строить и использовать математические аналогии,
- математическую чувствительность и математическое творчество.

Другие показатели математической одарённости могут включать в себя:

- необычное любопытство о числах и математической информации;
- способность понимать и быстро применять математические понятия;
- способность выявлять закономерности и абстрактно мыслить;
- гибкость и креативность в решении проблем;
- способность передавать математические понятия в незнакомой ситуации;
- настойчивость при решении сложных проблем (Stepanak J. [352]).

В своих исследованиях B. Sriraman [350] сосредоточился на математических процессах, с помощью которых различные авторы определяют математическую одарённость. Эти процессы включают в себя, среди прочего, способности:

- обобщать и различать математические структуры;
- управлять данными;
- логически мыслить;
- к аналогии и эвристическому мышлению;
- визуализировать проблемы и / или отношения и др.

Тем не менее, исследователи отмечают, что эти показатели не должны использоваться в качестве правил для квалификации студентов как математически одарённых. Не каждый математически одарённый студент будет обладать всеми этими характеристиками, или они могут возникнуть в разное время в зависимости от развития студента. Большая часть выявления одарённых студентов зависит от текущих оценок и наблюдений учителей (Nolte M., 2012 [331]).

Сочетание внутренних и ситуативных факторов может вызвать проблемы для математически перспективных учащихся. Среди вопросов, которые могут оказать отрицательное влияние, являются асинхронное развитие, проблемы социализации, а также проблемы с самообучением.

Наиболее общей проблемой одарённых детей является асинхронное развитие, т.е. неравномерное развитие интеллектуальных, эмоциональных, социальных и физических аспектов. Так, у учащихся, обладающих высоким уровнем развития математических способностей, часто возникают трудности адаптации к ситуационным контекстам.

Отсутствие понимания и поддержки может негативно сказаться на развитии математически одарённых учащихся и привести к тому, что многие из них начинают маскировать свои способности для того, чтобы облегчить собственные социальные проблемы (Gross M. U. M., 2003 [317]). Это может препятствовать дальнейшему развитию их уникальных способностей, а также привести к потере чувства собственного достоинства.

Одарённые дети часто склонны к самостоятельному изучению и решению проблем с помощью новых методов, которые могут находиться за пределами их нынешних способностей, при этом делая большое количество ошибок. Это может привести их к разочарованию и развить страх ошибок (Freehill M., 1961 [314]).

Одной из существенных проблем у одарённых детей с асинхронностью развития является самооценка, так как они склонны судить себя по тому, что они не могут делать, а не по тому, что могут (Nolte M., 2013 [331]; Nordheimer S., Brandl M. [333]).

В исследовании B. Bicknell [294] математическая одарённость раскрывается на основе опросов родителей, студентов и преподавателей. Большинство родителей признали способности своего ребёнка к математике в раннем возрасте. Описания родителей своих детей в дошкольном возрасте дают образ того, что можно было бы рассматривать как врожденные способности у этих детей. Характеристики, идентифицированные родителями, включают глубокую концентрацию и способность работать независимо друг от друга в течение относительно длительного периода времени на конкретной задаче. Маленькие дети 2 – 3 лет самостоятельно инициировали игры с использованием чисел и числовых моделей. Виды деятельности, которые родители наблюдали у своих детей в раннем возрасте, включали: конструирование со строительными блоками, создание симметричных узоров, решение головоломок. Другие дети с удовольствием устанавливали связи между балетными движениями и геометрическими вращениями, проявляли интерес к таким понятиям, как время и пространство (B. Bicknell [294]).

В опросе принимало участие более 100 родителей математически одарённых учащихся, которые отметили, что они не фиксировали признаки одарённости до того как ребёнок пошел в школу (Nolte [331]). Помимо этого, предполагаемая математическая одарённость двух- или трёхлетних детей не обязательно связана с врожденными математическими способностями, а могло быть связано с родительскими предпочтениями или другими факторами внешней среды.

После того, как одарённые дети поступили в школу, уровень их заинтересованности и способности к математике по сравнению с их сверстниками становится все более очевидными. Учителя наблюдают у этих детей разный темп освоения математики, интуитивное математические знания в решении проблем, их живой интерес к математике, чувство юмора и способность мыслить более абстрактно, чем у их ровесников, а также развитость логического мышления, настойчивость в решении математических задач. Другие аспекты математики, которые, по мнению учащихся, подтверждают их математическую одарённость, включают успех в соревнованиях; компетентность; скорость вычислительных навыков и др. (Bicknell [294], Nolte [331]).

Иногда способности учащихся проявляются совершенно по-разному, что признают как учащиеся, так и преподаватели. Например, некоторые студенты сильнее в геометрии, в то время как другие обладают более сильными вычислительными навыками. Тем не менее, это может быть непосредственно связано не с математической одарённости, а различными когнитивными стилями. В исследовании, посвященном взаимосвязям между тремя способностями на основе когнитивных стилей (словесным дедуктивным, пространственными образами и объектом изображения) и изучением геометрии Андерсон и др. [303] обнаружили, как пространственная образность и словесное мышление были полезны в решении некоторых типов задач геометрии.

Существование конкретного индивидуального потенциала одарённости не является достаточным для обеспечения высокой продуктивности в обучении математике. Формальное или неформальное обучение является средством трансформации этого потенциала в таланты. Тем не менее, этот потенциал необходим (Heller K., Ziegler A. [321]; Bicknell B. [294]).

Исследования одарённых студентов университетов весьма ограничено. Возможное объяснение состоит в том, что их трудно определить на университетском уровне (Albon R., Jewels T. [290]). Другое объяснение может заключаться в том, что IQs не остаются стабильными в течение долгого времени. Кроме того, взаимодействие между интересами, деятельностью, окружающей средой влияют на математические достижения студентов и приводят к вопросу, как различить одарённость и опыт.

Обзор эмпирических исследований показывает, что, в целом, студенты, у которых в раннем возрасте была диагностирована математическая одарённость, получают более высокие средние показатели, чем обычные студенты (Olszewski-Kubilius P. [336]).

Z. Usiskin [357] разработал классификацию уровней математического таланта, которая имеет семь значений. В этой классификации значение 0 соответствует уровню, который отражает очень слабое владение математикой. Значение 1 представляет собой уровень, который колеблется от элементарного владения математикой до уровня, сопоставимого со знаниями, которые владеют учащиеся 6-9 классов. Очевидно, что большая часть населения находится на 0 или 1 уровне. Таким образом, остальная часть населения имеет уровень от 2 до 7, где значение 2 соответствует степени владения математикой учащимися средней школы, а уровень 7 – обладателям премии Филдса по математике или таких гениев как Леонард Эйлер, Карл Фридрих Гаусс и др. (Usiskin Z. [357]).

Приведем ключевые компоненты математических способностей, выделяемые разными психологами (Рисунок 5).

Среди советских психологов наиболее значимый вклад в разработку данной проблемы внес В. А. Крутецкий [125]. В качестве компонентов математических способностей как основы экспериментального исследования он выделил следующие (Рисунки 6, 7).

M. Hamza [319], опираясь на систему мыслительных операций Г. Хемли [248], пришел к выводу о том, что отсталость детей в математическом развитии проявляется, как правило, одновременно по всех трем математических предметах – арифметике, алгебре, геометрии. Он считал это доказательством существования группового математического фактора (Рисунок 8).

К аналогичному выводу пришёл и Д. Ли [147], также применивший операции Г. Хемли к задачам, характерным, по его мнению, для трёх математических предметов: вычисления процентов, решения квадратных уравнений и доказательств группы теорем об окружности.

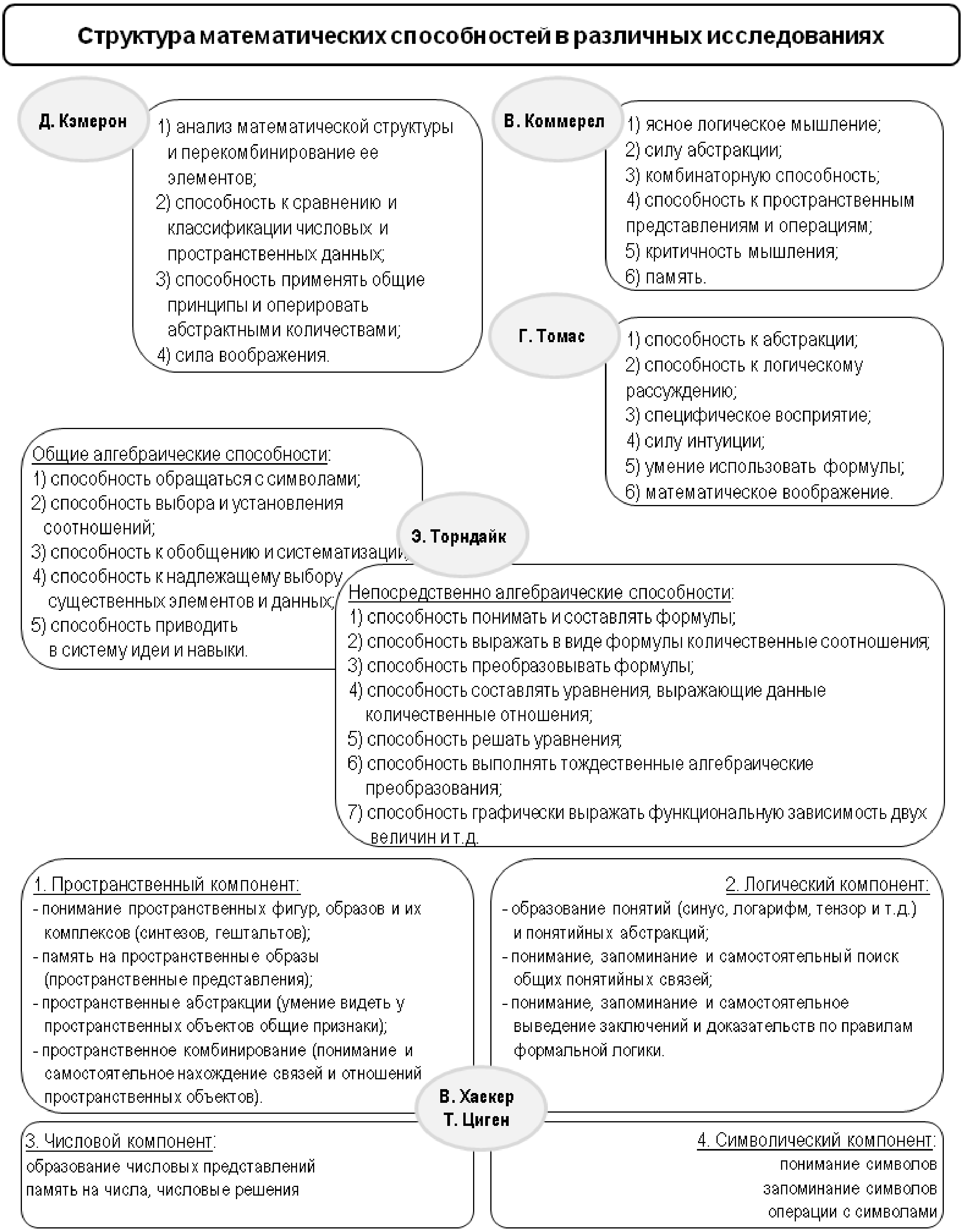


Рисунок 5 – Структура математических способностей в различных исследованиях

Компоненты математических способностей как основы экспериментального исследования по В. А. Крутецкому

- способность к формализации математического материала, к отделению формы от содержания, абстрагированию от конкретных количественных отношений и пространственных форм и оперированию формальными структурами, структурами отношений и связей
- способность обобщать математический материал, вычленять главное, отвлекаясь от несущественного, видеть общее во внешне различном
- способность к оперированию числовой и знаковой символикой
- способность к «последовательному, правильно расчлененному логическому рассуждению», связанному с потребностью в доказательствах, обосновании, выводах
- способность сокращать процесс рассуждения, мыслить свернутыми структурами
- способность к обратимости мыслительного процесса (к переходу с прямого на обратный ход мысли)
- гибкость мышления, способность к переключению от одной умственной операции к другой, свобода от сковывающего влияния шаблонов и трафаретов (эта особенность мышления важна в творческой работе математика)
- математическая память (память на обобщения, формализованные структуры, логические схемы)
- способность к пространственным представлениям

Рисунок 6 – Структура математических способностей как основы экспериментального исследования по В. А. Крутецкому

Общая схема структуры математических способностей школьников по В. А. Крутецкому

1. Получение математической информации (способность к формализованному восприятию математического материала, схватыванию формальной структуры задачи).
2. Переработка математической информации:
   - способность к логическому мышлению в сфере количественных и пространственных отношений, числовой и знаковой символики (способность мыслить математическими символами);
   - способность к быстрому и широкому обобщению математических объектов, отношений и действий.
   - способность к свертыванию процесса математического рассуждения и системы соответствующих действий (способность мыслить свернутыми структурами);
   - гибкость мыслительных процессов в математической деятельности;
   - стремление к ясности, простоте, экономности и рациональности решений;
   - способность к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении).
3. Хранение математической информации – математическая память (обобщенная память на математические отношения, типовые характеристики, схемы рассуждений и доказательств, методы решения задач и принципы подхода к ним).
4. Общий синтетический компонент (математическая направленность ума).

Рисунок 7 – Общая схема структуры математических способностей школьников по В. А. Крутецкому

Рисунок 8 – Определение математического мышления зарубежными исследователями

В 1952 г. в США состоялась конференция на тему «Пути выявления и воспитания учащихся с потенциями в науках». Потенции в математике определялись психологами при помощи тестов по следующим компонентам: общий интеллект, способность к абстрактному рассуждению, к пространственным представлениям, способность читать и понимать научный текст, способность к интерпретации отношений и т. д. Учителя к этим потенциям относили: экстраординарную память; интеллектуальную любознательность; способность к абстрактному мышлению; способность применять знания в новой ситуации; способность быстро находить ответ при решении задач.

К. Дункер пришел к выводу [103], что для решения задач требуются такие способности, как широта и гибкость мышления, абстрагирование от конкретного. Н. Майер также подчеркивает важность гибкости мышления, выражающейся в перекомбинировании данных задачи в соответствии с направленностью мыслительного процесса при её решении [153]. Л. Секей придаёт особое значение способности к генерализованному пониманию ситуации, к схватыванию структурных соотношений в обобщенном виде [226].

Ж. Пиаже, указывая на значение мыслительных операций, выделял в онтогенетическом развитии интеллекта стадию конкретных операций, связанных с конкретными данными и мало формализованных, и стадию обобщенных, формализованных операций [194]. Он соотносил их с тремя фундаментальными математическими структурами, выделенными Н. Бурбаки [65]: алгебраическими, структурами порядка и топологическими.

И. Верделин дал широкое определение математических способностей, в котором отразились репродуктивный и продуктивный аспекты, понимание и применение [362]. Основное внимание он уделил такому продуктивному аспекту, исследуя его в процессе решения задач. Он составил пять групп тестов, каждая из которых имеет высокий вес по одному из следующих факторов: общему, вычислительному, вербальному, зрительно-образному и фактору рассуждения, а также группу собственно математических тестов (задач). Д. Мордухай-Болтовский придавал особое значение в математическом мышлении бессознательному мыслительному процессу [174]. В математических способностях он выделил такие компоненты, как «сильную память» на математические идеи, мысли, факты; «остроумие», позволяющее находить сходное в разнородных сферах, объединять в одном суждении понятия из малосвязанных областей мысли; «быстроту мысли», связанную с тем, что бессознательное мышление протекает быстрее сознательного и помогает ему.

Особый интерес представляют мнения известных советских математиков. А. Я. Хинчин указал следующие черты математического мышления [271]:

1) доминирование логической схемы рассуждения;

2) лаконизм (стремление находить кратчайший путь к цели);

3) четкая расчленённость хода рассуждения;

4) точность (каждый математический символ имеет строго определённое значение).

А. Н. Колмогоров указывает, что способности к механическому запоминанию большого числа фактов, формул, складыванию или перемножению в уме длинных рядов многозначных чисел не имеют отношения к математическим способностям. К последним он отнёс [127]:

1) способность умелого преобразования сложных буквенных выражений, нахождения удачных путей для решения уравнений, не подходящих под стандартные правила, или, как это принято называть у математиков, вычислительные или «алгоритмические» способности;

2) геометрическое воображение или «геометрическую интуицию»;

3) искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения (в частности, хорошим критерием логической зрелости, необходимой математику, является понимание принципа математической индукции и умение правильно его применять).

А. Н. Колмогоров отмечает, что различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях, что эти способности проявляются обычно довольно рано и требуют непрерывного упражнения.

Б. В. Гнеденко выделяет следующие свойства математического мышления [75]:

1) способность улавливать нечёткость рассуждения, отсутствие необходимых звеньев доказательства;

2) привычку к полноценной логической аргументации;

3) чёткую расчленённость хода рассуждения;

4) лаконизм;

5) точность символики.

А. И. Маркушевич, отметив наиболее привычное требование развитых количественных и пространственных представлений, указал на следующие качества ума и характера, воспитываемые в связи с хорошо поставленным преподаванием математики [159]:

1) умение вычленять сущность вопроса, отвлекаясь от несущественных деталей (умение абстрагировать);

2) умение строить такую схему явления, в которой сохранено только то, что нужно для математической трактовки вопроса, а именно; отношения принадлежности, порядка, количества и меры, пространственного расположения (умение схематизировать), что в свою очередь предполагает упрощение первоначальной постановки вопроса при помощи надлежащей рабочей гипотезы;

3) умение выводить логические следствия из данных предпосылок (дедуктивное мышление);

4) умение анализировать данный вопрос, вычленяя из него частные случаи, различать, когда они исчерпывают все возможности и когда они являются только примерами и всех возможных случаев не охватывают;

5) умение применять выводы, полученные из теоретических рассуждений, к конкретным вопросам и сопоставлять результаты с тем, что мы «предвычисляли или теоретически предполагали», оценивать влияние изменяющихся условий на надёжность результата;

6) обобщать полученные выводы и ставить новые вопросы в обобщённом виде.

Хотя А. И. Маркушевич указывал, что он не претендует на исчерпывающее освещение вопроса, однако его характеристика особенностей математического мышления оказалась одной из наиболее содержательных [160].

Определение математического мышления по Ю. М. Колягину

- *гибкость* – умение варьировать способы решения проблемы, лёгкость перехода от одного пути решения к другому; умение выходить за границы привычного способа действия, находить новые способы решения проблем при изучении задаваемых условий; умение перестраивать систему усвоенных знаний по мере овладения новыми знаниями и накопления опыта
- *оригинальность и глубина* – умение проникать в сущность каждого из изучаемых фактов в их взаимосвязи с другими фактами; выявлять специфические, скрытые особенности в изучаемом материале; умение выделять существенное
- *целенаправленность* – стремление осуществлять разумный выбор действий при решении какой-либо проблемы, постоянно ориентируясь на поставленную этой проблемой цель, стремление отыскать наиболее кратчайший путь её достижения
- *рациональность* – склонность к экономии времени и средств для решения поставленной проблемы, стремлением отыскать оптимально простое решение задачи, использовать в ходе решения схемы, символику и условные обозначения
- *широта* – способность к формированию обобщённых способов действий; умение охватить проблему в целом
- *активность* – желание обязательно решить поставленную проблему, исследование различных вариантов постановки этой проблемы в зависимости от изменяющихся условий
- *критичность* – умение оценить правильность выбранных путей решения поставленной проблемы
- *доказательность* мышления – умение скрупулезно относиться к сбору фактов и аргументов; стремление к обоснованию каждого шага решения задачи
- *организованность памяти* – запоминание, долговременное сохранение и правильное воспроизведение основной учебной информации
- *чёткость и лаконичность* речи и записи

Рисунок 9 – Определение математического мышления по Ю.М. Колягину [129, 130]

С. И. Шварцбурд рассматривал следующие элементы в математическом развитии [279]:

1) пространственные представления;

2) абстрактное мышление;

3) переход к математической схеме;

4) дедуктивное мышление;

5) анализ, рассмотрение частных случаев;

6) применение выводов;

7) критичность;

8) математическую речь;

9) терпение при решении задач.

Данная схема построена в соответствии с основными этапами решения задачи, однако такой принцип построения схемы структуры математических способностей некоторые ученые считают искусственным, поскольку очевидно, что структура этих способностей неадекватна общей структуре процесса решения задач.

Сравнение приведённых определений показывает, что ***главными признаками математических способностей*** являются:

- способность к обобщению;
- логичность и формализованность мышления;
- гибкость и глубина, систематичность, рациональность и аргументированность рассуждений;
- математическое восприятие и память.

1.3 История становления и развития многоуровневой системы математических олимпиад в России и за рубежом

Предметные олимпиады школьников проводятся с целью выявления творческих способностей учащихся, развития интереса к научно-исследовательской деятельности, раннего определения профиля обучения, формирования национальных высококвалифицированных кадров.

Основными задачами олимпиад являются стимулирование и мотивация интеллектуального развития учащихся, поддержка одарённых детей, содействие в их профессиональном самоопределении и продолжении образования, профессиональный рост и самореализация ищущих творческих преподавателей.

Математические олимпиады являются наиболее распространенной и отработанной формой отбора математически одарённых детей. В олимпиадах по математике главную роль играют не сумма конкретных знаний молодого человека, а его способность за ограниченное время построить и исследовать достаточно сложную модель или логическую конструкцию, которые являются новыми для него. В указанных олимпиадах невозможны тестовые задания, проверяющие знания школьника, его эрудицию. Напротив, обязательным требованием, предъявляемым к заданиям математических олимпиад, является их новизна для участников.

Необходимые условия успешности выступления на олимпиаде

- психологическая готовность школьника к выполнению нестандартных заданий, отказ от стереотипных подходов, тем более что задания следующего этапа олимпиады заметно превосходят по сложности задания предыдущего этапа
- математическая одарённость, то есть способность к построению нестандартных логических конструкций
- высокие «спортивные» качества участника – умение собраться, сконцентрироваться на выполнение нескольких заданий за непродолжительное время олимпиады
- «математическую грамотность» участника – умение в строгих математических терминах записать в работе решения задач
- успешное и полное овладение школьником изучаемых разделов математики

Рисунок 10 – Необходимые условия успешности выступления на олимпиаде

Стремление к достижению олимпиадных успехов является стимулом для учащихся, поддерживает серьёзный интерес к учебе и дополнительным занятиям. Важную роль в проявлении интереса к занятиям математикой играет эстетическая красота олимпиадных задач.

Наконец, успехи учеников на математических олимпиадах, наряду с успешностью поступления в вузы (в том числе результаты сдачи ЕГЭ), являются фактически единственными объективными критериями качества работы учителя.

В настоящее время математическая олимпиада – это соревнование между школьниками, где участник за фиксированное время должен решить предложенные задачи. Обычно решение оформляется в письменном виде (некоторые этапы олимпиады в Санкт-Петербурге, согласно традиции, проводятся в форме устных олимпиад). Жюри за каждую задачу ставит определённое количество баллов, в зависимости от степени продвижения участника в её решении. Итоговый результат выступления определяется по сумме баллов, набранных участником. В прежние годы количество баллов по каждой задаче зависело от её сложности и определялось либо априорно, либо во время самой олимпиады после первой проверки работ и обработки статистики успешности выполнения заданий. Последняя схема применялась по рекомендации Министерства образования при проведении Всесоюзных математических олимпиад школьников для единообразия проведения и оценки результатов олимпиад по разным предметам. В настоящее время на всех этапах Всероссийской математической олимпиады школьников правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Можно сказать, что математическая олимпиада – это творческое соревнование, являющееся гармоничным сочетанием спорта (точнее, интеллектуального состязания) и науки.

Спортивная сторона олимпиады. Математические олимпиады используют некоторые человеческие особенности, заложенные на генетическом уровне и особенно проявляющиеся в детском и подростковом возрасте. Это – желание соперничать. Свойственный подростковому возрасту дух состязательности является стимулом к систематическим углубленным занятиям математикой с целью максимальной реализации своих способностей во время олимпиады. Школьники, вовлечённые в олимпиаду, стремятся получить всё более высокие результаты, а это требует от них огромного напряжения при подготовке к олимпиаде и на самой олимпиаде, что ведёт к их стремительному развитию. Давно известно, что человек может подняться на следующий уровень развития только при предельном напряжении всех сил.

Как и в любой другой сфере творческой деятельности, в олимпиадах невозможно достижение больших результатов без регулярных самостоятельных или кружковых (факультативных) занятий. К сожалению, как и в любом спортивном состязании, в математических олимпиадах очень небольшое число участников добивается высших результатов и получает дипломы и медали Всероссийской или Международной олимпиад. В то же время, учитывая массовость этих олимпиад, большинство участников не становятся победителями на том или ином этапе, что вроде бы находится в противоречии с основной задачей математической олимпиады – поиску и привлечения одарённой молодежи к науке. В математической олимпиаде, как и в спортивной олимпиаде, главное не победа, а участие, и увлечение математикой сохраняется на всю жизнь не только у победителей. Тем более что олимпиады, как спорт, заканчиваются, в отличие от большого спорта, очень рано – в 17 – 18 лет.

Научная составляющая математических олимпиад. В математических олимпиадах многие задания начинаются со слов: «Докажите, что…». Уже сама формулировка заданий показывает, что школьнику предлагается самостоятельно вывести некое математическое, то есть научное, утверждение. Несомненно, в силу несовершенства математического инструментария, вывод таких утверждений ещё нельзя называть полноценной научной деятельностью. Но вырабатывающиеся в процессе решения олимпиадных задач навыки творческой деятельности, в дальнейшем дают быстрый переход после окончания университета к самостоятельным научным исследованиям. И хотя для успеха на олимпиаде необходимо иметь некоторые специфические, спортивные качества: психологическую устойчивость, умение выкладываться в ограниченный промежуток времени (большая мощность мыслительной деятельности), бойцовские качества (умение собираться в нужный момент, выкладываться до конца и переносить поражения), остроту ума (IQ), успехов в математике, как правило, добиваются именно бывшие «олимпийцы». Всемирно известные венгерские математики первой половины XX века были лауреатами венгерской олимпиады, и рассвет венгерской математической школы в XX веке произошел благодаря этой олимпиаде. Среди крупнейших современных венгерских математиков много победителей Международной математической олимпиады.

Большинство российских математиков, которые получили Филдсовскую премию (самую престижную международную награду в области математики), а также другие престижные международные премии, были победителями Всероссийской (Всесоюзной) и Международной математической олимпиад. Новая, «прорывная» идея в математике порой может оказаться чисто олимпиадной, и решение математических проблем, над которыми многие годы бились математики всего мира, иногда удается найти с помощью олимпиадных подходов. Например, именно так Ю. В. Матиясевич (победитель 6 Международной математической олимпиады [162]) решил 10-ю проблему Гильберта, а А. А. Суслин (победитель 9 Международной математической олимпиады [43]) – проблему Серра.

Научная важность олимпиад подчеркивается и тем, что подавляющее большинство выдающихся российских математиков занималось организацией олимпиад и подготовкой детей к ним. Конечно, олимпиадный мир настолько привлекателен, что некоторая (очень небольшая) часть математиков остаются в нем и становятся тренерами и задачными композиторами.

В то же время, активно включаются в олимпиадное движение и приносят в него новые идеи студенты, сами в недавнем прошлом успешно участвовавшие в олимпиадах. Кроме того, от их участия зависит и качество работы жюри олимпиады. В математических олимпиадах не существует тестовых заданий, проверяемых по трафарету. Практически у любого задания возможны несколько вариантов решения, частичные продвижения в решении, поэтому проверка олимпиадных работ является, по сути дела, таким же творчеством, как и их решение. По работе проверяющий должен восстановить логику рассуждений участника и оценить степень их достоверности и полноты.

Наконец, математические олимпиады сближают людей, объединённых идеями как повышения качества математического образования в стране вообще, так и работы с одарёнными школьниками в частности. На финалах Всероссийских олимпиад школьников по математике проходили и проходят встречи и семинары членов жюри и педагогов, работающих со школьниками, обмен опытом работы в регионах.

История математических олимпиад

1886 г.	Первый очный математический конкурс для выпускников лицеев (Румыния)
1894 г.	Первая математическая олимпиада (Венгрия). Инициатор – Венгерское физико-математическое общество, возглавляемое будущим Нобелевским лауреатом по физике Л. Этвешом. С тех пор ежегодно, с перерывом на две мировые войны.
с 1886 г.	Заочные конкурсы по решению задач (Россия)
1934 г.	Первая математическая олимпиада (Россия, Ленинград). Инициатор – замечательный математик Б.Н. Делоне
1935 г.	Московская городская олимпиада (Россия)
50-60 гг. XX в.	Ежегодные математические олимпиады во многих городах Советского Союза; их проводили университеты и пединституты совместно с органами народного образования (СССР)
1960 г.	Первая математическая олимпиада («нулевая» Всероссийская математическая олимпиада школьников) (РСФСР, Москва)
с 1961 г.	Всероссийские математические олимпиады (РСФСР). Официальная нумерация началась с 1961 года. Приглашались команды из союзных республик.
с 1967 г.	Олимпиада получила официальное название – «Всесоюзная олимпиада школьников по математике» (СССР)
1974 г.	Создан Центральный оргкомитет Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников (РСФСР). Первые руководители математической части олимпиады – проф. МГУ, член-корр. АН СССР (ныне академик) В. И. Арнольд и доцент МФТИ А. П. Савин.
1976 г.	Центральным оргкомитетом и методическими комиссиями по физике, математике и химии разработаны структура, задачи и цели олимпиады, которые в основном остаются неизменными и по настоящее время. Территория РФ была разделена на четыре зоны: Северо-Западную, Центральную, Юго-Западную, Сибири и Дальнего Востока (с 2001 г. – на семь федеральных округов: Южный, Центральный, Северо-Западный, Приволжский, Уральский, Сибирский и Дальневосточный). Отдельные зоны – города Москва и Ленинград (СССР, РФ)
до 1992 г.	Всероссийская олимпиада школьников по математике проводилась в четыре этапа: школьный, районный (городской), областной (краевой, республиканский) и зональный. Заключительный этап проводился во всех республиках СССР, кроме РСФСР, где его заменяла Всесоюзная математическая олимпиада, на которой РСФСР представляли шесть команд: команды городов Москвы и Ленинграда и четырех зон, т. к. Россия была самой большой по территории и населению среди республик СССР.
1992 г.	Межреспубликанская олимпиада (Россия)
с 1993 г.	Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады. В **1993 г.** в г. Анапа Краснодарского края. Гости олимпиады – команды Армении и Туркменистана. В **последующие годы** – трижды в Майкопе, по два раза в Кисловодске, Казани и Твери, по одному разу в Великом Новгороде, Екатеринбурге, Калининграде, Калуге, Нижнем Новгороде, Орле, Перми, Пскове, Рязани, Санкт-Петербурге, Саранске, Саратове, Сарове, Смоленске, Тюмени, Чебоксарах, Ярославле. В олимпиаде неоднократно принимали участие команды Китая и Болгарии. В 2021 году в связи с пандемией COVID 19 заключительный этап не проводился. Согласно приказу Министерства просвещения, все школьники, получившие, в силу успешного выступления на региональном этапе, право участия в заключительном этапе, были объявлены победителями и призёрами всероссийской олимпиады.

Рисунок 11 – История математических олимпиад

В первые годы Всероссийская олимпиада школьников проводилась в пять этапов [199]. Ниже приведена выдержка из действовавшего на тот период Положения о Всероссийской олимпиаде школьников: «В олимпиаде принимают участие учащиеся общеобразовательных учреждений любого класса, освоившие программы соответствующего уровня по предмету олимпиады.

Первый этап (школьный) проводится общеобразовательными учреждениями в октябре. Олимпиада проводится для учащихся 5 – 11 классов.

Второй этап (районный, городской) проводится органами местного самоуправления или местными (муниципальными) органами управления образованием в ноябре-декабре. Олимпиада проводится для учащихся 6 – 11 классов.

Третий этап (региональный, областной) проводится в субъектах Российской Федерации государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации в январе – феврале. Допускается совместное проведение третьего этапа несколькими субъектами Российской Федерации. Олимпиада проводится для учащихся 8-11 классов.

Четвёртый этап (федеральный окружной) проводится по семи округам (Южный Уральский, Центральный, Приволжский, Сибирский, Северо-Западный, Дальневосточный) государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации в марте. Допускается совместное проведение четвёртого этапа двумя субъектами Российской Федерации. Олимпиада проводится для учащихся 8 – 11 классов.

Пятый этап (заключительный) проводится образовательными учебными заведениями высшего профессионального образования Российской Федерации и соответствующим государственным органом управления образованием субъекта РФ в апреле. Олимпиада проводится для учащихся 9 – 11 классов.

Школьные олимпиады

Первый (школьный) этап олимпиады проводится общеобразовательными учреждениями, образовательными учреждениями начального профессионального и среднего профессионального образования в октябре.

Школьный этап олимпиады проводится в каждой школе, в нём может участвовать каждый учащийся. Вся организационная и методическая работа по его проведению обеспечивается педагогическими коллективами школ. Курируется первый этап городскими (муниципальными) органами управления образованием.

Сроки и условия проведения олимпиады определяет образовательное учреждение самостоятельно.

Районные (городские) олимпиады

Второй (районный, городской) этап олимпиады проводится муниципальными органами управления образованием в ноябре-декабре по заданиям, разработанным муниципальными предметными комиссиями. В ряде областей второй этап олимпиады проводится по единым заданиям, подготовленным областной методической комиссией (в настоящее время методической комиссией субъекта Российской Федерации). Второй этап олимпиады проходит в один день, как правило, выходной.

Для организации и проведения второго этапа олимпиады муниципальный орган управления образованием создаёт оргкомитет, предметные комиссии и жюри, в состав которых наряду с представителями образовательных и научных учреждений, общественных организаций, органов управления образованием, могут входить члены оргкомитета и жюри третьего этапа.

Место, сроки и условия проведения олимпиады определяются муниципальным органом управления образованием.

Участниками второго этапа олимпиады являются победители и призёры первого этапа, а также победители и призёры второго этапа олимпиады предыдущего года. По решению муниципальных органов управления образованием второй этап олимпиады может носить открытый характер.

Региональные (областные, республиканские) олимпиады

Третий (региональный) этап олимпиады проводится государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации в январе-феврале одновременно во всех субъектах Российской Федерации, в сроки, определённые Министерством образования и науки Российской Федерации.

Третий этап олимпиады проходит, как правило, в два тура. Он проводится по методическим рекомендациям, разработанным Центральной предметной комиссией олимпиады. Фактически, комиссия готовит комплект рекомендуемых заданий, из которых региональные методические комиссии выбирают вариант, соответствующий уровню подготовки школьников региона и структуре проведения олимпиады (в некоторых территориях олимпиада проходит в один день).

Для организации и проведения третьего этапа олимпиады государственный орган управления образованием субъекта Российской Федерации создаёт оргкомитет и жюри. В оргкомитеты входят руководители университетов и институтов, представители общественности и средств массовой информации, а жюри формируются из ведущих педагогов, а также преподавателей, аспирантов и студентов вузов.

Место и условия проведения третьего этапа определяются государственным органом управления образованием субъекта Российской Федерации самостоятельно.

Для обучающихся закрытых административно-территориальных образований, отдаленных военных городков и гарнизонов, расположенных за пределами Российской Федерации, третий этап олимпиады проводится также по заданиям, разработанным Центральной предметной комиссией олимпиады. Место, сроки и условия проведения олимпиады определяются Федеральным Агентством по образованию.

Окружной этап олимпиады города Москвы и районный этап олимпиады города Санкт-Петербурга приравниваются по статусу к третьему этапу олимпиады.

Участниками третьего этапа олимпиады являются победители и призёры второго этапа, а также победители и призёры третьего этапа олимпиады предыдущего года. По решению органов управления образованием субъектов Российской Федерации третий этап олимпиады может носить открытый характер.

Федеральные окружные олимпиады

Четвёртый (федеральный окружной) этап олимпиады проводится государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации в марте одновременно во всех федеральных округах Российской Федерации, в сроки, определённые Министерством образования и науки Российской Федерации (Федеральным Агентством) по предложению Методической комиссии по математике.

Четвёртый этап олимпиады проводится по заданиям, разработанным Центральной предметной комиссией олимпиады.

Городские этапы олимпиад Москвы и Санкт-Петербурга приравниваются по статусу к четвёртому этапу олимпиады.

Состав участников четвёртого этапа олимпиады определяется из числа победителей и призёров третьего этапа в соответствии с квотами, установленными Министерством. Участниками данного этапа также являются дипломанты первой и второй степеней четвёртого этапа олимпиады предыдущего года.

Заключительный этап олимпиады

Пятый (заключительный) этап олимпиады проводится государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации в апреле в сроки, определённые Министерством образования и науки Российской Федерации (Федеральным Агентством) по предложению методической комиссии по математике.

Пятый этап олимпиады проводится по заданиям, разработанным Центральной предметной комиссией олимпиады.

Для организации и проведения пятого этапа олимпиады государственный орган управления образованием субъекта Российской Федерации, на территории которого проводится олимпиада по отдельному предмету, создаёт по согласованию с Минобрнауки России оргкомитет и жюри. В состав оргкомитета и жюри, наряду с представителями образовательных и научных учреждений, общественных организаций, органов управления образованием, входят представители Центрального оргкомитета, Центральной предметной комиссии и Центрального жюри.

Состав участников пятого этапа олимпиады определяется из числа победителей и призёров предыдущего этапа в соответствии с квотами, установленными Министерством. Участниками данного этапа также являются дипломанты первой и второй степеней пятого этапа олимпиады предыдущего года».

В последующие годы Положение об олимпиаде несколько раз претерпевало изменения, связанные как с изменением административного деления государства, так и с резким увеличением числа предметов, по которым олимпиада стала проводиться (в том числе по таким далёким от математики и естественных наук предметам, как ОБЖ, обществознание, итальянский язык, …). Потребовалась унификация правил проведения предметных олимпиад, адекватная всему их многообразию. В настоящее время основным документом, регламентирующим проведение Всероссийской олимпиады, является Порядок проведения всероссийской олимпиады школьников, утверждённый Приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 27.11.2020 № 678 "Об утверждении Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников" [201]. В п.1.6 записано, что Олимпиада включает школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы. По математике школьный этап проводится по заданиям для 4-11 классов, муниципальный – для 7-11 классов, региональный и заключительный – для 9-11 классов. Уже в более ранних версиях Порядка было отменено деление дипломов призёров олимпиады на дипломы II и III степени.

Методические комиссии и Жюри олимпиады

В целях повышения качества заданий различных этапов Олимпиады, в настоящее время единые задания школьного этапа для всех образовательных учреждений муниципального образования готовят муниципальные методические комиссии, а для муниципального этапа всех образовательных учреждений региона – региональные методические комиссии. Наконец, задания регионального и заключительного этапов готовит Центральная предметно-методическая комиссия по математике Всероссийской олимпиады школьников (далее ЦПМК).

Остановимся на принципах формирования и работы ЦПМК, на основе которой затем формируется Жюри заключительного этапа олимпиады.

Методическая комиссия формируется из преподавателей вузов и специализированных школ, сотрудников научных учреждений. Также в работе Методической комиссии активно участвуют недавние олимпийцы – победители Всероссийских и Международных олимпиад последних лет – студенты и аспиранты ведущих университетов России (МФТИ, СПбГУ, МГУ, ВШЭ). Для проведения заключительного этапа Всероссийской олимпиады по математике формируются Жюри, состоящее из членов ЦПМК, студентов – победителей международных и всероссийских математических олимпиад, а также преподавателей школ и вузов региона, проводящего олимпиаду.

Составы ЦПМК и Жюри ежегодно утверждаются приказами Министерства просвещения (ранее Министерства образования и науки) Российской Федерации.

В последние годы председателем ЦПМК является доцент МФТИ Н. Х. Агаханов, который на протяжении более 20 лет являлся также руководителем национальной команды России на Международной математической олимпиаде (с 1995 года по 2019 год).

Методическая комиссия ведёт свою работу в течение всего года. И дважды в год: в начале октября и в начале февраля в широком составе она собирается на заседания для подготовки заданий регионального и заключительного этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике. В последние годы заседания комиссии проходят в Московском физико-техническом институте (МФТИ) – базовом вузе по организации методической поддержки Всероссийских математической и физической олимпиад школьников. На кафедре высшей математики МФТИ работают выпускники мехмата МГУ и МФТИ, победители и призёры Всесоюзных, Всероссийских и Международных математических олимпиад. Кроме них, в состав комиссии входят преподаватели вузов и специализированных физико-математических школ, сотрудники научных учреждений Москвы, Санкт-Петербурга, Ярославля, Кирова, Калуги, Новосибирска, Саратова, студенты СПбГУ, МФТИ, ВШЭ.

На заседаниях комиссии собирается 20 – 25 человек. Они составляют банк заданий, в который, как правило, включается около 150 авторских задач, подготовленных членами ЦПМК. В первый день заседаний проходит обсуждение задач, поиск различных путей их решения, а также обобщение доказываемых утверждений. Во второй день методическая комиссия разбивается на секции: геометрии, комбинаторики, алгебры и теории чисел, в которых проходит более детальное обсуждение задач, и вырабатываются рекомендации по включению тех или иных задач на различные позиции в варианте. Например: «Задача № 63 геометрической секцией рекомендуется на позиции 10.3 или 10.7» (т. е. в качестве третьей по сложности в один из дней олимпиады 10 класса). Огромную роль в работе комиссии на этом этапе, когда нужно за короткое время просмотреть и оценить большое число задач, играют студенты – бывшие олимпийцы. Вечером второго дня (при составление заключительного этапа – на следующий день) комиссия собирается на общем заседании. Проходит черновое составление вариантов на основе рекомендаций секций. На некоторые позиции может оказаться несколько претендентов. А некоторые могут остаться незаполненными. Как правило, это первые (самые лёгкие) задачи. Очень сложно придумать нетрудную, но, в то же время, новую и эстетически привлекательную задачу. На Международной математической олимпиаде, где также ежегодно сталкиваются с подобной проблемой, рассматривается вопрос о снятии требования абсолютной новизны для первых задач каждого дня олимпиады. Там необходимость решения хотя бы по одной задаче в день примерно половиной участников заставляет международное жюри понижать сложность этих заданий, что очень трудно сделать при абсолютно новых идеях решения задач. После чернового составления вариантов часть членов ЦПМК занимается обсуждением и отработкой формулировок и решений задач, включённых в вариант, а другая часть – составлением новых задач на вакантные позиции. Эта работа продолжается более узким кругом ЦПМК (в том числе кураторами классов) на протяжении двух-трёх недель. Параллельно проходит компьютерный набор заданий и решений, подготовка и вычитка оригинал-макета. Окончательная версия заданий проходит экспертизу. Отметим, что к каждому предлагаемому заданию дается подробное решение. Если задача имеет два принципиально различающихся метода решения, то приводятся оба. Хотя нередко участникам олимпиады удается найти и неизвестный ранее, до олимпиады, способ решения. В случаях, когда решение школьника проще, элегантней решения, придуманного жюри, на олимпиаде он получает специальный приз «За оригинальное решение задачи».

Сложной и ответственной задачей является составление заданий регионального этапа. С одной стороны, он является достаточно массовым (около 10 тысяч участников), и должен решать задачу популяризации математики и математических знаний, знакомства учащихся всех регионов страны с эстетикой математики, и потому его задания должны быть доступны способным юным математикам разных регионов страны. С другой, после исключения из Всероссийской олимпиады зонального, впоследствии федерального окружного, этапа, региональный этап носит отборочный характер. Состав участников заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике формируется по единому рейтингу из числа участников, показавших наиболее высокие результаты на региональном этапе. По этой причине задания регионального этапа должны включать в себя и весьма сложные задачи, позволяющие выявить наиболее одарённых детей, достойных участвовать в финальном раунде Всероссийской олимпиады по математике. Помимо учащихся, показавших наиболее высокие результаты на региональном этапе, в состав участников финала включаются победители и призёры заключительного этапа предыдущего года, продолжающие обучение в учебных организациях общего образования. Тем регионам, из которых при этом ни один участник не получил права участия в заключительном этапе, предоставляется возможность направить одного своего школьника при условии, что он набрал на региональном этапе не менее половины от максимально возможного числа баллов.

Задания регионального этапа составляются исключительно на основе материала, не выходящего за рамки стандарта школьного математического образования. В то же время, на заключительном этапе, являющимся одновременно и отборочным при формировании сборной команды России на Международную математическую олимпиаду, допустимым является включение задач, решения которых используют некоторые классические теоремы математики, не изучаемые в массовой школе, но изучаемые на факультативных занятиях и в летних математических школах. К таким относятся, например, малая теорема Ферма, китайская теорема об остатках, метод Штурма доказательства неравенств, теорема Эйлера об окружности девяти точек и т. п.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике Всероссийской олимпиады школьников формирует задания, исходя из следующих **принципов**:

1. ***Нарастание сложности заданий от первого до последнего***. При этом их трудность должна быть такой, чтобы в каждый из двух дней олимпиады с первым заданием успешно справились примерно 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим – около 20%, а с четвёртым – несколько участников. (Конечно, не всегда удается выдержать такие установки по трудности заданий, так как новые, авторские задачи не всегда точно соответствуют заданной сложности).

2. ***Тематическое разнообразие заданий***: каждый день в комплект должны входить задачи по геометрии, алгебре, комбинаторике, в старших классах желательно включение задач по теории чисел, тригонометрии, стереометрии, математическому анализу. (При этом допустимо и даже поощряется включение задач, объединяющих различные разделы школьной математики).

3. ***Обязательная новизна задач***. Недопустимой является ситуация, когда участник математической олимпиады заранее знаком с идеей решения задачи. (В этом заключается коренное отличие математических олимпиад от олимпиад по тем дисциплинам, в которых предлагаются тестовые задания, проверяющие как раз ЗНАНИЕ участником олимпиады тех или иных фактов, его начитанность, «энциклопедичность»). Олимпиады по математике проверяют, в первую очередь, способность к творчеству, к умению логически мыслить, а не объём полученных ранее знаний.

4. ***Эстетическая красота заданий***. В математике существует понятие «красивая задача». К таковым относят задачи, в которых сочетаются интересный с научной точки зрения факт, простота формулировки и элегантность решения. Как, например, задача, получившая наименование «Полоски Климова» (автор задачи – победитель Международной математической олимпиады в составе команды СССР Аркадий Климов). «Прямоугольник разрезан на прямоугольники, у каждого из которых длина одной из сторон – целое число. Докажите, что и у исходного прямоугольника длина одной из сторон – целое число». Интересно, что у этой

комбинаторной задачи помимо симпатичного комбинаторного решения имеется и короткое научное решение, основанное на свойствах двойных интегралов.

Важной составляющей проведения олимпиады является организация выполнения работ участниками. Помимо основных требований, предъявляемых к учебным аудиториям (освещение, проветривание и т. п.), необходимо учесть специфику проведения математических олимпиад. В кабинетах должны находиться чертежные принадлежности (карандаши, циркули, линейки). Участники должны быть обеспечены бумагой, разлинованной в клетку. На математических олимпиадах часто предлагаются задачи, в которых участвуют клетчатые фигуры. Также достаточно распространены задачи на раскраски и заполнение таблиц. Наличие такой бумаги избавляет участника от необходимости проведения дополнительной работы по разлиновыванию листов.

Инструкция для дежурных по аудиториям (кабинетам)

1. Обратите внимание на рассадку участников. Рассадите школьников так, чтобы учащиеся из одной школы (*начиная с третьего этапа – из одного региона, города*) не сидели рядом.
2. Обратите внимание на организацию заполнения титульных листов и оформление работ. Напомните участникам, что фамилию, имя и отчество надо вписывать в титульный лист разборчиво, печатными буквами; в тексте работы не должно быть никаких указаний на её авторство; в работе следует указывать, какая часть является чистовиком, а какая – черновиком.
3. Обратите внимание участников на то, что мобильными средствами связи, а также калькуляторами на олимпиаде пользоваться нельзя.
4. Дежурный по аудитории отвечает только на организационные вопросы (оформление работ, выход из аудитории, время и т.п.). Ответы на вопросы по условиям осуществляет только дежурный член жюри.

Организация проверки работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство леммы, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Поэтому проверка работ на математических олимпиадах проводится в два этапа. На первом этапе жюри производит проверку работ без выставления баллов, по так называемой системе «в плюсах и минусах». Знак выставляется в соответствии с приведенной таблицей. При этом предварительная оценка по системе «плюс – минус» может быть незначительно изменена после обсуждения критериев и классификации случаев.

Таблица 1 – Система «в плюсах и минусах» для проверки работ на математических олимпиадах на первом этапе

Знак	Правильность (ошибочность) решения
+	Полное верное решение
+.	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$	Решение в целом верное. Однако решение содержит существенные ошибки либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
+/2	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
-.	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения.
-	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Иногда выставляется оценка «+!», чтобы отметить правильное красивое решение. Как правило, подобные решения отмечаются спецпризами.

По окончании первого этапа группа проверяющих по каждой задаче, анализируя и обобщая приведённые решения, выделяет различные способы решения, типичные частичные продвижения, основные ошибки. В соответствии со сравнительным анализом различных продвижений вырабатывается шкала критериев оценивания.

На втором этапе выставляются окончательные баллы по каждой задаче. В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается из 7 баллов. В таблице приведена шкала перевода знаков в баллы.

Таблица 2 – Шкала перевода знаков в баллы на втором этапе проверки работ на математических олимпиадах

Знак	Баллы
+	7
+.	6-7
$\pm$	5-6
+/2	4
$\mp$	2-3
-.	0-1
-	0
0	0

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри.

В то же время, любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Традиционной ошибкой школьников при решении задач на доказательство является использование доказываемого утверждения в качестве начального условия. Например, в задаче требуется доказать, что треугольник является равносторонним, а доказательство начинается со слов: «Пусть треугольник ABC – равносторонний». Подобные «решения» оцениваются в 0 баллов в силу грубой логической ошибки.

Ещё раз остановимся на задачах на нахождение наибольшего (наименьшего) значения некоторой величины (задачи типа «оценка + пример»). Решение таких задач включает в себя два шага:

1. Обычно более сложный шаг (оценка) – доказательство того, что некоторая величина не больше (не меньше) некоторого значения.

2. Построение примера, показывающего достижимость указанного значения.

Как правило, только первый шаг оценивается в 4 балла, второй шаг в 1 – 2 балла.

Начиная с третьего этапа, каждая работа оценивается и проверяется (перепроверяется) не менее чем двумя членами Жюри.

На втором этапе рекомендуется повторная проверка работ победителей и призёров до расшифровки работ.

Победителями олимпиады соответствующего этапа считаются обучающиеся, награжденные дипломами первой степени. Призёрами олимпиады соответствующего этапа считаются обучающиеся, награждённые дипломами второй и третьей степени (в настоящее время нет разделения дипломов на степени). Другие участники могут награждаться дипломами участника, грамотами, специальными призами.

Важно отметить, что победителями (призёрами) олимпиады в параллели не обязательно должен быть ровно один ученик. На математических олимпиадах принята практика награждения дипломами до 45% всех участников олимпиады. Кроме того, расхождение результатов двух школьников в 1 – 2 балла может отражать только умение одного из них более чётко записывать решения. Поэтому в прежние годы рекомендовалась следующая схема распределения дипломов: «Все школьники, решившие все задачи олимпиады (засчитываются задачи, по которым поставлено не менее 5 баллов), награждаются дипломами первой степени. Школьники, решившие 80% задач олимпиады, награждаются дипломами второй степени. Школьники, решившие 50% задач олимпиады, награждаются дипломами третьей степени. При этом следует учесть, что уровень участников даже в рамках одного региона может сильно различаться. Также возможны случаи, при которых в варианте оказывается слишком много сложных задач. Поэтому отсутствие в параллели ученика, решившего все задачи, не должно означать отказ от присуждения диплома первой степени лучшему из участников. Аналогичные замечания касаются второго и третьего дипломов».

Учитывалась проблема популяризации математики: «На олимпиадах начальных (первого, второго) этапов с учётом возрастных особенностей рекомендуется награждение дипломами и грамотами значительного (до 60%) учащихся младших (5 – 6 классов), в целях развития у них интереса к дополнительным занятиям математикой».

А рекомендации центральной методической комиссии по математике по организации проведения различных этапов олимпиады выглядели следующим образом.

Особенности подготовки и проведения школьного этапа олимпиады

Школьная олимпиада проводится в один день. Олимпиада проводится для учащихся 4 – 11 классов.

Рекомендуемое время проведения:

для 4 – 6 классов – 2 урока,

для 7 – 8 классов – 3 урока,

для 9 – 11 классов – 4 урока.

Вариант должен содержать 4 – 6 задач разной сложности. Желательно, чтобы задания охватывали все разделы школьной математики, изученные к моменту проведения олимпиады. Первые две (самые лёгкие) задачи варианта должны быть доступны подавляющему большинству участников. В качестве сложных задач рекомендуется включать в вариант задачи, использующие материалы, изучаемые на факультативных занятиях. Например, по темам: чётность, делимость, принцип Дирихле, логика, игры, комбинаторика.

Подготовка заданий и их проверка осуществляются учителями математики, руководителями кружков и факультативов (школьными методическими объединениями учителей математики).

Особенности подготовки и проведения муниципального этапа

Районная олимпиада проводится в один день. Олимпиада проводится для учащихся 6 – 11 классов.

Следует допускать до участия в олимпиаде за 6 класс учащихся 4 – 5 классов по рекомендации ведущих учителей.

Во многих регионах России в олимпиаде могут принять участие все желающие. В некоторых регионах в число участников дополнительно включаются школьники, рекомендованные руководителями школьных и городских математических кружков и факультативов.

Рекомендуемое время проведения:

для 6 – 7 классов – 3 часа,

для 8 – 11 классов – 4 часа.

Вариант должен содержать 5 – 6 задач разной сложности. Обязательным является требование включения в вариант заданий по темам, изученным к моменту проведения олимпиады в соответствии с программами всех базовых учебников по математике. Первые две (самые лёгкие) задачи варианта должны быть доступны подавляющему большинству участников. Рекомендуется включать в вариант задачи, использующие материалы, изучаемые на факультативных занятиях.

Для проверки заданий формируется Жюри, в состав которого включаются учителя математики из разных школ, руководители кружков и факультативов. Рекомендуется включение в состав Жюри студентов, аспирантов и преподавателей технических и педагогических вузов региона.

Особенности подготовки и проведения регионального этапа

Региональная олимпиада проводится, как правило, в два тура. Олимпиада проводится для учащихся 8 – 11 классов. По согласованию с Оргкомитетом и по рекомендации Жюри второго этапа, допускается участие в олимпиаде учащихся 6 – 7 классов.

Время проведения каждого тура – 4 часа.

При проведении олимпиады в два дня, каждый день школьникам предлагается решить 4 задачи. При проведении олимпиады в один день задание включает 5 задач. В некоторых случаях, в силу больших размеров территории региона, допускается проведение третьего тура Всероссийской олимпиады одновременно в нескольких городах региона. В этом случае работы доставляются в единый центр для последующей шифровки и проверки работ.

Особенности подготовки и проведения заключительных этапов

Четвёртый и пятый этапы олимпиады проводятся в два тура.

Четвёртый (федеральной окружной) этап олимпиады проводится для учащихся 8 – 11 классов. Время проведения каждого тура – 4,5 часа.

Ещё раз отметим, что в окружном этапе должны принимают участие, в соответствии с квотой, победители третьего этапа, даже в том случае, если они учатся в более младших классах. Например, учащийся 7 класса, победивший в областной олимпиаде по 8 классам, должен быть включен в число участников окружной олимпиады по 8 классам.

Пятый (заключительный) этап олимпиады проводится для учащихся 9 – 11 классов (разумеется, в олимпиаде также принимают участие учащиеся более младших классов, ставшие победителями и призёрами федеральной окружной олимпиады по указанным классам). В заключительном этапе принимают участие около 60 человек в каждой параллели. Время проведения каждого тура – 5 часов.

В связи со сложностью предлагаемых заданий и трудностью изложения участниками чёткого решения за ограниченное время олимпиады, у Жюри олимпиады при проверке возникают сложности по однозначности трактовки записанного решения. Поэтому по окончании проверки работ до окончательного определения победителей и призёров на четвёртом и пятом этапах олимпиады Жюри проводит разбор задач и показ работ участникам олимпиады. На разборе Жюри рассказывает типичные ошибки и критерии оценивания работ, выработанные в процессе проверки в соответствии с рекомендациями Методической комиссии. На показе работ Жюри разбирается вместе с участниками во всех спорных ситуациях. На показе работ после обсуждения по конкретной задаче оценка может быть исправлена (только по согласованию с председателем Жюри или его заместителем). В исключительных случаях, если проверяющий и участник не могут прийти к единому мнению по оценке работы, участник имеет право подать в течение двух часов с момента окончании показа работ письменную апелляцию. Апелляция рассматривается комиссией, возглавляемой председателем Жюри, в течение одного дня с момента её подачи.

Как было отмечено выше, согласно новому Порядку проведения всероссийской олимпиады школьников, в школьном этапе принимают участие учащиеся 4-11 классов, в муниципальном – 7-11 классов, в региональном и заключительном – 9-11 классов.

В целях сохранения в стране системы работы с математически одарёнными школьниками и стимулирования интереса обучающихся к изучению математики, в Российской Федерации с 2009 года проводится олимпиада по математике для учащихся 8-х классов, получившая наименование Олимпиада им. Л.Эйлера, инициатором которой является Центральная предметно-методическая комиссии по математике всероссийской олимпиады школьников.

Лучшие юные математики страны получают право представлять Россию на Международной математической олимпиаде. Рассмотрим историю её возникновения и традиции.

Широкое распространение во многих странах мира математических олимпиад привело к идее проведения международных математических соревнований детей. Летом 1959 года по инициативе Румынского математического и физического общества была проведена I Международная математическая олимпиада (ММО). С тех пор стало традицией каждый год летом проводить Международную математическую олимпиаду школьников. Отдавая дань стране – первому организатору ММО, международное математическое сообщество доверяет проведение юбилейных ММО Румынии. Победа в олимпиаде очень почётна, а на право её проведения, несмотря на большую финансовую нагрузку на страну-организатор, ежегодно претендуют несколько кандидатов. Важность ММО подтверждается тем, что награды победителям вручают президенты и члены царствующих домов государств, в которых проходит Международная математическая олимпиада. Приведём список организаторов Международной математической олимпиады (ММО) последних лет, когда команда России стала участницей ММО: 1992 – СНГ (Москва), 1993 – Турция (Стамбул), 1994 – Гонконг, 1995 – Канада (Торонто), 1996 – Индия (Бомбей), 1997 – Аргентина (Мар-дель-Плата), 1998 – Тайвань (Тайпей), 1999 – Румыния (Бухарест), 2000 – Корея (Тайджун), 2001 – США (Вашингтон), 2002 – Великобритания (Глазго), 2003 – Япония (Токио), 2004 – Греция (Афины), 2005 – Мексика (Мерида), 2006 – Словения (Любляна), 2007 – Вьетнам (Ханой), 2008 – Испания (Мадрид), 2009 – Германия (Бремен), 2010 – Казахстан (Астана), 2011 – Аргентина (Мар-дель-Плата), 2013 – Колумбия (Санта-Марта), 2014 – ЮАР (Кейптаун), 2015 – Таиланд (Чианг-Май), 2016 – Китай (Гонконг), 2017 – Бразилия (Рио-де-Жанейро), 2018 – Румыния (Клуж), 2019 – Великобритания (Бат), 2020 и 2021 – Россия (Санкт-Петербург). Проведение олимпиады 2021 было запланировано в США. Но, в связи с пандемией COVID 19, оргкомитет отказался от проведения, и руководство Международной математической олимпиады обратилось к России с просьбой провести в Санкт-Петербурге и олимпиаду 2021 года, на что было дано согласие. Отметим, что обе олимпиады 2020 и 2021 годов были проведены в смешанном варианте, когда участники писали олимпиаду в своих странах, а в Россию приехали члены задачного комитета, руководства Международной олимпиады и координаторы (математики разных стран, осуществлявшие оценку работ участников).

Первоначально в Международных олимпиадах участвовали только несколько европейских социалистических стран, но сейчас ММО собирает школьников более чем из 100 стран – практически всех крупнейших государств мира. Советский Союз принимал участие практически во всех, проходивших до 1992 года, Международных математических олимпиадах, неоднократно становясь их победителем в неофициальном командном зачёте (по сумме баллов, набранных членами команды).

Согласно регламенту ММО, в олимпиаде имеет право впервые принять участие страна, приславшая на олимпиаду предыдущего года официального обозревателя. Кроме этого, страна-организатор, имеет право пригласить, без выполнения указанного требования, несколько дополнительных стран-участниц. Случайным, но удачным, оказалось совпадение, что олимпиада 1992 года проходила в Москве (график проведения ММО утверждается на несколько лет вперед). И страны, образовавшиеся после распада Советского Союза, в том числе и Россия, получили возможность принять участие в ММО, начиная с олимпиады 1992 года. Кроме того, в олимпиаде 1992 года принимала участие сборная команда СНГ.

Претерпев некоторые изменения в период становления, Международная математическая олимпиада стала проводиться по одному регламенту на протяжении многих последних лет. Страны-участницы весной присылают в специально создаваемый задачный комитет свои предложения (до 6 задач от страны, страна-организатор своих задач не предлагает). Этот комитет на основе принципов новизны задач, тематического разнообразия, сложности решения формирует список из 30 задач (short-list олимпиады), из которых впоследствии руководители команд, составляющие жюри олимпиады, выбирают те 6 задач, которые предлагаются на олимпиаде школьникам. Выбор осуществляется путем голосования вначале по задачам, занимающим первые (лёгкие) позиции. После этого выбираются две самые сложные задачи Олимпиады. Затем – две «средние» задачи. Наконец, на заключительном этапе, голосуется распределение задач по двум турам. Каждая страна имеет один голос, поэтому, с учетом большого разнообразия уровня команд, тематических предпочтений разных делегаций, обсуждение вариантов проходит в жарких спорах и занимает не менее двух дней. Рабочий язык заседаний международного жюри – английский, но при каждом голосовании на официальные языки олимпиады – испанский, русский и французский переводится предмет голосования. Когда задания выбраны, обсуждается и утверждается английская версия варианта, а затем версии на официальных языках олимпиады. После этого руководители команд переводят задания на национальные языки. При этом вносятся небольшие изменения в условия задач, с целью упрощения понимания условий школьниками из разных стран. Участники олимпиады имеют право писать решения на родном языке, а при координации, руководители команд переводят решения школьников на английский язык. Далеко не у всех участников олимпиады идеальный почерк, поэтому иногда и у руководителей команд возникают проблемы с пониманием текстов решений своих детей.

Олимпиада проводится в два дня (два тура), в каждом школьники решают в течение 4,5 часов по три задачи по темам: алгебра и анализ, геометрия, комбинаторика, теория чисел, причем каждая из этих тем должна быть представлена на

ММО. Задачи имеют разную сложность, но правильное решение каждой из них оценивается в 7 баллов. Победители олимпиады определяются по сумме всех набранных за два тура баллов по принципам: награждаются не более половины всех участников олимпиады, медали среди победителей распределяются в пропорции 1:2:3 (соответственно золото, серебро, бронза). Участниками олимпиады могут быть молодые люди в возрасте до 20 лет, не обучавшиеся в вузах или университетах на момент начала олимпиады. Конечно, для России кажется странной такая возрастная граница, но в целом ряде стран Европы, Северной Америки и Азии продолжительность обучения в колледже составляет 12 – 13 лет. В то же время в команду России нередко бывают включены талантливые школьники, окончившие 10, а то и 9 класс, поэтому, как правило, наша команда младше своих основных соперников на ММО. Были случаи, когда школьники, окончившие у нас школу, выступали за команды других стран (США, Швеция, Израиль, Германия). Команда страны может состоять не более чем из 6 участников, руководителя команды и его заместителя. Кроме того, страна имеет право включить в состав своей делегации официальных обозревателей, которые могут оказывать содействие руководителям в их работе.

Баллы участников за выполненные работы выставляются на координации: по каждой задаче руководители команд согласовывают оценки с утверждёнными страной-организатором координаторами, в которые, как правило, включаются математики из нескольких стран мира. При выставлении баллов школьникам страны-организатора в качестве координаторов выступают руководители команды страны, предложившей данную задачу. Координация является для руководителей команды наиболее сложной и ответственной частью ММО. Работы участников перед тем, как будут выданы на проверку руководителям, копируются, и координаторы заранее знакомятся с работами детей из наиболее сильных команд. Поэтому по некоторым задачам координация проходит практически формально: координаторы сразу сообщают, что всем нашим участникам они предлагают поставить семерки и (с определённой долей иронии) интересуются нашим мнением по этому поводу, например: «А, может, вам удалось найти ошибки в работах ваших школьников?». Но по целому ряду задач (особенно по комбинаторике, порой по алгебре или теории чисел) наши предварительные оценки расходятся очень существенно. Причиной этого является нестандартность мышления наших школьников, предлагающих необычные, трудные для понимания решения задач. Нередко координация работ российских школьников по какой-то из задач втрое превышает отведённое на неё по регламенту время. Приходится объяснять координаторам сложную логику построения решений.

Россия ежегодно участвует в Международной математической олимпиаде. Согласно Положению о Всероссийских предметных олимпиадах школьников, основанием для участия сборных команд Российской Федерации в Международных олимпиадах являются официальные приглашения организаторов международных олимпиад с указанием сроков и условий их финансирования.

В целях подготовки сборных команд для участия в Международных олимпиадах ежегодно проводятся зимние, летние и установочные учебно-тренировочные сборы кандидатов в сборные команды для участия в Международных олимпиадах.

Состав участников сборов, места их проведения и состав сборных команд России для участия в Международных олимпиадах утверждается Министерством образования и науки Российской Федерации (в настоящее время Министерством просвещения) на основе представления Центральной предметно-методической комиссии (в последние 3 года – тренерского совета национальной сборной).

Как показывает многолетний опыт, успешность выступления школьника на Международной математической олимпиаде определяется стабильностью его результатов на различных соревнованиях (Рисунок 12).

**СХЕМА ОТБОРА КОМАНДЫ РОССИИ
НА МЕЖДУНАРОДНУЮ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ОЛИМПИАДУ**

I этап – Всероссийская математическая олимпиада

В группу кандидатов в сборную команду России на ММО последующих лет включаются победители и призеры заключительного этапа по 9 и 10 классам.

II этап – зимние учебно-тренировочные сборы

По итогам проводимых в январе сборов, включающих в себя 4 тура отборочных олимпиад, задания которых схожи по стилю и тематике с заданиями Международной олимпиады, определяется группа примерно из 12 человек- кандидатов в национальную команду России.

III этап – Всероссийская математическая олимпиада

Из определенной на II этапе группы по итогам выступления на Всероссийской математической олимпиаде определяются 6 членов команды России на ММО текущего года (все кандидаты в команду, независимо от класса, в котором они обучаются, выступают на Всероссийской олимпиаде по 11 классу). Решение по окончательному составу команды принимает тренерский совет национальной сборной, учитывая выступления школьников на различных олимпиадах в течение года.

*Рисунок 12 – Схема отбора команды России
на международную математическую олимпиаду*

Многие годы летние сборы проводились в период с 20 июня по 10 июля в одном из пансионатов, расположенных в Центральной части России, для членов национальной команды текущего года, а также для кандидатов в национальную команду на Международные олимпиады следующих лет. В последние годы, в связи с организацией по инициативе Президента страны фондом «Талант и Успех» в Сочи Образовательного центра «Сириус» и осознания важности успешного выступления команд России на международных соревнованиях, в программу подготовки национальной команды были добавлены сборы, местом проведения которых стал ОЦ «Сириус». Участники сборов сочетают серьезные учебные занятия с активным отдыхом, спортивными играми. Академическая подготовка национальной сборной включает в себя лекционные и семинарские тематические занятия (некоторые разделы математики, включаемые в задания ММО, например, функциональные уравнения, не изучаются в школах). Кроме того, в течение сборов ребята участвуют в нескольких тренировочных олимпиадах.

В последние годы нашими основными соперниками на Международных математических олимпиадах являются команды Китая, США, Южной Кореи. С целью повышения качества подготовки национальных сборных команд к ММО и в рамках культурного и научного межгосударственного сотрудничества Министерством образования РФ и Ассоциацией наук и технологий Китая в 1992 году было подписано соглашение об обмене делегациями для участия в национальных математических олимпиадах двух наших стран. В последние годы команда, составленная по итогам летних учебно-тренировочных сборов из кандидатов в сборную команду России на ММО, принимает участие в Китайской математической олимпиаде школьников, которая проводится ежегодно в зимний период. А в апреле наша страна принимает на Всероссийской математической олимпиаде школьников команду Китая. Стиль задач Китайской олимпиады заметно отличается от стиля Всероссийской олимпиады, и такое участие очень полезно для будущих олимпийцев.

Начиная с 2004 года, в программу подготовки сборной команды России было включено участие в Болгарской национальной олимпиаде школьников, которая проводится в мае. В команду России включаются десятиклассники, показавшие наивысшие результаты на Всероссийской олимпиаде. Выступление на этой олимпиаде является предварительным просмотром кандидатов в сборную команду России на ММО следующего года.

Наконец, с 2009 года в Румынии – «родине» Международной Математической олимпиады, стало проводиться соревнование Romanian Master of Mathematics, участницами которого являются команды, занявшие наиболее высокие места на Международной математической олимпиаде предыдущего года. Это соревнование по формату совпадает с ММО, но, в отличие от Международной математической олимпиады, где обязательным является включение на первые позиции несложных (доступных хотя бы 60 – 70% участников ММО) задач, в этой олимпиаде все задания достаточно сложные. Кроме того, помимо индивидуальных призов, на Romanian Master ежегодно вручается специальный приз – серебряная тарелка за командную победу на олимпиаде. Зачёт здесь ведется по трем лучшим участникам команды. Дважды этот приз доставался команде России.

В настоящее время выступление кандидатов в сборную на Romanian Master of Mathematics является одним из основных показателей при формировании команды России на ММО.

На успешность выступления команд на Международной олимпиаде влияют общий уровень естественно-математического образования в стране, десятилетние традиции олимпиадного движения, государственная поддержка как олимпиадного движения в целом, так и формирования национальной команды и её участия в ММО в частности. С этим связана стабильность выступления лучших команд на Международных математических олимпиадах.

Выводы по I главе

1. Создание условий для раннего выявления, обучения и поддержки одарённых детей и подростков рассматривается как значимая государственная проблема во многих странах мира, в том числе и в России, решение которой обеспечивает формирование интеллектуального и творческого потенциала нации и повышает её конкурентоспособность.

Общепризнано, что образовательная политика в области одарённых детей состоит в том, чтобы создать эффективную систему образования, обеспечив условия для их обучения, воспитания и развития, и включает следующие направления:

- на государственном уровне нормативно выделять одарённых детей в особую категорию учащихся для всестороннего развития творческого потенциала;
- способствовать популяризации проблемы «одарённости»;
- в рамках государственной системы образования акцентировать внимание на те предметные области обучения, в которых проявляются наиболее высокие способности детей;
- при апробации любой образовательной инициативы в обучении одарённых детей учитывать социальные и психологические аспекты.

2. В России работа с одарёнными детьми рассматривается как одно из прио-

ритетных направлений развития образования, что выражается в создании нормативно-правовой базы работы с одарёнными детьми на разных уровнях, специальных образовательных учреждений, общественных организаций и фондов, задачами которых выступает выявление, обучение, развитие и поддержка одарённых детей, разработке учебных и социальных программ. Наблюдается устойчивый интерес к исследованию психологических закономерностей и механизмов развития одарённости, практике выявления и обучения одарённых детей, результаты которых находят своё отражение в образовательном и воспитательном процессе.

Широко применяются такие формы работы с одарёнными детьми и молодёжью, как специализированные школы, интеллектуальные, творческие и спортивные состязания, сотрудничество школ с университетами, учреждениями культуры, науки и спорта, организуются летние и зимние школы для учащихся по разным отраслям знаний, заочные и вечерние школы при вузах, осуществляются исследовательские проекты и научные экспедиции.

3. Проблема математических способностей является предметом изучения многих зарубежных и российских психологов, математиков и педагогов. Большая часть исследователей сходятся в том, что следует различать обычные школьные способности к усвоению математических знаний, к их репродуцированию и самостоятельному применению, и творческие математические способности, связанные с самостоятельным созданием оригинального и имеющего общественную ценность продукта в сфере математической деятельности.

Единство взглядов наблюдается у исследователей в вопросах врождённости или приобретённости математических способностей. По их мнению, творческие способности учёного-математика являются врождёнными, благоприятная среда необходима только для их проявления и развития. В отношении школьных (учебных) способностей доминирует теория параллельного действия двух факторов – биологического потенциала и социальной среды. Главными признаками математических способностей признаны:

- способность к обобщению;
- логичность и формализованность мышления;
- гибкость и глубина, систематичность, рациональность и аргументирован-

ность рассуждений;

- математическое восприятие и память.

4. Наиболее распространённой формой отбора математически одарённых школьников являются математические олимпиады. В олимпиадах по математике главную роль играют не сумма конкретных знаний молодого человека, а его способность за ограниченное время создать сложную модель или логическую конструкцию, новые для него.

Стремление к достижению олимпиадных успехов выступает стимулом для учащихся, позволяет поддерживать серьёзный интерес к учёбе и дополнительным занятиям. Важную роль в проявлении и поддержании интереса к занятиям математикой играет эстетическая красота олимпиадных задач.

Математическая олимпиада – это творческое соревнование, являющееся гармоничным сочетанием спорта и науки. *Спортивная сторона олимпиады* проявляется в характерном для подросткового возраста желании соперничать. Свойственный подростковому возрасту дух состязательности является стимулом к систематическим углублённым занятиям математикой с целью максимальной реализации своих способностей во время олимпиады. *Научная составляющая математических олимпиад* выражается в том, что вырабатывающиеся в процессе решения олимпиадных задач навыки творческой деятельности, в дальнейшем дают быстрый переход после окончания университета к самостоятельным научным исследованиям. Научная значимость олимпиад усиливается ещё и тем, что многие выдающиеся российские математики занимались организацией олимпиад и подготовкой школьников к ним. Математические олимпиады сближают людей, объединённых идеями как повышения качества математического образования в стране вообще, так и работы с одарёнными школьниками в частности.

Задания математических олимпиад разрабатываются на основании следующих принципов: *нарастание сложности заданий от первого до последнего, тематическое разнообразие заданий, обязательная новизна задач и эстетическая красота заданий.*

Глава II. КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ С МАТЕМАТИЧЕСКИ ОДАРЁННЫМИ ДЕТЬМИ В МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ ПРЕДМЕТНЫХ ОЛИМПИАД И КОНКУРСОВ

2.1 Концепция работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов

Основой успешной математической деятельности является не сумма конкретных предметных знаний, а способность логически мыслить, умение создать достаточно сложную, и, главное, новую логическую конструкцию. Обеспечить возможности развития математических способностей детей в рамках традиционного обучения невозможно, что вызывает необходимость создания соответствующей системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов, концептуальные основы которой приведены ниже.

Концептуальные основы организации работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

Повышение роли математики в современном обществе. В последние годы во многих странах мира, в том числе России, осознается необходимость совершенствования математического образования, обусловленная возрастающей потребностью математизации различных сфер человеческой деятельности. В настоящее время применение математических методов и моделей стремительно распространяется не только на технические, но и на такие науки, как современная биология, медицина, метеорология, экономика, лингвистика и другие. В развитии любой науки значительную роль играют индивидуумы, которые обладают более высоким уровнем способностей к определённому виду деятельности, что в значительной степени объясняет тот общественный резонанс, который наблюдается в современном обществе к проблеме одарённости, в том числе к процессу обучения и развития математически одарённых учащихся. Отметим важную роль математики, как в системе образования, так и, одновременно, в системе научного познания мира. В современном мире цифровых технологий математика является основным инструментом обработки эмпирического знания, единым языком всех наук. А уровень способности восприятия математики позволяет судить об уровне креативности учащегося, его способности к восприятию и логической обработке нового знания, к научному восприятию окружающего мира. Так для большинства вузов России обязательным при поступлении является ЕГЭ по математике, а Международные олимпиады школьников по математике являются самыми массовыми научно-интеллектуальными соревнованиями одарённых молодых людей в мире.

Формирование высококвалифицированных кадров. В современном мире высоких технологий, как обороноспособность государства, так и его экономическая мощь определяются не только уровнем развития науки и техники, но и, в огромной степени, высоким уровнем подготовки научных кадров, наличием квалифицированных специалистов в этих областях. В связи с этим важнейшей для нашей страны задачей становится подготовка таких специалистов, предполагающая в том числе работу с одарёнными школьниками. В Указе Президента Российской Федерации от 21.07.2020 № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года» [262] сформулированы пути достижения национальной цели «Возможности для самореализации и развития талантов»: «…формирование эффективной системы выявления, поддержки и развития способностей и талантов у детей и молодёжи, … направленной на самоопределение и профессиональную ориентацию всех обучающихся…».

Решение поставленных задач включает в себя три основных этапа: первый – раскрытие творческого потенциала школьников, поиск и отбор талантливых детей, второй – мотивирование на углублённое изучение выбранного предмета и профессиональная ориентация старшеклассников, третий – подготовка будущих специалистов в высших учебных заведениях, их последующая стажировка в научно-исследовательских центрах. В рамках наших исследований остановимся на первых двух этапах.

Выявление, отбор и выстраивание траектории роста одарённых детей. Система математических олимпиад и конкурсов, которые проводятся с целью выявления творческих способностей учащихся, развития интереса к научно-исследовательской деятельности, раннего определения профиля обучения, формирования высококвалифицированных кадров, выступает наиболее эффективным инструментом выявления, отбора и самореализации математически одарённых детей.

В соответствии с этим, работа глав регионов оценивается в последнее десятилетие, в том числе, и по качеству олимпиадной работы со школьниками. Показатель успешности в олимпиадах школьников был перенесён в регионах и на оценку качества работы учителей. Помимо этого сложилось представление о том, что в силу необходимости широты охвата, работа с учащимися должна быть перенесена в школу, а основным исполнителем этой работы должен стать учитель. Такая позиция сложилась, в том числе после введения Федеральных государственных стандартов второго поколения (2009, 2010, 2012 гг.), включавших следующие формулировки: «повышенный уровень» / «ученик получит возможность научиться» / «на уроке будут созданы условия для…». Учитель был сориентирован на работу с учениками, обладающими способностями в математике на уроках или на внеурочных занятиях. В своей работе М.Ю.Пермякова указывает на предполагаемую систему работы с учащимися: «каждый учитель самостоятельно разрабатывает программу подготовки школьников к олимпиадам по математике, в которую включаются определённые темы с системой задач» [191].

Однако требование успехов учащихся в олимпиадах и внесение олимпиадной подготовки в основную работу учителя, в существенной степени разрушают регулярный образовательный процесс в массовой школе, поскольку, с одной стороны, отвлекают учащихся, в том числе не обладающих высокими математическими способностями, на участие в многочисленных соревнованиях и конкурсах, с другой, требуют внесения изменений в учебную программу: изучение на уроках дополнительного, не предусмотренного программой материала, требующего дополнительных часов, что снижает качество работы с классом.

Рассчитывая на успех на каком-нибудь из соревнований, учителя вынужденно стали направлять своих учеников на *все* математические конкурсы, о которых получали информацию, в том числе и на получившие в стране широкое распространение соревнования, конкурсы, игры, именующие себя математическими олимпиадами. Многие из них проводятся на интернет-платформах и декларируют привлекательные девизы и принципы для участников: «развитие логического и пространственного мышления и расширение кругозора», «объединение усилий государственного и частного секторов, направленных на повышение мотивации учащихся и их успеваемости...» и т.д. Привлекательность части из этих олимпиад и конкурсов усиливается необязательностью достижения высоких результатов для получения диплома или сертификата об успешном выступлении.

Однако важнейшей задачей олимпиад является выявление творческого потенциала участников. Эту задачу успешно решают «классические» математические олимпиады: положившие начало олимпиадному движению в нашей стране Ленинградская и Московская математические олимпиады, самая массовая всероссийская олимпиада школьников по математике – правопреемница Всесоюзной олимпиады школьников, олимпиада им. Л.Эйлера (всероссийская олимпиада для учащихся 8 классов), Международный Турнир городов, некоторые региональные соревнования, такие, как Кавказская математическая олимпиада, в которой принимают участие команды не только Юга России и стран Каспийского бассейна, но и, также, Европы, Азии, Южной Америки.

Всероссийская олимпиада школьников (ВсОШ), проведение которой регламентируется приказами Министерства просвещения Российской Федерации, предоставляет победителям и призёрам заключительного этапа право внеконкурсного поступления в профильные вузы страны. Однако число бюджетных мест даже только в лучших университетах математического профиля (СПбГУ, МГУ, МФТИ, ВШЭ) значительно превышает количество победителей и призёров ВсОШ по математике по 11 классу (около 50 человек). С целью формирования контингента абитуриентов для ведущих университетов страны в 2009-2010 учебном году была создана олимпиада Российского Совета ректоров (РСОШ). В Перечень, помимо олимпиад, организуемых университетами и объединениями вузов (Ломоносов, Физтех, Высшая проба, Олимпиада СПбГУ по математике, Всесибирская олимпиада, ОММО и т.д.), включены также некоторые классические олимпиады: Московская и Санкт-Петербургская математические олимпиады, Турнир городов. В первый год её проведения из числа Лауреатов (победителей и призёров) олимпиад РСОШ без вступительных испытаний были зачислены выпускники школ, составившие 1,6% всего бюджетного приема в вузы Российской федерации. Качество олимпиад РСОШ ежегодно оценивает группа экспертов, основным критерием является творческий характер заданий. В 2021-2022 учебном году помимо классических олимпиад I уровень по математике присвоен олимпиадам Высшая проба, Ломоносов, СПбГУ и Физтех.

Приведённый анализ показывает, что требуются дополнительные подходы для обеспечения широты охвата учащихся при решении вопроса поиска и привлечения к дальнейшему изучению математики способных школьников. Все перечисленные выше конкурсы проводятся вне системы общего образования. Можно было бы сформулировать гипотезу о том, что недостаточно используется ресурс массовой школы, что работу с одарёнными и способными к математике школьниками может осуществлять *каждый* учитель и эта работа может осуществляться на уроках, либо в рамках факультативных занятий. Однако, согласно исследованиям, проведённым в последние годы, ни профессиональный уровень учителя, ни наличие многообразных методических материалов, представленных как в печатном виде, так и на интернет-платформах, не способны сколь-нибудь существенно повлиять на раскрытие математических способностей учеников [191].

Не может сказаться на подготовке школьников и расширение содержания школьных уроков, что ведёт к перегрузке обучающихся, не сказываясь при этом на качестве работы со школьниками, обладающими математическими способностями. Как указывает в своей работе Б.К.Дураков, анализ остаточных знаний выпускников школ и студентов младших курсов приводит исследователей к выводу: «перегружать и дальше школьные программы нельзя – мы уже перешли все разумные и научно-обоснованные пределы», требуется «…концентрации учебного процесса на более глубоком усвоении базовых понятий и положений» [104]. Основной задачей, которая ставится перед учителем, является обучение большей части класса выполнению стандартных алгоритмических действий, позволяющих решать задания фиксированного уровня сложности и фиксированного тематического набора, в том числе задания ЕГЭ. Не влияет на ситуацию наличие в ЕГЭ заданий части С. Сложность этих заданий является в большей степени технической, чем творческой (в 2022 многие одиннадцатиклассники недосчитались баллов по ЕГЭ в силу недостаточных, по мнению комиссий, объяснений, почему две стороны четырёхугольника, являющегося сечением пирамиды, не параллельны, доказав при этом параллельность двух других сторон). Считающиеся сложными задания ЕГЭ не меняют оценку комплектов экзамена – они решаются выполнением достаточно стандартных действий: оценки левой и правой частей уравнения или неравенства, построения геометрической интерпретации задачи с параметром и т.д.

В то же время способность к математическому творчеству учащегося может быть раскрыта только в рамках индивидуальных занятий, требующих от педагога умения самостоятельно проводить, или, по крайней мере, умения оценивать правильность сложных логических рассуждений, лежащих в основе решения заданий математических олимпиад, начиная с муниципального уровня. Здесь следует отметить, что так называемая олимпиадная подготовка школьников невозможна просто «прохождением олимпиадных тем» на факультативах. Отработка часто встречающихся в олимпиадных заданиях разделов олимпиадной математики (чётность, принцип Дирихле, вписанные углы и т.д.) может помочь школьнику решить задачу, аналогичную рассмотренной на факультативе, но не сможет помочь, если тематика новой задачи будет не столь очевидной. Олимпиадный тренинг должен опираться на классификацию олимпиадных задач согласно логической структуре их решений.

Тем не менее, именно учитель, работающий в массовой школе, являются важнейшим звеном в системе работы с одарёнными школьниками. Роль учителя заключается в том, чтобы обнаружив математические способности у своего ученика, вывести его на школьный этап олимпиады, и, в последующем, в случае успешного выступления, направить на следующие конкурсы и соревнования, выстроить для него траекторию роста в условиях доступной образовательной среды, составить для учащихся календарь математических событий. Для этого, в силу специфики олимпиадных заданий, необходимо познакомить учеников со стилистикой олимпиадных задач, сделать психологически комфортным их участие в олимпиаде. Наконец, опыт последних лет демонстрирует снижения качества базовой подготовки школьников по математике, что фиксируется в многочисленных современных исследованиях учёных. Не останавливаясь на причинах этого, тем не менее, выделим то обстоятельство, что результаты школьников на олимпиадах начального уровня в значительной степени зависят от математической культуры, прививаемой учащимся, в первую очередь, на уроках.

Профессиональная ориентация. Успехи на интеллектуальных состязаниях по какой-либо дисциплине помогают школьнику в определении сферы деятельности, в которой он сможет наиболее успешно профессионально реализовать себя. Оценка своих способностей на основе результатов олимпиад и конкурсов, позволяют их призёрам выбирать для последующего обучения вуз высокого уровня, давая уверенность в успешности обучения. Абсолютное большинство победителей и призёров всероссийских олимпиад и конкурсов по математике выбирают её в качестве направления своей будущей профессиональной деятельности, поступая в ведущие математические университеты страны.

Разработка и специфика заданий для математических олимпиад и конкурсов. Задания олимпиад и конкурсов по математике формируются из новых задач и требуют специального вида творчества – задачного композиторства, поскольку даже изменив в задании начальные данные, мы не получим новой, т.е. решающей проблему выявления одарённости, задачи. В математическом мире обязательно указывается автор олимпиадной задачи, а на Международных олимпиадах существует практика поощрения специальными сертификатами авторов лучших задач. Как и в музыке, появление талантливых задачных композиторов – достаточно редкое явление, а создание интересных, содержательных, но не требующих специального математического инструментария олимпиадных задач – «штучное производство». Поэтому развитие олимпиадного движения предполагает поддержку не только одарённых детей и работающих с ними педагогов-энтузиастов, но также и задачных композиторов. Один из основных путей решения этой задачи – привлечение к участию в проведении олимпиад (составлении вариантов, проверке работ) студентов университетов, наиболее успешно выступавших на олимпиадах в школьные годы. «Подпитка кадрами» олимпиадного движения успешней всего ведётся из числа наиболее ярких представителей этого движения.

Тренерское сопровождение в работе с математически одарёнными детьми. Математические способности развиваются посредством развития математического мышления. Математических идей и приемов в олимпиадных задачах встречается так много, что их запомнить практически невозможно. Каждый год появляются задачи, основанные на новых оригинальных идеях и приемах. Школьники, которые ориентируются не на нахождение путей решения, а на использование стандартных (известных им) методов, испытывают трудности при решении подобных задач. Математика – это искусство решать новые задачи и придумывать новые идеи, и при подготовке к олимпиаде надо научить школьников именно этому.

Умеющие решать такие задачи, за редким исключением, являются либо профессиональными математиками, либо бывшими олимпиадниками. Поэтому в подготовке к математическим соревнованиям большую роль играет тренер. Роль тренера и учителя в некотором смысле прямо противоположна. Если учитель должен научить стандартным методам и их применению, то тренер, напротив, должен научить школьника придумывать новые идеи и методы. При этом роль учителя очень важна – олимпиадник должен уметь автоматически выполнять стандартные вычисления и операции. Аналогичную роль в спорте играет тренер по физической подготовке.

Содержание и этапы работы с математически одарёнными детьми.

Для достижения высоких результатов участия в математических олимпиадах необходима организация регулярных занятий со школьниками. Содержание занятий, направленных на обучение математической деятельности, должно включать *освоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей.* Такая структура позволяет охватить не только основные компоненты математической деятельности, но и учесть типологию математических способностей, согласно которой выделяются дискурсивный, развернутый во всех своих звеньях мыслительный процесс и интуитивный, связанный с непосредственным «схватыванием» необходимых отношений.

Наиболее эффективно начинать работу с математически одарёнными школьниками со среднего (или даже с младшего) звена школы. Существует много содержательных математических тем, которые доступны даже младшим школьникам. Как показывает опыт, школьникам, прошедшим через кружки младших классов, легче адаптироваться для работы в старшем кружке.

По мнению А. Н. Колмогорова [126], в математических кружках для 6 – 7 классов стоит избегать установки на предопределение будущей профессии. Главная цель работы педагога на этом этапе показать, что «математика может быть интересна всем и полезна всюду», однако в 7 – 8 классах «кружковую работу, участие в олимпиадах…. разумно начать освещать и как …первые прикидки дальнейшего пути в продолжении образования и профессиональной работе». «Очень важно, чтобы дело не сводилось к отбору из четырёхмиллионного контингента восьмиклассников нескольких тысяч «одарённых математиков. Было бы желательно, чтобы много сотен тысяч восьмиклассников, почувствовав, что математика им легко дается и интересна, могли учесть эту сторону своих возможностей при выборе рода работы…».

На основании обобщения опыта подготовки учащихся к математическим олимпиадам различного уровня – от школьного до международного, предлагается система занятий, направленная на математическое творчество учащихся. Предлагается проведение занятий не только по тематическому принципу, когда отрабатываются конкретные приёмы решения задач (*когнитивность*), а на основе логической структуры задачи, когда учащийся самостоятельно открывает путь её решения (*креативность*). Соответствующая классификация олимпиадных задач приведена в Таблице 3.

Таблица 3

Методы решения олимпиадных задач (Н.Х. Агаханов)

№	Метод	Содержание метода
0	Метод тождественных преобразований	Решение задачи путём сведения её к более простой с помощью тождественных преобразований
1	Метод аналогий	Решение задачи методом, применявшимся ранее при решении других задач (как правило, близких по тематике)
2	Метод моделирования	Решение задачи через построение математической модели исходной задачи
3	Метод декомпозиции	Решение задачи за счёт её разбиения на несколько более простых подзадач
4	Метод от противного	Решение задачи путём обоснования того, что утверждение, противоположное доказываемому, не может выполняться
5	Метод введения вспомогательных объектов	Решение задач с помощью дополнительных построений в геометрии; введения новых переменных в алгебре и теории чисел. Использование при решении сохраняющихся свойств объектов – инвариантов или полуинвариантов.
6	Метод редукции (в том числе метод анализа с конца)	Решение задачи путём построения цепочки рассуждений от промежуточной или финальной ситуации
7	Метод изменения тематики задания	Решение задачи одного раздела «школьной» математики с помощью инструментария другого раздела
8	Метод обобщения утверждения (в том числе метод математической индукции)	Решение задачи путём доказательства более общего, чем в её условии, утверждения
9	Метод опытного угадывания ответа (решения)	Решение задачи через рассмотрение частных случаев, приводящее к угадыванию ответа или пути решения, с последующей его верификацией
10	Метод оценки и полного перебора	Установление границ изменения рассматриваемой в задаче величины с последующим рассмотрением всех возможных случаев
11	Метод поиска новых (оригинальных) решений	Решение задачи путём нахождения цепочки математических шагов, не встречающихся в широкой практике решения олимпиадных заданий

Следует отметить, что формально «Метод тождественных преобразований» относится к инструментам математической деятельности, и его можно было не приводить в таблице, но многие задачи становятся проще в результате проведённых предварительно алгебраических преобразований. «Метод поиска оригинальных решений» также не является формально логическим методом решения задач.

Он приведён для того, чтобы подчеркнуть важность обучения умению находить оригинальные, нестандартные подходы к решению задач. Приведённая классификация даёт качественное изменение подходов к олимпиадному тренингу: вместо традиционных занятий, выстраиваемых по тематическому принципу и обучающих алгоритмам решения типовых задач предлагается обучение выявлению логической структуры решения задачи.

Разнообразие форм дополнительного образования математически одарённых детей. При организации дополнительного образования математически одарённых детей необходимо выбирать формы и содержание обучения адекватно их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям.

Наиболее распространенной формой являются математические кружки, работа в которых должна отличаться в разных классах. В среднем звене – это кружки, на которых преподаватель предлагает участникам задачи игрового характера. Командные соревнования проводятся в форме математических регат.

В старшем звене – задачи, позволяющие закрепить технический аппарат, освоить новые приемы. Лучшими педагогами на этом этапе становятся вузовские преподаватели, а также студенты и аспиранты математических факультетов университетов, особенно из числа бывших победителей олимпиад высокого уровня. Наиболее подходящей формой командных соревнований в старшем звене становятся математические бои.

Занятия на кружках, как правило, являются тематическими. Это означает, что сначала преподаватель сообщает школьникам некоторые теоретические сведения по конкретной теме, разбирает классические задачи. После этого школьникам для самостоятельного решения (на кружке и дома) предлагаются тематические подборки заданий. Помимо тематических, проводятся занятия, посвящённые решению задач по различной тематике. Это необходимо для того, чтобы школьники учились определять тематику предлагаемых заданий, учились выявлять логическую структуру решения задачи, а не её тематическую заданность. При подготовке к олимпиадам полезно провести занятие, на котором школьникам предлагается для решения вариант соответствующей олимпиады, проводившейся два-три года назад.

Стимулом для работы школьника на занятиях должно стать решение большего, чем другие участники кружка, числа задач. Поэтому проверку правильности решения каждой задачи рекомендуется проводить с каждым школьником индивидуально, предоставляя другим участникам кружка возможность решить эту задачу. Если задача долго не решается, то преподаватель должен давать такие подсказки, которые на первый взгляд выглядят тривиально, но при тщательном анализе приводят к решению. Часто это просто повторение условия задачи, ведь почти каждое условие содержит информацию о решении, и школьник должен уметь её находить. Очень важно, чтобы школьник решил задачу самостоятельно (пусть даже с подсказками). Такое решение надолго запоминается, в отличие от решения, рассказанного преподавателем. Когда задача решена значительной частью участников кружка, преподаватель проводит разбор решения, по возможности предлагая альтернативные решения и обсуждая типичные ошибки. Рекомендуется рассказ решений некоторых задач школьниками, решившими задачу. Это приучает к чёткости изложения, формирует математическую культуру. Большую пользу приносит рассказ школьником у доски ошибочного решения. Поиск различных ошибок в своих и чужих решениях развивает внимание и логику. Для этих же целей необходимо, чтобы школьники учились оформлять свои решения письменно. Поэтому на кружке рекомендуется регулярно проводить письменные олимпиады.

Ещё одной, очень популярной в последние годы, формой внешкольных занятий с учащимися стали предметные летние и зимние школы (лагеря). Основным направлением работы таких школ является углублённое изучение некоторых дополнительных разделов школьной математики. А у ребят из регионов, в которых наблюдается нехватка квалифицированных кадров по работе с одарёнными детьми, появляется возможность творческого общения с математиками – энтузиастами работы со школьниками.

Опишем в качестве примера работу летнего лагеря, проводимого физмат лицеем № 5 г. Долгопрудного, учащиеся которого ежегодно добиваются успехов на математических олимпиадах. Занятия проводятся в 5 – 6 возрастных группах по 10 – 12 ребят в каждой. Начинается школа традиционно с написания диктанта математических терминов, завершается вручением призов лучшим по разным номинациям участникам школы. Помимо занятий, проводимых по различным разделам углублённой школьной программы и по олимпиадной тематике, для участников школы проводятся непрерывные конкурсы по решению задач, математические бои (для старших классов) и математические драки (для младших классов), по вечерам – интеллектуальные игры, конкурсы.

В лагере решаются многие задачи: выявляются одарённые школьники; некоторые школьники знакомятся с олимпиадами более высокого уровня и другими математическими конкурсами. Такой математический лагерь является необходимой составляющей подготовки школьников к различным соревнованиям. Существуют математические лагеря, куда приезжают школьники и преподаватели из всей России. Таким, например, является Кировский летний математический лагерь.

Отдельно стоит отметить огромную роль, которую играют физико-математические и другие профильные школы в поддержке высокого уровня естественнонаучного образования в России. Работа таких учебных заведений даёт возможность раннего выявления интересов и способностей детей по различным предметам, их привлечения к серьёзным занятиям на этапе обучения в школе. Ученики лучших из этих школ показывают высокие результаты на различных творческих соревнованиях и конкурсах, а выпускники продолжают обучение в ведущих технических вузах и университетах России.

Значительную роль в развитии математического образования в России играет открытый в 2015 году по инициативе Президента страны Образовательный центр Сириус. На его площадке в г. Сочи (в настоящее время федеральная территория Сириус) ведётся активная работа по популяризации математических знаний как со школьниками, проявляющими способности в области математики, так и с учителями и руководителями региональных центров дополнительного образования. Во многих регионах страны открыты региональные филиалы Сириуса.

Как в ОЦ «Сириус», так и во многих других центрах дополнительного образования, наряду с опытными высококвалифицированными преподавателями успешно и эффективно работают молодые математики (студент, аспиранты, ассистенты), добивавшиеся высоких результатов как олимпиадники. Например, на базе «Центра телекоммуникаций и информационных систем в образовании» (г. Ярославль) на протяжении многих лет успешно осуществляли работу со школьниками не только известные в стране математики профессор В.Л.Дольников и доцент С.Г.Волчёнков, но и, будучи студентом, золотой медалист Международной математической олимпиады Максим Дидин.

Популяризация математического образования. Развитие математической одарённости проявляется только в творческой деятельности, и во многом определяется той средой, в которой будет осуществляться становление личности. Реализация средового подхода к организации работы с математически одарёнными детьми должна включать в себя следующие направления:

1) массовую работу с учащимися общеобразовательных учреждений, обеспечивающую развитие интереса к изучению математики и приобщению к исследовательской деятельности;

2) систему подготовки школьников к участию в региональных, Всероссийских и международных олимпиадах по математике через сеть региональных и муниципальных ресурсных центров;

3) популяризацию естественнонаучных знаний.

Определим основные принципы организации системы работы с математически одарёнными детьми.

1. ***Принцип самоактуализации.*** В каждом ребёнке существует потребность в актуализации своих способностей. Важно побудить и поддержать стремление учащихся к проявлению и развитию своих природных и социально приобретенных возможностей.

2. ***Принцип индивидуальности.*** Создание условий для формирования инди-

видуальности личности учащегося и педагога – главная задача образовательный среды. Необходимо не только учитывать индивидуальные особенности ребёнка или взрослого, но и всячески содействовать их дальнейшему развитию.

3. ***Принцип субъектности.*** Индивидуальность присуща лишь тому человеку, который реально обладает субъектными полномочиями и умело использует их в построении деятельности, общения и отношений. Следует помочь ребёнку стать подлинным субъектом жизнедеятельности в классе и школе, способствовать формированию и обогащению его субъектного опыта. Межсубъектный характер взаимодействия должен быть доминирующим в процессе воспитания и обучения детей.

4. ***Принцип выбора.*** Без выбора невозможно развитие индивидуальности и субъектности, самоактуализации способностей ребёнка. Педагогически целесообразно, чтобы учащийся жил, учился и воспитывался в условиях постоянного выбора, обладал субъектными полномочиями в выборе цели, содержания, форм и способов организации учебно-воспитательного процесса и жизнедеятельности в классе и школе.

5. ***Принцип творчества и успеха.*** Индивидуальная и коллективная творческая деятельность позволяет определять и развивать индивидуальные особенности учащегося и уникальность учебной группы. Благодаря творчеству ребёнок выявляет свои способности, узнает о «сильных» сторонах своей личности. Достижение успеха в том или ином виде деятельности способствует формированию позитивной Я-концепции личности учащегося, стимулирует осуществление ребёнком дальнейшей работы по самосовершенствованию и самостроительству своего «я».

6. ***Принцип доверия и поддержки.*** Решительный отказ от идеологии и практики социоцентрического по направленности и авторитарного по характеру учебно-воспитательного процесса, присущего педагогике насильственного формирования личности ребёнка.

2.2 Проектирование системы работы с математически одарёнными детьми

Вышеизложенные концептуальные идеи нашли свое отражение в сложившейся в России системе многоуровневых олимпиад и конкурсов, в разработке и создании которой принимал участие автор диссертационного исследования, представленной на рисунке 13.

Рисунок 13 – Структура работы с математически одарёнными детьми в России

Официальным федеральным мероприятием по работе с одарёнными в математике детьми является Всероссийская олимпиада школьников по математике. Она проводится в 4 этапа (школьный, муниципальный, региональный и заключительный). Согласно Порядку проведения олимпиады, задания для школьного этапа для всех школ муниципального образования готовят муниципальные методические комиссии, для муниципального этапа для всех школ региона – региональные методические комиссии, для всех регионов и для заключительного этапа Всероссийской олимпиады – Центральная предметно-методическая комиссия по математике. Организаторы соответствующих этапов Всероссийской олимпиады школьников определяются Порядком.

Во многих городах страны проводятся региональные и межрегиональные сезонные профильные школы (в основном летние), во многих случаях их организаторами выступают региональные органы управления системы образования.

Для проведения занятий, как в Центре «Сириус», так и в этих школах, привлекаются специалисты из Центральной предметно-методической комиссии по математике, другие преподаватели ведущих:

- университетов страны (МФТИ, СПбГУ и др.),
- физико-математических лицеев,
- математических кружков (Курган, Майкоп, Ульяновск, Ярославль и др.),
- студенты ведущих университетов из числа бывших победителей олимпиад высокого уровня. Этой же группой специалистов осуществляется методическая поддержка различных командных соревнований по математике, в том числе:
- Кубка Колмогорова,
- Южного математического турнира,
- Уральских турниров юных математиков.

Важнейшую роль в поддержке работы с одарёнными детьми в нашей стране играют математические лицеи, которые осуществляют целенаправленный отбор математически одарённых детей. Процесс обучения в них ориентирован на будущую профессиональную деятельность, связанную либо непосредственно с математикой, либо с её приложениями.

В летнее время школьники, проявляющие способности в математике, имеют возможность участия в математических лагерях, которые проводятся во многих регионах страны. При этом ведущие летние математические школы принимают лучших юных математиков из разных регионов страны.

Система работы с одаренными детьми строится на совокупности методологических подходов: системного, личностно ориентированного, полисубъектного, культурологического, индивидуально-творческого, деятельностной и средового. Каждый из подходов определяет отдельные аспекты организации работы с математически одарёнными детьми, а их совокупность – проектирование целостной системы выявления, обучения и развития.

Системный подход

Сущность подхода отражает понятие «системы», которое буквально означает целое, составленное из частей; совокупность элементов, находящихся в отношениях и связях между собой и образующих определённую целостность, единство.

Более детально сущность системного подхода раскрывается через его принципы. Принцип *целостности* подразумевает, что все элементы системы подчинены общим принципам, целям и задачам. *Иерархичность* – это совокупность элементов системы, каждый из которых имеет определённое значение и подчинён другим элементам или сам подчиняет себе другие элементы системы. *Структуризация* – это объединение различных элементов системы в отдельные подсистемы по определённым признакам. Каждая из таких подсистем в свою очередь может иметь различные связи с другими подсистемами. *Множественность* предполагает использование множества различных моделей для описания каждого отдельного элемента и всей системы в целом.

Вышеперечисленные принципы характерны для образовательной системы, под которой Г. Н. Сериков понимает взаимосвязанное единство отдельных частей образования, образующее новое (по сравнению с каждой из частей и их совокупностью) качество, которому присущи свои специфические свойства [234].

Использование системного подхода предполагает выполнение следующих требований:

- рассматривать работу с математически одаренными детьми как систему;

- исследовать каждый компонент системы в целях определения и обеспечения полноты её состава;

- определять всю совокупность структурных связей, и в случае необходимости изменять, делать структуру образования более совершенной;

- понимать и совершенствовать механизм функционирования отдельных звеньев системы работы с математически одаренными детьми, её целостной организации;

- определять тенденции и предвидеть уровни развития системы как важнейшее условие совершенствования процесса в целом.

Составляющие системного подхода, которые были выделены В. Г. Афанасьевым [49], позволяют описать любую систему, в том числе, систему работы с математически одарёнными детьми (Рисунок 14).

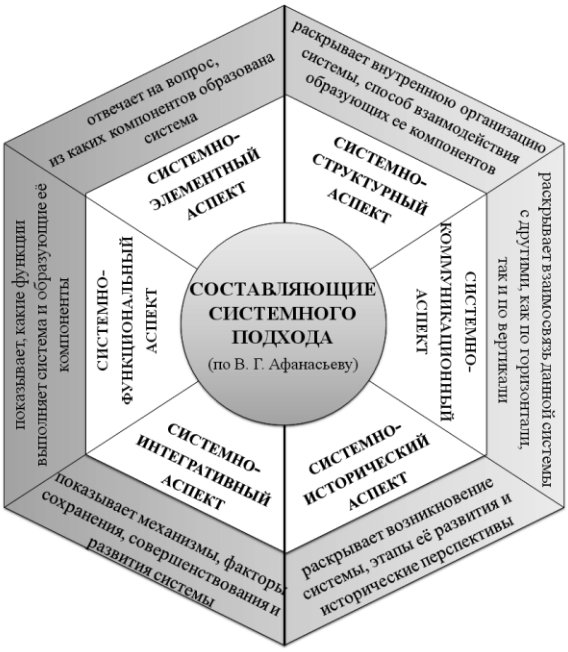


Рисунок 14 – Составляющие системного подхода (по В. Г. Афанасьеву)

Личностно ориентированный подход

Основу личностно ориентированного подхода в образовании составляет отказ от субъект-объектных отношений в пользу субъект-субъектных отношений в процессе обучения и воспитания.

Его актуальность для решения педагогических проблем определяется следующими факторами:

1. Инновационные процессы в образовании требуют более полного учёта потребностей, интересов и способностей учащихся, что невозможно реализовать в рамках гуманистического, индивидуального или дифференцированного подходов.

2. Развитие современной науки, культуры и политики вызывают необходимость обновления содержания образования, которое приведет к изменению в учебных планах, программах, учебниках и технологиях. Любые изменения должны быть направлены на развитие личности учащегося.

3. Современное образование важную роль отводит самообразованию и познавательной активности самой личности, что невозможно осуществить без ориентации на личностно ориентированный подход к решению проблем.

4. Проектирование эффективной системы работы с одарёнными детьми возможно при условии ориентации на их уровень развития и способностей.

Концепция личностно ориентированного образования опирается на три основных положения:

- в центре процесса образования находится личность учащегося;
- образование должно учитывать возрастные и индивидуальные особенности личности;
- процессы обучения и воспитания должны быть дифференцированы.

Реализация основных положений личностно ориентированного образования при организации учебно-познавательной деятельности предполагает выполнение следующих требований:

- обеспечение процесса развития личности посредством организации её деятельности;
- осуществления единства взаимосвязи и взаимоперехода личностной и предметной сторон деятельности;
- соответствие образовательного процесса интересам и способностям личности на каждом уровне её развития;
- формирование представлений о личностно значимом характере учебно-познавательной деятельности.

Для перехода к личностно ориентированному образованию необходима реорганизация следующих его компонентов (В. Я. Ляудис [152]):

- переориентация позиции учителя;
- изменение структуры и функций знаний и способов организации их усвоения;
- организация процесса учения как совместной деятельности субъектов (учащихся и учителей);
- изменение критериев оценивания процессов обучения и воспитания.

И. С. Якиманская определяет сущность личностно ориентированной системы обучения следующим образом:

- ученик признаётся основным субъектом процесса обучения;
- цель системы – развитие индивидуальных способностей ученика;
- реализация поставленной цели осуществляется посредством выявления и структурирования субъектного опыта ученика, его направленного развития в процессе обучения;
- используются учебные программы и технологии обучения, обеспечивающие индивидуальное развитие личности учащегося [287].

Реализация личностно ориентированной модели образования в работе с одарёнными детьми предполагает выполнение следующих условий:

- образование одарённых детей определяется как процесс, направленный на раскрытие их индивидуальности и развития способностей;
- взаимоотношения субъектов образовательного процесса строятся на основе равноправного взаимодействия;
- обеспечиваются условия для мотивации и самореализации одарённых учащихся, предоставления им и возможности демонстрировать свои достижения.

В процессе развития ребёнка, в том числе с признаками одарённости, необходимо сочетать две генеральные линии – социализацию и индивидуализацию.

Первая из них, *социализация*, связана с усвоением растущим человеком социально одобряемых идеалов, норм и способов поведения и деятельности. Это способствует формированию у детей представлений об обществе, о его культуре и укладе, развитию у них социально значимых качеств, становлению их адаптационных возможностей и механизмов жизни среди людей. Социализация направлена на формирование в человеке социально типичных для члена общества качеств.

Вторая линия, названная *индивидуализацией*, связана со становлением и проявлением индивидуальности человека, его неповторимого внешнего облика и внутреннего мира, уникального стиля его жизнедеятельности. Это и позволяет ему стать, быть и оставаться самим собой. Индивидуализация способствует развитию ярко индивидуального в человеке.

Полисубъектный подход

В современных психолого-педагогических исследованиях проблема полисубъектности занимает одно из центральных мест в связи с изучением психологических механизмов развития и саморазвития субъектов образовательной среды. Соответственно, положения полисубъектного подхода могут быть также продуктивно использованы в практике работы с математически одарёнными детьми, что связано со следующими аспектами.

Во-первых, рассмотрение помощи школьнику в становлении его как *субъекта саморазвития.* Предполагает создание таких психолого-педагогических условий, которые обеспечат самобытность одарённого учащего, развитие способностей и самоактуализацию.

Во-вторых, слитность в одном потоке процессов развития отдельных субъектов характеризует ситуацию развивающего образования и именно в сфере образования находит своё воплощение в ряде особых систем и технологий, нацеленных на личностное развитие учащихся. В данном случае, речь идёт о создании образовательной среды, в которой взаимодействуют одарённые учащиеся и талантливые педагоги. Полисубъектный подход определяет условия, закономерности и принципы такого взаимодействия.

В-третьих, в образовательной среде для одарённых учащихся возникает специфическая ситуация, требующая от учителя специальных усилий для организации взаимодействия, основанного на субъект-субъектных отношениях. Построение субъект-субъектных отношений между учителем и одарённым учащимся во многом определяет эффективность развития одарённости.

В-четвёртых, организация работы с математически одарёнными учащимися предполагает их включения в различные организационные формы работы: кружки, профильные лагеря, соревнования и др. Это продуцирует множественность контактов и требует формирования продуктивного межличностного взаимодействия.

Культурологический подход

Культурологический подход рассматривается как совокупность методологических приемов, которые позволяют осуществлять анализ сферы образования через призму системообразующих культурологических понятий. К их числу относятся понятия культуры, культурных образцов, нормы и ценности и т. д. Теоретические основы культурологического подхода были заложены в отечественной науке Л. С. Выготским [78], А. Н. Леонтьевым [144], А. Р. Лурией [149], В. П. Зинченко [111] и А. Г. Асмоловым [47], а в западной психологии – В. Вундтом [76].

С позиции культурологического подхода образование рассматривается как культурный процесс, который включает в себя:

- наследование, развитие и изменение систем ценностей образования, создание условий их постоянного обновления;
- обеспечение преемственности поколений и их взаимодействий в образовании;
- создание в образовательной среде культурного уклада жизни и деятельности;
- предоставление условий для социальной реализации и творческой самореализации человека в образовательной среде, выявления и роста его индивидуальных особенностей.

По мнению В. М. Розина [213], культурологический подход характеризуется многоаспектностью, включенностью в него исторических, социологических и социально-психологических аспектов исследования.

При проектировании системы работы с математически одарёнными детьми следует учитывать следующие положения культурологического подхода.

1. Содержание образования должно быть культуросообразным и культуроёмким. Для этого каждое поколение педагогов должно ставить новые для себя задачи и, следуя определённым культурным и историческим нормам и ценностям и периодически корректировать, трансформировать и реконструировать их.

2. Ученик есть субъект культуры. От поколения к поколению понятие «человек культурный» меняется, что должно находить отражение в теории и практике образования.

3. Субъекты образования (дети, педагоги, родители, а также исследователи, управленцы), которых можно рассматривать и как единичные субъекты, и как субъекты-сообщества, – носители разных культур и субкультур.

4. Образование служит целям сохранения и передачи ценностей культуры. Именно дети – создатели и носители новых форм культуры, что именно в детях следует узнавать, понимать и принимать будущее культуры.

5. Образование есть часть культуры. Если рассматривать образование как культурную (т.е. творческую, созидающую) деятельность, то требуется перестройка содержания образовательных процессов во всей системе – от детского сада, школы до вуза и института повышения квалификации, обеспечение свободы и продуктивности культурной, творческой деятельности и педагогов, и детей.

Индивидуально-творческий подход

Саморазвитие личности одарённого ребёнка зависит от степени индивидуализации и творческой направленности воспитательного процесса. Данная закономерность составляет суть индивидуально-творческого подхода. Он предполагает непосредственную мотивацию учебной и других видов деятельности, организацию самодвижения к конечному результату. Это даёт возможность учащемуся испытать радость от осознания собственного роста и развития, от достижения собственных целей. Индивидуально-творческий подход предполагает создание условий для самореализации личности, выявления (диагностики) и развития её творческих возможностей.

Общие принципы, которые являются основой индивидуально-творческого подхода:

- отказ от направленности учебного процесса на «среднего» ученика;

- использование разнообразных дидактических материалов и обеспечение свободы их выбора;

- обеспечение роста мотивации к обучению;

- развитие творческих способностей (в рамках учебных занятий и во внеучебной деятельности);

- использование учебной исследовательской и научно-исследовательской работы для активизации познавательной деятельности.

Индивидуально-творческий подход требует разработки разноуровневых, дифференцированных заданий (репродуктивно-творческих, творческих, исследовательских) позволяющих актуализировать творческий потенциал одарённого ребёнка.

Деятельностный подход

Суть деятельностного подхода в образовании заключается в том, что деятельность выступает средством становления и развития субъекности ребёнка. Процесс образования обеспечивает формирование Человека, способного осуществлять выбор, оценку, программирование и конструирование тех видов деятельности, которые соответствуют его природе и удовлетворяют потребности в саморазвитии и самореализации.

Его общей целью является воспитание Человека, который способен превращать собственную жизненную деятельность в предмет практического преобразования, оценивать себя и свои действия, выбирать наиболее адекватные способы деятельности, контролировать её ход и результаты.

Исследования деятельностного подхода осуществлялись представителями отечественной педагогической психологии Л. С. Выготским [78], С. Л. Рубинштейном [216], А. Н. Леонтьевым [143] и впоследствии были раскрыты Л. В. Занковым [108], Д. Б. Элькониным [284, 285], В. В. Давыдовым [95], П. Я. Гальпериным [81], Н. Ф. Талызиной [249] и др. Обобщая их взгляды, определим деятельностный подход как такую организацию обучения и воспитания, в соответствии с которой учащийся выступает как активный субъект познания, труда и общения, у которого целенаправленно формируются учебные умения по осознанию цели, планированию хода предстоящей деятельности, её исполнению и регулированию, выполнению самоконтроля, анализа и оценки результатов своей деятельности [139].

Деятельностный подход подразумевает мотивированное включение школьников в познавательную деятельность, которая становится для них желаемой и приносящей удовлетворение от участия в ней. Учебное содержание только в том случае усваивается осознанно и прочно учащимся, если он сам им оперирует, при этом происходит процесс развития интеллекта, формируется способность к самообучению, самообразованию и самоорганизации. Обучение, построенное на деятельностном подходе, обеспечивает психологический комфорт педагогов и учащихся, способствует снижению конфликтных ситуаций в процессе взаимодействия субъектов образовательного процесса. В результате формируется личность, способная к саморазвитию, продуктивной коммуникации и рефлексии.

Средовой подход

Средовой подход базируется на понимании феномена образовательной среды – его содержании, структуры, закономерностей формирования и развития. Понятие «образовательная среда» в настоящее время стало ключевым, как в педагогических исследованиях, так и в образовательной практике. Образовательная среда – целостная качественная характеристика внутренней жизни школы, представляющая собой совокупность всех возможностей обучения, воспитания и развития личности. Психологи осмысливают образовательную среду через систему влияний на личности учащихся и педагогов. Например, В. А. Ясвин определяет образовательную среду как систему влияний и условий формирования личности по заданному образцу, а также возможностей для её развития, содержащихся в социальном и пространственном окружении. Автор подчеркивает детерминирующую роль образовательной среды в формировании личности. При этом, по мнению автора, и сама личность обладает возможностями воздействия на образовательную среду [289]. В. И. Слободчиков рассматривает образовательную среду, как предмет, и как ресурс совместной деятельности и выделяет два основных её показателя: насыщенность (ресурсный потенциал) и структурированность (способ организации) [240].

Для создания образовательной среды, ориентированной на развитие одаренности, необходимо выполнение следующих требований:

- осуществление совместной познавательной деятельности в процессе решения творческих задач в различных областях знаний индивидуально, в маленьких группах (диадах, триадах) или же всем классом (группой);

- развитие стилей и особенностей мышления обучаемых, мотивации и потребностей в самообучении и саморазвитии;

- развитие у одарённых детей коммуникативной компетентности, потребностей в совместной работе.

Учебно-организационная модель. Обобщение результатов анализа различных подходов в решении задач поиска и профессиональной ориентации одарённых школьников позволило сформулировать новую *учебно-организационную модель* [32]. Приведём основные позиции этой модели.

В качестве **технологической составляющей** модели предлагается всероссийская олимпиада школьников по математике, как наиболее массовое и доступное на начальных (школьном и муниципальном) этапах, организационно оформленное соревнование, сохраняющее высокий уровень содержания на заключительных (региональном и заключительном) этапах.

В качестве **субъектов,** осуществляющих учебный процесс, предлагаются наиболее выдающиеся учителя и преподаватели высшей школы, педагоги системы дополнительного образования, а также студенты, показывавшие высокие олимпиадные достижения.

2.3 Формирование мотивирующей образовательной среды развития математически одарённых детей

Одной наиболее популярных среди ученых и педагогов современных моделей одарённости, является трёхкольцевая модель, предложенная Дж. Рензулли [341], упоминавшаяся нами в главе I настоящей работы. Модель включает три компонента, представленные пересекающимися кругами: общие способности выше среднего (интеллект), креативность и мотивацию. Как показали исследования последних двух десятилетий, такой компонент, как мотивация позволяет с большой степенью вероятности и точности выявлять одарённых детей.

Мотивация оказывает воздействие на процесс обучения и поведения учащихся, в частности:

- направляет поведение обучаемого по отношению к конкретным целям; она определяет конкретные цели, к которым стремятся люди;
- приводит к увеличению усилий и потенциала;
- повышает инициативность;
- усиливает познавательные способности;
- повышает продуктивность деятельности.

Многие исследователи отмечают у одарённых личностей приверженность избранному делу, веру в его важность, страстную любовь к нему, готовность много и упорно работать, жертвуя другими делами, развлечениями и даже межличностными отношениями, несгибаемую веру в себя, свои способности и предназначение, в важность избранного дела, постоянное стремление к совершенству, независимость суждений и действий, огромное упорство и трудолюбие [265, 281, 286, 295, 318, 342, 354].

Т. О. Гордеевой разработана структурная мотивационная модель одарённости, которая содержит четыре базовых составляющих мотивации, присущих одарённым индивидам, отличающихся по выполняемой ими функции и характеру взаимодействия с другими компонентами структуры [89]. В частности:

- высокий уровень внутренней мотивации выполняемой деятельности, представленной интеграцией познавательной мотивации, мотивации достижения и мотивации компетентности;
- высокую выраженность стремления к самостоятельной постановке и достижению трудных целей;
- оптимистичную веру в собственный потенциал;
- концентрацию и настойчивость в выбранной деятельности.

Первые три составляющие мотивации являются источниками, запускающими четвёртую характеристику одарённости – продуктивную настойчивость индивида в выбранной области.

Необходимым условием развития одарённых детей является наличие развивающей образовательной среды. Определим вначале понятие образовательной среды, под которой понимается ближайшее окружение человека, взаимодействуя с которым он проявляет, формирует и развивает познавательные, коммуникативные и социальные качества.

Сущность образовательной среды раскрывается в исследованиях М. И. Башмакова [53], С. Г. Григорьева [48], А. А. Кузнецова [115], С. В. Панюковой [190], Е. С. Полат [198], А. П. Тряпицыной [37] и др. Ими определены компоненты среды обучения, которые делятся на субъекты и объекты. Под субъектами образовательного процесса понимаются обучаемые и преподаватели; а под объектами – средства обучения, материальная база, методики, сфера управления педагогическим процессом, способы учебной деятельности.

А. А. Кузнецовым и И.В. Роберт в качестве содержания компонентов образовательной среды определены следующие: субъекты среды, источники учебной информации, инструменты учебной деятельности и средства коммуникаций, а также наполнение (учебное и методическое содержание) образовательной среды [115].

На основе анализа психолого-педагогической литературы можно выделить следующие структурные компоненты образовательной среды:

- содержательная часть предметных областей, которая зафиксирована в учебных программах; в Федеральных государственных образовательных стандартах;

- функциональная часть предметных областей, которая отражается в различных алгоритмах, осваиваемых при прохождении определённой предметной тематики;

- общеучебные умения, лежащие в основе когнитивного опыта учащихся;

- содержательная часть внепредметной области, представляющая аффективную сферу познания учащихся, которую условно можно подразделить на урочную (ценностно-волевую, эмоционально-мотивационную) составляющую и внеурочную (направленную на развитие интересов учащихся с одной стороны, обретение ими специализированных умений с другой).

В. И. Панов предлагает в качестве критерия развивающей образовательной среды рассматривать её способность обеспечить всем субъектам образовательного процесса систему возможностей для эффективного личностного саморазвития [188]. В таком случае индивидуализация обучения и развития одарённых детей предстает как преобразование условий и факторов образовательной среды, общих для всех учащихся, в конкретные ситуации развития, обеспечивающие возможность реализации уровня актуального развития и зоны ближайшего развития (Л. С. Выготский [80]).

Таким образом, **развивающая среда** – это совокупность социальных и природных факторов, которые могут влиять прямо или косвенно, мгновенно или долговременно на жизнь одарённого ребёнка [289].

Для нашего исследования необходимо уточнить понятие развивающей среды как условия образования и самореализации математически одарённых учащихся, в этом случае можно говорить о мотивирующей образовательной среде.

Согласно исследованиям А. В. Растянникова, С. Ю. Степанова и Д. В. Ушакова [208], А. К. Белоусовой [55] формирование развивающей образовательной среды для развития одарённых детейпредполагает необходимость спроектировать четыре сферы: интеллектуальную, коммуникативную, кооперативную и личностную (Рисунки 15, 16, 17, 18, 19).

Рассмотрим четыре сферы мотивирующей образовательной среды для математически одарённых учащихся: интеллектуальную, коммуникативную, кооперативную и личностную.

Интеллектуальная сфера ориентирована на овладение предметными знаниями, в данном случае, математическими, что включает в себя:

- теоретические знания;
- математический язык;
- приемы математического мышления;
- способы математической деятельности;
- познавательные стратегии.

Коммуникативная сфера предполагает формирование навыков общения у субъектов образовательной среды, которое происходит в процессе совместной деятельности. Общение, осуществляемое как на предметном, так и надпредметном уровнях включает в себя:

- общение между обучающимися;
- общение между обучающимися и педагогами;
- общение между педагогами.

Кооперативная сфера отвечает за организацию взаимодействия субъектов образовательной среды в различных типах (сотрудничество, конкуренция) и формах:

- коллективная и групповая работа;
- совместная творческая деятельность;
- мозговой штурм, дискуссия и др.

Личностная сфера обеспечивает возможности для самореализации обучающихся и педагогов, что подразумевает создание условий для представления их учебных и творческих достижений в разнообразных интеллектуальных и творческих состязаниях.

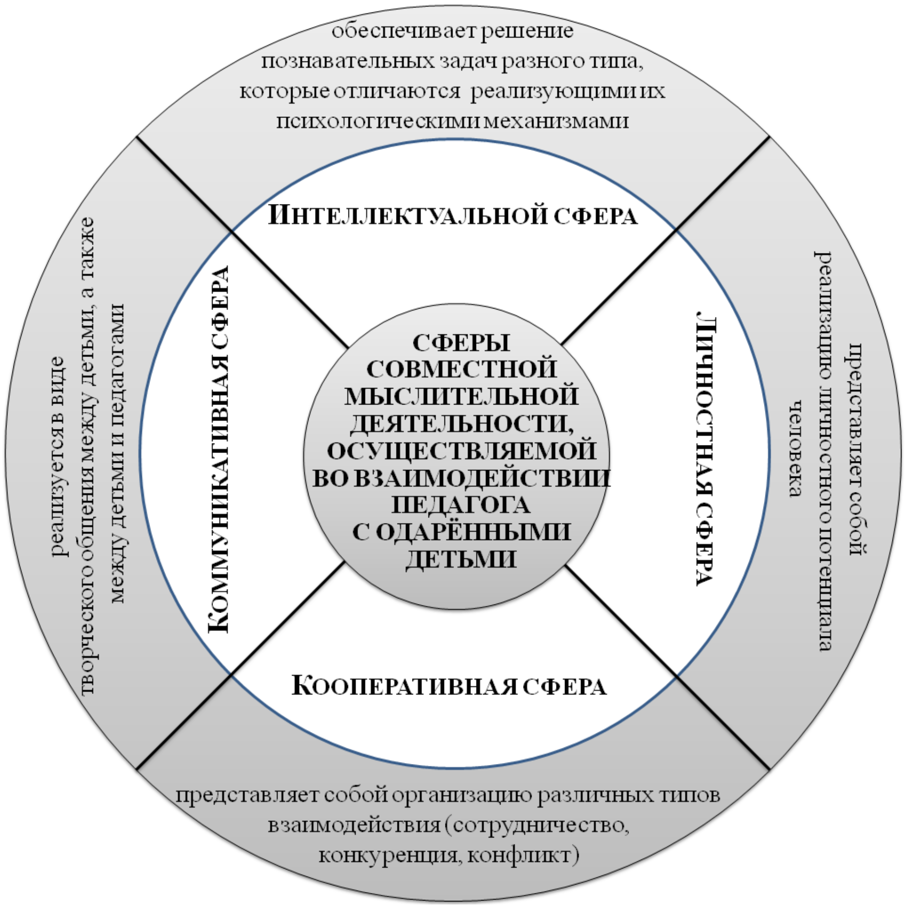


Рисунок 15 – Сферы совместной мыслительной деятельности, осуществляемой во взаимодействии педагога с одарёнными детьми

Рисунок 16

Рисунок 17

Рисунок 18

Рисунок 19

Формирование мотивирующей образовательной среды для развития математически одарённых детей невозможно без организации многоуровневого и многовекторного партнерства, что подразумевает развитие сетевого взаимодействия.

Сеть как форма социального сотрудничества и взаимодействия между людьми или учреждениями становится всё более популярной в последние годы. Повышение доступности информационно-коммуникационных технологий способствовали значительному развитию сетевого взаимодействия.

Под сетевым взаимодействием будем понимать систему горизонтальных и вертикальных связей, обеспечивающая доступность качественного образования для всех категорий граждан, вариативность образования, открытость образовательных организаций, повышение профессиональной компетентности педагогов и использование современных ИКТ-технологий.

Сетевое взаимодействие позволяет:

- распределять ресурсы при общей задаче деятельности;
- опираться на инициативу каждого конкретного участника;
- осуществлять прямой контакт участников друг с другом;
- выстраивать многообразные возможные пути движения при общности внешней цели;
- использовать общий ресурс сети для нужд каждого конкретного участника.

В настоящее время сетевое взаимодействие является одним из мощных ресурсов инновационного образования, что определяется следующими возможностями:

- расширения спектра образовательной деятельности;
- более активного продвижения продуктов инновационной деятельности и получения дополнительного финансирования;
- усиления ресурсов учреждения за счет ресурсов других учреждений;
- проведения экспертиз собственных разработок.

Сеть создается на добровольной основе, поддерживается общей проблематикой и интересами всех членов сети. Таким образом, сеть всегда является результатом проектного замысла, поскольку участники должны участвовать в едином целеполагании, согласовывать механизмы и схемы взаимодействия, договариваться о результатах деятельности.

Основными функциями сетевого взаимодействия являются:

Идеологическая

Преследует конкретную цель найти единомышленников. Сотрудничество с ними позволяет создать активное сообщество и, таким образом, популяризировать инновационные идеи.

Информационная функция

Сеть обеспечивает быстрый обмен информацией и способствует распространению инноваций.

Психологическая функция

Новаторы обычно изолированы в своих организациях. Сеть предоставляет им возможности для сотрудничества и обмена идеями.

Образовательная

Инновационная работа требует освоения новых навыков, связанных с разработкой, реализацией и продвижением инновационных идей, организации продуктивного взаимодействия, в том числе, с использованием информационно-коммуникационных технологий.

Рядом исследователей установлено (C. M. Diezmann, J. J. Watters [307]), что для организации продуктивного сетевого взаимодействия при организации работы с математически одарёнными детьми необходимо соблюдение следующих условий:

1. Обучение учащихся навыкам самостоятельной работы и самостоятельного проведения исследований. Совокупность таких навыков должна включать как предметные, связанные с математической деятельностью, так и метапредметные, включая организацию поиска и обмена информацией, продуктивное взаимодействие между разными категориями участниками сети (учащимися, педагогами), представления собственных исследований и др.

2. Сочетание индивидуальной и групповой работы. Работа в группе требует от обучаемых аргументации и вовлекает обучающихся в идеи обмена, развивает критическое мышление. Установлено, что когда математически одарённым учащимся предлагаются для решения лёгкие задачи, то они предпочитают работать независимо друг от друга или вместе со своими товарищами. Однако когда задачи являются достаточно сложными, одарённые учащиеся предпочитают работать в группе для обмена знаниями и доступа к сети поддержки.

3. Наличие возможностей работать со своими единомышленниками, которые разделяют их интересы и будут оспаривать их идеи, а также возможностей презентации своих идей. Для этого необходимо предусмотреть различные формы работы: олимпиады, конкурсы, профильные лагеря и др. Формы работы должны соответствовать возрастным особенностям учащихся.

Педагоги, работающие с одарёнными детьми, должны обладать следующими компетенциями:

1. Выявления математически одарённых учащихся. Известно, что не все математически одарённые учащиеся обладают высокой успеваемостью, и наоборот, высокая успеваемость по математике является недостаточным условием для математической одарённости.

2. Предоставления учащимся углубленного математического содержания, отвечающего познавательным потребностям и интересам одарённых детей и созданием условий для его освоения, в том числе, разработки и осуществления ин-

дивидуальных программ развития математических способностей. Организация дополнительного образования для математически одарённых учащихся.

3. Организации процесса социализации одарённых учащихся посредством выявления трудностей личностного и социального развития и предоставлением им педагогической поддержки в разных формах, в том числе, с привлечением психологов.

Для того чтобы учителя могли овладеть перечисленными компетенциями, им также необходимо предоставить условия для профессионального развития. В условиях сетевого взаимодействия это могут быть организации либо высшего, либо дополнительного профессионального образования, где может быть развернута работа по повышению квалификации учителей. Данная работа не должна носить формальный характер, а гибко реагировать на запросы учителей. Формы работы могут быть самые разнообразные: традиционные курсы повышения квалификации, стажировки (в том числе, виртуальные), научно-методические семинары, мастер-классы, сетевые проекты и др.

Работа с одарёнными детьми, в основном, разворачивается в условиях регионов и предполагает создание мотивирующей образовательной среды вокруг определённой организационной структуры, ядро которой составляет какая-либо организация – координационный центр, обладающая достаточным значимым опытом и потенциалом. Анализ существующих региональных структур показывает, что в регионах могут быть достаточно разные по типам организационные структуры, а в качестве координационного ядра встречаются физико-математические школы, центры по работе с одарёнными детьми и др.

В качестве положительного примера приведем организационную структуру по работе с математически одарёнными детьми, которая сложилась в Республике Адыгея. В качестве координационного ядра здесь выступает Государственное учреждение «Республиканская естественно-математическая школа при Адыгейском государственном университете» (РЕМШ), созданная Указом Президента Республики Адыгея от 04.02.1998 № 16. Учредителем школы является Министерство образования и науки Республики Адыгея [261].

РЕМШ при АГУ является основным в республике центром по работе с математически одарёнными учащимися и занимает в этой области одну из ведущих позиций на Юге России. При создании РЕМШ учитывался многолетний опыт Школы им. А. Н. Колмогорова по отбору и обучению талантливых детей. Одной из основных особенностей РЕМШ является её тесная интеграция с Адыгейским госуниверситетом.

О результатах работы школы за 16 лет её существования убедительно говорят успехи её учащихся на российских олимпиадах [185].

В 2006 году впервые два школьника Адыгеи, ученик 9 класса Филькин Евгений и ученица 10 класса Пономаренко Екатерина, стали призёрами Всероссийской олимпиады по математике. А Екатерина Пономаренко, показав второй в России результат среди девушек, была включена в состав сборной команды России, и приняла участие в Открытой китайской математической олимпиаде для девочек, где завоевала серебряную медаль. Елизавета Стрельцова, ученица 11 класса, в 2013 году стала призёром Заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике и заняла призовое место на Китайской математической олимпиаде для девочек. Всего за последние годы учащиеся школы 16 раз становились призёрами Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Помимо реализации образовательных программ школа принимает активное участие в организации и проведении в Адыгее и за её пределами большого числа олимпиад, конкурсов и иных мероприятий республиканского и всероссийского уровня. При непосредственном участии преподавателей и сотрудников школы в республике проводятся II и III этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике, физике, информатике и биологии.

Именно естественно-математическая школа чаще остальных регионов России проводила окружные и заключительные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике.

В течение 16 лет школа проводит в республике Международный математический турнир городов, олимпиады младших школьников по математике, физике, химии и биологии, региональные олимпиады по математике, физике, химии и биологии для учащихся 10 – 11 классов РЕМШ при АГУ.

Все выпускники школы поступают в высшие учебные заведения. Семь выпускников РЕМШ стали кандидатами физико-математических наук.

Плодотворное сотрудничество сложилось у школы со Всероссийским детским центром «Орленок», где с 2005 г. при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации РЕМШ при АГУ реализует проект «Всероссийская смена «Юный математик».

С 2010 года РЕМШ при АГУ, по поручению Министерства образования и науки Республики Адыгея активно занимается внедрением дистанционных образовательных технологий в учебный процесс, разработкой инновационных методик и технологий обучения и сопровождения учебного процесса. В декабре 2011 года прошли первые занятия по шести дисциплинам в девяти созданных муниципальных центрах дистанционного образования. В 2012 – 2013 годах к системе дистанционного обучения подключены ещё 27 образовательных учреждений республики.

В 2013 году создан Республиканский центр дистанционного образования, задачей которого является развитие и поддержка работы системы дистанционного образования в республике. Созданы элементы образовательной сети, включающей в себя:

- портал, содержащий образовательный контент по программам дополнительного образования;

- систему видеоконференцсвязи для проведения занятий в режиме видеотрансляции.

Сетевое взаимодействие позволило консолидировать научные, образовательные, информационные и другие ресурсы для создания системы эффективной работы с учащимися.

Выводы по II главе

1. На основе анализа современных исследований в области работы с одарёнными детьми и направлений развития математического образования были выделены методологические подходы к проектированию системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов: системный, личностно ориентированный, полисубъектный, культурологический, индивидуально-творческий, деятельностный и средовой. Каждый из подходов определяет отдельные аспекты организации работы с математически одарёнными детьми, а их совокупность – проектирование целостной системы выявления, обучения и развития.

2. Концептуальными положениями системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе математических олимпиад и конкурсов являются:

а) в современном мире высоких технологий важнейшей задачей становится подготовка и формирование высококвалифицированных кадров, что инициирует усиление внимания и создание условий для развития одарённых детей;

б) повышение роли математики в современном обществе вызвано все возрастающей потребностью математизации различных сфер человеческой деятельности;

в) математические олимпиады и конкурсы выступают средством выявления, отбора и самореализации математически одарённых детей;

г) успехи на интеллектуальных состязаниях помогают школьнику в определении сферы деятельности, способствуют его профессиональной ориентации;

д) поиск одарённых школьников предполагает привлечение к участию в олимпиадах и конкурсах максимально большого числа обучающихся;

е) осуществление в массовой школе подготовки к олимпиадам начального (школьного) уровня;

ж) ошибочность возложения на учителя массовой школы полноты функций поиска, мотивации и отбора одарённых учащихся;

з) формирование педагогами, осуществляющими работу со школьниками, обладающими математическими способностями, календаря математических событий с включением в него списка олимпиад и конкурсов, отвечающих задачам выявления математических способностей, в том числе с учётом математического содержания заданий;

и) мотивирование учащихся, продемонстрировавших математические способности, к дальнейшему углублённому изучению математики, выстраивание траектории их роста;

к) выделение специального вида творчества – задачного олимпиадного композиторства;

л) осуществление олимпиадного тренинга (муниципальный и последующие этапы) в рамках дополнительного образования силами высококвалифицированных педагогов средней и высшей школы, а также студентов-олимпиадников;

м) организация занятий с одарёнными школьниками не только по тематическому принципу, но с обучением также нахождению логической структуры решения задачи;

н) использование при организации дополнительного образования математически одарённых детей разнообразных форм и содержания занятий, адекватно их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям;

о) интеллектуальные состязания школьников выступают стимулом для профессиональной самореализации педагогов;

п) работа с математически одарёнными детьми нуждается в обеспечении управленческой поддержки территориальными органами управления образованием. система

3. *Формирование мотивирующей образовательной среды рассматривается как необходимое условие их* развития в четырёх сферах: интеллектуальной, коммуникативной, кооперативной, личностной.

Интеллектуальная сфера ориентирована на овладение математической деятельностью. Коммуникативная сфера предполагает формирование навыков общения у субъектов образовательной среды, которое происходит в процессе совместной деятельности. Кооперативная сфера отвечает за организацию взаимодействия субъектов образовательной среды в различных типах (сотрудничество, конкуренция) и формах. Личностная сфера обеспечивает возможности для самореализации обучающихся и педагогов посредством представления их учебных и творческих достижений в разнообразных интеллектуальных и творческих состязаниях.

Глава III. МЕТОДИКА РАБОТЫ С МАТЕМАТИЧЕСКИ ОДАРЁННЫМИ ДЕТЬМИ В МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ ПРЕДМЕТНЫХ ОЛИМПИАД И КОНКУРСОВ

3.1 Содержание образования математически одарённых детей

Основу школьного образования составляет усвоение учащимися определённого набора знаний и овладение ими определённым набором навыков. Таким образом, задачей школьного образования и обязанностью школьного учителя является привитие своим ученикам этих стандартных знаний и навыков. При этом каждый учащийся должен достичь одинакового со всеми одноклассниками уровня обучения предмету, независимо от степени восприятия ими предмета.

Абсолютно по-другому формируются задания предметных математических олимпиад школьников: задания в них разительно отличаются как от заданий стандартной школьной программы, так и от возможно даже достаточно сложных заданий конкурсных испытаний при поступлении в вузы. Фактически сразу после зарождения математических олимпиад возникла и практически самостоятельно развивается так называемая «олимпиадная математика».

В олимпиадной математике достаточно четко разделяются два направления: логическое и техническое. К первому относятся задачи по комбинаторике и геометрии, ко второму – по алгебре, теории чисел (арифметике), основам математического анализа. Восприятие каждого из указанных направлений наиболее успешно проходит в разном возрасте. Логического – в более раннем возрасте (среднее звено школы), когда математический аппарат ещё недостаточен, но школьник уже воспринимает понятие доказательства. Позитивного – в основном основанного на построении конструкций (например, «докажите, что существует число, делящееся на 2007, с суммой цифр равной 2007» и он приводит описание построения указанного числа: нужно 223 раза повторить набор цифр 2007. Это число, очевидно, делится на 2007, а сумма его цифр равна 2007 так как $223 \cdot (2+0+0+7) = 2007$. Негативного, основанного на методе доказательства «от противного». (Например, «докажите, что в любой момент школьного одно-кругового турнира по волейболу всегда найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей». И школьник приводит рассуждение: пусть не так и в некоторый момент у всех команд разное число сыгранных игр. Это возможно только если одна из N команд сыграла N-1 игру, другая – N-2, …, N-я – 0 игр. Но это означает, что последняя команда не играла с первой командой, сыгравшей матчи со всеми. Противоречие.)

К техническому направлению школьник может быть подготовлен только в результате овладения им всем необходимым математическим инструментарием, т.е. в старших классах школы. Кроме того, не только российский, но и международный опыт показывают, что даже при более раннем овладении математическим аппаратом, успешное использование его, как правило, возможно, только в старшем школьном возрасте. Кстати последнее является определённым препятствием на пути успешного выступления школьников нашей страны на международных математических соревнованиях. Так на Международной математической олимпиаде регламент предусматривает участие школьников до 20-летнего возраста и в ряде команд, представляющих страны с 12 – 13-летней продолжительностью обучения в школе (в их числе Китай, США, Венгрия, Румыния) участники на 1 – 3 года старше наших ребят. Поэтому задачи технического плана, решение которых отнимает достаточно большое время у наших школьников, с лёгкостью преодолеваются членами некоторых других команд. Правда, наши участники, как правило, успешней справляются с комбинаторными задачами, т. е. задачами с нестандартными идеями, в том числе и достаточно сложными.

Таким образом, формирование комплектов заданий не только, и даже не столько по причине различия в пройденном по школьной программе в разных классах материале, но и по причине возрастных особенностей, должно значительно различаться в разных классах. Эта разница хорошо заметна, например, в заданиях олимпиад Румынии, где обучение в гимназиях и колледжах, являющихся, по сути, начальными курсами университетов, формально относится к школьному. Юниорские олимпиады относятся скорее к логическому направлению, а олимпиады старшего звена – исключительно к техническому. В странах с короткими олимпиадными традициями, где национальная олимпиада проводится по единым заданиям для всех участников, в основном из выпускного класса, задания относятся к техническому направлению. А в странах с давними олимпиадными традициями (в основном – восточноевропейских), задания для учащихся младших классов больше носят логический характер.

Приведем содержание образования математически одарённых детей в России, которое отражает многолетнюю сложившуюся систему работы.

VI – VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Чётность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и её свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

VIII – IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Чётность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и её свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трёхчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета.

Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трёхчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и её свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырёхугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и её свойства. Площади четырёхугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и её свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

X – XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Чётность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, чётность и нечётность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, её свойства и график. Логарифмическая функция, её свойства и график. Степенная функция, её свойства и график.

Производная, её геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и её свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и её свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трёх перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Одной из важнейших задач Олимпиады на начальных этапах является развитие интереса у обучающихся к математике, формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах, повышение качества математического образования. Важную роль здесь играет свойственное подростковому периоду стремление к состязательности, к достижению успеха. Квалифицированно составленные математические олимпиады являются соревнованиями, где в честной и объективной борьбе обучающийся может раскрыть свой интеллектуальный потенциал, соотнести свой уровень математических способностей с уровнем других учащихся школы. Кроме того, привлекательными для участников являются нестандартные условия задач, предлагаемых на олимпиадах. Они заметно отличаются от обязательных при изучении школьного материала заданий, направленных на отработку выполнения стандартных алгоритмов (например, решения квадратных уравнений), и требуют демонстрации креативности участников олимпиады. Наконец, первые олимпиадные успехи важны для самооценки учащегося, а также, в ряде случаев, изменения отношения к нему учителей, возможно недооценивавших его способности. Нередки случаи, когда способный и даже талантливый обучающийся допускает при выполнении стандартной школьной контрольной работы арифметические ошибки, либо выполняет её с не устраивающей учителя аккуратностью.

Задания школьного этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания не должны носить характер обычной контрольной работы по различным разделам школьной математики. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.

2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным по всем базовым учебникам по алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.

3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить практически каждому её участнику возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись не менее 70% участников, со

вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.

4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.

5. Формулировки задач должны быть корректными, чёткими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.

6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4 – 6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 5 – 6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие чётности; в 7 – 8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9 – 11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

7. Задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких её участников со всеми задачами, включенными в вариант. Желательно использование различных источников, неизвестных участникам Олимпиады, либо включение в варианты новых задач.

8. В задания для учащихся 5 – 6 классов, впервые участвующих в олимпиадах, желательно включать задачи, не требующие сложных (многоступенчатых) математических рассуждений.

Приведем **типовые задания школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников**.

Пятый класс

5.1. Найдите решение числового ребуса $abb+bab = 1000$, где a и b – различные цифры.

Ответ. 455+545=1000.

5.2. Составьте из восьми различных ненулевых цифр 4 двузначных числа таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.

Ответ. Например, 91 и 64, 73 и 82

5.3. У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишневого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть всё варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из 5 + 8 + 10 = 23 банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и всё варенье съесть не сможет.

5.4. Петя сказал, что у него братьев и сестер поровну, а Маша сказала, что у неё братьев в три раза больше, чем сестер. Сколько детей в семье, если Маша и Петя – брат и сестра?

Ответ. 5 детей – 3 мальчика и 2 девочки.

5.5. В ящике 23 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 5 кг гвоздей?

Решение. При первом взвешивании на одну из чашек весов кладём гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 12 и 11 кг гвоздей. Кучку с 12 кг откладываем. При втором взвешивании берём 11 кг гвоздей. На одну из чашек весов кладём гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 6 и 5 кг гвоздей.

Шестой класс

6.1. Расставьте скобки в выражении 7 – 6 – 5 – 4 – 3– 2 – 1 = 0 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. Например, скобки можно расставить так: (7 – 6) – (5 – 4) – (3 – 2 – 1) = 0.

6.2. Запишите числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось бы на другое.

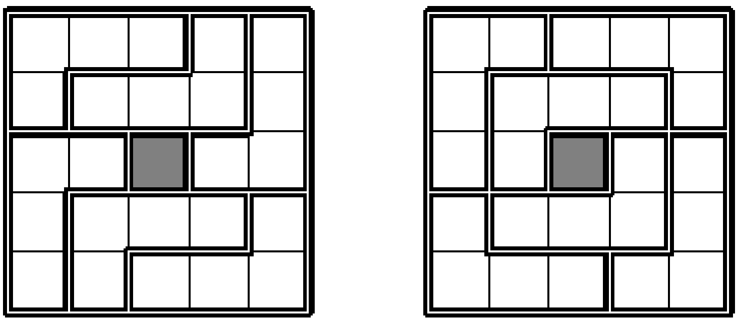
Ответ. Например: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1.

6.3. Даны три сосуда: первый ёмкостью 3 л, второй – 5 л, третий – 20 л. Первые два сосуда пустые. Третий заполнен водой. Как с помощью нескольких переливаний налить во второй сосуд ровно 4 л воды? (При переливаниях разрешается наливать в сосуд ровно столько воды, сколько в нем помещается, либо выливать всю воду из одного сосуда в другой, если она в него вся помещается.)

Ответ. Например, возможны такие последовательности переливаний: $\{0, 0, 20\} \to\to \{0, 5, 15\} \to \{3, 2, 15\} \to \{0, 2, 18\} \to \{2, 0, 18\} \to \{2, 5, 13\} \to \{3, 4, 13\}$ либо $\{0, 0, 20\} \to \{3, 0, 17\} \to \{0, 3, 17\} \to \{3, 3, 14\} \to \{1, 5, 14\} \to \{1, 0, 19\} \to \{0, 1, 19\} \to \{3, 1, 16\} \to \{0, 4, 16\}$.

6.4. Из клетчатого квадрата 3×3 вырезали центральный квадратик 1×1. Разрежьте оставшуюся фигуру на 6 равных клетчатых фигур. Приведите какой-нибудь один пример разрезания.

Решение. Два возможных примера приведены на рисунке. Существуют и другие примеры.



6.5. У весов сдвинута стрелка, то есть они всегда показывают на фиксированное число граммов больше (или меньше) чем истинный вес. Когда на весы положили дыню, весы показали 3 кг. Когда на весы положили арбуз, весы показали 5 кг. Когда взвесили и арбуз, и дыню, весы показали 7 кг. Сколько кг покажут весы, если на них поставить гирю в 2 кг?

Ответ. 3 кг.

Решение. На сумму 3 + 5 = 8 кг сдвиг стрелки влияет дважды, а на вес 7 кг – только один раз. Поэтому сдвиг стрелки равен 8 – 7 = 1 кг. Следовательно, правильный вес на 1 кг меньше, чем показывают весы. Значит, если на весы поставить гирю в 2 кг, то они покажут 3 кг.

Седьмой класс

7.1. В пенале лежит 10 ручек. Известно, что по крайней мере одна из ручек красная. Также известно, что если из пенала взять любые две ручки, то среди них обязательно будет синяя. Сколько красных ручек может быть в пенале? Объясните свой ответ.

Ответ. 1.

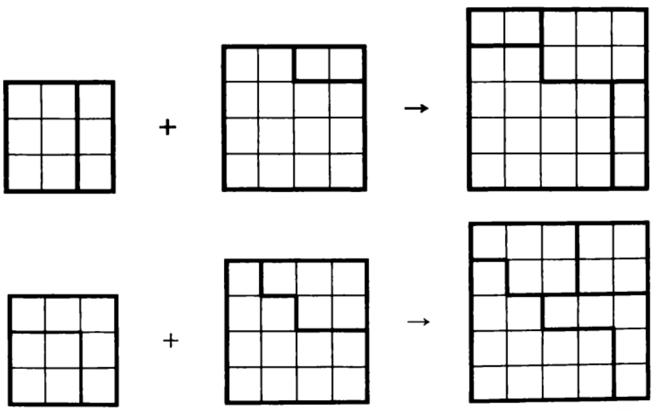
Решение. Так как среди любых двух ручек есть синяя, то двух красных ручек в пенале быть не может. А одна красная ручка в пенале есть. Поэтому в пенале лежит 1 красная и 9 синих ручек.

7.2. Найдите десять натуральных чисел, сумма и произведение которых равны 20.

Ответ. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 10.

7.3. Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части так, чтобы из полученных четырёх кусков можно было сложить квадрат.

Решение. Два возможных варианта показаны на рисунке.



7.4. Три ученика *A*, *B* и *C* участвовали в беге на 100 м. Когда *A* прибежал на финиш, *B* был позади него на 10 м, также, когда *B* финишировал, *C* был позади него на 10 м. На сколько метров на финише *A* опередил *C*?

Ответ. На 19 метров.

Решение. Скорость *B* составляет 0.9 от скорости *A*, а скорость *C* составляет 0.9 от скорости *B*, т.е. 0.81 от скорости *A*.

7.5. Из произведения всех натуральных чисел от 99 до 3388 включительно вычеркнули все числа, делящиеся на 5. Какой цифрой будет оканчиваться произведение оставшихся чисел?

Ответ.6.

Решение. Заметим сначала, что на последнюю цифру произведения влияют только последние цифры сомножителей. Поэтому наше произведение имеет ту же последнюю цифру, что и произведение $9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$. Рассмотрим произведение $9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$. Оно оканчивается на 6, т.е. наше произведение оканчивается на ту же цифру, что и произведение $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6$. Но из того, что $6 \cdot 6$ оканчивается на 6, следует, что наше произведение оканчивается на 6.

Восьмой класс

8.1. Петя считает пальцы на левой руке от большого пальца до мизинца и обратно от мизинца до большого. Каждый следующий счёт приходится на другой палец. На какой палец придётся число 2015? (Счёт: 1 – большой, 2 – указательный, 3 – средний, 4 – безымянный, 5 – мизинец, 6 – безымянный, 7 – средний и т. д.)?

Ответ. Средний.

Решение. На большой палец приходится счёт 1, 9, 17, 25, …, 2009 так как $2009 = 8 \cdot 251+1$.

8.2. Докажите, что если $a + 2b = 3c$ и $b +2c =3a$, то $c +2a =3b$.

Решение. Сложив два данных равенства, получим $a + 3b +2c = 3c + 3a$, откуда $c +2a =3b$.

Замечание. Решая систему методом подстановки получим: $a = b = c$, откуда также следует доказываемое равенство.

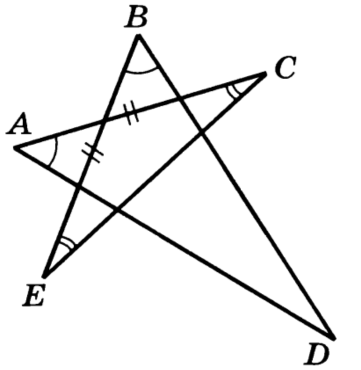
8.3. Найдите какое-нибудь натуральное число, произведение цифр которого на 60 больше суммы его цифр.

Ответ. Например: 99111.

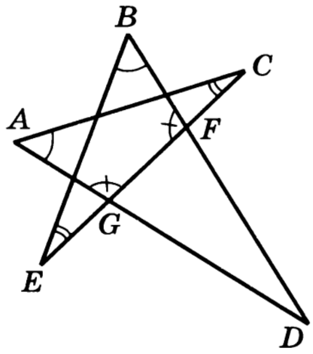
8.4. Вдоль забора растут 8 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 225 ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечётное число ягод. Тогда количество ягод на восьми кустах равно сумме четырёх нечётных чисел, т. е. числу чётному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 225 ягод.



8.5.У звезды *ACEBD* (см. рис.) равны углы при вершинах *A* и *B*, углы при вершинах *E* и *C*, а также равны длины отрезков *AC* и *BE*. Докажите, что *AD* = *BD*.



Решение. Треугольники *ACG* и *BEF* равны (по стороне и двум углам, прилежащим к ней) (см. рисунок). Следовательно, $\angle AGC = \angle BFE$ и *AG* = *BF*. По теореме о смежных углах $\angle FGD = \angle GFD$. Поэтому треугольник *GFD* равнобедренный (*GD* = *FD*). Следовательно, *AG* + *GD* = *BF* + *FD*, т. е. *AD* = *BD*.

Девятый класс

9.1. Найдите сумму двух различных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $a^2 + b = b^2 + a$.

Ответ. $a + b = 1$.

Решение. Решение: уравнение можно преобразовать к виду $(a - b)(a + b - 1) = 0$. А так как $a \neq b$, то $a + b - 1 = 0$, откуда $a + b = 1$.

9.2. Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, к $17^{\underline{00}}$ проехал в 1,25 раза больший путь, чем к $16^{\underline{00}}$. Когда поезд выехал?

Ответ. в $12^{\underline{00}}$.

Решение. За 1 час от $16^{\underline{00}}$ до $17^{\underline{00}}$ поезд проехал 0,25 пути с момента выезда до $16^{\underline{00}}$. Значит, он ехал 4 часа и выехал в $12^{\underline{00}}$.

9.3. Какую наименьшую сумму могут иметь три последовательных натуральных числа, если эта сумма оканчивается на 1234?

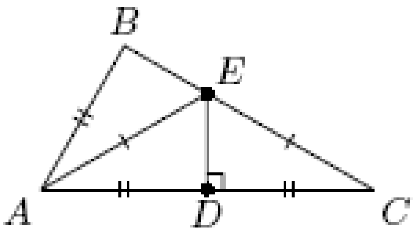
Ответ. 21234.

Решение. Пусть n – среднее из данных чисел. Тогда их сумма $S = (n - 1) + n + (n + 1) = 3n$ делится на 3. То есть число $S = \overline{a_1 a_2 \dots a_k 1234}$ делится на 3. Наименьшим подходящим числом будет 21234.

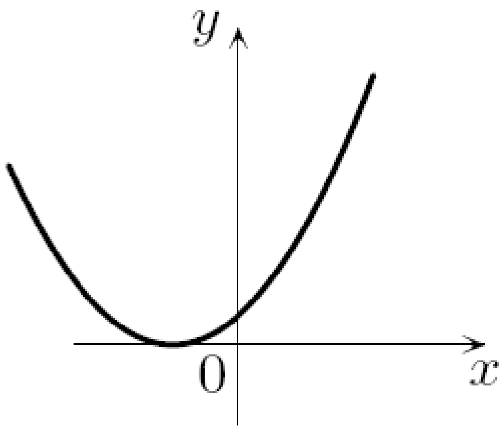
9.4. В треугольнике *ABC* биссектриса *AE* равна отрезку *EC*. Найдите угол *ABC*, если $AC = 2AB$.

Ответ. $\angle ABC = 90°$.

Решение. Пусть точка *D* – середина стороны *AC* (см. рисунок). Тогда $AD = AC/2 = AB$. Значит, треугольники *ABE* и *ADE* равны (сторона *AE* – общая, $\angle BAE = \angle CAE$). Тогда $\angle ABC = \angle ADE = 90°$, так как *ED* – медиана равнобедренного треугольника *AEC* ($AE = EC$ – по условию) и, значит, его высота.



9.5. Дан график функции $y = x^2 + ax + a$ (см. рисунок). Найдите a.



Ответ. 4.

Решение. График касается оси *Ox*, поэтому дискриминант трёхчлена равен нулю: $D = a^2 - 4a = 0$. Отсюда $a = 0$ или $a = 4$. Но из графика следует, что $a \neq 0$. (Нарисован график трёхчлена $y = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$).

Десятый класс

10.1. Найдите какое-нибудь натуральное число, произведение цифр которого на 100 меньше суммы его цифр.

Ответ. Например: 11…10 (сто единиц).

10.2. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка – булочку, то они потратят вместе на один рубль меньше, чем, если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка – пирожок. Известно, что пирожок и булочка стоят целое число рублей, и что мальчиков больше, чем девочек. На сколько человек их больше?

Ответ. На 1.

Решение. Пусть m и n – соответственно количество мальчиков и девочек, а x и y – соответственно цена пирожка и булочки. Тогда, по условию, $mx + ny + 1 = my + nx$. Отсюда $(x – y)(n – m) = 1$. Но произведение натурального числа на целое равно 1, только если оба множителя равны 1.

10.3. Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 1020304?

Ответ. 81020304.

Решение. Пусть n – среднее из данных чисел. Тогда их сумма $S = (n – 4) + (n – 3) + (n – 2) + \ldots + (n + 4) = 9n$ делится на 9. То есть число $S = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k 1020304}$ делится на 9. Наименьшим подходящим числом будет 81020304.

10.4. Петя составляет «таблицу умножения». Слева от таблицы он написал натуральные числа от 10 до 75 включительно, сверху – от 11 до 48 включительно. После чего записал в таблицу соответствующие произведения пар чисел. Сколько из выписанных произведений являются чётными числами?

Ответ. 1881.

Решение. Заметим, что произведение двух чисел будет нечётным, если оба сомножителя нечётны, и чётным в остальных случаях. Всего в таблице записано (75 – 10 + 1)(48 – 11 + 1) = 2508 произведений. Заметим, что среди чисел от 10 до 75 будет 33 нечётных числа, а среди чисел от 11 до 48 – 19 нечётных чисел. Поэтому в таблице будет $33 \cdot 19 = 627$ нечётных произведений. Остальные 2508 – 627 = 1881 будут чётными.

10.5. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC, DE и DF – биссектрисы треугольников ADB и CDB. Докажите, что $EF||AC$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $BE{:}EA=BD{:}DA=BD{:}DC=BF{:}FC$. Отсюда следует, что $EF||AC$

Одиннадцатый класс

11.1. Придумайте квадратный трёхчлен, который имеет отрицательный коэффициент, но при всех x больше трёхчлена $x^2 + 1$.

Ответ. Например, $(x^2 + 1) + (x^2 - x + 1) = 2x^2 - x + 2$.

11.2. По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположенных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд, когда же они едут в одном направлении, то один настигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

Ответ. 9 м/с и 8 м/с.

Решение. Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с ($x>y$). Тогда $10(x + y) = 170$ и $170(x - y) = 170$. Отсюда находим $x = 9$ м/с и $y = 8$ м/с.

11.3. Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых третья цифра меньше четвёртой на 1.

Ответ. 810.

Решение. Число однозначно определяется первой (от 1 до 9), второй (от 0 до 9) и третьей (от 0 до 8) цифрами. Всего получается $9 \cdot 10 \cdot 9 = 810$ вариантов.

11.4. В треугольной пирамиде $SABC$ провели биссектрисы SM (в грани SAB) и SN (в грани SAC). Оказалось, что $MN||BC$. Докажите, что у пирамиды есть два ребра одинаковой длины.

Решение. Из того, что $MN||BC$ следует, что $BM{:}AM=CN{:}AN$. По свойству биссектрис $BS{:}AS=BM{:}AM$ и $CS{:}AS=CN{:}AN$. Отсюда $BS{:}AS=CS{:}AS$. Значит, $BS=CS$, что и требовалось.

11.5. На столе белой стороной кверху лежали 100 карточек, у каждой из которых одна сторона белая, а другая чёрная. Миша перевернул 50 карточек, затем Ваня перевернул 60 карточек, а после этого Петя – 70 карточек. Оказалось, что в результате все 100 карточек лежат чёрной стороной вверх. Сколько карточек было перевернуто трижды?

Ответ. 40.

Решение. Так как все карточки в итоге оказались перевернуты, то каждую из них переворачивали либо 1 раз, либо 3 раза. Всего было сделано 180 переворачиваний: 100 из них потребовалось, чтобы перевернуть каждую карточку 1 раз; остальные 80 – чтобы какие-то карточки перевернуть ещё по 2 раза. Значит, по 3 раза перевернули 40 карточек.

Задания муниципального этапа олимпиады должны удовлетворять следующим ***требованиям***:

1. Задания должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.

2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным по всем базовым учебникам по алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.

3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить большинству участников возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись около 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.

4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.

5. Формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.

6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4 – 6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 5 – 6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие чётности; в 7 – 8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9 – 11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

7. Желательно составление заданий олимпиады из новых задач, специально подготовленных методической комиссией для олимпиады. В случае, если задания олимпиады подбираются из печатных изданий и Интернет-ресурсов, необходимо, чтобы эти источники были неизвестны участникам Олимпиады. Олимпиада должна выявлять не энциклопедичность знаний участника, а его математические способности.

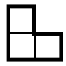
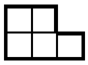
Приведем **типовые задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников**.

6 класс

6.1. На листке написано слово КОРОБКА. Разрешается взять любые две соседние буквы, поменять их местами и одну из этих двух букв заменить на любую другую. Как за пять таких операций превратить слово КОРОБКА в слово БАРАБАН?

6.2. Петя и Коля соревнуются в беге. В середине дистанции находилась собака, которая в момент их старта побежала им навстречу. Добежав до Пети, она мгновенно развернулась и побежала за Колей, догнав его на самом финише. Известно, что собака бегает в полтора раза быстрее одного из ребят. Кого именно? (Скорости обоих мальчиков и собаки были постоянны.)

6.3. Вокруг круглого стола сидят одиннадцать человек – каждый либо Рыцарь, либо Лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а Лжец всегда лжёт. Каждого из них спросили: «Кто сидит справа от тебя?». Могли ли все одиннадцать ответить «Лжец»?

6.4. На какое наименьшее количество фигурок можно полностью разрезать квадрат 7×7, если фигурки – трёхклеточные уголки  и пятиклеточные фигурки  ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

6.5. Десяти мальчикам раздали по две карточки с числами: одному – с числами 1 и 2, другому – 3 и 4, третьему – 5 и 6, …, последнему – 19 и 20. Мальчики встали в произвольном порядке в круг, и их пронумеровали по часовой стрелке. После этого первый и второй поменялись карточками, затем второй и третий, третий и четвёртый, …, десятый и первый. При обмене каждый отдавал другому карточку с меньшим из двух чисел, которые у него были. В конце оказалось, что у первого мальчика сумма чисел на карточках равна 12. Какие карточки у него могли быть вначале? Найдите все варианты.

7 класс

7.1. Вася пришел на почту отправить два письма (каждое письмо весит целое число граммов, но Вася не знает их вес). Оказалось, что стоимость отправки письма определяется следующим образом. Отправка письма с весом не более 10 грамм стоит 15 руб. Отправка письма с весом более 10 грамм стоит 15 руб., и дополнительно берется 1 руб. за каждый грамм веса сверх 10. Вася предложил сразу положить два письма на весы и заплатить 30 руб. и добавить по 1 руб. за каждый грамм сверх 20. Верно ли, что при таком способе он всегда заплатит столько же денег, как если бы он оплачивал отправку писем по отдельности?

7.2. Петя нарисовал на плоскости несколько (больше одной) прямых, которые разбили плоскость на несколько частей. Потом он добавил ещё одну прямую, и количество частей, на которые разрезана плоскость, увеличилось на 2; потом, после проведения ещё одной прямой – ещё на 3, наконец, после проведения ещё одной прямой – увеличилось ещё на 4. Как Петя мог выполнить такое задание? (Приведите рисунок, занумеровав прямые по порядку их построения).

7.3. Петя и Коля соревнуются в беге. В середине дистанции находилась собака, которая в момент их старта побежала им навстречу. Добежав до Пети, она мгновенно развернулась и побежала за Колей, догнав его на самом финише. Найдите отношение скоростей мальчиков, если известно, что собака бегает в полтора раза быстрее одного из них. (Скорости обоих мальчиков и собаки были постоянны).

7.4. Числа от 1 до $2n$ (n>1) разбили на две группы по n чисел, и числа в группах перемножили. Может ли разность этих произведений равняться числу 555555?

7.5. Вокруг круглого стола сидят 39 человек – каждый либо Рыцарь, либо Лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а Лжец всегда лжёт. Каждого из них спросили: «Кто сидит справа от тебя?». Могло ли быть получено 37 ответов «Лжец» и 2 ответа «Рыцарь»?

8 класс

8.1. Точка $A(1;2)$ расположена ниже прямых $y = ax + b$ и $y = cx + d$. А как точка A может быть расположена по отношению к прямой $y = 0{,}5(a + c)x + 0{,}5(b + d)$ (выше, ниже или на прямой)?

8.2. Петя хочет подобрать различные простые числа a и b так, чтобы для любого простого p значение выражения $ap + b$ было составным числом. Сможет ли он это сделать?

8.3. Докажите, что для любого натурального числа N, оканчивающегося на 12345, можно найти три таких натуральных числа a, b и c, что $N=a+b+c+abc$.

8.4. Окружность с центром O вписана в угол BAC. Касательная к окружности, параллельная AO, пересекает луч AB в точке N. Докажите, что $AN = AO$.

8.5. На столе лежат 10 карточек с числами от 10 до 19 (одна карточка с числом 10, одна – с числом 11, …, одна – с числом 19). Петя и Вася играют в следующую игру. Первым ходит Петя. Они по очереди берут со стола по одной карточке (игроки видят числа на карточках). После того, как они заберут со стола все карточки, каждый из игроков перемножает пять чисел на своих карточках, после чего из большего результата вычитается меньший. Если полученное число оканчивается на 2, 3, 4, 5 или 6, то выигрывает Вася, иначе выигрывает Петя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию – то есть такую стратегию, которая позволяет ему выиграть, как бы ни играл соперник?

9 класс

9.1. Числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x(x + 1) = y(y + 1) = z(z + 1)$. Докажите, что $(x – y)(y – z)(z – x) = 0$.

9.2. В одной из клеток таблицы 6×6 записано число 2014, а в остальных 35 клетках записаны двойки. Разрешается проделать следующую операцию – выбрать любую строку или любой столбец и прибавить к числам, записанным в выбранной строке (или столбце) по единице. Можно ли при помощи таких операций сделать все числа в таблице равными?

9.3. На левой половине доски написаны 11 натуральных чисел, а на правой – наибольшие общие делители каждой пары чисел левой половины доски. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на левой половине доски, если известно, что любое число, написанное на одной половине доски, встречается и на другой её половине?

9.4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка D. Отрезки DE и DF являются биссектрисами треугольников ADC и BDC. Оказалось, что $CD = EF$. Докажите, что точка D – середина гипотенузы AB.

9.5. Вася записывает в каждую клетку таблицы 30×30 по одному числу от 1 до 900 так, что каждое число встречается ровно один раз. После этого Петя отмечает три столбца, а затем Вася, увидев столбцы, отмеченные Петей, сам отмечает две строки. В конце вычисляется сумма шести чисел, стоящих на пересечении отмеченных строк и столбцов. Может ли Вася добиться того, чтобы эта сумма равнялась 3000? (Вася сам выбирает, как расставлять числа в таблице.)

10 класс

10.1. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 10000. Объясните свой ответ.

10.2. Петя хочет подобрать различные простые числа a, b, c и d так, чтобы для любого простого p значение выражения $ap^3 + bp^2 + cp + d$ было составным числом. Сможет ли он это сделать?

10.3. Учитель написал на доске три разных положительных числа. Петя записал в свою тетрадь три числа – их попарные суммы, а Коля в свою тетрадь записал три числа, обратных к числам, написанным на доске. Могли ли числа, записанные в тетрадях ребят, совпасть?

10.4. Две окружности равных радиусов пересекаются в точках B и C. На первой окружности выбрана точка A. Луч AB пересекает вторую окружность в точке D, отличной от точки B. На луче DC выбрана точка E так, что $DC = CE$. Докажите, что угол DAE – прямой.

10.5. Вася записывает в каждую клетку таблицы 30×30 по одному числу от 1 до 900 так, что каждое число встречается ровно один раз. После этого Петя отмечает три столбца, а затем Вася, увидев столбцы, отмеченные Петей, отмечает три строки. В конце вычисляется сумма девяти чисел, стоящих на пересечении отмеченных строк и столбцов. Может ли Вася добиться того, чтобы эта сумма делилась на 3000? (Вася сам выбирает, как расставлять числа в таблице.)

11 класс

11.1. Для натурального числа вычисляются суммы любых двух его цифр, стоящих рядом. Найдите наибольшее натуральное число, у которого все эти суммы различны.

11.2. Про квадратный трёхчлен $f(x)$ известно, что $f(0) + f(1) = 0$ и $f(2) + f(3) = 0$. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

11.3. Докажите неравенство $\sqrt[2014]{\frac{1007}{1006}} + \sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}} > 2$.

11.4. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах SA, SB, SC и SD выбраны соответственно точки

A_1, B_1, C_1 и D_1 так, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 проходят через одну точку. Докажите, что если точка A_1 – середина ребра SA, то точки B_1, C_1 и D_1 – середины ребер SB, SC и SD.

11.5. Пятидесяти мальчикам раздали по две карточки с числами: одному с числами 1 и 2, другому – 3 и 4, ещё одному – 5 и 6, …, последнему – 99 и 100. Каждую минуту мальчики разбиваются на 25 пар, и в каждой паре каждый мальчик отдаёт другому карточку с меньшим из двух чисел, которые у него есть. Известно, что при первом обмене у каждого мальчика разность между числами на отданной и полученной карточках была не больше 50. Могло ли случиться так, что через несколько минут по крайней мере у 48 мальчиков окажутся те же карточки, которые у них были вначале?

3.2 Методы решения олимпиадных задач в системе работы с математически одаренными школьниками

Назначение курса математики в школе – усвоение учащимися алгоритмов действий при решении различных типов задач (например, у успешного выпускника школы не должно возникать проблем с решением квадратного уравнения). Происходит «научение» всех (большинства) учащихся, даже не владеющих математическими способностями, выполнению стандартных действий в стандартной ситуации. Крайним примером такого подхода в изучении математики являются некоторые страны Запада. Так американские учебники для массовой школы по своему содержанию очень близки к справочникам по математике для инженеров. Это объемные тома, в которых описаны понятия курса математики и основные приемы для выполнения тех или иных заданий. При этом полностью отсутствуют какие-либо логические обоснования («доказательства») тех или иных методов.

Для успешного решения олимпиадных задач учащимся требуется умение проведения анализа данных и построения новых логических конструкций и моделей. И основой успеха уже является не сумма конкретных знаний учащегося, а его способность логически мыслить, умение создать за короткое время олимпиады достаточно сложную, и, главное, новую для него логическую конструкцию. Недаром только в математических олимпиадах задание может начинаться со слов: «Докажите, что…». В отличие от ряда других дисциплин, где тестовыми заданиями проверяется начитанность, энциклопедичность знаний участника, в математических олимпиадах обязательным является условие новизны заданий. Ведь с точки зрения выявления математических способностей два задания «на одну идею», т. е. различающиеся только числовыми данными, являются абсолютно идентичными. В олимпиадной математике в основу заданий закладывается, напротив, элемент новизны, когда школьник должен самостоятельно построить логическую конструкцию, т. е. продемонстрировать умение «нестандартно мыслить». Ниже представлена система методов решения олимпиадных задач, которая используются при подготовке российских школьников к олимпиадам по математике.

Метод от противного

В ряде задач рассмотрение «дополнительного объекта», в котором доказываемое утверждение не выполняется, приводит к доказательству того, что этот объект не существует.

Пример. На доске написаны несколько натуральных чисел. Известно, что сумма любых двух из них оканчивается либо на 2018, либо на 2019, причем оба варианта встречаются. Докажите, что среди записанных на доску чисел либо ровно одно – чётное, либо ровно одно – нечётное.

Решение. Во-первых, из условия следует, что сумма каких-то двух чисел – нечётна (оканчивается на 2019), значит, среди рассматриваемых чисел есть как чётные, так и нечётные. **Предположим противное:** не выполняется условие, что среди этих чисел либо ровно одно – чётное, либо ровно одно – нечётное. Тогда как чётных, так и нечётных чисел среди рассматриваемых – по крайней мере по два. Пусть числа a и b – чётные, а числа c и d – нечётные. Следовательно, числа $a + b$ и $c + d$ оканчиваются на 2018, а поэтому число $A = a + b + c + d$ оканчивается цифрой 6. С другой стороны, числа $a + c$ и $b + d$ оканчиваются на 2019, а поэтому число A оканчивается цифрой 8. **Противоречие.**

Метод решения или анализа от конца (метод редуцирования)

В некоторых случаях трудно сразу найти всю цепочку рассуждений, приводящую к доказательству требуемого утверждения. В то же время, можно найти утверждение А, из которого следует доказываемое утверждение Б. И цепочка математических рассуждений сокращается за счёт того, что теперь нужно доказать более простое утверждение А.

Пример 1. На диагоналях AC и DB вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны соответственно точки K и L так, что $AK = AB$ и $DL = DC$ (точка K лежит на отрезке OC, а точка L – на отрезке OB, где O – точка пересечения диагоналей AC и BD). Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

Решение. Доказываемое утверждение Б равносильно равенству углов CAD и AKL. Но вписанные, опирающиеся на одну дугу CD углы CAD и CBD равны, а углы CKL и AKL – смежные. Поэтому нам достаточно доказать, что сумма углов CBD и CKL равна $180°$, то есть то, что четырёхугольник $BLKC$ – вписанный (утверждение А). Последнее равносильно равенству углов BKC и BLC (ещё один «обратный шаг»), то есть равенству смежных с ними углов BKA и CLD. А это равенство следует из подобия равнобедренных треугольников AKB и CLD с равными вписанными углами BAC и BDC.

При решении задач, связанных с игрой двух игроков, отыскиваются выигрышные (проигрышные) финальные позиции. После этого определяется выигрышная стратегия для одного из игроков.

Пример 2. На плоскости выбраны 11 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Два игрока по очереди проводят отрезки с концами в данных точках. Из одной точки могут выходить несколько отрезков, но одну пару точек соединять двумя отрезками нельзя. Игрок выигрывает, если после его хода из каждой точки выходит хотя бы один отрезок (игра в этот момент останавливается). Кто из игроков сможет выиграть, независимо от игры его соперника?

Решение. Проанализируем игру с конца. Заметим, что если в некоторый момент игры имеется ровно три точки, не соединённые отрезками с другими точками, и какой-то из игроков, пусть это будет А, сделает ход, использующий хотя бы одну из этих трёх точек, то он проиграет. Действительно, после такого хода будут оставаться либо две точки, либо одна точка, еще не соединённые с другими точками. Соединив две точки отрезком (если их осталось две), или соединив одну оставшуюся точку с какой-то из остальных (такого отрезка ещё не было проведено) игрок Б выиграет, так как после этого каждая точка будет соединена с какой-то из остальных. Теперь покажем, как действовать второму (не начинающему игру) игроку, чтобы выиграть. Он должен делать произвольные ходы до тех пор, пока не останутся три или четыре точки, не соединённые с другими. Если после следующего хода первого игрока теперь останутся две такие точки, то соединив их, второй игрок выиграет. Если нет, то второй игрок должен продолжать играть, оставляя три точки «пустыми». Он сможет это сделать, так как количество отрезков, которыми можно соединить 8 точек чётно: оно равно $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$.

Метод моделирования

Задание с текстовым описанием условия переводится на математический язык, создаётся так называемая математическая модель, включающая в себя логические выражения и алгебраические формулы, связанные соотношениями.

Пример 1. На День Защитника Отечества девочки в классе принесли подарки. Первая принесла один подарок, вторая – два подарка, третья – три подарка, и т.д. Оказалось, что каждому мальчику в классе досталось одинаковое число подарков. Затем на 8 Марта мальчики принесли подарки: первый – один подарок, второй – два подарка, и т.д. И оказалось, что каждой девочке в классе досталось одинаковое число подарков. Докажите, что девочек или мальчиков в классе нечётное количество.

Решение. Пусть в классе x мальчиков и y девочек. Первое условие задачи означает, что $\frac{y(y+1)}{2} = nx$ (1), где n – натуральное число (количество подарков, доставшихся каждому мальчику). Аналогично получаем, что $\frac{x(x+1)}{2} = my$ (2), где m – натуральное число. Уравнения (1) и (2) дают математическую модель данной задачи. Данная система не решается однозначно. Однако можно сделать вывод относительно переменных x и y. Перемножим уравнения (1) и (2), и умножим полученное уравнение на 4. Получим следующее уравнение: $y(y+1)x(x+1) = 4nxmy$, или, с учётом того, что $y \neq 0, x \neq 0$, $(y+1)(x+1) = 4nm$. Отсюда следует, что произведение $(y+1)(x+1)$ – чётное число, то есть по крайней мере один из множителей $y + 1$ и $x + 1$ – чётный. Но тогда хотя бы одно из чисел y или x – нечётно. Утверждение доказано.

Пример 2. Пусть $P(x)$ – многочлен степени n с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что если a, b и c – длины сторон некоторого треугольника, то числа $\sqrt[n]{P(a)}, \sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ – также длины сторон некоторого треугольника.

Решение. Условие задачи можно перевести в математическую модель. Даны положительные числа a, b и c такие, что $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$. Докажите, что для чисел $\sqrt[n]{P(a)}, \sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ выполняются неравенства $\sqrt[n]{P(a)} + \sqrt[n]{P(b)} > \sqrt[n]{P(c)}$, $\sqrt[n]{P(b)} + \sqrt[n]{P(c)} > \sqrt[n]{P(a)}$ и $\sqrt[n]{P(c)} + \sqrt[n]{P(a)} > \sqrt[n]{P(b)}$. Упростим данную модель. Без ограничения общности можно считать, что $a \leq b \leq c$. Тогда заметим, что каждое слагаемое под корнем в выражении $\sqrt[n]{P(c)}$ не меньше соответствующего слагаемого в выражениях $\sqrt[n]{P(a)}$ и $\sqrt[n]{P(b)}$ (в силу неотрицательности коэффициентов многочлена $P(x)$). В силу сказанного модель данной задачи можно упростить. Даны положительные числа $a \leq b \leq c$, $a + b > c$ и многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ с неотрицательными коэффициентами. Нужно доказать, что $\sqrt[n]{P(a)} + \sqrt[n]{P(b)} > \sqrt[n]{P(c)}$ (модель А).

Решим полученную задачу. Вынесем из каждого корня старший член:

$$\sqrt[n]{P(a)} = a\sqrt[n]{a_0 + a_1a^{-1} + a_2a^{-2} + \cdots + a_na^{-n}} = af(a),$$

$$\sqrt[n]{P(b)} = bf(b), \sqrt[n]{P(c)} = cf(c).$$

Заметим, что $f(c) \leq f(b) \leq f(a)$, так как $a^{-k} \geq b^{-k} \geq c^{-k}$.

Следовательно, $cf(c) \leq cf(b)$ и $af(a) + bf(b) \geq (a + b)f(b)$.

Требуемое неравенство следует из условия $a + b > c$.

Метод аналогий

Для ряда задач или математических моделей бывает возможным обнаружить их совпадение или идейную близость с ранее решавшимися задачами или встречавшимися теоремами. В таких случаях достаточно провести знакомое рассуждение для новой задачи.

Пример 1. Даны 72 последовательных натуральных числа. Их разбили на 24 группы по три числа, и в каждой группе числа перемножили. Затем у каждого из полученных произведений подсчитали сумму цифр. Могли ли все полученные суммы оказаться равными?

Решение. В задаче рассматриваются суммы цифр, и она схожа по звучанию с более простой задачей: известно, что натуральное число n в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что n делится на 27. Эта задача решается так: обозначим через s сумму цифр данного числа n. По условию $n = 3s$, следовательно, n делится на 3. Значит, s делится на 3, то есть $s = 3k$. Это означает, что n делится на 9. Тогда и s делится на 9, то есть $s = 9m$. Но тогда $n = 27m$. Задача решена.

Применим идею использования признака делимости на 9 в нашей задаче (формально в ней не идет речь о делимости на 9, но задача включает рассмотрение сумм цифр чисел, что и подсказывает идею решения). Среди данных 72 чисел есть числа, делящиеся на 9. Значит, произведения, в которые данные числа входят, также делятся на 9. Но тогда и суммы цифр этих произведений делятся на 9. Предположим, что все полученные суммы одинаковы. Тогда каждая из них должна делиться на 9, а потому и каждое из 24 произведений должно делиться на 9. Это возможно только в двух случаях: в произведение входит число, делящееся на 9, или же входят два числа, делящихся на 3. Среди 72 последовательных натуральных чисел ровно 8 делятся на 9, а также ровно 24 – 8 = 16, делящихся на 3, но не делящихся на 9. Они могут образовать ещё 8 пар сомножителей, делящихся в произведении на 9. То есть всего 8 + 8 = 16 произведений могут делиться на 9. А их – 24. Получили противоречие. Значит, искомого разбиения не существует.

Пример 2. Замок в форме равностороннего треугольника разбит линиями, параллельными его сторонам, на n^2 равных треугольных комнат. Между любыми двумя комнатами, имеющими общую стену (треугольники с общей стороной) имеется дверь. Какое наибольшее число комнат может пройти рыцарь, если в каждой комнате он может побывать не более одного раза? (Всесоюзная олимпиада, 1968 г.)

Решение. Имеется огромное число задач, решаемых с помощью метода раскраски. Например, такая: может ли хромая ладья обойти всю клетчатую доску 8×8, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, начав с левой нижней клетки, и закончив путь в верхней правой клетке, если она может ходить из одной клетки в другую, когда эти клетки имеют общую сторону?

Эта задача решается так. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Тогда при каждом ходе цвет клетки, на которой находится ладья, меняется. Всего для того, чтобы обойти всю доску, ладья должна сделать нечётное число ходов. Значит, если ладья начала с чёрной клетки, то завершить путь она должна на белой. А указанные угловые клетки одного цвета – противоречие.

В рассматриваемой нами задачи со Всесоюзной олимпиады можно также раскрасить все комнаты замка в шахматном порядке, когда комнаты, имеющие общую стену, будут разных цветов. Заметим, что если верхний треугольник (верхняя на плане комната) имеет белый цвет, то в каждом ряду количество белых треугольников ровно на один больше количества чёрных. Значит, общее количество белых треугольников на n больше, чем чёрных. Следовательно, количество чёрных треугольников равно $\frac{n^2-n}{2}$. И путь максимальной длины может состоять из $2\frac{n^2-n}{2}+1=n^2-n+1$ комнат (он должен начинаться с белой клетки и заканчиваться белой клеткой). Построить пример такого пути несложно: подойдёт обычная «змейка», начинающаяся с верхней комнаты, и обходящая по рядам все комнаты, кроме одной в каждом ряду.

Метод изменения тематики

При данном методе для решения задач из одних разделов математики используются приёмы и теоремы из других её разделов.

Пример 1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL и CN. Пусть P – произвольная точка отрезка LN. Докажите, что расстояние от точки P до стороны AC равно сумме расстояний от этой точки до сторон AB и CB.

Решение. Пусть $LP = x$ и $LN = a$. Рассмотрим функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, являющиеся, соответственно расстояниями от точки P до сторон AC, AB и CB. Легко заметить, что эти функции являются линейными. В то же время, при $x = 0$ (точка P совпадает с точкой L) $f(x) = g(x)$, а $h(x) = 0$. Также при $x = a$ выполняются равенства $f(x) = h(x)$ и $g(x) = 0$. Значит, значения линейных функций $f(x)$ и $g(x) + h(x)$ совпадают при двух различных значениях аргумента, а потому эти функции тождественно равны. Последнее означает выполнение утверждения задачи.

В следующем примере, напротив, неравенство будет доказано с помощью геометрической интерпретации.

Пример 2. Пусть x, y и z – произвольные числа из интервала (0;1). Докажите неравенство $x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - x) < 1$.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной 1 и выберем на его сторонах AB, CA и BC соответственно точки K, L и M так, что $AK = x$, $CL = y$, $BM = z$. Тогда отношение площадей треугольников AKL и ABC равно $x(1 - y)$, так как у этих треугольников общий угол BAC. Аналогично получаем, что $y(1 - z)$ – это отношение площадей треугольников CLM и ABC, а $z(1 - x)$ – это отношение площадей треугольников BMK и ABC. Значит, рассматриваемое выражение есть отношение суммы площадей треугольников AKL , CLM и BMK к площади треугольника ABC, что меньше 1 (так как в треугольник ABC ещё входит треугольник KLM).

Метод обобщения

Для доказательства исходного утверждения, выполняемого при конкретном значении некоторой величины В, доказывается, что утверждение выполняется при всех значениях В из некоторого множества. И, тем самым, оно будет верным и при конкретном значении В. Как правило, доказательство проводится с помощью метода математической индукции.

Пример 1. Докажите, что если на плоскости произвольным образом провести 20 прямых, то части, на которые они разбивают плоскость, можно раскрасить в шахматном порядке (это означает, что любые две части разбиения, имеющие общую границу: отрезок, луч или прямую) при такой раскраске будут иметь разные цвета).

Решение. Докажем с помощью метода математической индукции следующее утверждение: при любом натуральном n если провести n прямых, то области, на которые они разобьют плоскость, можно раскрасить в шахматном порядке. База индукции: $n = 1$. Достаточно раскрасить две полуплоскости в разные цвета. Индукционный переход. Пусть при $n = k$ искомая раскраска существует. Проведем (k + 1)-ю прямую b. Сохраним все цвета по одну сторону от проведенной прямой, а по другую сторону от неё поменяем цвета на противоположные. Тогда любые две области с общей границей, не лежащей на прямой b, по-прежнему будут разных цветов, и для них требуемое условие будет выполняться. А любые две области, граница которых лежит на НОВОЙ прямой b, будут иметь разные цвета в силу перекраски. Утверждение доказано.

В некоторых случаях доказывается более сильное утверждение, которое, тем не менее, доказывается проще. Нередко так доказываются неравенства. В следующих примерах решения упрощаются, если числа в условии обозначить переменными.

Пример 2. Докажите неравенство $\sqrt[2014]{\frac{1007}{1006}}+\sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}}>2.$

Решение. Пусть $A=\sqrt[2014]{\frac{1007}{1006}}+\sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}}$. Тогда

$$A=\sqrt[2014]{\frac{2014}{2012}}+\sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}}>\sqrt[2014]{\frac{2014}{2013}}+\sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}}=x+\frac{1}{x},\ \text{где}\ x=\sqrt[2014]{\frac{2014}{2013}}>0.$$

Для положительных чисел a и b выполняется неравенство о средних: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$. Следовательно, $x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$. Отсюда следует, что $A>2$.

Пример 3. Докажите, что $1997\cdot 1999^3-1998\cdot 1996^3$ – куб целого числа.

Решение. Обозначим $n = 1997$. Тогда $1997\cdot 1999^3-1998\cdot 1996^3=n\cdot(n+2)^3-(n+1)\cdot(n-1)^3=8n^3+12n^2+6n+1=(2n+1)^3$.

Пример 4. Известно, что $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$ – все делители натурального числа n.

Докажите, что $d_1\cdot d_2+d_2\cdot d_3+\ldots+d_{k-1}\cdot d_k<n^2$.

Решение. Все делители числа n разбиваются на пары, произведение которых равно числу n: $d_1 \cdot d_k = n$, $d_2 \cdot d_{k-1} = n$, и так далее. Тогда данную сумму можно переписать в виде: $S = d_1 \cdot d_2 + d_2 \cdot d_3 + \cdots + d_{k-1} \cdot d_k = \frac{n}{d_k} \cdot \frac{n}{d_{k-1}} + \cdots + \frac{n}{d_2} \cdot \frac{n}{d_1} = n^2(\frac{1}{d_1 \cdot d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{k-1} \cdot d_k})$. Для доказательства утверждения заметим, что $d_1 = 1$, тогда $d_2 \geq 2, d_3 \geq 3$, …, $d_k \geq k$. Заменим выражение, которое нужно оценить, на большее по величине: $S \leq n^2(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k})$, Выражение в скобках уже легко оценить: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{k} < 1$. Значит, $S < n^2$.

Методы введения дополнительных объектов:
дополнительные построения при решении задач по геометрии,
введение новых переменных в алгебре и теории чисел

Пример 1. Внутри остроугольного треугольника ABC выбирается точка P. Докажите, что сумма расстояний от точки P до вершин треугольника минимальна, если стороны треугольника видны из точки P под углом $120°$ (то есть углы APB, BPC и CPA равны $120°$).

Решение. Построим новый треугольник AB_1C_1, полученный поворотом треугольника ABC вокруг вершины A по часовой стрелке на угол $60°$. Пусть P_1 – образ точки P при таком повороте. Тогда $AP = AP_1$ и угол PAP_1 равен $60°$. Это означает, что треугольник APP_1 – равносторонний. Значит, $PP_1 = PA$. Кроме того, треугольник AP_1C_1 получен из треугольника APC поворотом, поэтому $P_1C_1 = PC$. Тогда $PA + PB + PC = BP + PP_1 + P_1C_1$. Эта сумма минимальна, когда ломаная BPP_1C_1 является отрезком, и точка P лежит на нём. Но тогда смежные с углами APP_1 и AP_1P равностороннего треугольника APP_1 углы APB и AP_1C_1 равны $120°$. А, значит, и угол APC равен $120°$. Утверждение доказано (эта точка называется точкой Торричелли треугольника).

Пример 2. Докажите, что уравнение $(x-y)^3$+$(y-z)^3 + (z-x)^3 = 30$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Перейдём от исходных переменных к новым: $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$. Для полученных чисел выполняются равенства $a^3 + b^3 + c^3 = 30$ и $a + b + c = 0$. Значит, числа a, b, c являются корнями кубического уравнения $t^3 + 0 \cdot t^2 + At + B = 0$. Подставим числа a, b, c в полученное уравнение и сложим получившиеся равенства: $a^3 + b^3 + c^3 + A(a + b + c) + 3B = 0$. Отсюда, с учетом равенств $a^3 + b^3 + c^3 = 30$ и $a + b + c = 0$, получаем, что $B = -10$. Значит, в силу теоремы Виета, $abc = 10$. Мы получили, что a, b, c – целые числа, сумма которых равна нулю, а произведение равно 10. Несложным перебором легко показать, что таких троек чисел не существует.

Метод интуитивного угадывания ответа

В задачах, в которых ответ не приведен (в отличие от задач с формулировкой «докажите, что …», где ответ заранее указан), рассмотрением некоторых частных случаев высказывается гипотеза о том, что ответ равен такой-то величине (такому-то выражению), который впоследствии обосновывается строгими математическими рассуждениями.

Пример 1. Рассмотрим последовательность натуральных чисел, построенную по следующему правилу: $x_1 = 4, x_2 = 6,$ а x_{n+1} – наименьшее составное число, которое больше, чем $2x_n - x_{n-1}$. Найдите x_{200}.

Решение. Выпишем несколько первых членов последовательности: $x_3 = 9, x_4 = 14 = x_3 + 5, x_5 = 20 = x_4 + 6, x_6 = 27 = x_5 + 7$. Высказывается гипотеза о том, что $x_n = x_{n-1} + n + 1$ при $n \ge 3$. Это равносильно тому, что

$$x_n = x_{n-1} + n + 1 = x_{n-2} + n + n + 1 = x_{n-3} + n - 1 + n + n + 1 = ... = x_3 + 5 + 6 + ... + n + 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Докажем это равенство по индукции. При $k = 3$оно верно. Пусть оно верно при $k = n$, покажем, что оно верно и при $k = n + 1$. Имеем: x_{n+1} – это число большее, чем $2x_n - x_{n-1}$, т.е. большее числа $2\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1$.

Это означает, что $x_{n+1} \ge \frac{(n+1)(n+4)}{2}$. Но данное число при любом $n \ge 3$ составное, так как является произведением двух чисел разной четности, каждое из которых больше 2. Значит, именно об этом числе и идет речь в условии. Ответ: $x_{200} = \frac{200\cdot 203}{2} = 2030$.

Пример 2. Какое наибольшее число коней, не бьющих друг друга, можно расставить на доске 8×8 ?

Решение. Догадаться до ответа поможет рассмотрение доски меньшего размера – 4×4 или даже 2×4. Рассмотрев второй случай, можно высказать гипотезу о том, что количество коней составляет ровно половину от числа клеток в таблице. Докажем это утверждение. Вначале покажем, что на доске 2×4 можно расставить не более 4 (то есть половину от числа клеток) не бьющих друг друга коней. Для этого занумеруем клетки доски 2×4, как показано на рисунке.

В каждой паре клеток, занумерованных одинаковыми числами, может стоять не более одного коня. Значит, всего – не более 4 коней. Разбив доску 8×8 на восемь досок 2×4 , тогда получаем, что на доску 8×8 можно поставить не более $4 \cdot 8 = 32$ коней. Если поставить коней во все черные клетки, то они не будут бить друг друга. Ответ: 32 коня.

Кроме того, метод позволяет определиться с путём решения задачи для следующего широкого класса задач. Так если в задаче ставится вопрос «верно ли, что при всех значениях переменной из множества M выполняется условие A?», то ответ в задаче может быть позитивным, и тогда предъявляется доказательство этого утверждения; либо же ответ негативный, и тогда требуется предъявление контрпримера, показывающего, что данное следствие выполняется не всегда. Есть еще один класс задач, когда вопрос ставится следующим образом: «существует ли объект P, удовлетворяющий условию B?». Негативный ответ на вопрос задачи требует доказательства того, что данный объект не существует. А позитивный ответ на вопрос предполагает простое предъявление объекта P, с проверкой того, что он удовлетворяет условиям B.

Метод решения задач такого типа называется **Методом «примеров» и «контрпримеров».** Понятно, что он является частным случаем **Метода интуитивного угадывания ответа**, так как угадывание правильного ответа: «Да» или «Нет» резко упрощает нахождение решения задачи.

Пример 3. Существуют ли 100 последовательных натуральных чисел таких, что среди них ровно 10 простых чисел?

Решение. Покажем, что ответ в этой задаче позитивный. Среди первых 100 натуральных чисел A = $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ больше 10 простых. В то же время, среди 100 последовательных чисел B =$\{101! + 2, 101! + 3, 101! + 4, \dots, 101! + 101\}$ каждое число является составным. Начнём двигать сотню последовательных чисел по натуральному ряду от A до B. Вначале в ней более 10 простых чисел, а конце – ни одного. Но при сдвиге сотни на один шаг число простых чисел в сотне либо сохраняется, либо уменьшается ровно на 1, либо увеличивается ровно на 1. Значит, в некоторых момент оно станет равным 10 (дискретная непрерывность).

Пример 4. На плоскости нарисованы два непересекающихся круга. Верно ли, что для любой точки плоскости, расположенной вне этих кругов, можно выбрать прямую, проходящую через эту точку, которая не будет пересекать ни один из этих кругов?

Решение. Оказывается, что утверждение задачи неверно (!). Проведем к двум данным кругам общие внешние и внутренние касательные. Тогда образуются четыре «треугольные» области, у которых две границы лежат на касательных, а третьи границы лежат на окружностях. Легко проверить, что любая точка, лежащая в «треугольнике», такова, что проходящая через неё прямая обязательно пересечёт хотя бы один из кругов.

Пример 5. В произведении семи натуральных числе каждый множитель уменьшили на 3. Могло ли произведение этих чисел уменьшиться ровно в 13 раз?

Решение. Покажем, что такое возможно. Пусть пять из сомножителей равны 1, шестой равен 2, а седьмой равен a. Их произведение равно $2a$, а после уменьшения превратилось в $(-2)^5(-1)(a-3)$. Значит, если $32a - 96 = 13 \cdot 2a$, то условие будет выполняться. Корнем этого уравнения является число a = 16. Итак, числа 1, 1, 1, 1, 1, 2, 16 дают искомый набор.

Пример 6. Существуют ли три натуральных числа, каждое из которых больше 1 и таких, что квадрат каждого из них, уменьшенный на 1, делится на каждое из двух других чисел?

Решение. Покажем, что такая тройка чисел не существует. Предположим, что a, b, c – искомая тройка чисел, удовлетворяющих этим условиям, и a – наименьшее из них. Тогда из того, что b^2-1 делится на c, следует, что числа b и c – взаимно-простые (если бы у них был общий делитель d >1 , то оказалось бы, что и число b, и число b^2-1 делятся на d). Итак, число a^2-1 делится на взаимно-простые числа b и c. Но тогда a^2-1 делится и на произведение bc. Получили, что натуральное число a^2-1 (по условию a>1) делится на натуральное число bc, следовательно, $a^2-1\geq bc$. Это неравенство противоречит выбору числа a: $a\leq b, a\leq c$.

Метод поиска оригинального (нестандартного) решения

В ряде случаев решение сложной задачи может быть найдено с помощью нестандартного приёма, оригинального рассуждения, при том, что нахождение решения с помощью стандартных приёмов затруднено. Путь решения не имеет очевидной связи с формулировкой задачи.

Пример 1. Дана последовательность, построенная по следующему правилу: $x_1=1\,, x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$, при $n\geq 2$. Докажите, что $x_{100}>14$.

Решение. Оказывается, что для оценки скорости роста членов последовательности нужно рассмотреть скорость роста их квадратов! Возведём рекуррентное соотношение в квадрат: $x_{n+1}^2=x_n^2+2+\frac{1}{x_n^2}>x_n^2+2$. Следовательно, $x_{100}^2>x_{99}^2+2>x_{98}^2+4>\cdots>x_1^2+198=199>196$, откуда следует утверждение задачи.

Пример 2. Дана пирамида, в основании которой лежит выпуклый многоугольник. Стены пирамиды падают внутрь на её основание так, что сторона стены (боковой грани пирамиды), лежащая на основании пирамиды, остаётся на месте.

Докажите, что основание пирамиды будет полностью закрыто упавшими стенами.

Решение. Рассмотрим произвольную точку K на основании $A_1A_2 \dots A_n$ данной пирамиды $SA_1A_2 \dots A_n$. Покажем, что точка K будет закрыта одной из упавших стен. Поместим внутри пирамиды сферу малого радиуса такую, чтобы она касалась плоскости основания в точке K. Начнём «раздувать» сферу (увеличивать её радиус) так, чтобы касание в точке K сохранялось. Тогда в некоторый момент сфера коснётся одной из граней пирамиды. Пусть T – точка касания, и эта точка лежит в грани SA_kA_{k+1}. По свойству касательных, проведенных к сфере из одной точки, $A_kK = A_kT$ и $A_{k+1}K = A_{k+1}T$. Отсюда следует равенство треугольников A_kKA_{k+1} и A_kTA_{k+1} по третьему признаку. Это означает, что именно стена SA_kA_{k+1} закроет точку K: с ней при падении совпадёт точка T.

Метод оценки и метод полного перебора

Вначале доказывается, что значения некоторой величины не превосходят, например, приведённого числа, а затем для теперь уже конечного числа значений этой величины проводится полный перебор по этим случаям.

Пример 1. Найдите все натуральные n, для которых система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 9 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = 1 \end{cases}$$

имеет решения в положительных числах.

Решение. Перемножим данные равенства. Получим:

$$n + \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}\right) + \left(\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3}\right) + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = 9.$$

Сумма чисел в каждой скобке не меньше 2. Поэтому левая часть равенства не меньше $n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2$. Отсюда $n \le 3$. Но при $n = 1$получаем: $x_1 = 9$ и $\frac{1}{x_1} = 1$ – несовместную систему. При $n = 2$ решением системы является пара чисел $\frac{1}{2}(9 + \sqrt{45})$ и $\frac{1}{2}(9 - \sqrt{45})$. А при $n = 3$ подходит тройка чисел $(3;3;3)$.

Ответ: $n = 2$, $n = 3$.

Пример 2. Для каждого натурального n, не являющегося точным квадратом, вычисляются все значения переменной x, для которых оба числа $x + \sqrt{n}$ и $x^3 + 172\sqrt{n}$ являются целыми. Найдите общее количество таких значений x.

Решение. Обозначим первое выражение через a, второе – через b, а 172 – через c. Тогда получаем равенства $x = a - \sqrt{n}$ и $x^3 = b - c\sqrt{n}$, откуда $(a-\sqrt{n})^3 = b - c\sqrt{n}$, то есть $(3a^2 - c + n)\sqrt{n} = b - a^3 - 3an$. Полученное равенство возможно только если обе его части равны нулю (число $\sqrt{n}$ по условию иррационально, остальные числа – целые). Отсюда $3a^2 = c - n, b = a^3 + 3an$. Для каждого n, для которого $c - n > 0$, существуют два значения величины a, и по значениям n и a однозначно определяется значение b, а также значение x. А в случае $c - n = 0$ получаем: $a = b = 0$ – одно значение величины a. Из неравенства $3a^2 < c$ находим, что $|a| \leq 7$. Перебрав все значения $|a|$ от 0 до 7, находим, что при $|a|$ равном 1, 6 и 7 число $n = 172 - 3a^2$ является точным квадратом (соответственно 169, 64 и 25). Значения $|a|$ равные 2, 3, 4 и 5 дают по два решения, значение $|a|$ равное 0 – одно решение. Ответ: 9.

Метод подзадач

Исходная задача разбивается на совокупность задач, которые логически связаны между собой и которые решаются последовательно.

Пример 1. Функция $f(x)$, определенная при всех $x \in R$, такова, что для любой линейной функции $l(x)$ уравнения $f(x) = l(x)$ и $x^2 = l(x)$ одновременно либо имеют решения, либо не имеют решений. Докажите, что $f(x) = x^2$.

Решение. Решение задачи разбивается на две задачи. Первая – доказательство того, что при всех значениях $x \in R$ выполняется неравенство $f(x) \geq x^2$. А вторая, что неравенство $f(x) > x^2$ не может выполняться ни при одном значении $x \in R$. Вместе это и будет означать, что $f(x) = x^2$.

1 подзадача. Пусть существует такое число x_0, что $f(x_0) < x_0^2$. Проведем через точку $K(x_0; x_0^2)$ касательную к графику параболы $y = x^2$, а через точку $P(x_0;\ f(x_0))$ – прямую, параллельную этой касательной. Пусть $l(x) = ax + b$ – уравнение этой прямой. Тогда уравнение $f(x) = l(x)$ имеет решение $x = x_0$. В то же время уравнение $x^2 = l(x)$ решения не имеет (прямая $y = ax + b$ лежит ниже касательной к параболе $y = x^2$ и параллельна ей). Значит, неравенство $f(x) < x^2$ не выполняется ни при одном $x \in R$. Отсюда $f(x) \geq x^2$.

2 подзадача. Пусть существует такое число x_1, что $f(x_1) > x_1^2$. Проведем через точку $M(x_1; x_1^2)$ касательную к графику параболы $y = x^2$. Пусть $y = m(x)$ – уравнение этой прямой. Тогда уравнение $x^2 = m(x)$ имеет решение $x = x_1$. В то же время, уравнение $f(x) = m(x)$ решений не имеет, так как при доказательстве подзадачи 1 мы показали, что весь график $y = f(x)$ лежит внутри параболы $y = x^2$, и, по предположению, не проходит через точку M, в то время как все точки прямой $y = m(x)$ лежат, за исключением точки M, ниже параболы. Утверждение доказано.

Классическими задачами на метод подзадач являются задачи тематики «оценка + пример». В этих задачах вначале устанавливается, что искомая величина не больше (не меньше) некоторого значения – первая подзадача, а потом строится пример, показывающий, что нестрогое неравенство может обратиться в равенство – вторая подзадача.

Пример 2. На левой половине доски написаны 11 натуральных чисел, а на правой – наибольшие общие делители каждой пары чисел левой половины доски. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на левой половине доски, если известно, что любое число, написанное на одной половине доски, встречается и на другой ее половине?

Решение. Заметим вначале, что для любых натуральных чисел $A \geq B$ выполняется неравенство НОД$(A, B) \leq A$, причем равенство выполняется только в случае, когда $A = B$. Пусть $A \geq B$ – два самых больших числа на левой половине доски. Тогда на правой половине число A может появиться только в одном случае, когда $A = B$. В то же время НОД всех других пар чисел будет меньше A. Значит, на левой половине доски не больше 10 различных чисел («оценка», то есть подзадача 1). Построим пример, показывающий, что эта оценка достижима (подзадача 2). Записав на левую половину доски числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 1024, на правой мы получим точно такие же числа.

3.3 Формы работы с математически одарёнными детьми

Базовых сценариев математических соревнований (как личных, так и командных), всего три. Различаются они по тому, что считается решением задачи.

1. ***Олимпиада***. Участники сдают полные решения задач, жюри их проверяет и выставляет баллы.

2. ***«Блиц»***. Время на решение очень жёстко ограничено, поэтому вместо решений разрешено сдавать только ответы, без обоснований и объяснений.

3. ***Тест***. Список вариантов ответа для каждой задачи приведен изначально, нужно только сделать правильный выбор.

При этом каждый из сценариев имеет устоявшиеся варианты. Например, олимпиады бывают письменными и устными (в последних участник рассказывает своё решение члену жюри прямо во время олимпиады и имеет фиксированное число попыток на каждую задачу). Стоимость задач может быть одинаковой (как на всех этапах Всероссийской олимпиады) либо различной (как на Турнире Городов, когда каждая задача стоит заранее оговоренное число баллов). Наконец, сценарий проведения игры может быть конкурентным и неконкурентным («драка» или «заплыв»). При «драке» баллы за каждую задачу достаются не всем, а только тем, кто её решит раньше других (в более мягком варианте баллы начисляются всем, но решившие задачу раньше получают больше баллов, чем решившие позднее). При «заплыве» все решают параллельно одни и те же задачи, и баллы каждой команды не зависят от результатов других команд, а победитель определяется уже на финише, по достигнутому результату.

Конкурентные сценарии обычно являются более зрелищными и динамичными, чем неконкурентные – поэтому разработчики ряда математических игр стараются внести в них элементы конкурентности. Так, «математическая абака» – это вариация стандартного блица, но с бонусными баллами за скорость решения задач и полноту «накрытия» каждой темы. Впрочем, наиболее популярные командные игры ушли от породившего их базового сценария очень далеко. Например, матбой – вовсе не то же самое, что устная «драка» для двух команд, а математическая регата – не совсем то же самое, что многотуровая командная олимпиада.

В принципе, организатору игры ничто не мешает выдумать и опробовать какие-нибудь собственные «навороты» на базовые сценарии. Например, объявить о том, что баллы за задачу равны её «рейтингу» в ходе игры – то есть количеству команд, которые её не решили. В этом случае баллы нельзя выставить сразу, но зато это можно сделать сразу после окончания игры. Или вот ещё вариант введения конкурентности для многокомандных «блицев» – баллы за решение задачи уменьшаются после приема каждого верного ответа и увеличиваются после каждой попытки дать неверный ответ. Разумеется, при этом число допустимых попыток ответа у одной команды должны быть ограничено. Вариант: за каждую такую попытку должен начисляться штраф, превышающий рост стоимости задачи. В конкурентных сценариях можно использовать механизм аукциона: право отвечать задачу первым получает тот, кто больше «заплатил» (при этом начальная платежеспособность у всех должна быть одинаковой, а дальнейшее может уже зависеть и от успешности решения задач…). Ещё одной очень зрелищной и динамичной вариацией является «чеширский кот» – игрок, решивший задачу, после сдачи решения в жюри покидает команду (например, переходит на другое место и получает следующую задачу уже самостоятельно, а другие игроки команды решает оставшиеся задачи уже без него). Из схемы «чеширского кота» выросла такая увлекательная игра, как математическая карусель.

Ниже приведены несколько нестандартных сценариев.

Атаки и защиты

Последовательно разыгрывается 5 задач. Перед каждой задачей ведущий оглашает её стоимость. Команды пишут на бумажке либо название (номер, если названия неизвестны) команды, которую они хотят атаковать, или букву «З», если выбирают защитную тактику. Решения задач сдаются судьям устно не позднее через заранее оговоренное время.

Если команда защищается, то:

- В случае правильного решения получает объявленную стоимость.

- В случае неправильного решения из очков команды вычитается объявленная стоимость задачи, умноженная на число команд, «атаковавших» её и давших верное решение.

Если команда «атакует», то:

- Команда получает на свой счёт удвоенную стоимость, если решила задачу правильно, а «жертва» не смогла «защититься» (дала неправильное решение в «защите» или «атаковала» сама).

- Команда получает одинарную стоимость, если решила задачу правильно, а «жертва» успешно «защитилась».

Если на «атаковавшую» команду «нападали» другие, то из её очков вычитается стоимость задачи, умноженная на количество команд, «атаковавших» её и решивших задачу верно.

Горка

Игра, идеально приспособленная к проведению прямо на школьном уроке. Разыгрывается 5 задач, причем первые четыре являются подготовительными к пятой. Стоимость первой задачи – 1 очко, каждая следующая стоит вдвое дороже предыдущей (таким образом, верное решение пятой задачи приносит сразу 16 очков). Если команда решает задачу правильно, к набранным ею очкам прибавляется стоимость задачи, если неправильно – отнимается. Один раз за всю игру команда может «сбросить» задачу (отказаться отвечать на неё), тогда она получает за неё 0 очков.

Блок-блиц

Разыгрывается несколько (в зависимости от имеющегося времени) блоков, состоящих из 5 несложных задач каждый. Условия задач каждого блока выдается сразу, второй блок выдается только после сдачи первого. Общее время на решение всех задач очень сильно ограничено (скажем, для двух блоков оптимальное время – 20 минут). В каждой задаче принимается только ответ. Первая задача в каждом блоке стоит 1 очко, вторая – 2, …, пятая – 5, неверные ответы очков не приносят (но и не штрафуются). Если команда верно отвечает на все задачи одного блока, то она получает ещё 5 очков. Таким образом, ответив на все вопросы блока, команда получает в сумме 20 очков.

Верная ставка

Как и в блок-блице, разыгрывается несколько блоков по 5 задач. Перед выдачей задач блока каждая команда объявляет, сколько задач в блоке она обязуется решить верно. Если она угадала, то получает 10 очков, если «перебрала» – то получает очки только за «перебранные» задачи (по 1 очку за каждую), а если недобрала – то имеет штраф 2 очка за каждую недобранную задачу.

Вист или пас

Это даже не игра, а схема начисления очков при последовательном решении задач. Ответ на задачу команда записывает по своему выбору на одной из двух сторон односторонней цветной бумаги. Ответ, записанный на «цветной» стороне, означает «вист». Если он верен, команда получает два очка, если нет – минус одно. Ответ, записанный на «белой» стороне, означает «пас». Если он верен, команда получает 1 очко, если нет – 0 очков.

Утечка мозгов

Последовательно разыгрывается столько задач, сколько играет команд. Один из игроков команды является «блуждающим» – первую задачу он решает за свою команду, а на каждую следующую задачу уходит в следующую команду. Если команда даёт правильный ответ на задачу, она получает на свой счёт 2 очка. Если правильно отвечает та команда, в которую ушёл «блуждающий» игрок, то команда получает ещё 1 очко.

Математическая драка

Матдрака – развлекательное соревнование, регулярно проводимое в первый день для «разогрева» на Российских фестивалях юных математиков (Краснодарский край). В ней принимают участие одновременно все команды, и продолжается драка около двух часов. Правила драки очень просты: командам зачитывается условие задачи и дается время на её обсуждение; первая команда, предъявившая верный ответ с верным же обоснованием, получает очко. В этот момент решение задачи всеми командами прекращается, и ведущий зачитывает условие следующей задачи.

Команда, первой набравшая определённое число очков (обычно 3 или 5), считается победителем и в дальнейшем решении задач не участвует - чтобы дать шансы другим. Дальше таким же образом определяются второй и третий призёры. Всего на драку готовится 30–35 задач разного уровня трудности. Понятно, что драка несет большой элемент везения и случайности - поэтому её итоги нельзя рассматривать как показатель силы команды или её сыгранности.

Приведем **избранные задачи математических драк**.

1. На ленте написана бесконечная в обе стороны последовательность цифр, причем в ней встречается различных десятизначных чисел (состоящих из десяти подряд стоящих цифр) столько же, сколько и различных девятизначных. Может ли какая-либо её «правая часть» быть десятичной записью числа «пи»? (нет, т.к. последовательность периодическая).

2. В соревнованиях участвуют 10 фигуристов. Соревнования судят трое судей следующим способом: каждый судья по-своему распределяет между фигуристами места (с первого по десятое), после чего победителем считается фигурист с наименьшей суммой мест. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма у победителя (победитель единственный)? (15)

3. Два поезда едут по перпендикулярным путям к точке пересечения. Один поезд находится от неё на расстоянии 80 км, а его скорость 30 км/ч. Другой поезд – на расстоянии 40 км, и его скорость 40 км/ч. Через какое время поезда будут на наименьшем расстоянии друг от друга? (через 96 минут)

4. В таблицу, содержащую A строк и B столбцов, вписали по строкам натуральные числа от 1 до AB в порядке возрастания, начиная с первой строки. Известно, что число 20 находится в третьей строке, 41 - в пятой, а 103 - в последней. Найдите все возможные A и B. (A=12, B=9)

5. Из квадратного листа бумаги в клетку, содержащего целое число клеток, вырезали квадрат, содержащий целое число клеток так, что осталось 124 клетки. Сколько клеток содержал первоначальный лист бумаги? (1024)

6. Десяти собакам и кошкам скормили 56 галет. Каждой собаке досталось 6 галет, а каждой кошке – 5. Сколько было собак и сколько кошек? (6 собак, 4 кошки)

7. Какое наибольшее число пешек можно поставить на шахматную доску, если никакие две пешки не могут стоять на различных полях, симметричных относительно поля e4. (40)

8. Имеется 7 бочек, доверху наполненных квасом, 7 таких же бочек, но наполовину наполненных, и 7 пустых. Как погрузить эти бочки на 3 машины, чтобы на каждой машине было поровну и бочек, и кваса ? (Например, (1,5,1), (3,1,3), (3,1,3))

9. Какое максимальное число пятниц в одном году может попадать на 13-е числа месяца? (3 – например, в невисокосном году в феврале, марте и ноябре)

10. Какое минимальное число понедельников в одном году может попадать на 31-е числа месяца? (0)

11. Сколько двоек имеется в разложении на простые множители числа 1995! ? (1987)

12. Из 50 внешне одинаковых монет одна фальшивая – отличная по весу от остальных. За какое минимальное число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно заведомо определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая? (за 2)

13. Сколько натуральных чисел, меньших тысячи, в десятичной записи которых нет тройки, делятся на 3 ? (242)

14. Каково наибольшее число различных попарно взаимно простых натуральных чисел от 1 до 1995, не являющихся простыми? (15 – это числа 12, 22, 32, ..., 412, 432)

15. Диагональ разбивает равнобокую трапецию на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции. (72 и 108 градусов)

16. Натуральное число назовем уравновешенным, если в его десятичной записи некоторое начало совпадает с некоторым концом, например, 1, 199519 и др. Существует ли число, которое становится уравновешенным при приписывании к нему справа любой десятичной цифры? (Да, это десятый член последовательности 1, 121, 1213121, 121312141213121...)

17. Найдите геометрическое место точек, каждая из которых делит некоторую хорду данной единичной окружности в отношении 3:5. (кольцо, внешний радиус которого 1, а внутренний ¼).

18. В правильно идущих часах (с 12-часовым циферблатом) испортился механизм боя, а именно, они отбивают 1, 2, ..., 12, 13, 1, 2, ..., 12, 13 раз. В 12 часов утра третьего октября часы пробили 12 ударов. Когда в следующий раз количество ударов совпадет с показаниями часовой стрелки? (в 1 час дня 9-го октября).

19. Имеется 10 различных замков и 10 ключей к ним. За какое наименьшее число попыток можно наверняка определить, какой ключ от какого замка? (45)

20. Разрежьте прямоугольник 2×1 на 5 частей, из которых можно сложить два одинаковых прямоугольника, подобных исходному. (несколько решений, нужен рисунок)

21. На сколько частей делят куб все его плоскости симметрии? (на 48)

22. Каждому выпуклому четырёхугольнику поставим в соответствие неупорядоченный набор чисел – длин всех его сторон и диагоналей. Справедлив ли признак равенства четырёхугольников по соответствующим им наборам? (нет, нужны контрпримеры)

23. 10 рабочих (некоторых надо назначить малярами, а остальных – монтажниками), должны изготовить 50 изделий. Каждое изделие должно быть первоначально окрашено (время окраски – 10 минут), высушено (5 минут), а затем смонтировано (20 минут). За какое наименьшее время можно выполнить эту работу? (195 минут, – например, 3 маляра, 6 монтажников и 1 начальник).

24. Двое играют в «крестики-нолики» на бесконечной клетчатой бумаге. Первый игрок каждым своим ходом ставит один крестик в любую свободную клетку, а второй – два нолика в две любые свободные клетки. Первый выигрывает, если через 100 ходов в некотором квадрате 2×2 будут хотя бы три одинаковых значка – крестика или нолика. Иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре? (первый игрок)

25. Могут ли одновременно быть полными квадратами числа $3n+1$ и $4n+3$? (нет, второе число вообще не бывает полным квадратом)

26. В поезде Москва – Ярославль ресторан находится в 8-м вагоне, а в поезде Ярославль-Москва – в 12-м (от головы поезда). Сколько вагонов в поезде? (19, считая ресторан)

27. Может ли сумма цифр числа быть больше суммы цифр квадрата этого числа? (да, например, квадрат числа 39 равен 1521).

28. Могут ли 5-я, 6-я, и 11-я степени различных натуральных чисел образовывать в данном порядке геометрическую прогрессию? (да – например, 225, 218 и 211)

29. Рассмотрим число, записанное n девятками. Чему равна сумма цифр куба этого числа? ($18n$)

30. В классе есть девочки трёх различных весов и трёх различных ростов. Верно ли, что есть три девочки, попарно различающиеся по обоим параметрам? (не обязательно. Например, представьте, что девочки среднего роста имеют только минимальный или максимальный вес, а девочки среднего веса – только максимальный или минимальный рост. Из любых трёх девочек у каких-то двух будет совпадение либо в росте, либо в весе)

31. Правильный шестиугольник разрезали по диагонали пополам. Можно ли полученную половинку разрезать на 4 равные фигуры? (да, например, на равные равнобедренные трапеции).

32. Некоторую работу могут выполнить трое рабочих. Второй и третий могут её выполнить в 2 раза быстрее первого; первый и третий могут вместе выполнить её в 3 раза быстрее второго. Во сколько раз первый и второй могут выполнить эту работу быстрее, чем третий? (в 7/5 раза).

33. Возраст человека в 1997 году был равен сумме цифр года его рождения. Сколько ему лет? (22 года)

34. Из А в В одновременно вышли 2 человека. Первый шел по проселочной дороге со скоростью 5 км/ч, второй шел по шоссе со скоростью 4 км/ч. Первый из них пришел в В на час позже и прошел на 6 км больше. Найдите расстояние от А до В по шоссе. (4 км)

35. Найдите произведение трёх чисел, сумма квадратов и сумма кубов которых равна 1. (0)

36. В переплетной мастерской было 92 листа белой и 135 листов цветной бумаги. На переплёт каждой книги уходит 1 лист белой и 1 лист цветной бумаги. После переплёта нескольких книг белой бумаги стало в 2 раза меньше, чем цветной. Сколько книг было переплетено? (49)

37. Длины сторон треугольника – последовательные целые числа. Найдите стороны этого треугольника, если известно, что одна из его медиан перпендикулярна одной из его биссектрис. (2,3,4)

38. Правильный восьмиугольник двумя прямыми разрезами разбит на 4 части равной площади. Найти все возможные значения угла между прямыми. (прямой)

39. Существует ли трёхзначное n такое, что nn+(n+1)n делится на 1999? (да, например, 999)

40. Дана арифметическая прогрессия, все члены которой натуральные числа. Всегда ли в ней найдутся 1997 членов с одинаковой суммой цифр? (да, $a+10kd$, если $10k>a$)

41. Некоторое число A делят с остатком на все натуральные числа меньшие A. Сумма всех различных (!) остатков оказалась равной A. Найдите A. (10)

42. Может ли четырёхугольник, две противоположные стороны которого равны, иметь три тупых угла? (нет)

43. Вокруг окружности описан пятиугольник, длины сторон которого – целые числа, а первая и третья стороны равны 1. На какие отрезки делит вторую сторону точка касания? (два отрезка по ½)

44. Двое участников шахматного турнира, сыграв равное количество игр, заболели и выбыли из турнира. После этого турнир был доигран до конца. Играли ли между собой выбывшие участники, если всего было сыграно 23 партии? (нет)

45. Можно ли расставить в вершинах куба числа от 1 до 12 так, чтобы суммы чисел, стоящих на каждой грани, были равны? (да, – нужен пример)

46. Можно ли расположить по кругу числа от 1 до 10 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел не делилась на 3? (Да: 3,6 и 9 не рядом, между ними числа с одинаковым остатком от деления на 3).

47. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Верно ли, что треугольник ABC равнобедренный, если известно, что площади треугольников AOC_1 и COA_1 равны? (Да, – нужно доказательство)

48. Все ученики класса в воскресенье были на катке. Каждый мальчик встретился на катке с каждой девочкой. Вася утверждал, что на катке встретились обязательно либо все мальчики, либо все девочки, а Ира – что это не обязательно. Кто из них прав? (Вася).

49. Найдите число n, не являющееся степенью тройки, такое, что число, составленное из n единиц, делится на n. (например, 111)

50. Прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника, делит его на две части. Какое наибольшее значение может принимать отношение площадей этих частей? (5/4)

51. Инженеры всегда говорят правду, а коммерсанты всегда лгут. F и G – инженеры. A объявляет, что B утверждает, что C уверяет, что D говорит, что E настаивает на том, что F отрицает, что G – инженер. C объявляет также, что D – коммерсант. Если A – коммерсант, то сколько всего коммерсантов может быть в этой компании? (трое)

52. В пространстве расположены несколько плоскостей, любые три из которых пересекаются по прямой. Верно ли, что все плоскости имеют общую точку? (да)

53. Длины двух медиан треугольника не больше 1. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник? (2/3)

54. Найдите наибольшее натуральное число, каждая некрайняя цифра которого меньше среднего арифметического соседних с ней цифр. (96433469).

55. Найдите все натуральные числа, которые в 5 раз больше произведения своих цифр. (175)

56. Сколько натуральных чисел от 2 до 999 являются степенями натуральных чисел? (139)

57. Какое число стоит на 1998-м месте в последовательности: 1, 2, 2, 3, 3, 3, … ? (63)

58. Можно ли на двух параллельных прямых расположить несколько точек так, чтобы, соединив отрезками все пары точек, лежащих на разных прямых, мы получили ровно 7 точек пересечения отрезков, лежащих между прямыми? (да)

59. Из произведения $1\times2\times\ldots\times1998$ вычеркнули все числа, делящиеся на 5. Какова будет последняя цифра получившегося произведения? (4)

60. Числа x и y – целые. Какие натуральные значения может принимать выражение $(x^2+y^2)/xy$? (только 2)

61. Укажите число, большее 1 000 000, не представимое в виде суммы 18-ти 18-х степеней целых чисел. (например, 10 000 000)

62. Дан прямоугольный треугольник. Из вершины прямого угла проведены медиана и высота. Найдите углы треугольника, если медиана вдвое длиннее высоты. (15 и 75 градусов)

63. Какое максимальное число рёбер правильной n-угольной призмы может пересекать плоскость, не проходящая через вершины призмы? (n+2)

64. Найдите все двузначные числа, которые после умножения на обе свои цифры дают число, записываемое одинаковыми цифрами. (11, 22, 37)

65. Найдите все треугольники, углы α, β и γ которых удовлетворяют соотношениям: $\cos\alpha = \sin\beta$, $2\cos\beta = \sin\gamma$ (углы равны 30, 60 и 90 градусов).

66. Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло горят такие 6 цифр, что закрыв две из них мы увидим число 1998? (36 секунд)

67. Можно ли из фигур двух видов : «крестик», состоящий из 5 клеток, и «уголок», состоящий из 3 клеток, составить прямоугольник? Обязательно должны использоваться фигурки обоих видов. (да)

68. Какое наибольшее количество натуральных чисел может обладать свойством: их сумма и их произведение равны 1998? (1955)

69. Найдите наибольшее четырёхзначное число, являющееся точным квадратом, в десятичной записи которого всего две различных цифры. ($7744=88^2$)

70. Существуют ли простые p и q такие, что $p^2–1$ делится на q, а $q^2–1$ делится на p? (2 и 3)

71. Сколькими способами число 60 представимо в виде разности квадратов натуральных чисел? (двумя)

72. Даны две концентрические окружности. Хорда большей из них касается меньшей и имеет длину 2. Найдите площадь кольца, заключенного между окружностями. (π)

73. Существует ли тетраэдр, высоты которого равны 1, 2, 3 и 6? (нет)

74. Петя считает пальцы на левой руке от большого до мизинца и обратно от мизинца до большого. Каждый следующий счёт приходится на другой палец. На какой палец придется число 1999? (на средний)

75. Разрежьте квадрат со стороной 4 см на прямоугольники, сумма периметров которых равна 25 см. (нужен пример)

76. Имеется 30 бревен длины 3 и 4 м, суммарная длина которых равна 100 м. Каким числом распилов можно распилить бревна на чурбаки длины 1 метр? (70)

77. Существует ли параллелограмм, который можно разрезать на три попарно неравных равнобедренных треугольника? (да; нужен пример или объяснение)

78. Найдите наименьшее натуральное число, в десятичной записи которого участвуют только цифры 2 и 3, если произведение его цифр и сумма его цифр – числа, делящиеся на 6. (22233)

79. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Он, сделав 4 хода, вернулся в исходную клетку, не побывав ни на одной клетке дважды. Сколькими способами он мог это сделать? (56)

80. Найдите наименьшее возможное число членов кружка, если известно, что девочек в нем меньше 50%, но больше 45%? (11)

81. В каких пределах может изменяться наибольший угол треугольника с вершинами в точках касания сторон вписанной в треугольник окружности? (от 60 градусов включительно до 90 градусов, не включая 90)

82. Четверо бизнесменов участвовали в соревновании на звание самого крутого. Первый, четвёртый и третий бизнесмены вместе заработали в четыре раза больше второго, второй, третий и четвёртый бизнесмены вместе заработали в три раза больше первого. И, наконец, первый, второй и третий бизнесмены вместе заработали в два раза больше четвёртого. Кто на каком месте оказался в этом соревновании? (4, 1, 3, 2)

83. Найдите четырёхзначный полный квадрат, все цифры которого -- простые числа (1 – не простое число!) (7225)

84. Костя и Олег пошли в гости к Игорю, но забыли трёхзначный номер его квартиры. Олег помнил, что если прибавить к этому номеру 10, то получится полный куб, а Костя помнил, что если вычесть из номера квартиры число 10, то получится полный квадрат. В какой квартире живет Игорь? (206)

85. Сколько существует различных треугольников, у которых длины двух сторон равны 31999 и 32000, а третья сторона является степенью двойки? (один, нужно объяснение)

86. Коля отправился за грибами между восемью и девятью часами утра в момент, когда часовая и минутная стрелки его часов были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня, при этом стрелки его часов были направлены в противоположные стороны. Сколько продолжалась Колина прогулка? (6 часов)

87. Можно ли сложить прямоугольник, обе стороны которого больше 1, из прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×1999, использовав каждый из них ровно один раз? (да; объяснение)

88. Бабка нумерует яйца числами 1, 2, 3, … При этом после каждых очередных четырёх номеров Курочка Ряба сносит новое яйцо. Сколько яиц было у Бабки вначале, если последним номером оказался 1999-й? (1500)

89. Можно ли расставить числа от 1 до 10 в строку так, чтобы разность между любыми соседними числами равнялась 4 или 5? (да; например, 1 5 9 4 8 3 7 2 6 10)

90. Сумма двух натуральных чисел равна 200, а их наибольший общий делитель равен 25. Найдите все такие пары чисел. (25 и 175, 75 и 125)

91. Число M получено из натурального числа N, не содержащего нулей, вычеркиванием одной цифры. Найдите наибольшее возможное целое значение N/M (91)

Задачи «конкурсов капитанов»

Перед математическим боем проводится конкурс капитанов. Капитаны обеих команд выходят к доске, и им предлагается какая-нибудь игра или задача. Если это задача, то капитан, решивший её, говорит об этом жюри. Если его решение верно, то он признается победителем, иначе – его соперник. Капитан – победитель этого конкурса имеет право выбрать, будет ли его команда вызывать первой или предпочитает быть вызванной.

92. Расположить цифры 1, 2, 4, 8 в таком порядке, чтобы полученное число делилось на 7. (2184)

93. Найти остаток от деления на 37 числа 778334 + 334778. (2, каждое из слагаемых даёт остаток 1 при делении на 111)

94. (Игра) Два игрока – A и B задумывают по натуральному числу – соответственно a и b. Если оказывается, что a=b, то игра повторяется; если 3b>a>b, то A получает 1 очко; если 3a>b>a, то B получает 1 очко; если a > 3b, то B получает 2 очка; а если b > 3a, то A получает 2 очка. Проводится заранее договоренное число таких туров. Выигрывает набравший наибольшее количество очков.

95. Существуют ли два различных натуральных числа a и b таких, что числа $a^2 + 7$, $ab + 7$ и $b^2 + 7$ – простые? (Да, например, 4 и 6)

96. На сторонах квадрата и его диагоналях расставлены стрелки. Для какого наибольшего количества треугольников с вершинами в вершинах квадрата суммы идущих по их сторонам векторов могут быть равны нулю? (2)

97. Найдите два различных простых числа p и q таких, что p^2+5 делится на q^2+5. (7 и 2)

98. В правильный треугольник со стороной a вписали окружность и около него же описали окружность. Хорда описанной окружности, перпендикулярная одной из сторон исходного треугольника, касается вписанной окружности. Найдите длину этой хорды. (a)

99. Можно ли раскрасить клетки доски 8×8 в черный и белый цвета так, чтобы из любой клетки можно было одним ходом коня попасть и на черную, и на белую клетку? (да, нужен пример)

100. Числа 1, 2, …, 7 выписаны в строчку в некотором порядке. Рассматривается первое число, сумма первых двух, первых трёх, …, первых семи чисел. Какое наибольшее количество простых чисел может при этом получиться? (пять, например, при расстановке 2 1 4 6 3 7 5)

Блиц-бои

Блиц-бои на Уральских турнирах юных математиков проводятся в тех случаях, когда несколько команд показали в турнире боёв перед финальным туром равные результаты, а регламент турнира исключает дележ мест между ними. Блиц – это очень быстрое соревнование, и слово «бой» здесь даже не совсем оправданно. На самом деле это просто письменная командная олимпиада, в которой необходимо быстро решить несколько не самых простых задач.

Все последние годы правила блиц-боёв на Уральских турнирах стабильны:

1. Командам выдается 8 задач на 25 минут.

2. Ответы сдаются в письменном виде.

3. За каждый верный ответ начисляется 3 очка, за каждый неверный снимается 1 очко.

4. Места команд определяются по сумме баллов.

Собственно задачи, используемые на блиц-боях, имеют много общего с задачами матдрак или каруселей. Тем не менее, здесь полезна и сбалансированность по трудности, и баланс по тематике задач, поэтому мы приведем несколько вариантов блицев, предлагавшихся на турнирах (т.е. ученикам 7 и 8 классов) «в первозданном виде». Бои 1 и 3 немного труднее (они готовились для восьмиклассников), бои 2 и 4 – полегче (предлагались семиклассникам). Впрочем, здесь градация «легче-тяжелее» весьма условна, потому что некоторые задачи блиц-боев специально делаются более трудными – чтобы правильной командной тактикой было отложить их в сторонку и не решать…

Блиц-бой 1.

1. Из приведенных ниже утверждений ровно одно ложно. Какое?

(A) Утверждения (B) и (D) оба истинны или оба ложны.

(B) Одно из утверждений (C) и (E) истинно, а другое – ложно.

(C) Утверждения (D) и (A) оба истинны или оба ложны.

(D) Одно из утверждений (E) и (B) истинно, а другое – ложно.

(E) Одно из утверждений (A) и (C) истинно, а другое – ложно.

2. Какое наибольшее число тупых углов могут образовать на плоскости 9 лучей, выходящих из одной точки?

3. Говоря о своём дедушке, Катя каждый раз старалась назвать его по-новому: «отец моего отца», «отец брата моего отца», «отец отца сына моего отца», «отец брата отца моего брата», «брат отца отца моего брата». Сколько раз Катя ошиблась? (Все братья – родные!)

4. Сколько целых положительных решений имеет уравнение $a^2b + 2 = 2002$?

5. Расцветали яблони и груши… потом созрели плоды. Каждая яблоня дала по 300 кг яблок, каждая груша – по 800 кг груш. В среднем урожай с одного дерева получился в 600 кг. Каков процент яблонь среди всех деревьев в саду, если известно, что там растут только яблони и груши?

6. Будем называть дату «особенной», если она записывается цифрами без повторений. Например, такой датой будет 5 апреля 2013 года: 5.4.2013. А когда была предыдущая «особенная» дата?

7. Будильник отстает на 3 минуты в час. Сейчас он показывает 11 час. 41 мин. Через сколько минут он покажет 12 часов?

8. Умножаем число 2002 на число, состоящее из 2002 пятерок. Какова сумма цифр полученного произведения?

Ответы. 1. (E). 2. 27. 3. Один раз. 4. 6. 5. 40%. 6. 30.6.1987.*) 7. Через 20 минут. 8. 4004.

Блиц-бой 2.

1. На какое наибольшее число частей могут делить плоскость четырёхугольник и пятиугольник (не обязательно выпуклые)?2. Назовем девятизначное

число *горбатым*, если все его цифры различны, среди них нет нуля и с первой до некоторой (не первой и не последней) они идут в порядке возрастания, а затем – в порядке убывания. Сколько существует горбатых девятизначных чисел?

3. Страшила и Железный Дровосек отправились утром в Изумрудный Город в один день по одной дороге и в одном направлении, но Дровосек вышел из пункта на 28 миль впереди Страшилы. Оба движутся с 8 утра до 8 вечера, и скорость каждого в течение дня постоянна. В первый день Дровосек прошел 20 миль, во второй – 18, в третий – 16 и так далее. В первый день Страшила прошел 4 мили, во второй – 8, в третий – 12 и так далее. Где и когда ходоки окажутся одновременно?

4. Управдом Остап Бендер собирал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Паниковский из 56–й квартиры заинтересовался, почему с их подъезда надо собрать денег больше, чем с первого, хотя квартир во всех пяти подъездах поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что за двузначные номера приходится платить втрое, а за трёхзначные – в 5 раз больше, чем за однозначные. Сколько квартир в доме, если всего было собрано 690000 рублей? (Все номера стоят целое число рублей)

5. По дороге на Новогодний праздник несколько мальчиков помогли Деду Морозу донести подарки. Каждый из мальчиков донес по три подарка, а остальные 60 подарков Дед Мороз сам довез на санях. Все эти подарки Дед Мороз разделил поровну между этими мальчиками и 11 девочками. Сколько было мальчиков?

6. Какое наименьшее количество двузначных чисел нужно взять, чтобы среди них заведомо нашлось число, которое делится или на 2, или на 7?

7. Найдите углы треугольника ABC, в котором $AB=BC$, а высота AH вдвое короче биссектрисы AK.

8. Замените буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным. Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам, разным – разные:

Ответы: 1: 18 частей. 2. 254. 3. В первый раз – на третий день в 2 часа дня в 46 милях от точки старта Страшилы, во второй раз – на четвёртый день в 8 вечера на расстоянии 68 миль от старта Страшилы. 4. 110 квартир. 5. 16 мальчиков. 6. 40. 7. 20?, 20?, 140?. 8. 7926,5+7926,5=15853.

Блиц-бой 3.

1. Найдите наименьшее натуральное число *n* такое, что в любом множестве из *n* натуральных чисел найдутся два числа, сумма или разность которых делится на 25.

2. 17 игроков играли в теннис. Проигравший две игры «вылетал» из турнира. Какое наибольшее число теннисистов могло выиграть не менее, чем по три партии?

3. В треугольнике *ABC* стороны *AB* и *BC* равны 2, а высота, опущенная из вершины *A*, равна 1. Найдите углы треугольника.

4. Сколько решений имеет ребус 25=Т+У+Р+Н+И+Р, если К+И+Р+О+В принимает максимально возможное значение? *(Одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры).*

5. Найдите минимальное натуральное число, которое можно двумя различными способами представить в виде $25a+52b$, где a и b – натуральные числа.

6. В треугольнике ABC средняя по величине сторона отличается от каждой из остальных сторон на 1см. Найдите эти стороны, если известно, что биссектриса угла C пересекается с медианой угла B под прямым углом.

7. Какое наибольшее число ненулевых цифр можно выбрать так, чтобы разность любых двух выбранных была не выбрана?

8. Однажды несколько друзей обменивались рукопожатиями. В некоторый момент оказалось, что среди любых четырёх из них имеется хотя бы один, который успел пожать руки трём другим. Сколько могло оказаться среди них человек, не успевших пожать руки каждому из остальных? (Укажите все варианты).

Ответы: 1. 14 2. 11 человек. 3. (30^0,75^0,75^0) и (150^0,15^0,15^0). 4. 102 . 5. 1377. 6. 2,3,4. 7. 5 цифр. 8. 0, 2 или 3 человека

Блиц-бой 4.

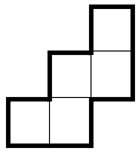
1. Все числа от 1 до 500 выписали подряд: 123456789101112…499500. Сколько раз в этом ряду после двойки идет тройка?

2. Мой младший брат считает пальцы следующим образом. Считая большой

палец, говорит 1, затем на указательный палец говорит 2 и 3, на средний – 4, на безымянный – 5 и 6, на мизинец – 7. Потом продолжает пересчитывать пальцы в обратную сторону, а именно на безымянный говорит 8 и 9, на средний – 10, на указательный – 11 и 12, на большой – 13 и затем обратно. На каком пальце он остановится, когда скажет число 2005?

3. Найдите такие три пары натуральных чисел, что оба числа в паре делятся на 24, а сумма чисел в паре равна 168.

4. У некоторого трёхзначного числа переставили две последние цифры и сложили полученное число с исходным. Получилось четырёхзначное число, начинающееся на 173. Какой может быть последняя цифра полученного числа?5. Аня, Маня и Таня как-то обнаружили, что все они в одинаковых джинсах. Как выглядят эти джинсы, если известно, что у Ани есть джинсы с карманами, узкие джинсы и вылинявшие джинсы без карманов, у Мани – джинсы без карманов и вылинявшие узкие джинсы с карманами, и, наконец, у Тани есть джинсы-клеш и темные узкие джинсы с карманами?



6. Какое наибольшее количество фигурок вида, указанного на рисунке, можно расположить в квадрате 6х6 без наложений? Обязательно приведите пример.

7. Найдите хотя бы одно решение уравнения $n! \times m! = 720!$, если $n > 1$, $m > 1$.8. Найдите сумму цифр числа $10^{2005} – 2005$.

Ответы: 1. 26. 2. на большом. 3. 24+144, 48+120, 72+96. 4. 2. 5. вылинявшие джинсы-клеш без карманов. 6. 6 и надо проверить пример. 7. например 6 и 719. 8. 18039.

Правила «Математической карусели»

Математическая карусель – это командное соревнования по решению задач. Побеждает в нем команда, набравшая наибольшее число очков. Задачи решаются на двух рубежах – исходном и зачётном, но *очки начисляются только за задачи, решенные на зачётном рубеже*. По каждой задаче от участников требуется *не решение с обоснованием*, а только *ответ* – но этот ответ должен быть полным и безошибочным.

Старт. В начале игры все члены команды находятся на исходном рубеже, и им присвоены номера от 1 до 6. По сигналу ведущего о начале игры команды получают у судьи первую задачу исходного рубежа и начинают её решать. Если команда считает, что задача решена, её игрок № 1 предъявляет ответ судье. Если оно верное, то игрок № 1 перемещается на зачётный рубеж и получает задачу там, а остальные члены команды получают новую задачу исходного рубежа. Дальше по ходу игры члены команды, находящиеся на исходном и зачётном рубежах, решают разные задачи параллельно и независимо друг от друга.

Устройство «карусели». Представьте, что на каждом рубеже находящиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Начальный порядок в этой очереди определён самой командой (совпадает с порядком номеров). В каждый момент игры ответ к очередной задаче предъявляет судье тот игрок, который стоит в начале очереди. Дальнейшие действия игрока, судьи и команды определяются табличкой:

	Ответ признан верным и полным	Ответ ошибочен либо неполон
Ответ на задачу исходного рубежа	Игрок перемещается на зачётный рубеж в конец очереди (если там не было игроков, то он получает *следующую задачу*$^{*)}$ зачётного рубежа). Если на исходном рубеже остались игроки команды, то их очередь продвигается на одного человека, и команда получают *следующую задачу*$^{*)}$ исходного рубежа.	Игрок получает *следующую задачу*$^{*)}$ исходного рубежа и возвращается на своё место.
Ответ на задачу зачётного рубежа	Команда получает очки за решенную задачу согласно правилам начисления очков. Игрок получает *следующую задачу*$^{*)}$ зачётного рубежа и возвращается на своё место.	Команда получает 0 очков. Игрок перемещается на исходный рубеж в конец очереди (если там не было игроков, то он получает *следующую задачу*$^{*)}$ исходного рубежа). Если на зачётном рубеже остались игроки

	Ответ признан верным и полным	Ответ ошибочен либо неполон
		команды, то их очередь продвигается на одного человека, и команда получает *следующую задачу**) зачётного рубежа.

**) Если на данном рубеже исчерпаны задачи, то следующая задача не выдается.*

Жюри не сообщает в течение игры, какие ответы являются правильными в задачах, которые не являются решёнными. Правильные ответы на нерешённые задачи во время игры не сообщаются.

Стоимость задач зачётного рубежа. Стоимость каждой задачи устанавливается по следующим правилам: первая задача оценивается в 3 очка. А за каждую последующую начисляется K+1 очко, если цена предыдущей правильно решенной задачи была K очков. Цена первой задачи –3 очка. Цена следующих задач определяется так: если предыдущая стоила N очков и была решена верно, то следующая стоит N+1 очко. В случае неправильного решения предыдущей задачи цена следующей устанавливается в 3 очка, если предыдущая стоила 3 или 4 очка, в 4 очка, если предыдущая стоила 5 очков, в остальных случаях её цена – 5 очков. Если же она была решена неверно, то цена следующей задается по правилу:

Стоимость предыдущей задачи (N)	3	4	5	6	>6
Сколько стоит следующая	3	3	4	5	5

Иначе говоря, эта цена равна среднему по величине из трёх значений – 3, N–1, 5.

Определение победителей.

Окончание игры. **Победители.** Команда заканчивает игру, в одном из трёх случаев: 1) время, отведённое для игры, закончилось. 2) на зачётном рубеже закончились задачи, 3) не осталось ни одной задачи на стартовом рубеже, и, в то же время, ни одного игрока нет на зачётном рубеже. Игра для команды заканчивается, если закончилось отведенное для игры время, или кончились задачи на зачётном рубеже, или кончились задачи на исходном рубеже, а на зачётном рубеже нет ни одного игрока. Как и во всех командных соревнованиях победитель – команда, набравшая наибольшее количество очков. Победителем игры признается команда, набравшая больше всего очков.

Регламент игры

До начала игры все участники должны быть ознакомлены с её правилами:

А) продолжительность игры. Она устанавливается в зависимости от возраста участников игры, сложности заданий, их количества, и может оставлять от 1,5 до 2 астрономических часов. Регламент проведения «Математической карусели» является изменяемой от игры к игре частью игровых правил. Он должен быть доведен до сведения всех участников перед началом игры и содержать ответы на следующие вопросы:

- продолжительность игры (рекомендуется от 90 до 120 минут в зависимости от количества задач и их трудности, а также от возраста участников);

Б) запрет на использование любой вычислительной техники.

- разрешение или запрет использования электронной техники (калькуляторов etc.)

В) количество предлагаемых для игры задач. Как правило, оно составляет 15 задач для исходного рубежа и до 25 задач – для зачётного рубежа.

- количество задач на каждом из игровых рубежей (рекомендуется 14 – 15 задач исходного рубежа и 20 – 25 задач зачётного);

Г) правила разрешения спорных вопросов (распределение мест для команд, набравших одинаковое число очков, штрафы за нарушение правил и так далее).

- порядок распределения мест между командами, набравшими поровну очков (варианты: по времени окончания игры, по наиболее длинной серии подряд решенных задач, по другим дополнительным показателям, дележ мест без использования дополнительных показателей).

- порядок разрешения спорных игровых ситуаций;

- штрафные санкции за нарушения правил и порядок их применения.

Составление вариантов заданий

Подготовка и организация

Наиболее объемной и ответственной частью подготовки игры является отбор задач и формирование комплекта. Комплект должен включать задачи, различающиеся по трудности (от достаточно лёгких до чрезвычайно трудных) и при этом охватывающие всю доступную школьникам тематику. При этом необходимо ещё и следить за тем, чтобы в каждой из тем встречались задачи разной трудности (т. е. не было такого, что все легкие задачи – по одной теме, а все сложные – по другой). Особое внимание следует обратить на расстановку задач (порядок заданий в карусели чрезвычайно важен, потому что очки, получаемые командой за решение задачи, не пропорциональны трудности задачи, а зависят прежде всего от места задачи в пакете и от трудности предыдущих задач). Также следует позаботиться о том, чтобы хотя бы несколько задач в комплекте были принципиально командными – то есть допускали распараллеливание на несколько игроков. Обычно этому условию хорошо удовлетворяют переборные задачи, числовые ребусы и т.д. Ну и, наконец, помните, что математическая карусель – это игра, а не контрольная работа. Все задания должны быть интересными, нешаблонными, творческими. Чем больше души будет вложено в составление, тем больше радости игра принесет участникам.

Если вы готовите задания самостоятельно или отбираете их из печатных источников, то обязательно дайте прорешать готовый комплект другим компетентным людям – у одного составителя, даже самого опытного и квалифицированного, глаз неизбежно «замыливается», а для успешного проведения карусели очень важно, чтобы ответы к задачам, выданные судьям, были не только безошибочными, но и исчерпывающе полными. Помните, что во всех задачах, где прямо не указано обратное, от участников требуется найти ***все*** возможные ответы.

Собственно игровой материал (условия задач) должен быть растиражирован на все играющие команды. Свой ответ на задачу команда пишет на обороте листка с условием. До окончания карусели все листки с ответами остаются у судьи, а после окончательной сверки ответов и результатов возвращаются команде.

Для проведения игры необходимы подготовленные судьи (по одному судье на одну-две команды, не больше!). Они должны быть заблаговременно ознакомлены с правилами и регламентом игры, хорошо уяснить себе все правила и уметь отвечать на вопросы команд, касающиеся правил. (На вопросы, касающиеся трактовки условий задач, судьи отвечать не должны. При поступлении таких вопросов они приглашают к команде главного судью, который и принимает решение о том, какой ответ дать команде и нужно ли его давать вообще.) Каждый судья перед началом игры получает от главного судьи (организатора) по комплекту заданий на каждую свою команду (отдельно – на исходный рубеж, отдельно – на зачётный), протокол игры на каждую команду и список ответов на все задания. (Список ответов у каждого судьи должен быть аккуратно сложен так, чтобы команды не могли видеть то, что в нем написано. Аналогично, полученные от команды листки с ответами должны быть сложены отдельно – так, чтобы другие команды не могли видеть чужих ответов.)

Протоколом игры называется бланк следующего вида:

Протокол математической карусели. Дата _________ Команда ____						
Исх. №	+/–	ФИО игрока	Зач. N	+/–	Очки	ФИО игрока
1			1			
2			2			
3			3			
…			…			
14			14			
			…			
			20			
			ИТОГ			

Протокол заполняется судьей, кроме колонки «очки», которую заполняет главный судья карусели. В колонку «+/–» вписывается отметка о том, верно ли решена данная задача. Фамилия игрока вписывается в протокол только при перемещении с рубежа на рубеж – то есть после верного решения задачи на исходном рубеже и неверного решения задачи на зачётном. Если все фамилии вписаны в протокол верно, то на каждом из рубежей порядок фамилий в колонках должен быть одинаковым (и совпадать с порядком номеров игроков команды).

Что делать, если кто-то из проводящих карусель ошибся? Прежде всего – нужно организовать ход карусели так, чтобы ошибку можно было обнаружить как можно раньше. В идеале, главный судья не берет на себя проведение игры ни для одной из команд, а во время игры постоянно обходит судей, смотрит протоколы и отмечает в них текущие результаты, сверяет ответы команд с данными, внесенными в протокол, а эти данные – с реальным ходом игры. При такой организации (т.е. двойном судейском контроле за результатами) большинство ошибок – как судейских, так и составительских – будет обнаружено достаточно быстро, а их последствия не будут фатальными.

Как исправлять обнаруженные ошибки? Наиболее частая ошибка – когда судья засчитывает неверное (неполное) решение или, наоборот, не засчитывает верное. Такую ошибку необходимо постараться исправить обязательно – причем не только в колонке «очки» командного протокола, но и в расстановке игроков на зачётном и исходном рубежах. Если ошибка ещё не была «заиграна» (например, игрок, которому решение не было зачтено, ушел на исходный рубеж, получил там задачу и уже успел её решить и вернуться), то её следует исправлять немедленно, вернув игрока на тот рубеж, где он должен был находиться. Связанные с этим изменения в стоимости последующих задач, разумеется, также должны быть внесены в протокол. Другая, увы, распространенная ошибка – когда составитель предусмотрел неверный ответ на задачу. Обычно такая ошибка обнаруживается после того, как команды одна за другой дают верный ответ и получают «минус». Наличие одинаковых незачтённых ответов у нескольких разных команд не обязательно должно означать ошибку составителя, но обычно является поводом задуматься об этом… Если факт такой ошибки подтверждается, то главный судья должен немедленно сообщить всем судьям об изменении правильного ответа на данную задачу, а затем попытаться исправить ситуацию (аналогично тому, как это описано в случае ошибки судьи при зачёте ответа) для всех команд, которые уже сдавали судьям ответ на эту задачу.

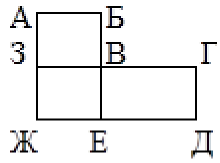
После окончания игры и сверки результатов ведущий объявляет победителей. Ну, а проигравших в этой игре не бывает – каждая команда получает и удовольствие от соперничества, и радость от победы над решёнными задачами.

Задания для 6 класса. Исходный рубеж

1. Во сколько раз треть половины больше половины девятой части?

2. В кубике размером 4×4×4 проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам. Каждая «шахта» соединяет центральные квадраты 2×2 двух противоположных граней кубика. Сколько весит остаток куба, если исходный куб весит 640 г?

3. На рисунке справа изображен план города. В городе четыре кольцевых автобусных маршрута. Автобус №1 ходит по маршруту В-Г-Д-Е-Ж-З-В, длина которого – 17 км. Автобус №2 ходит по маршруту А-Б-В-Е-Ж-З-А, длина которого – 12 км. Автобус №3 ходит по маршруту А-З-Ж-Е-Д-Г-В-Б-А, длина которого – 20 км. Автобус №4 ходит по маршруту В-З-Ж-Е-В. Найдите длину этого маршрута.



4. Жили-были на свете 25 оловянных солдатиков, которых сделали из старой оловянной миски весом 123 грамма. 24 солдатика были одинаковыми, а двадцать пятый был не такой, как все. Он оказался одноногим, так как его отливали последним, и олова чуть-чуть не хватило. Какова масса последнего солдатика, если известно, что каждый из солдатиков весит целое число граммов?

5. На новогодней распродаже марок в филателистическом магазине любая почтовая марка стоила 1 рубль. При этом к каждым десяти купленным маркам одна давалась бесплатно, а за каждую сотню оплаченных марок ещё дарили 5 марок. Заплатив все свои деньги за марки в этом магазине, Игорь получил 200 марок. Сколько у него было денег?

6. В стране коротышек всего 2007 жителей, причем в каждом поселке коротышек одинаковое количество домов, и в каждом доме живет поровну коротышек. Сколько в стране поселков, если их больше, чем домов в поселке и больше, чем коротышек в каждом доме?

7. В корзине лежат 100 грибов – рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 32 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 70 грибов – хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

8. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше, чем Алик, собрал грибов Вася?

9. Числа 2007 и 1917 разделили с остатком на одно и то же число. В первом случае в остатке получилось 88, во втором – 99. На какое число делили?

10. Три брата вернулись с рыбалки. Мама спросила у каждого, сколько они вместе поймали рыб. Вася сказал: «Больше десяти», Петя: «Больше восемнадцати», Коля: «Больше пятнадцати». Сколько могло быть поймано рыб (укажите все возможности), если известно, что два брата сказали правду, а третий – неправду?

11. Дедка вдвое сильнее Бабки, Бабка втрое сильнее Внучки, Внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее Кошки, Кошка вшестеро сильнее Мышки. Без Мышки все остальные Репку вытащить не могут, а с ней – могут. Сколько нужно Мышек, чтобы они сами вытащили Репку?

12. Фрекен Бок съедает торт за 20 минут, Малыш – за час, а Карлсон – за 5 минут. За какое время они съедят торт вместе, если будут есть с теми же скоростями?

13. В строку подряд выписаны натуральные числа 1234567891011121314… и так далее. Когда впервые в этом ряду встретится сочетание цифр 7002? (Для ответа достаточно указать числа, в которых стоят эти цифры).

14. Робину Бобину Барабеку подарили на День Рождения 1254 котлеты. В первый день он собирался съесть столько котлет, сколько гостей пришло к нему на День Рождения. Во второй день он собирался съесть котлет в два раза больше, чем в первый (если они останутся). В третий день он собирался съесть котлет в три раза больше, чем во второй день, в четвёртый день – в четыре раза больше, чем в третий и так далее до тех пор, пока не кончатся котлеты. Известно, что каждый день он ел котлет столько, сколько запланировал, и при этом котлет хватило на целое число дней. Сколько дней Барабек ел котлеты?

Задания для 6 класса. Зачётный рубеж

1. Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых – простые числа и все двузначные числа, которые можно получить, стерев одну из этих цифр, – тоже простые?

2. На какое наименьшее число квадратов можно разрезать прямоугольник размером 6×7?

3. В группе туристов меньше 100 человек. Из них 12% кировчан и 18% пермяков. Сколько туристов в этой группе?

4. Найдите наименьшее натуральное число, десятичная запись которого содержит все цифры от 0 до 5, и которое делится на все эти цифры (кроме, конечно, нуля).

5. В однокруговом турнире по футболу (каждый с каждым сыграл ровно одну партию) участвовало 8 команд, которые набрали 15, 14, 13, 9, 8, 7, 4 и 3 очка. За победу присуждалось 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. Сколько матчей в турнире закончилось вничью?

6. Коля и Миша разрезали два одинаковых прямоугольника. У Коли получились два прямоугольника, каждый периметром 40 см, а у Васи два прямоугольника, каждый периметром 50 см. Какой периметр имели первоначальные прямоугольники?

7. У числа можно любую нечётную цифру переставлять в конец (записывать её справа от него), а любую чётную цифру переставлять в начало (записывать её слева от него). Какое наименьшее число можно получить из числа 391728 такими перестановками?

8. Пятеро крестьян собрали урожай. Первый решил, что собрал больше остальных, и разделил между ними поровну 1/3 своего зерна. После этого второй решил поделиться с остальными, и сделал то же самое, что и первый. В результате весь урожай разделился поровну. Определите, сколько собрал каждый, если общий вес зерна 320 кг..

9. По кругу расставлены 10 красных и 15 синих фишек. Обозначим через p количество пар соседних синих фишек. Какие значения может принимать число p?

10. По асфальту колонна машин двигалась со скоростью 90 км/ч, а интервалы между соседними машинами составляли 18 м. Когда колонна свернула на грунтовую дорогу, её скорость упала до 40 км/ч. Какими стали интервалы между машинами?

11. В ящике лежат 100 тапок одного размера: по 50 правых и левых, из них 39 белых и 61 чёрных. Какое наименьшее число тапок надо «вслепую» достать из ящика, чтобы среди них при любой раскраске тапок наверняка оказалась пара (левый и правый) одноцветных?

12. На дискотеку собрался весь класс – 22 человека. Аня танцевала с семью мальчиками, Белла – с восемью, Вера – с девятью, и так далее. Последняя из них танцевала со всеми мальчиками. Сколько мальчиков было на дискотеке?

13. Найдите какие-нибудь четыре целых числа a, b, c, d таких, что $a+b=c+d$, и при этом $ab - cd = 2014$.

14. В клетки таблицы 3×3 записаны числа, сумма которых равна 0. Оказалось, что произведение чисел в любом прямоугольнике, состоящем из двух клеток, равно –5. Какое наименьшее число могло оказаться в углу таблицы?

15. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка – булочку, то они потратят вместе на один рубль меньше, чем, если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка – пирожок. Известно, что пирожок и булочка стоят целое число рублей, и что мальчиков больше чем девочек. На сколько человек их больше?

16. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены три трёхзначных числа (каждая цифра используется ровно один раз). Какое наименьшее значение может иметь сумма этих трёх чисел?

17. Малыш и Карлсон по очереди брали из коробки конфеты. Малыш взял одну конфету, Карлсон – 2 конфеты, Малыш – 3 конфеты, Карлсон – 4 конфеты, и т.д. Когда количество оставшихся в коробке конфет стало меньше необходимого, тот, чья очередь брать конфеты наступила, забрал все оставшиеся конфеты. Сколько конфет получил Карлсон, если Малышу досталась 111 конфет?

18. Найдите количество трёхзначных чисел, у которых вторая цифра меньше третьей на 1.

19. В зале больше 90, но меньше 100 человек, дни рождения у всех различны. Петя сказал: «В этом зале тех, кто старше меня, в два раза больше тех, кто младше меня». Катя сказала: «В этом зале тех, кто старше меня, в три раза меньше тех, кто младше меня». Сколько человек находится в зале?

20. Найдите все пятизначные числа, у которых каждая цифра числа строго больше суммы цифр, стоящих правее неё (в частности, четвёртая цифра больше пятой).

Ответы:

Исходный рубеж

1. в три раза
2. 320 г
3. 9 км
4. 3 г
5. 178 рублей
6. 223, 669
7. 31 груздь и 69 рыжиков
8. 50%
9. 101
10. 16, 17, 18
11. 1237 мышек
12. 3 мин. 45 сек =225 сек. = 3, 75 мин.
13. 2700 и 2701
14. 1, 2 или 4 дня

Зачётный рубеж:

1. таких нет (0)
2. 5 квадратов
3. 50 туристов
4. 123540

5. 11 ничьих

6. 60 см

7. 128379

8. 84 кг, 89 кг, 49 кг, 49 кг, 49 кг

9. от 5 до 14

10. 8 м

11. 90

12. 14

13. например: 2014, 1, 2015, 0.

14. - 2

15. на 1

16. 774

17. 110

18. 81

19. 97

20. 84210; 94210; 95210

Задания для 7 класса. Исходный рубеж

1. Найдите последнюю цифру произведения всех чисел, делящихся на 2017, которые меньше 20170.

2. Найдите количество трёхзначных чисел, у которых ровно две цифры одинаковые (например, в это множество входят числа 334, 505, но не входит число 111).

3. Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых три последовательные цифры слева направо – это три последовательных числа (например, в это множество входят числа 3451, 7234, 5678, но не входит число 4326).

4. На острове живут лжецы и рыцари. Каждый из них ответил на вопрос: «Сколько среди остальных обитателей острова, кроме Вас, говорящих правду и сколько – лгущих?». Суммарно в ответах было названо 32 говорящих правду и 40 – лгущих. Известно, что говорящих правду – большинство, а сколько их?

5. В магазине цена на пачку кофе вначале была снижена на 20%, а потом – поднята на 20%, и пачка чая стала стоить 192 рубля. А сколько она стоила вначале?

6. Петя с пустым ведром идет со скоростью 3 км/час, а с полным – вдвое медленней. На каком расстоянии от дома находится колодец, если Пете требуется 15 минут на то, чтобы сходить за водой (время наполнения ведра водой не учитывается).

7. Найдите сумму всех двузначных чисел, каждое из которых делится как на каждую из своих цифр, так и на сумму всех своих цифр.

8. На листок записали произведения всех пар чисел, первое из которых не меньше 1, но не больше 20, а второе – не меньше 30, но не больше 50.

Сколько чётных чисел записали на листок?

9. Из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 составили два числа: трёхзначное и двузначное (каждую цифру использовали ровно один раз). Оказалось, что первое число делится на второе. Каким самым маленьким могло быть второе число?

10. На острове живут лжецы и рыцари, всего 125 человек. Каждый из них сказал, что на острове живёт по крайней мере один рыцарь. А сколько на самом деле рыцарей могло быть на острове? Укажите все ответы.

11. Сумма двух двузначных числе равна 74. Оба числа записали в обратном порядке (например, если вначале было число 85, то потом записали 58). Какую сумму могут иметь теперь два написанных числа? Укажите все ответы.

12. На нумерацию страниц книги потребовалось 363 цифры. Сколько в этой книге страниц?

13. Определите, во сколько раз площадь поверхности куба 3×3×3 меньше суммы площадей кубиков 1×1×1, на которые его можно распилить.

14. Найдите самое маленькое число, которое после умножения на 74 даёт девятизначное число, составленное из одинаковых цифр.

Задания для 7 класса. Зачётный рубеж

1. Сколько среди целых чисел от 1 до 2006 включительно таких, у которых сумма цифр нечётна?

2. У кролика Роджера вдвое больше сестёр, чем братьев. Его сестра Рэчел заметила, что 2/5 её братьев и сестёр – мальчики. Сколько братьев и сестёр у кролика Роджера?

3. Федя покрасил в красный цвет все целые числа от 1 до 10 и от 30 до 40 включительно, а числа от 15 до 25 включительно покрасил в синий цвет. Коля отметил целые числа a и b так, что между ними оказалось 6 красных и 8 синих чисел. Найдите a и b (укажите все возможности).

4. Каких пятизначных чисел больше и на сколько: тех, у которых произведение цифр равно 25, или тех, у которых произведение цифр равно 9?

5. Телетайп может передавать знаки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, –, ×, :, =. При передаче равенства один знак был передан с ошибкой. В результате получилось $6\times8 + 1358 = 2006$. Какое равенство могло передаваться? Перечислите все возможности.

6. 100 рыбаков ловили рыбу, никто из них не остался без улова, но никто не поймал больше 7 рыб. При этом не более 6 рыб поймало 98 человек, не более 5 – 95 человек, не более 4 – 87 рыбаков, не более 3 – 80, не более 2 – 65 человек и не более одной – 30 человек. Сколько всего рыб поймали рыбаки?

7. Сколько четырёхзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если цифры 2 и 4 не должны стоять рядом?

8. Палиндромом называется число, которое одинаково читается как справа налево, так и слева направо. Найдите среднее арифметическое всех трёхзначных палиндромов.

9. По сохранившимся данным, 239-я симфония Ступидио Азини для английского рожка состояла из трёх частей общей продолжительностью 130 минут, причем длительности любых двух частей отличались не более чем на 5 минут. Какое наименьшее время могла длиться самая короткая часть?

10. Найдите все двузначные числа, которые после перестановки цифр увеличиваются на 75%.

11. На какое наименьшее число частей могут делить плоскость три окружности, имеющие ровно 3 общие точки?

12. На плоскости стоит шахматный конь. Известно, что он совершал прыжки двух видов: либо на два метра на север и метр на восток, либо на два метра на восток и метр на север. В итоге он удалился от начальной точки на 2006 м на север и на 2005 м на восток. Сколько прыжков сделал конь?

13. На какую наибольшую степень двойки может делиться число НИ×ЖН×ЕК×АМ×СК? Разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым – одинаковые.

14. Прямоугольник разрезали на три прямоугольника, два из которых имеют размеры 7×11 и 4×8. Какие размеры мог иметь третий прямоугольник? Перечислите все возможности.

15. У фермера Джона имеется 6 бидонов емкостью 15, 16, 18, 19, 20 и 31 л. Один из них заполнен сметаной, а остальные – кефиром и молоком. Фермер утверждает, что молока у него вдвое больше, чем кефира. В каком из бидонов находится сметана?

16. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^2 \times y^3 = 6^{12}$?

17. Когда у прямоугольника площадью 144 см^2 одну из сторон удлинили на 1 см, а другую – укоротили на 1 см, его площадь уменьшилась на 1 см^2. Какими могли быть стороны исходного прямоугольника?

18. К четырёхклеточной фигуре, имеющей форму буквы Г, требуется добавить ещё одну клетку так, чтобы получилась фигура, имеющая ось симметрии. Сколькими способами это можно сделать?

19. Одно и то же число поделили с остатком на 3, на 12 и на 54. Сумма трёх полученных остатков оказалась равна 39. Найдите остаток, полученный при делении на 3.

20. Вася представил натуральное число N в виде суммы шести различных натуральных чисел всеми различными способами. Варианты, отличавшиеся порядком слагаемых, Вася считал одинаковыми. У него получилось 5 вариантов. Чему равно N?

Ответы:

Исходный рубеж

1. 0
2. 157
3. в 3 раза
4. 3003003
5. 200 рублей
6. 250 метров
7. 120
8. 310
9. 14 (первое число 532)
10. 0 или 125
11. 47 и 146
12. 243
13. 134
14. 5

Зачётный рубеж

1. 1003
2. 5 братьев и 10 сестёр
3. $a = 4$, $b = 23$; $a = 17$, $b = 36$
4. Тех, у которых 9. На 5.
5. $6\times8+1958=2006$, $648+1358=2006$
6. 245 рыб
7. 12 чисел
8. 550
9. 40 минут
10. 12, 24, 36, 48
11. 5 частей
12. 1337 прыжков
13. 23
14. 7×8, 3×8, 1×11, 3×4
15. 20 л

16. 9 решений
17. 12 см и 12 см
18. Тремя
19. 1
20. 25

Абака для математиков

Математическая абака (или «математический покер») – новая, очень динамичная и интересная командная игра, идеально подходящая для соревнований между параллельными классами во время проведения школьной «недели математики». Конкретные задания могут быть рассчитаны на учащихся 6–10 классов, а может быть, и младше… Идеальное число игроков в команде – 6. При большем числе возникает ненужный базар, а при меньшем – проблемы с распределением заданий между игроками.

Основные правила

Ход игры и подведение итогов. В игре участвуют не менее двух команд (а лучше – когда команд около десятка). Все задачи выдаются для решения всем командам одновременно. Основным зачётным показателем является общее количество набранных очков (включая призовые очки – «бонусы»). В случае равенства очков у нескольких команд более высокое место занимает команда, набравшая большую сумму бонусов. При равенстве и этого показателя команды считаются разделившими места.

Решение задач. Каждой команде предлагается для решения 6 тем по 6 задач в каждой теме. В каждой задаче принимается точный и полный (исчерпывающий все варианты) ответ. Задачи каждой темы сдаются командами по порядку, от 1-й до 6-й (например, у команды не возьмут ответ на четвёртую задачу, пока она не сдала ответы на первые три). На каждую задачу отводится один подход (одна попытка сдать ответ). Если команда предъявила правильный ответ на задачу, она получает за это *стоимость задачи*, а если неправильный или неполный – 0 очков. В некоторых задачах по усмотрению жюри стоимость задачи может быть поделена поровну между всеми возможными ответами, в этом случае каждый найденный ответ приносит команде соответствующую часть стоимости. Для каждой такой задачи это указывается в её условии.

Стоимость первой задачи каждой темы – 10 очков, второй – 20, …, шестой – 60 очков. (Таким образом, не считая бонусов, команда может заработать за решение задач до 6×210=1260 очков.)

Бонусы. Каждая команда дополнительно может заработать бонусные очки:

- За правильное решение всех задач одной темы («бонус-горизонталь») – 50 очков

- За правильное решение задач с одним и тем же номером во всех темах («бонус-вертикаль») – стоимость задачи с этим номером

Супербонусы. Первые команды, получившие каждый из шести возможных бонус-горизонталей и каждый из шести бонус-вертикалей, получают их в двойном размере. (Если команд более 10, то «супербонусов» по каждому ряду можно сделать не один, а два.)

Окончание игры. На решение задач отводится заранее определённое время (например, 90 минут). Игра для команды заканчивается, если у неё кончились несданные задачи или истекло общее время, отведённое для игры.

Проведение игры. Реквизит

Для того, чтобы игра прошла успешно, она должна быть тщательно подготовлена. Правила игры лучше вывесить в кабинете математики заранее, причем подробно разъяснить их на примерах. Разумеется, задачи тоже должны быть не просто заранее подобраны и выстроены в темах по возрастанию трудности, но и распечатаны для каждой команды. Рекомендуется не мельчить при распечатке и не экономить бумагу. Один комплект задач идеально размещается на четырёх листках бумаги стандартного формата (А4), расположенных в «альбомной» ориентации (по 3 задачи из 3 тем на каждом листе).

Кроме этого, для каждой команды должен быть заготовлен бланк ответов (куда она собственноручно вписывает свои ответы в момент их сдачи) и протокол оценок (куда учитель, он же судья игры, проставляет заработанные очки и бонусы). И бланк, и протокол лежат на судейском столе, причем так, чтобы подходящим туда игрокам не были видны бланки других команд. Для повышения зрелищности и азарта среди игроков текущий счёт игры можно периодически оглашать вслух или записывать на доску, а около команд-лидеров расставлять специальные лидерские флажки.

Судья тоже не должен становиться «узким местом» – чтобы судью не приходилось долго ждать, к игре должно привлекаться несколько судей – по одному на каждые 2-3 команды. Например, в качестве судей могут быть задействованы способные ученики из более старших классов. Разумеется, для каждого судьи должен быть заготовлен листок с правильными ответами на все задачи.

Вариант заданий «Математической абаки»

Тема 1. Числа и делимость

10. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 5, в записи которого использованы все цифры?

20. Из трёх данных цифр составили все возможные трёхзначные числа. Сумма двух самых больших из них оказалась равна 844. Найдите эти цифры

30. Мальчик вырезал из бумаги девять карточек и на каждой написал по одной цифре 1, 2, 3, …, 9. Затем он разложил их на столе так, что получилось одно однозначное и четыре двузначных числа, и обнаружил, что получившиеся числа относятся как 1:2:3:4:5. Покажите, как он это сделал.

40. Найдите все трёхзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

50. На какую наибольшую степень тройки делится произведение $1\times11\times111\times...\times1111..1$ (в последнем числе 24 цифры)?

60. Найдите НОД (наибольший общий делитель) всех шестизначных палиндромов (то есть чисел, которые не изменяются при написании в обратном порядке)

Тема 2. Текстовые задачи

10. На день рождения Пете подарили мешок с 50 конфетами, и с этого времени он съедал на завтрак, обед, ужин и перед сном по одной конфете, но днем он давал ещё по одной конфете трём своим друзьям. Сколько конфет съел Петя?

20. Сколько минут прошло после одиннадцати часов утра сейчас, если два часа назад после 8 утра прошло в три раза больше минут?

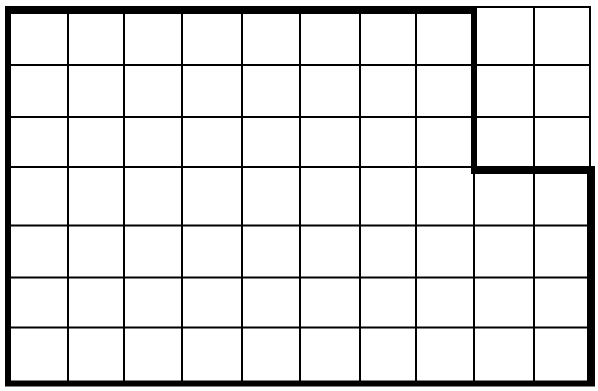
30. Всадник скачет по прямой дороге в постоянном направлении с постоянной скоростью. В 10.00 он был в 20 км от моста, в 11.00 – в 6 км от моста, в 11.30 – в 19 км от моста. Какова его скорость (в км/ч)? Всадника и мост считать точечными.

40. Одно положительное число нацело разделили на другое. Найдите частное, если известно, что оно в 4 раза больше делимого и в 8 раз больше делителя.

50. Каждое из 10 последовательных натуральных чисел уменьшили на 1. Их произведение после этого уменьшилось втрое. Найдите наименьшее из этих 10 чисел.

60. Тридцать школьников встали в круг. Каждый школьник по очереди, начиная с Вани, сказал своему правому соседу число. Причём мальчик мальчику говорил число на 1 меньшее, чем услышал, а девочка девочке – на 1 большее. В остальных случаях школьники говорили то, что услышали. Сколько было девочек, если Ване сообщили число на 5 большее, чем он сказал вначале?

Тема 3. Геометрия



10. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, ступенчатым разрезом на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

20. В каждой клетке квадрата 4×4 отметили центральную точку. Какое минимальное число звеньев может иметь ломаная, проходящая через все эти точки?

30. В вершинах квадрата, серединах его сторон и в центре отмечены точки. Сколько существует различных прямоугольных треугольников с вершинами в отмеченных точках?

40. Какую наименьшую площадь может иметь клетчатый прямоугольник, который можно разрезать по линиям сетки на четырёхклеточные фигурки вида букв Т и Г, причем фигурки обоих типов должны обязательно присутствовать?

50. Какую наименьшую площадь может иметь клетчатый прямоугольник, не являющийся квадратом, который можно разрезать по линиям сетки на 8 различных клетчатых многоугольников?

60. Точка А лежит вне квадрата. Известно, что расстояния от точки А до трёх прямых, содержащих стороны квадрата, равны 5, 6, 7. Чему может быть равно расстояние от точки А до прямой, содержащей четвёртую сторону?

Тема 4. Логика

10. Рыцари, как обычно, говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Все они живут на одном острове. Однажды один из его жителей, А, сказал: «Я лжец, а вот Б – рыцарь». Кем в действительности являются А и Б?

20. В семье 4 детей, им 5, 8, 13 и 15 лет, а зовут их Таня, Юра, Света и Лена. Сколько лет каждому из них, если одна девочка ходит в детский сад, Таня старше, чем Юра, а сумма лет Тани и Лены делится на 3?

30. Отец дал сыну 500 руб., а другой отец дал своему сыну 400 руб. Насколько мог увеличиться суммарный капитал сыновей?

40.Среди 5 школьников A, B, C, D, E двое всегда лгут, а трое всегда говорят правду. Каждый из них сдавал зачёт и получил его или нет. Каждый из них знает, кто сдал зачёт, а кто нет. Они сделали пять высказываний. A: «Ученик B не сдал зачёт». B: «Ученик C не сдал зачёт». C: «Ученик A не сдал зачёт». D: «Ученик E не сдал зачёт». E: «Ученик D не сдал зачёт». Сколько школьников сдали зачёт?

50. Рыцари, как обычно, говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Все они живут на одном острове. Однажды в комнате находились несколько жителей острова, трое из них произнесли по два высказывания: 1) «Нас тут не больше трёх человек. Все мы – лжецы»; 2) «Нас тут не больше четырёх человек. Не все мы лжецы»; 3) «Нас тут пятеро. Трое из нас лжецы». Сколько человек в комнате и сколько среди них лжецов?

60. По кругу сидят 2007 рыцарей и лжецов. Каждый заявил, что его соседи – лжец и рыцарь, но два рыцаря при этом ошиблись. Сколько среди них может быть лжецов?

Тема 5. Комбинаторика

10. На прямой отмечено 100 синих и n красных точек, причем между любыми двумя одноцветными точками есть точка другого цвета. Чему может быть равно n?

20. В группе 15 детей. Никакие две девочки не дружат с одинаковым количеством мальчиков. Какое наибольшее количество девочек может быть в группе?

30. Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 – синюю грань и 75 – зеленую грань. Сколько кубиков могут иметь грани всех трёх цветов?

40. Таня из чисел от 1 до 333 исключила все числа, делящиеся на 3, но не делящиеся на 7, и все числа, делящиеся на 7, но не делящиеся на 3. Сколько чисел у неё осталось?

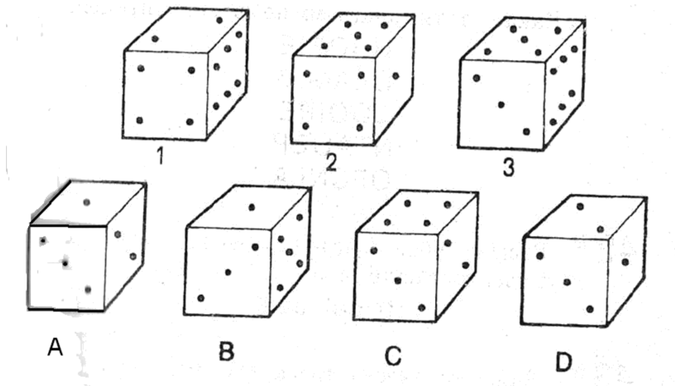
50. У лифта на первом этаже 70-этажного дома собрались 21 школьников, которым надо подняться наверх на разные этажи с 50 по 70. Лифтер же согласен сделать лишь один рейс на любой этаж, а дальше пусть они идут пешком. Лифт способен за один раз вместить всех школьников. Известно, что все школьники с одинаковым неудовольствием спускаются вниз на один этаж и с двойным неудовольствием поднимаются вверх на один этаж. Какой этаж нужно выбрать, чтобы суммарное неудовольствие было наименьшим?

60. В клетках таблицы 10×19 стоят 1 и 0. Посчитаны все суммы чисел по строчкам и по столбцам. Какое наибольшее количество различных сумм могло получиться?

Тема 6. Продолжите последовательность

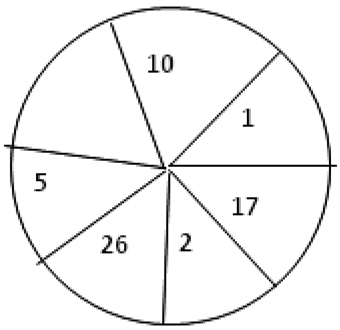
10. Продолжите последовательность двумя числами 1, 2, 6, 15, 31, 56, 20. Продолжите последовательность двумя дробями 1/6, 2/12, 3/20, 4/30, ?/?, ?/?

30. Кубик 1 соответствует кубику 2 так же, как и кубик 3 одному из кубиков A, B, C, D. Какому именно?



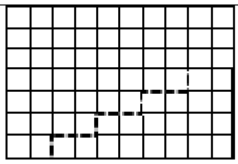
40. Продолжите последовательность двумя числами 1, 1, 3, 4, 5, 7, 7, 10, ?, ?

50. Вставьте пропущенное число



60. Найдите два следующих члена последовательности: 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, ?, ?

Ответы:

«Старт»	10	20	30	40	50	60
Числа и делимость	1023467895	4, 4, 0 и 4, 3, 1 (цифры в любом порядке)	9, 18, 27, 36, 45	145	10	11
Текстовые задачи	29 конфет	30 минут	26 км/ч	2	6	17
Геометрия		6	44	12	26	4, 6, 8, 18
Логика	Оба лжецы	Лена - 5 лет, Юра - 8 лет, Таня - 13 лет, Света - 15 лет	400, 500, 900 руб.	2	4 человека, 2 лжеца	669 лжецов

«Старт»	10	20	30	40	50	60
Комбинаторика	99, 100, 101	8	от 40 до 75	205	63 или 64	19
Продолжите последова-тельность	92, 141	5/42 и 6/56	D	9, 13	37	239, 577

Московские математические регаты (А. Д. Блинков)

Историческая справка

Впервые межшкольные соревнования с таким названием были проведены на конференции старшеклассников в Московском энергофизическом лицее. В дальнейшем эту идею использовали преподаватели математики лицея 1511 МИФИ для проведения школьных командных математических соревнований. Так как на тот момент в Москве практически отсутствовали массовые командные математические соревнования для старшеклассников, то возможность их проведения в увлекательной и динамичной форме, напоминающей соревнования гребцов или яхтсменов, заинтересовала учителей математики ещё нескольких школ. Особая привлекательность регат состоит в том, что решение школьниками задач, разбор их правильных решений, апелляции, подведение итогов и награждение призёров – все происходит в один день, в течении нескольких часов. Можно сказать, что математические регаты соотносятся с традиционными, «большими» математическими олимпиадами, как «быстрые» шахматы с классическими!

Весной 1996 года была проведена Первая Московская Межшкольная Математическая Регата для учащихся 11-х классов. Школьникам и учителям, участвовавшим в первой регате, соревнования понравились, в дальнейшем решено было сделать их традиционными. Для последующих регат правила соревнований были переработаны. Начиная с 1998/99 учебного года, математические регаты стали составной частью Турниров Архимеда. Важной их особенностью является «открытость» как для школьников, так и для их преподавателей: любой из учителей имеет право участвовать как в подборе задач, так и в работе жюри.

Проведение математической регаты

1. В математической регате участвуют школьные команды учащихся одной параллели. В составе каждой команды – 4 человека. Школа может быть представлена несколькими командами. Названием команды является номер школы с добавленным к нему буквенным индексом А или Б.

2. Соревнование проводится в 4 (для учащихся 7 – 8 классов) или в 5 туров (для учащихся 9 – 11 классов). Каждый тур – коллективное письменное решение трёх задач. Любая задача оформляется и сдаётся в жюри на отдельном листе, причем команда имеет право сдать только по одному варианту решения каждой из задач. (Эти листы каждая команда заготавливает заранее; на каждом из них сверху крупно написано название команды, а ниже – двойной индекс задачи и её решение. Условия задач на лист не переписываются.)

3. Проведением регаты руководит Координатор. Он раздаёт задания и организует сбор листов с решениями; проводит разбор решений и обеспечивает своевременное появление информации об итогах проверки.

4. Время, отведённое командам для решения, и «стоимость» задач каждого тура указаны на листах с условиями, которые каждая команда получает непосредственно перед началом тура.

5. Проверка решений осуществляется жюри после окончания каждого тура. Жюри состоит из трёх комиссий, специализирующихся на проверке задач № 1, № 2 и № 3 каждого тура соответственно.

6. Параллельно с проверкой Координатор проводит для учащихся разбор решений задач, после чего школьники получают информацию об итогах проверки. После объявления итогов тура, команды, несогласные с оценкой своих решений, имеют право подать заявки на апелляции. Если такая заявка подана, комиссия проверявшая решение, осуществляет повторную проверку и, после неё, может изменить свою оценку. Если оценка не изменена, то сам процесс апелляции эта же комиссия осуществляет после окончания всех туров регаты, но до окончательного подведения итогов. В результате апелляции оценка решения может быть как по-

вышена, так и понижена, а также оставлена без изменения. В спорных случаях окончательное решение об итогах проверки принимает председатель жюри.

7. Команды-победители и призёры регаты определяются по сумме баллов, набранных во всех турах. Процедура награждения происходит сразу после подведения окончательных итогов регаты.

Все команды и жюри находятся в одном помещении, как правило, в актовом зале школы. Столы в этом помещении расставляются так, чтобы каждая команда сидела за отдельным столом, и учащиеся могли обсуждать задачи, не мешая другим командам. Рассадка команд производится в соответствии с заранее заготовленными и расставленными на столах табличками с названиями команд, причем столы команд из одной школы не ставятся рядом. Члены жюри размещаются компактно (на расстоянии от столов школьников), но для работы каждой из трёх комиссий выделено по отдельному столу. Необходимо также предусмотреть наличие двух классных досок: одной – для разбора решений задач, другой – для записи результатов проверки.

В состав комиссий жюри входят, как правило, преподаватели участвующих школ, выпускники этих школ (студенты математических факультетов вузов), а иногда, и другие учителя математики. В каждую комиссию входит 3 – 5 человек, в зависимости от количества участников регаты. Председателем жюри является один из его авторитетных членов, по предварительной договоренности.

Обязанности Координатора регаты берёт на себя один из преподавателей, принимавших активное участие в подготовке задач. Наиболее ответственная часть его работы – подробный разбор решений задач для школьников (в некоторых случаях разбирается несколько возможных способов решения), который проводится после каждого тура и занимает 10 – 15 минут. Этого времени обычно хватает комиссиям, чтобы завершить проверку работ. По окончании разбора задач и по мере завершения проверки, результаты команд по каждой из задач тура вносятся в протоколы и переносятся на доску. После появления на доске результатов проверки какой-либо из задач тура координатор просит команды, не согласные с оценкой их работы, заявить об этом (поднятием таблички с названием).

В обязанности Координатора также входит фиксирование время на проведение каждого тура (он объявляет о начале и окончании каждого тура, кроме того, предупреждает команды за две минуты до его окончания); отвечать на вопросы учащихся по тексту задач; взаимодействовать с жюри. На практике, особенно при большом количестве участвующих команд, два-три человека помогают координатору: разносят тексты заданий и собирают решения учеников. Один из этих ассистентов (освобожденный от работы в жюри) переносит все результаты проверки в сводный протокол и на доску (см. приложения), а также ведёт подсчеты (суммы баллов, набранные каждой командой по итогам тура и по итогам регаты).

Для облегчения работы координатора и жюри тексты решений всех задач готовятся заранее. Каждая комиссия жюри получает несколько экземпляров решений «своих» задач непосредственно перед началом первого тура регаты. Полные тексты решений находятся только у координатора регаты.

После того, как закончены все апелляции и внесены все изменения в протоколы, происходит процедура награждения команд-победителей и призёров. По сложившейся традиции, члены каждой команды (в порядке занятых мест) подходят к столу с математической литературой, и каждый школьник выбирает себе приз. Количество награждаемых команд (от трёх до шести) составляет, как правило, 25% от числа команд-участниц.

О подготовке регаты

Проведение регаты требует большой предварительной подготовки, как организационной, так и содержательной. Опишем систему подготовки, сложившуюся за время проведения регат.

В начале учебного года распространяется информация о предполагаемых сроках и местах проведения каждой регаты, указываются координаты организаторов. Школы, традиционно участвующих в регатах, приглашаются адресно. Предварительные заявки на участие принимаются организаторами от преподавателей школ по телефону или электронной почте. Это происходит, как правило, за 3 – 4 недели до проведения регаты. Система предварительных заявок связана с ограниченными «посадочными» возможностями школы, принимающей регату. Впервые участвующим школам обычно рекомендуется выставить одну команду. При получении заявки организаторы сообщают о времени и месте обсуждения задач для предстоящей регаты. На это обсуждение, которое происходит не позже, чем за две недели до проведения регаты, каждый из заинтересованных учителей приезжает со списком задач, которые он хотел бы предложить. Кроме того существует постоянно пополняемый «банк задач», куда включены задачи, уже предлагавшиеся, но ранее не использованные. Так как организаторы регат преследуют, прежде всего, учебные цели, то отсутствует стремление использовать исключительно «оригинальные» задачи. Главное, чтобы участвующие школьники были не знакомы с ними ранее. Поэтому задача отклоняется, если кто-то из присутствующих преподавателей говорит, что его ученики с ней знакомы. Также отклоняются и те задачи, решение которых требует знаний выходящих за пределы программы данного класса (при этом, организаторы стараются учитывать имеющееся многообразие программ и учебников). В остальном, действует демократический механизм принятия решений. Принципиально важным является обсуждение условия каждой задачи вместе с её предполагаемыми решениями, поскольку список задач (за редким исключением) должен быть утверждён в этот же день. На этой же встрече преподавателей решаются и все организационные вопросы.

Исходя из опыта проведения регат, сформулируем основные принципы составления комплекта задач для каждой регаты:

- В каждом туре учащимся предлагается решить три задачи, относящиеся к различным разделам математики. Как правило, одна из задач относится к алгебре или основам математического анализа, вторая – геометрическая, третья – логическая, комбинаторная или «числовая». Тематика задач должна максимально соответствовать возрасту участвующих детей.

- Для таких соревнований пригодны только задачи, решение которых может быть изложено кратко.

- Задачи каждого тура должны иметь различную тематику, но примерно одинаковый уровень сложности.

- Задания разных туров, имеющие одинаковый порядковый номер, как правило, относятся к одной теме.

- Сложность заданий и время, выделяемое на их выполнение, увеличиваются от тура к туру.

- Распределение баллов по турам должно быть таким, чтобы « стоимость» задач последнего тура относилась к « стоимости» задач первого, как 3:2.

- Задания первого тура должны быть сравнительно простыми, чтобы они были решены большинством команд.

После того, как утверждён список задач, преподаватели договариваются о подготовке решений. Решения всех задач (в компьютерном виде) должны быть готовы не менее чем за неделю до проведения регаты. Окончательную редакцию текстов условий и решений осуществляют два-три человека, они же окончательно распределяют задачи по турам. Как правило, один из них и становится координатором регаты.

Комплект материалов для проведения регаты включает в себя:

- тексты условий задач для детей, разрезанные и разложенные «по турам» (размноженные в соответствии с количеством участвующих команд, с «запасом»);

- тексты условий и подробных решений задач, сгруппированных по нумерации, для работы жюри (не менее двух экземпляров для каждой из комиссий);

- полные тексты условий и решений задач для работы координатора регаты;

- четыре протокола – один « сводный» и ещё три, по одному для каждой из комиссий жюри;

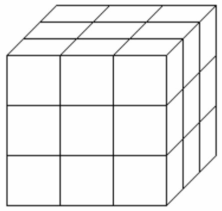
- таблички с названиями участвующих команд.

Подготовку помещения для проведения регаты (в том числе изготовление табличек) берут на себя преподаватели школы, в которой проводится регата.

Московская математическая регата. Задания для 7 классов

Первый тур (10 минут; каждая задача – 6 баллов).

1.1. При каких значениях m уравнения $mx - 1000 = 1001$ и $1001x = m - 1000x$ имеют общий корень?



1.2. Куб сложен из 27 одинаковых кубиков (см. рис.). Сравните площадь поверхности этого куба и площадь поверхности фигуры, которая получится, если из него вынуть все «угловые» кубики.

1.3. Назовем натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Чему равна сумма цифр две тысячи первого замечательного числа?

Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

2.1. Докажите, что $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{100}>\frac{1}{5}$.

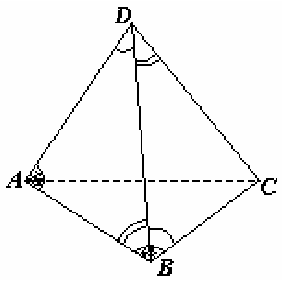
2.2. Через вершины *A* и *C* треугольника *ABC* проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла *ABC*. Они пересекают прямые *CB* и *BA* в точках *K* и *M* соответственно. Найдите длину *AB*, если *BM* = 8 см, *KC* = 1 см и *AB* >*BC*.

2.3. В клетках шахматной доски записаны в произвольном порядке натуральные числа от 1 до 64 (в каждой клетке записано ровно одно число и каждое число записано ровно один раз). Может ли в ходе шахматной партии сложиться ситуация, когда сумма чисел, написанных в клетках, занятых фигурами, ровно вдвое меньше суммы чисел, записанных в клетках, свободных от фигур?

Третий тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов).

3.1. Вася задумал три различные цифры, отличные от нуля. Петя записал все возможные двузначные числа, в десятичной записи которых использовались только эти цифры. Сумма записанных чисел равна 231. Найдите цифры, задуманные Васей.

3.2. Дана пирамида *ABCD* (см. рис.). Известно, что $\angle ADB = \angle DBC$; $\angle ABD = \angle BDC$; $\angle BAD = \angle ABC$. Найдите площадь поверхности пирамиды (сумму площадей четырёх треугольников), если площадь треугольника *ABC* равна 10 см^2.



3.3. На острове проживают 1234 жителя, каждый из которых либо рыцарь (который всегда говорит правду) либо лжец (который всегда лжёт). Однажды, все жители острова разбились на пары, и каждый про своего соседа по паре сказал: «Он – рыцарь!», либо «Он – лжец!». Могло ли в итоге оказаться, что тех и других фраз произнесено поровну?

Четвёртый тур (25 минут; каждая задача – 9 баллов).

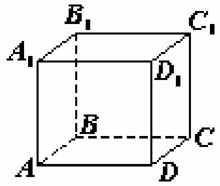
4.1. Расположите в порядке возрастания числа: 222^2, 22^{22}, 2^{222}, $22^{2^2}, 2^{22^2}, 2^{2^{2^2}}$. Ответ обоснуйте.

4.2. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD, а периметр треугольника ACD равен периметру треугольника BCD. Найдите длину AO, если BO = 10 см.

4.3. Какое наибольшее количество прямоугольников 4×1 можно разместить в квадрате 6×6 (не нарушая границ клеток)?

Ответы и указания к решениям.

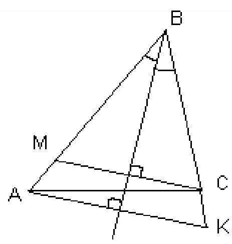
1.1. Корнями данных уравнений являются числа $\frac{2001}{m}$ и $\frac{m}{2001}$. $\frac{2001}{m} = \frac{m}{2001} \Leftrightarrow m^2 = 2001^2 \Leftrightarrow m = \pm 2001$. <u>Ответ</u>: при $m = \pm 2001$.



1.2. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$– один из «угловых» кубиков (см. рис.). Тогда, ровно три его грани, имеющие общую вершину (например, A_1), принадлежат поверхности куба. Если этот кубик вынуть, то вместо этих граней на поверхности полученной фигуры образуются три таких же грани (к ним прилегали оставшиеся три грани вынутого кубика с общей вершиной D). <u>Ответ</u>: площади поверхностей фигур равны.

1.3. Так как все «замечательные» числа имеют различные суммы цифр, то 2001-е замечательное число имеет сумму цифр 2001. <u>Ответ</u>: 2001.

2.1. Вычислим: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{20}=\frac{13}{60}>\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$, сумма остальных дробей в левой части неравенства положительна, откуда левая часть больше правой.



2.2. В треугольниках ABK и MBC биссектрисы одновременно являются и высотами (см. рис.), поэтому эти треугольники – равнобедренные. Так как $AB > BC$, то точка M лежит на стороне AB, а точка K – на продолжении стороны BC. Значит, $BC = BM$ = 8 (см); $AB = BK = BC + CK$ = 9 (см). <u>Ответ</u>: AB = 9 см.

2.3. Сумма всех чисел 1 + 2 + ... + 63 + 64 = (1 + 64)·32 = 65·32. Чтобы выполнялось условие задачи, она должна быть кратна 3, но ни 65, ни 32 не делится на 3.

3.1. Пусть a, b и c – задуманные цифры. Сложим все 9 двузначных чисел, записанных Петей ($\overline{aa}$; $\overline{bb}$; $\overline{cc}$; $\overline{ab}$; $\overline{ba}$; $\overline{ac}$; $\overline{ca}$; $\overline{bc}$; $\overline{cb}$). В результате получим $33(a + b + c)$, откуда $a + b + c = 7$. Единственная возможная тройка цифр – в ответе. Ответ: 1; 2 и 4.

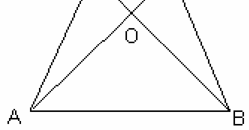
3.2. Используя признаки равенства треугольников, докажем, что все грани пирамиды – равные треугольники. 1) $\Delta ADB = \Delta CBD$ (II признак равенства треугольников), следовательно, $AD = BC$ и $AB = CD$. 2) $\Delta ADB = \Delta ACB$ (I признак равенства треугольников). 3) $\Delta ABC = \Delta CDA$ (III признак равенства треугольников). Следовательно, все четыре треугольника имеют одинаковые площади. Ответ: 40 см^2.

3.3. Ответ: не могло. Предположим противное, тогда каждая фраза произнесена 617 раз. Существует всего три возможных вида пар: 1) 2 рыцаря; 2) 2 лжеца; 3) рыцарь и лжец. В парах первых двух видов каждый сказал: «Он – рыцарь!», а в смешанных парах: «Он – лжец!». Каждая из фраз произнесена чётное количество раз.

4.1. Сначала рассмотрим показатели степеней с основанием 2: $2^{2^2} = 2^2 = 16 < 222 < 22^2 = 484 < 512 = 2^9 < 2^{22}$. Следовательно, $2^{2^{2^2}} < 2^{222} < 2^{2^{22}} < 2^{2^{22}}$. Оценим остальные степени: $22^{2^2} = 22^4 > 16^4 = 2^{16} = 2^{2^{2^2}}$ и $22^{2^2} = 22^4 < 22^{22} < 64^{37} = (2^6)^{37} = 2^{222}$; $222^2 < 256^2 = 2^{16} = 2^{2^{2^2}}$.

Ответ: $222^2 < 2^{2^{2^2}} < 22^{2^2} < 22^{22} < 2^{222} < 2^{22^2} < 2^{2^{22}}$.

4.2. Так как $P_{ABC} = P_{ABD}$, то $AC + BC = AD + BD$ (см. рис.). Аналогично, $AC + AD = BC + BD$. Складывая, получаем, что $AC = BD$. Значит, $AD = BC$, следовательно, $\Delta ADB = \Delta BCA$ (по 3 признаку равенства треугольников), следовательно, ΔAOB равнобедренный; AO = 10 см.



4.3. Ответ: 8. Для доказательства того, что невозможно расположить больше, раскрасим квадрат по диагонали в четыре цвета так, чтобы любой прямоугольник располагался на четырёх клетках, закрашенных в различные цвета. Клеток какого-то из цветов, будет только 8, поэтому и прямоугольников можно разместить не более восьми.

Математические регаты для учащихся общеобразовательных школ

Московские математические регаты стали традиционным и популярным видом математических соревнований. Задачи на них достаточно трудны – это связано, прежде всего, с тем, что в Москве много школ с высоким уровнем преподавания математики, – составители заданий в первую очередь ориентируются именно на них.

В последние годы становится традицией проводить математические регаты, ориентированные на другой уровень школьников: в них участвуют команды из общеобразовательных школ. Лидерами команд были сильные ученики неспециализированных классов. Очевидно, что для таких школьников уровень заданий должен быть существенно снижен. С другой стороны, проводить регату по совсем «школьным» задачам, не содержащим никаких новых идей, нецелесообразно. Поэтому возник следующий формат задач для таких регат. Каждая задача состоит из нескольких подпунктов, объединенных одним материалом или одной идеей решения. Первые пункты задачи доступны практически всем. Во многих случаях это частные случаи общей задачи или та же задача при малом значении какого-либо параметра. При описанном разбиении каждой задачи – от простого к сложному – соревнование приобретает ещё более обучающий характер. Школьники, которые не владеют теми или иными «нешкольными» математическими идеями, имеют возможность открыть их самостоятельно, двигаясь по ступеням усложнения задачи.

Кроме этого был изменён последний тур регаты: он состоит из задач, аналогичных тем, которые уже предлагались в первых турах (и решения которых уже были разобраны). Таким образом, последний тур проверяет умение слушать и понимать предложенные решения, используя новые идеи в решении задач. Результаты последнего тура в общем зачёте соревнования не учитываются, по нему идет отдельное награждение. Для большего разнообразия соревнования и создания ритма игры добавляется разминка и заминка – две лёгкие задачки на 2-3 минуты, которые решают практически все участники.

Некоторые материалы регат могут успешно использоваться для проведения соревнования внутри класса во время сдвоенных уроков.

Задачи регат для общеобразовательных школ

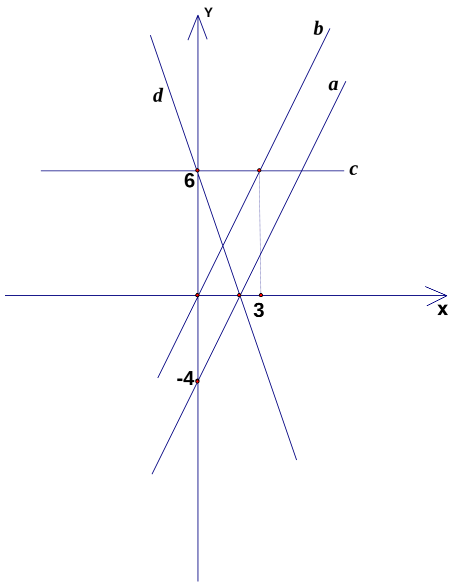
8 класс

Разминка (2 минуты)

(2 балла). Куб числа в 8 раз больше его квадрата. Найдите это число. (процент решивших – 60% команд)

1 тур (12 минут)

1.1 (7 баллов). Задайте четыре линейные функции, графики которых нарисованы на координатной плоскости (см. рис.). Известно, что прямые *a* и *b* параллельны друг другу, а прямая *c* параллельна оси абсцисс. (*c* – 56%, *b* – 60%, *a* – 36 %, *d* – 24%)



1.2. (8 баллов). Назовем два параллелограмма равными, если в них соответствующие стороны и углы равны. Дима придумал два «признака» равенства параллелограммов. Выясните, верны ли они. Если утверждение верно, то докажите его, если неверно, то приведите опровергающий пример.

1) «Первый признак». Если сторона и два прилежащих к ней угла одного параллелограмма соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого параллелограмма, то такие параллелограммы равны.

2) «Второй признак». Если две диагонали и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны двум диагоналям и углу между ними другого параллелограмма, то такие параллелограммы равны. (1) 44%, 2) 8%)

1.3 (7 баллов). Папа, мама, Маша, Яша и Вася пошли в лес за грибами. Вместе они нашли 18 грибов, причем каждый нашел хотя бы один гриб и никто не нашел столько же грибов, сколько другой.

1) Мог ли папа найти 6 грибов?

2) Мог ли папа найти 9 грибов?

3) Вася самый маленький, он нашел грибов меньше всех. Можно ли узнать из данных задачи, сколько грибов нашел Вася?

Ответы обоснуйте. (1) 84%, 2) 40% 3) 16%)

2 тур (15 минут).

2.1 (13 баллов):

1) Разложите на множители x^3+1=

2) Разложите на множители x^6+1=

3) Дима знает, что x^5+1 можно разложить на множители, но забыл, какие знаки должны быть у слагаемых во второй скобке: $x^5+1=(x+1)(x^4x^3x^2x\ 1)$

4) Разложите на множители: x^{10}+1=

5) Разложите на множители: x^{11}+1=

6) Можно ли разложить на множители: x^{2008}+1? (1)64%, 2) 20%, 3) 44%, 4) 4%, 5) 16%, 6) 0%.)

2.2 (10 баллов).

1) Существует ли выпуклый четырёхугольник, имеющий три острых угла? Ответ обоснуйте.

2) Существует ли выпуклый пятиугольник, имеющий четыре острых угла? Ответ обоснуйте. (1) 28%, 2) 24%.)

2.3 (9 баллов).

1) В квадратной таблице 4×4 поставьте в каждую клетку числа 1 или 2 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была чётная, а в каждом столбце нечётная.

2) Можно ли в таблице 2008×2008 поставить в каждую клетку числа 1 или 2 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была чётная, а в каждом столбце нечётная?

3) Тот же вопрос для таблицы 2007×2007 (1) 84%, 2) 16%, 3) 0%)

Заминка (3 минуты)

(2 балла) К натуральному числу прибавили его половину и треть от половины. Получилось 40. Найдите это число. (44%)

3 тур (20 минут).

3.1 (13 баллов). Найдите наименьшее значение выражения в заданиях 1) - 3). При каких значениях a оно достигается? Ответы обоснуйте. 1) $(a–1)^2$ 2) $a^4–8a^2+16$ 3) $a^2+6a+11$ 4) Дано уравнение с неизвестной x и параметром a: $x^2+ax+a–4=0$. Верно ли, что при любых значениях параметра a уравнение имеет корни? 5) Найдите наименьшее значение суммы квадратов корней уравнения из пункта 4). (1) 68%, 2) 44%, 3) 44%, 4) 0%, 5) 0%.)

3.2 (12 баллов).

1) В угол А, равный 60^0, вписана окружность с центром О, касающаяся сторон угла в точках В и С. Известно, что ВС=5 см. Найдите АВ.

2) В условиях задачи 1) на меньшей дуге ВС взята точка М и через неё проведена касательная к окружности, пересекающая стороны угла ВАС в точках К и N. Найдите периметр треугольника АКN.

3) В условиях задачи 2) найдите угол КОN. (1) полное решение: 12%, ответ без обоснования: 56%; 2) 0%, 3) 0%)

3.3 (10 баллов).

1) Батальон занимает часть линии обороны. В батальоне 5 стрелковых рот и 3 артиллерийских батареи. От каждой стрелковой роты к каждой артиллерийской батарее проведен провод телефонной связи. Сколько всего проводов телефонной связи проведено?

2) Маша позвала на день рождения подруг и друзей. Девочки пришли раньше, чтобы помочь Маше в приготовлении салатов, а мальчики позже (мальчиков было больше одного). Когда мальчики вошли, каждая девочка (включая Машу) бросила взгляд на каждого *знакомого* мальчика, а каждый мальчик бросил взгляд на каждую незнакомую девочку. Всего было брошено 55 взглядов. Сколько гостей было у Маши? (1) 84%, 2) 4%)

4 тур (10 минут)

4.1 (5 баллов). Разложите на множители: $x^{28}+1$ (4%)

4.2 (5 баллов). В квадрат *ABCD* вписана окружность с центром *O*. Касательная к окружности пересекает стороны *AB* и *AD* квадрата в точках *K* и *N*. Найдите угол *KON*. (0%)

4.3 (по 5 баллов).

1) В квадратной таблице 4×4 поставьте в каждую клетку целое число так, чтобы сумма чисел в каждом столбце была отрицательная, а сумма чисел в трёх строках – положительная.

2) Можно ли в таблице 2008×2008 поставить в каждую клетку целое число так, чтобы сумма чисел в каждом столбце была отрицательная, а сумма чисел в каждой строке положительная? (1) 44%, 2) 4%)

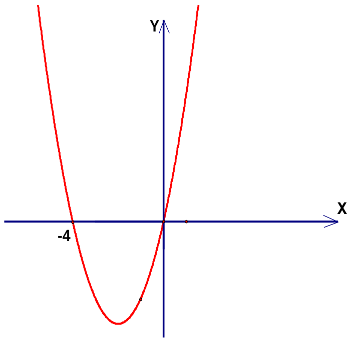
9 класс

Разминка (2 минуты)

(2 балла) Что больше: 16^4 или 4^{16}? (48%)

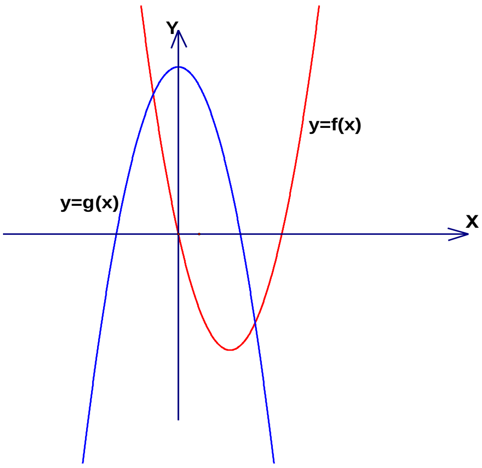
1 тур (12 минут)

1.1 (7 баллов)



1) График функции $y=x^2+bx+c$ приведен на рис. Найдите коэффициенты b и c.

2) Графики двух из приведенных ниже шести функций нарисованы на координатной плоскости. Определите, какой функции соответствует каждый из двух графиков, решение поясните.



1. $y=x^2-9$
2. $y=x^2-5x$
3. $y=x^2-6x+5$
4. $y=-x^2+5x$
5. $y=25-x^2$
6. $y=9-x^2$(1) – 26%, 2) f(x) – 52%, g(x) – 35%)

1.2 (7 баллов). В трапеции $ABCD$ известны основания $BC=a$, $AD=b$ и высота $BH=h$. Диагонали пересекаются в точке K. Какие из следующих величин можно найти, исходя из этих данных? Ответ обязательно поясните: если величину можно найти, то найдите её, если данных недостаточно, то приведите пример двух трапеций с данными основаниями и высотой, но имеющих разные другие величины.

1) Среднюю линию трапеции. 2) Площадь трапеции. 3) Сторону AB. 4) Диагональ AC. 5) Площадь треугольника AKD.

(1) 35%, 2) 65%, 3) 9%, 4) 0%, 5) 0%.)

1.3 (7 баллов) Назовем число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 – зеркальное. 1) Сколько существует двузначных зеркальных чисел? Ответ поясните. 2) Сколько существует трёхзначных зеркальных чисел? Ответ поясните. 3) Каких зеркальных чисел больше – трёхзначных или четырёхзначных? Ответ поясните. 4) Существует ли трёхзначное зеркальное число, которое делится на 45? (1) 83%, 2) 17%, 3) 26%, 4) 30%)

2 тур (15 минут)

2.1 (8 баллов) Представьте выражения в виде суммы двух квадратов: 1) $x^4+y^2–10y+25 = …$ 2) $x^6+x^4+6x^2+9 = …$ 3) $y^2+x^2+2x+4y+5= …$ 4) Используя выделение полного квадрата, решите уравнение: $x^4+3x^2–6x+3=0$ 5) Решите уравнение с двумя неизвестными: $y^2+2xy+2x^2+4x+4=0$ (1) 43%, 2) 43%, 3) 17%, 4) 13%, 5) 9%.)

2.2 (8 баллов)

1) Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике, диагонали которого перпендикулярны, суммы квадратов противоположных сторон равны.

2) Сформулируйте утверждение, обратное утверждению пункта 1). Верно ли обратное утверждение? Если верно, докажите, если неверно, приведите опровергающий пример. (1) 13%, 2) формулировка – 26%, доказательство 0%.)

2.3. (7 баллов). Разрежьте квадрат на: 1) 4 квадрата 2) 16 квадратов 3) 7 квадратов 4) 10 квадратов. 5) Можно ли разрезать квадрат на 2008 квадратов? (1) 100%, 2) 100%, 3) 65, 4) 61%, 5) 0%)

Заминка (3 минуты. 2 балла) Число умножили на сумму его цифр и получили 70. Найдите это число. (78%)

3 тур (20 минут)

3.1 (10 баллов). Дана система неравенств с переменной $\boldsymbol{x}$ и параметром a: $2 \le x \le 8$, $x^2 – ax \le 0$. 1) Решите систему неравенств, если $a=4$. 2) Решите систему неравенств, если $a= –4$. 3) При каких a решением системы является отрезок $x\in[2;3]$ (то есть все точки отрезка являются решениями и других решений нет). 4) При каких $\underline{a}$ система имеет ровно 5 целых решений? 5) При каких a решением системы является отрезок $x\in[2;8]$? (1) 39%, 2) 30%, 3) 9%, 4) 0%, 5) 4%)

3.2 (8 баллов). В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом B= 36° проведена биссектриса AK. 1) Докажите, что биссектриса AK делит треугольник ABC на два равнобедренных треугольника. 2) Найдите AC, если известно, что AB=1. (1) 39%, 2) 0%)

3.3 (9 баллов). 1) В отборочном туре шахматного турнира участвовало 4 шахматиста. Всего было сыграно 6 партий. Могло ли так быть, чтобы каждый шахматист сыграл с каждым не более чем по одной партии? 2) В шахматном турнире участвовало 10 шахматистов. В первом круге каждый шахматист сыграл с каждым ровно по одной партии. Сколько всего было сыграно партий? 3) В шахматном турнире уже сыграно 30 партий. Может ли так быть, чтобы каждый участник сыграл с каждым ровно по одному разу? 4) Сколько диагоналей имеет 2008-угольник? Необязательный вопрос: чем задача 4) похожа на три предыдущие? (1) 65%, 2) 30%, 3) 22%, 4) 13%.)

4 тур (10 минут)

4.1 (5 баллов). Решите уравнение $y^4-4xy^2+5x^2-4x+4=0$ (22%)

4.2 (5 баллов). В трапеции $ABCD$ известны основания $BC=a$, $AD=b$ и высота $BH=h$. Диагонали пересекаются в точке K. Какие из следующих величин можно найти, исходя из этих данных? Ответ обязательно поясните: если величину можно найти, то найдите её, если данных недостаточно, то приведите пример двух трапеций с данными основаниями и высотой, но имеющих разные другие величины. 1) $\angle DAB$. 2) Площадь треугольника ABK. (1) 12% 2) 0%)

4.3 (5 баллов). Назовем число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 – зеркальное. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5? (9%)

Выводы по III главе

1. В содержании образования должны быть представлены два направления: логическое и техническое. К первому относятся задачи по комбинаторике и геометрии, ко второму – по алгебре, теории чисел (арифметике), основам математического анализа. Восприятие каждого из указанных направлений наиболее успешно проходит в разном возрасте. Логического – в среднем звене школы, когда математический аппарат ещё недостаточен, но школьник уже воспринимает понятие доказательства, к техническому школьник может быть подготовлен только в результате овладения им всем необходимым математическим инструментарием, т.е. в старших классах школы. Поэтому формирование комплектов заданий не только, и даже не столько по причине различия в пройденном по школьной программе в разных классах материале, но и по причине возрастных особенностей, должно значительно различаться в разных классах.

2. Формы проведения математических соревнований *на каждом возрастном этапе обучения математически одарённых детей* должны выбираться с учетом их возможностей, образовательных потребностей и психолого-педагогических особенностей. Базовые сценарии математических соревнований как личные, так и командные, различаются подходами к решению задач и включают три варианта. На о*лимпиаде* участники сдают полные решения задач, жюри их проверяет и выставляет баллы. Вариант *блиц* предполагает жесткое ограничение времени решения и только ответы, без обоснований и объяснений. При использвании *теста* список вариантов ответа для каждой задачи приведен изначально, нужно только сделать правильный выбор.

При этом каждый из сценариев имеет устоявшиеся варианты. Олимпиады могут быть письменными и устными. Стоимость задач может быть одинаковой либо различной. Сценарий проведения игры может быть конкурентным и неконкурентным. Наиболее зрелищными и динамичными являются конкурентные сценарии, которые соответствуют особенности подросткового возраста – стремлению к состязательности.

Глава IV. ОПЫТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ РАБОТА ПО ПРОВЕРКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ С МАТЕМАТИЧЕСКИ ОДАРЁННЫМИ ДЕТЬМИ В МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ ПРЕДМЕТНЫХ ОЛИМПИАД И КОНКУРСОВ

4.1 Организационно-педагогические модели работы с математически одарёнными детьми в условиях региона

В настоящее время существует многообразие организационных структур, осуществляющих работу с математически одарёнными детьми в условиях региона, что обусловлено как его особенностями и возможностями, так и сложившимися традициями. Наиболее популярна в региональных образовательных системах модель организации дополнительного образования при вузе, которая может быть воплощается в различных формах, в том числе, Центрах, физико-математических школах, лицеях и др.

Рассмотрим реализацию модели на базе **Государственной бюджетной организации дополнительного образования Республики Адыгея «Республиканская естественно-математическая школа»** (далее – РЕМШ), созданной при Адыгейском государственном университете Указом Президента Республики Адыгея от 04.02.1998 № 16.

Целью РЕМШ является создание условий углубленного обучения математике и естественным наукам учащихся 6 – 11 классов. РЕМШ является основным в республике центром по работе с математически одарёнными учащимися и занимает в этой области одну из ведущих позиций на Юге России. При создании РЕМШ учитывался многолетний опыт Школы им. А. Н. Колмогорова по отбору и обучению талантливых детей.

Особенностью деятельности РЕМШ является её тесная связь с Адыгейским госуниверситетом, который обеспечивает преподавательский коллектив школы и является базой для организации учебного процесса.

Структура образовательных программ для учащихся представлена тремя составляющими: базовой, вариативной и индивидуальной. Что позволяет наиболее полно удовлетворять образовательные потребности обучаемых и их познавательные интересы.

Деятельность школы предоставляет возможность получения дополнительной подготовки в области математики и естественных наук для школьников всех муниципальных районов Республики Адыгея; координация работы осуществляется через представителей районных управлений образования.

Приоритетные направления и задачи деятельности РЕМШ представлены на рисунке 20.

Охарактеризуем программы дополнительного образования детей по математике.

Программы этого направления ориентированы на углубленное изучение математики и продолжения образования, и призваны решать следующие задачи:

- обеспечение прочного и осознанного овладения системой математических знаний и умений, необходимых в практической деятельности и продолжения математического образования;

- интеллектуальное развитие и формирование математического мышления, необходимого для осуществления математической деятельности и для жизни в обществе;

- формирование умения учиться;

- формирование представлений о математике как феномена общечеловеческой культуры, понимания её значимости в современном информационном обществе и её роли в развитии цивилизации;

- формирование и развитие устойчивого интереса к математике;

- выявление и развитие математических способностей.

ГБОУ ДО Республики Адыгея «Республиканская естественно-математическая школа при Адыгейском государственном университете»

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Организация углубленного дополнительного образования учащихся в области математики, информатики, естественных и гуманитарных наук.
Выявление и поддержка одаренных школьников в области математики, информатики и естественных наук.
Популяризация математики и естественных наук. Развитие научно-исследовательской работы учащихся.
Организация и проведение в РА конкурсов, олимпиад, семинаров, конференций и иных мероприятий естественнонаучной и гуманитарной направленности.
Координация проведения Всероссийской предметной олимпиады школьников в Республике Адыгея.
Развитие дистанционного обучения в системе общего образования РА. Информатизация сферы образования в РА.
Реализация межрегиональных, всероссийских и международных образовательных проектов математической, IT и естественнонаучной направленности.
Координация работы субъектов ЮФО и СКФО по созданию региональных систем по выявлению и поддержке математически одаренных школьников.

ЦЕЛИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ РЕМШ

- формирование общественного отношения к образованию как неотъемлемой части культурного багажа каждого ученика;
- создание и развитие в РА системы по выявлению и углубленной подготовке учащихся школ РА, имеющих способности в области математики, естественных и гуманитарных наук, в сфере информационных технологий;
- создание и обеспечение функционирования региональной корпоративной образовательной сети, ориентированной на поиск, выявление, обучение и развитие талантливых детей и молодежи в области математики естественных и гуманитарных дисциплин и информационных технологий;
- разработка, апробация и внедрение инновационных методик и образовательных технологий.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ, НА РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ БЫЛА НАПРАВЛЕНА ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

- реализация программ дополнительного образования детей в области математики, IT, естественных и гуманитарных наук;
- разработка и реализация образовательных программ, проектов и технологий сопровождения одаренных детей в области математики, информационных технологий, естественных и гуманитарных наук;
- организация научно-исследовательской и проектной деятельности учащихся;
- проведение олимпиад и конкурсов по математике, программированию и ИКТ, естественным и гуманитарным наукам для учащихся учреждений общего образования, студентов учреждений СПО;
- проведение специальной подготовки команд учащихся для участия во всероссийских и международных олимпиадах;
- организация школ-семинаров, профильных лагерей для одаренных школьников;
- организация сетевого взаимодействия между образовательными и научными учреждениями Республики Адыгея, работающими с талантливыми учащимися и студентами в области математики и ИКТ;
- создание и поддержка регионального информационно-образовательного портала;
- повышение квалификации пед. работников и специалистов в области математики, естественных и гуманитарных наук, IT, организация и проведение для них научных конференций и семинаров;
- организация курсов по подготовке в вузы для групп школьников, не являющихся учащимися РЕМШ;
- разработка и реализация ведомственных, межведомственных, региональных, межрегиональных и международных программ, проектов и технологий сопровождения деятельности участников образовательного пространства;
- подготовка и участие учащихся во ВсОШ (I – IV этапы); организация, подготовка и участие школьников в интеллектуально-творческих и культурно-массовых мероприятиях и иных мероприятиях для одаренных детей;
- развитие компьютерной информационной сети системы образования РА, внедрение новых информационных технологий;
- организация и проведение мероприятий по повышению информационной культуры участников образовательного процесса;
- мониторинг процессов информатизации сферы образования

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕННОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Эколого-биологическая	**Естественнонаучная направленность**	**Научно-техническая (компьютерные науки)**	**Культурологическая**
Кружок по биологии для учащихся 7 классов Группы 8, 9, 10, 11 классов по биологии Олимпиадные группы по биологии	Кружок по физике для учащихся 7 классов Группы 8, 9, 10, 11 классов по физике Группы 8 – 9 классов по астрономии Группа 10 классов по астрономии Кружок по математике для учащихся 5 классов Кружок по математике для учащихся 6 классов Группы 8, 9, 10, 11 классов по математике Олимпиадные группы по математике Кружок по химии для учащихся 8 классов Группы 9, 10, 11 классов по химии	Программирование (Pascal, Delphi) Олимпиадные группы по программированию	Группы 8 классов по истории и культуре адыгов Группы 10-11 классов по истории и культуре адыгов

Рисунок 20 – Приоритетные направления, цели, задачи

Решение совокупности перечисленных задач обеспечивается содержательными линиями программ.

Программы строятся как углублённое изучение вопросов, предусмотренных программой основного школьного курса. Углубление обеспечивается посредством обучения приёмам и методам решения математических задач, которые требуют использования высокого уровня логической и операционной культуры и научно-теоретического мышления учащихся. Тематика задач не выходит за рамки школьного курса, но уровень их сложности выше. Особое внимание уделяется задачам, предполагающим использование знаний в нестандартной ситуации и интеграцию с различными областями науки.

Повышению интереса к математике обеспечивают игровые и соревновательные направления, которые реализуются в таких формах, как математические драки, математические бои, олимпиады различного уровня и т. д., а также летние математические школы.

В РЕМШ существует как очное, так и очно-заочное отделения по профилю «математика». На очном отделении обучение осуществляется на основном и углублённом уровнях, а на очно-заочном только на основном уровне.

Для основного уровня разработаны 4 вида программ: для пяти, четырёх, трёх и двух лет обучения для учащихся 7-х – 11-х классов общеобразовательных школ Республики Адыгея. Каждая программа очного курса предполагает 120 часов в год по 4 часа в неделю для городских учебных групп и по 60 часов в год для учащихся очно-заочной формы обучения для учащихся из сельских районов.

Для углублённого уровня разработаны 3 вида программ: для математических кружков 5-х и 6-х классов (по 1 году обучения) и олимпиадных групп (5 лет обучения). В реализации программ участвуют учащиеся 5-х – 11-х классов общеобразовательных школ Республики Адыгея. Программы математического кружка для 5 класса – 2 часа в неделю (60 часов в год), математического кружка 6 класса – 4 часа в неделю (120 часов в год), олимпиадных групп – 8 часов в неделю (годовой курс – 240 часов).

Для контроля знаний разработан перечень мероприятий. Он включает 10 тестов, которые выполняются учащимися в дистанционной форме. В каждом тесте предусмотрено 5 вопросов на проверку усвоения пройденного материала. Для прохождения теста учащимся предоставляются две попытки длительностью по часу. В конце года предусмотрена контрольная работа по пройденным темам, которая включает 15 обязательных и 5 дополнительных задач. Также в течение учебного года учащиеся выполняют домашние и аудиторные контрольные работы, проверочные срезы, экспериментальные задачи и пр. Участие в завершающем учебный год мероприятии – Летней математической школе – осуществляется после отбора по результатам обучения в учебном году.

Формирование групп в начале каждого учебного происходит с учётом итогов предыдущего года и пребывания в Летней математической школе.

Итоги обучения учащихся ежегодно, независимо от формы обучения, подводятся на основе комплексного анализа результатов очного зачёта, тестов и очной итоговой аттестации.

Процесс обучения обеспечивает формирование у учащихся следующих умений и навыков:

- самостоятельного изучения материала;
- грамотного представления результатов собственных умозаключений с использованием математического языка;
- аргументированного выдвижения и доказательства гипотез;
- построения системы подзадач;
- умений делать выводы;
- работы в команде и участия в дискуссиях.

Модель Центра дополнительного образования в системе общего образования реализована на базе **Кировского областного государственного автономного образовательного учреждения дополнительного образования детей «Центр дополнительного образования одарённых школьников»** (далее – Центр).

Его история начиналась в 1980-е годы. Усилиями доцента Кировского педагогического института Игоря Соломоновича Рубанова в регионе сложилась продуманная и эффективная система работы с математически одарёнными школьниками. В неё входили городской математический кружок, летняя и заочная математические школы, соревнования по предмету. Работа студентов и преподавателей института осуществлялась на общественных началах. Постепенно эта работа нашла поддержку в правительстве Кировской области и в 1991 году была создана Кировская областная заочная математическая школа, которая 24 января 1992 года была преобразована в «Центр дополнительного образования одарённых школьников».

В настоящее время Центр – это государственное автономное учреждение, в составе которого работают отделения по четырём предметам – математике, физике, химии и биологии.

В Центре заочно обучаются 686 школьников, более 1000 учащихся из г. Кирова и близлежащих населённых пунктов занимаются в 70 кружках при Центре, более 50 000 ребят из Кировской области ежегодно принимают участие в проводимых центром соревнованиях по различным предметам. Образовательный процесс осуществляют 70 штатных сотрудников и 26 педагогов-почасовиков (в основном – преподаватели и студенты вузов).

Основными целями и задачами ЦДООШ являются:

- выявление детей, одарённых способностями к занятиям наукой, пробуждение у них интереса к таким занятиям;

- создание благоприятных условий для раскрытия интеллектуальных и творческих способностей одарённого ребёнка путем адекватного одарённости обучения и воспитания;

- подготовка наиболее одарённых детей к будущей научной работе;

- привлечение учёных, специалистов, студентов к работе с одарёнными детьми, подготовка студентов к работе с одарёнными детьми в школах;

- организационно-методическая помощь учителям, родителям и наставникам одарённых детей.

Реализация вышеперечисленных задач осуществляется Центром на нескольких уровнях.

<u>Первый</u> из них составляет организация и проведение соревнований по предметам. Здесь преследуется несколько целей. Во-первых, соревнования представляют собой «широко раскинутую сеть», позволяющую Центру выявлять одарённых детей и привлекать их к систематическим занятиям, создавать и поддерживать базу данных одарённых детей. Во-вторых, участие в соревнованиях повышает интерес учащихся к соответствующему предмету и мотивацию к занятиям им, позволяют детям оценить свой уровень. В-третьих, проведение соревнований позволяет привлекать к участию в работе с одарёнными детьми большое число студентов и отбирать из них тех, кто может и хочет вести эту работу на более высоких уровнях.

Центр проводит несколько видов соревнований. Прежде всего, он разрабатывает материалы муниципального этапа, и проводит региональный и городской (в г. Кирове) этапы всероссийской олимпиады школьников по математике, физике, химии и биологии. Эти соревнования в масштабах области являются наиболее массовыми, но уже на муниципальный их этап могут попасть только победители школьного. Поэтому Центр проводит также соревнования, в которых могут участвовать все желающие школьники. Среди них есть соревнования как для начинающих (Математическое домино, турниры имени М. В. Ломоносова по математике, физике, химии, биологии, международная конкурс-игра «Кенгуру» по математике, конкурс-игра «Гелиантус – естествознание для взрослых» и т. д.), так и для тех, кто уже продвинулся в обучении (Турниры городов по математике, турнир юных биологов, Турнир юных физиков и др.). Первые преследуют, прежде всего, цель поиска и привлечения одарённых детей, вторые, напротив, предназначены главным образом для тех, кто уже продвинулся в своих занятиях. К соревновательным мероприятиям относятся также конкурсные вступительные работы в ЛМШ и на заочное обучение. Их тексты ежегодно рассылаются во все школы области, а также более чем шести тысячам школьников, занесённых в имеющиеся в Центре базы данных. В итоге на конкурс ежегодно поступает около 1000 работ.

Перечень массовых соревнований и количество их участников из Кировской области в 2011/2012 году приведены в таблице.

Соревнование	Кол-во участников из школ Кировской области
Математическое домино (5 – 6 классов)	1 145
Турнир им. Ломоносова по математике, физике, химии и биологии (7 – 8 классов)	831
«Русский медвежонок – языкознание для всех» (2 – 11 классов)	38 473
«Гелиантус – природоведение для взрослых» (7 – 11 классов)	5 500
«Кенгуру – математика для всех» (2 – 11 классов)	32 410
Олимпиада имени Эйлера по математике (8 классов)	85
Международный Турнир городов по математике (7 – 11 классов)	116
Открытый городской турнир юных биологов (7 – 11 классов)	64
Открытый Кировский турнир юных физиков (7 – 9 классов)	62

Те, кто уже определился в своих интересах и продвинулся в обучении, имеют возможность поучаствовать и в соревнованиях более высокого уровня – межрегионального, Всероссийского или Международного. Некоторые из этих соревнований проводятся в г. Кирове непосредственно Центром или при его организационной поддержке. Это Уральские турниры юных математиков, всероссийские турниры юных биологов, а с 2012 года и открытые турниры юных физиков. Для ряда соревнований (Турнир городов по математике) ЦДООШ исполняет функции местного (в Кировской области) оргкомитета организует участие кировских школьников в различных региональных, российских и международных соревнованиях (конференции Турнира городов, Турнир «Кванта», Кубок памяти Колмогорова, Школьный физический турнир им. Бронфмана и т. д.).

Для ряда международных соревнований (Турнир городов по математике) ЦДООШ исполняет функции местного (в Кировской области) оргкомитета, (для «Кенгуру» (www.kenguru.sp.ru) – функции межрегионального оргкомитета для Урала и Поволжья). С 2000 года Центр проводит Всероссийскую игру-конкурс «Русский медвежонок – языкознание для всех», с 2010 года игру «Гелиантус – природоведение для взрослых», с 2009 – всероссийский турнир юных биологов, с

2008 – олимпиаду имени Эйлера. Ряд указанных соревнований проводятся непосредственно Центром, а такие интеллектуальные состязания, как Русский медвежонок, Кенгуру. Гелиантус, совместно с другими организациями.

С 1993 года Центр стал проводить Уральские турниры юных математиков для учащихся 5-8 классов, участвовал в проведении зональных Российских олимпиад школьников по математике 1994, 1995, 2000 и 2003 гг.,

Второй уровень работы – заочное обучение. Он ориентирован, прежде всего, на учащихся школ области, не имеющих возможности заниматься в продвинутых профильных кружках. Его цели – предоставить возможность школьникам, интересующимся предметом, углубить свои знания, познакомиться с начальными идеями изучаемой науки и заложить основы соответствующего образования; обучить школьников основам научного мышления; дать толчок к самостоятельным занятиям; помочь учителям и родителям в работе с одарёнными детьми.

В Центре имеется пять отделений заочной школы. *Подготовительное отделение* (ПО), которое осуществляет работу с учащимися 5 – 6 классов, задумано как непрофильное, общеразвивающее, так как в этом возрасте учащиеся ещё не определились с выбором предмета. Это оригинальная разработка Центра, до последнего времени не имевшая аналогов в России. Подготовительное отделение развернулось в общероссийскую Межрегиональную заочную школу развития, в которой сейчас занимается 738 школьников из 83 регионов России и 5 стран.

Уже с 7 класса учащиеся Центра имеют возможность углублённо изучать математику, физику и биологию, с 8 класса – химию.

Кроме индивидуального обучения, в Центре практикуется работа с учителями (группы «Коллективный ученик»), родителями и другими заинтересованными лицами. Школьники, занимающиеся индивидуально, зачисляются на заочное обучение по результатам вступительных работ, коллективные ученики и дети, занимающиеся с педагогами-посредниками, принимаются на заочное обучение без конкурса.

Третий уровень – очное обучение. Это сеть кружков для школьников города Кирова и летняя многопредметная школа (ЛМШ). Набор в кружки проводится без ограничений, набор в ЛМШ – конкурсный. Школьники, уже зарекомендовавшие себя, приглашаются в кружки и ЛМШ персонально.

К целям, которые свойственны заочному обучению, на рассматриваемом уровне добавляются следующие:

- отработка и введение в оборот новых тем и методик работы с одарёнными школьниками;

- усвоение учениками в процессе тесного повседневного общения с преподавателями соответствующего профессионального менталитета, установление устойчивых профессиональных и личных контактов между учёными, студентами и школьниками;

- подготовка учащихся, имеющих склонность к педагогике, к будущей преподавательской и организаторской работе.

ЛМШ во многих отношениях является для Центра ключевой формой организационной и методической работы, «плавильным котлом» кадров преподавателей и детей. За годы работы ЛМШ превратился из областного во всероссийский и международный. В ЛМШ в разные годы обучались иногородние учащиеся из Казахстана, Болгарии и регионов РФ.

Четвёртый, высший уровень: работа с особо одарёнными детьми (индивидуальная и в малых группах). Таких детей мало (одномоментно – не более 10 – 15), но это именно те, кому Центр особенно необходим, ибо в школе, даже специализированной, они не могут получить адекватной способностям нагрузки, и работа с которыми в перспективе даёт наибольшую отдачу. Здесь работа идет с теми, кто уже вполне определился со своими склонностями и сферой будущей научной деятельности, и имеет достаточные потенциал и мотивацию для успешных занятий ею. Цель работы на этом этапе – обучить языку, системе понятий и фактов, способу мышления, характерным для избранной науки, с тем, чтобы обеспечить раннее и плавное вхождение ученика в науку. По сути дела, это уже не обычная внешкольная работа, а первый этап подготовки будущего профессионального учёного.

На каждом из названных уровней проводится методическая работа с педагогами.

Для проведения соревнований ежегодно составляются комплекты задач, придумываются новые задачи и конкурсы. Разработана и используется общая методика проверки и оценки олимпиадных работ. Муниципальный этап олимпиад по математике, физике, химии и биологии, помимо задач, обеспечивается *брошюрами* с их решениями, указаниями по проверке и оценке олимпиадных работ, а также советами по использованию олимпиадных задач на школьных уроках и во внеклассной работе. Центр делает всё от него зависящее, чтобы эти брошюры попадали в каждую школу области.

Для заочного обучения методистами Центра разработаны и используются оригинальные комплекты заданий по физике, химии, биологии, пакет комплексных общеразвивающих заданий для Подготовительного отделения (занятия на математическом отделении проводятся по заданиям ВЗМШ).

В ЛМШ и кружках обучение ведётся *исключительно по авторским программам,* которые ежегодно обновляются. С материалами можно ознакомиться в интернете, на сайте http://www.cdoosh.ru/index.html. Накоплен большой массив соответствующей информации, введено в педагогический оборот (прежде всего, через ЛМШ) больше двух десятков новых тем для внеклассной работы, созданы многие десятки методических разработок для кружков. Вчерне разработаны основы содержания и методики подготовки особо одарённых детей к работе профессионального математика.

Необходимым звеном в работе Центра является **помощь взрослым, работающим с одарёнными детьми.** Сюда относятся, во-первых, *издание методической литературы,* и, во-вторых, *работа с педагогами-посредниками Центра.* К сожалению, ограниченность ресурсов не позволяют Центру развернуть чтение лекций и проведение курсов для учителей, но в рамках ЛМШ проводится некоторая работа с учителями – руководителями делегаций иногородних школьников.

В настоящее время работа с учителями приобрела для Центра особую значимость ещё и потому, что он в самостоятельном поиске одарённых и работе с ними достиг предела своих возможностей. В базу данных Центра попадают все дети, которые сумели каким-то образом проявить себя, прежде всего – на соревнованиях. Но достоверно известно, что есть немало одарённых детей, которые незаметны на соревнованиях из-за слабой школьной подготовки или вообще не ходят туда! Разглядеть их, дать им первоначальную подготовку, на базе которой Центр сможет учить их дальше – задача школьного учителя, но далеко не все учителя могут и хотят её решать. К сожалению, и здесь по скудости средств Центр пока может влиять на ситуацию лишь косвенным образом: через издаваемую литературу, проводимые мероприятия и тех же посредников. Есть ещё ручеёк учителей, которые в свою бытность студентами участвовали в работе Центра – часть их них продолжает работать с одарёнными в своих школах, некоторые стали посредниками. Но этого явно недостаточно.

Центр имеет широкие **контакты с родственными организациями.** Он повседневно сотрудничает с Кировским физико-математическим лицеем (кружки, поездки на соревнования, рекомендации учащимся для поступления в лицей) и другими школами области. Участие в соревнованиях высокого уровня и, в особенности, их проведение, позволяет Центру завязывать и поддерживать многочисленные связи с коллегами и школами других регионов и стран, а также выступать посредником в установлении таких контактов. С десятками школ заключались договоры на обучение их учеников в ЛМШ (ФМЛ № 31 г. Челябинска, ФМШ № 146 г. Перми, Лицеи № 30 и № 41 г. Ижевска, Аэрокосмический лицей, и др.). О команде преподавателей ЛМШ уже было сказано. В настоящее время она оказывает заметное влияние на состояние работы с одарёнными школьниками в масштабе всей России.

Результаты работы Центра можно оценивать по числу желающих здесь учиться, а можно – по результатам и судьбам его учеников. Шестнадцать учеников Центра участвовали в Международных олимпиадах школьников и завоевали 18 медалей. В международном математическом Турнире городов Киров постоянно входит в десятку лучших городов. Ученики Центра за последние пять лет получили 14 дипломов победителей и 55 дипломов призёров заключительного этапа всероссийских олимпиад школьников. Десятки выпускников Центра учатся в МГУ, МФТИ, СПбГУ и других ведущих вузах России. Многие из сильнейших, окончив школу, начинают сами преподавать в ЛМШ, кружках (не только в Кирове, но и в Москве), участвовать в проведении олимпиад и турниров для одарённых детей. Лидеры первых ЛМШ уже защитили диссертации. Круг замыкается: ученики становятся учителями, чтобы готовить новых учеников. Есть надежда, что через несколько лет система работы ЦДООШ станет в кадровом отношении самовозобновляющейся и самоподдерживающейся.

Существенным ресурсом развития математического образования, в том числе, работы с одарёнными детьми в регионе выступают информационно-коммуникационные технологии. На их основе могут создаваться *образовательные порталы*, объединяющие субъектов системы работы с математически одарёнными детьми. Организация взаимодействия с помощью Интернет-технологий позволяет решать специфические задачи, относящиеся к развитию творческой составляющей образования и затруднённые для достижения в обычных образовательных и соревновательных формах:

- усиление активной роли учащегося в собственном образовании, в постановке образовательных целей, выборе доминантных направлений, форм и темпов продвижения в образовательных областях;

- увеличение объёма доступных образовательных массивов;

- получение возможности общения учащегося с профессионалами, со сверстниками-единомышленниками, консультирование у специалистов высокого уровня независимо от их территориальной расположенности;

- более комфортные, по сравнению с традиционными, условия для творческого самовыражения ученика, возможность демонстрации учениками продуктов своей деятельности, широкие экспертные возможности оценки достижений детей.

Достоинства форм дистанционной образовательной деятельности состоят в их оперативности, продуктивности, насыщенности, возможности быстрой и эффективной творческой самореализации учащихся, наличии условий для формирования персональной образовательной траектории.

Одной из эффективных региональных моделей работы с одарёнными детьми с использованием информационно-коммуникационных технологий является региональный портал «Математика для всех» (http://math.edu.yar.ru/) (далее – портал), который создан в марте 2013 г. на базе **Государственного учреждения Ярославской области «Центр телекоммуникаций и информационных систем в образовании»**. Его целями являются создание условий для выявления, развития и сопровождения талантливых детей с использованием Интернет-технологий.

Прогнозируемые образовательные результаты и эффекты: повышение доли детей, мотивированных к изучению математики. Увеличение числа педагогов, использующих возможности Интернет для работы с учащимися, интересующимися математикой.

Учреждение осуществляет сотрудничество:

- с государственными организациями;

- с индивидуальными предпринимателями;

- с представителями науки/высшей школы;

- с родительской общественностью;

- со студенчеством.

Организации образовательной деятельности осуществляется в следующих формах:

- объединения по интересам: образовательные центры, кружки, клубы, студии, мастерские;

- авторские интенсивные образовательные программы, модульные и элективные курсы;

- проведение учебных исследований;

- интеллектуальные соревнования;

- тематические образовательные смены, каникулярные программы, программы развивающего отдыха;

- интерактивные музеи математики;

- комплексы тренажёров, актуализирующих математические знания и способности;

- Интернет-проекты, направленные на популяризацию математических знаний, в том числе показывающие в популярной форме направления и достижения современной математики, включая просветительскую активность профессиональных математических и педагогических Интернет-сообществ;

- организация участия высокомотивированных детей Ярославской области во всероссийских сменах, специализированных мероприятиях, всероссийских конкурсах на базе ведущих организаций Российской Федерации.

Деятельность портала охватывает систему образования всего региона и реализуется в масштабе более 12 000 пользователей ежегодно из всех муниципальных образований Ярославской области.

Спецификой работы организации является целенаправленная работа по созданию дополнительных образовательных форм, позволяющих адекватно использовать неограниченный информационный и технологический потенциал компьютерных сетей, создание инструментариев взаимодействия субъектов образовательной деятельности, реализация учебно-методических комплексов в формате Интернет-сайта.

Интернет-портал «Математика для всех» http://math.edu.yar.ru/ представляет собой современную среду для взаимодействия школьников с учёными, педагогами, наставниками, тренерами национальной сборной страны по математике.

Цель проекта: разработка и апробация инновационной среды опосредованного (дистанционного) взаимодействия, отвечающей следующим условиям:

- использование потенциала новых информационных технологий для развития интеллектуальных и творческих способностей учащихся;

- разработка и реализация информационных образовательных технологий и методов обучения, способствующих выявлению, поддержке и развитию способностей учащихся;

- расширение сферы познавательных интересов детей и подростков в ходе применения информационных технологий;

- организация индивидуальной и коллективной деятельности субъектов дистанционного образовательного процесса.

Ресурсы портала адресованы школьникам, родителям, преподавателям математики и руководителям математических кружков. На портале размещены дистанционные уроки, занимательные задачи, тренажёры, математические диктанты, ссылки на полезные ресурсы, раздел «Фитнес-математика». Благодаря разработанным сервисам удалённой коллективной работы портал стал площадкой для проведения особых форм образовательной деятельности, таких как математические онлайн-игры и дистанционные конкурсы для детей Ярославской области.

На портале представлены лекции ведущих российских учёных-математиков, интерактивные занятия для школьников.

Особенностью созданной среды является нацеленность на включение в активную работу педагогов-математиков:

- стимулирование интереса педагогов к внедрению новых форм работы с одарёнными школьниками в рамках изучения математических дисциплин;

- овладение педагогами навыками проектирования вариативных образовательных траекторий в системах дистанционного обучения;

- вовлечение педагогов в систему дистанционного взаимодействия с использованием технологий Интернет, в том числе с использованием потокового Интернет-вещания медиаконтента.

Для реализации этих задач на портале разработаны инструменты для работы учителя-математика, позволяющие организовать обучение детей в режиме «коллективный ученик», с использованием ресурсов и сервисов портала «Математика для всех».

Возраст обучающихся: 5 – 11 классы общеобразовательных организаций.

Деятельность портала ориентирована на широкий круг учащихся, а также на детей с выраженными математическими способностями.

Успешная практика реализуется в масштабе системы образования всего региона:

- охват целевой аудитории (2015 год – 12.249 уникальных пользователей Интернет из всех муниципальных образований Ярославской области).

<u>Основные этапы реализации</u>

03 – 08.2013 – разработка структуры сайта «Математика для всех».

03 – 08.2013 – разработка плана организационно-технического и информационно-методического обеспечения математических конкурсов с личным и командным участием на сайте «Математика для всех».

05.2013 – по настоящее время – разработка инструментов и сервисов взаимодействия для сайта «Математика для всех».

09.2013 – по настоящее время – апробация форм опосредованного взаимодействия целевых аудиторий (родители, педагоги, обучающиеся, учёные, специалисты по работе с одарёнными в области математики детьми) на сайте «Математика для всех».

09.2013 – по настоящее время – разработка и реализация авторских интерактивных ресурсов для сайта «Математика для всех».

Используемые методы и технологии:

- обучение решению задач;
- дифференциальное обучение;
- групповые технологии;
- игровые технологии;
- дистанционные технологии.

Формами представления интеллектуальной деятельности обучающихся являются творческие задания и решение сложных заданий.

Типы заданий, используемых в практике:

- Задания предметного характера.
- Примеры заданий:

http://math.edu.yar.ru/online5/index.html

http://math.edu.yar.ru/fitness/index.html

Взаимодействие учёных, экспертов, практикующих специалистов с детьми осуществляется в следующих формах:

- консультации;
- экспертная оценка заданий;
- установочные и экспертные лекции;

- дистанционные уроки в режиме медиатрансляции;
- организация взаимодействия в режиме видеоконференций;
- взаимодействие в рамках сопровождения участников дистанционных конкурсов.

Педагогическая поддержка математически одарённых учащихся осуществляется в форме наставничества и управления игровыми формами. Образовательный процесс строится на основе индивидуального и дифференцированного подходов.

Комфортность, доступность образовательной среды выражается в организации рабочей атмосферы, доступности среды для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и доступность ресурсов и сервисов с домашних и школьных компьютеров.

Для выявления математической одарённости учащихся используются:

- математические онлайн-игры для детей;
- непрерывный конкурс решения задач – личное соревнование школьников 5 – 11 классов в решении математических задач, организованное на региональном портале «Математика для всех».

Реализацию проекта осуществляет коллектив общей численностью 15 человек, в который входят педагогические и научные работники, практикующие специалисты в сфере организации олимпиадного движения и разработки образовательных ресурсов и сервисов, студенческие педагогические команды.

Проект реализуется на материально-технической базе ГУ ЯО «Центр телекоммуникаций и информационных систем в образовании».

Используется следующее оборудование:

- серверное и компьютерное оборудование ГУ ЯО «Центр телекоммуникаций и информационных систем в образовании».

Программное обеспечение состоит из серверного обеспечения; системы интерактивного вещания Webunicom; специализированных сервисов, созданных для работы пользователей портала «Математика для всех».

4.2 Педагогический эксперимент

Проверка эффективности разработанной модели системы работы с математически одарёнными детьми в условиях предметных олимпиад и конкурсов была осуществлена в 2010 – 2017 гг. на базе трёх региональных структур, описанных в п.4.1 настоящей главы.

В ходе эксперимента оценивались количественные и качественные результаты участия детей в различных математических состязаниях и на всех уровнях Всероссийской олимпиады школьников по математике (ВОШ). Отметим, что анализ результатов эксперимента осуществлялся на основе действовавшего в те годы Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников [204].

Вначале рассмотрим требования к проведению всех уровней ВОШ, которые разрабатывались при непосредственном участии автора настоящей работы.

При проведении школьного этапа используются Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного этапа всероссийской олимпиады школьников по математике[158].

Согласно введенному в 2013 году Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников (приказ Минобрнауки России от 18.11.2013 № 1252 (с изменениями от 17.03.2015 № 249, от 17.12.2015 № 1488, от 17.11.2016 № 1435), сохраняется общая четырёхэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы [204]. Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам. Центральной предметно-методической комиссией по математике подготовлены методические рекомендации и направлены в помощь муниципальным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения школьного этапа.

Основные задачи школьного этапа

Одной из важнейших задач Олимпиады на начальных этапах является развитие интереса у обучающихся к математике, формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах, повышение качества математического образования. Важную роль здесь играет свойственное подростковому периоду стремление к состязательности, к достижению успеха. Квалифицированно составленные математические олимпиады являются соревнованиями, где в честной и объективной борьбе обучающийся может раскрыть свой интеллектуальный потенциал, соотнести свой уровень математических способностей с уровнем других учащихся школы. Кроме того, привлекательными для участников являются нестандартные условия задач, предлагаемых на олимпиадах. Они заметно отличаются от обязательных при изучении школьного материала заданий, направленных на отработку выполнения стандартных алгоритмов (например, решения квадратных уравнений), и требуют демонстрации креативности участников олимпиады. Наконец, первые олимпиадные успехи важны для самооценки учащегося, а также, в ряде случаев, изменения отношения к нему учителей, возможно недооценивавших его способности. Нередки случаи, когда способный и даже талантливый обучающийся допускает при выполнении стандартной школьной контрольной работы арифметические ошибки, либо выполняет её с не устраивающей учителя аккуратностью.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на школьном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Школьный этап олимпиады проводится для учащихся 4 – 11 классов.

В соответствии с разделом III Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников конкретные сроки и места проведения школьного этапа олимпиады по математике устанавливаются органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования. Олимпиада для учащихся всех школ муниципального образования проводится по единым заданиям, разработанным для каждой из параллелей 4 – 11 классов муниципальной предметно-методической комиссией, назначаемой органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования.

В олимпиаде имеет право принимать участие каждый обучающийся (далее – Участник), в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. Число мест в классах (кабинетах) должно обеспечивать самостоятельное выполнение заданий олимпиады каждым Участником. Продолжительность олимпиады должна учитывать возрастные особенности Участников, а также трудность предлагаемых заданий.

Рекомендуемое время проведения олимпиады:

- для 4 класса – 1 – 2 урока,
- для 5 – 6 классов – 2 урока,
- для 7 – 8 классов – 3 урока,

для 9 – 11 классов – 3 – 4 урока.

Согласно п. 38 Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников [204], участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своём несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признаётся обоснованным.

По результатам олимпиады создаётся итоговая таблица по каждой параллели. Количество победителей и призёров школьного этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призёров, установленной организатором школьного этапа Олимпиады. Отметим, что в каждой из параллелей победителями могут стать несколько участников.

Проведение муниципального этапа также потребовало разработку Методических рекомендаций по разработке заданий и требований к проведению муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике [169].

Основные задачи муниципального этапа

На муниципальном этапе происходят изменения в целях Олимпиады. Она теперь направлена не только на популяризацию математики и математических знаний. Анализ её результатов позволяет сравнивать качество работы с учащимися в различных школах, устанавливать уровень подготовки учащихся всего региона, определять направления работы с одарёнными школьниками в регионе. При этом усиливается стимулирующая роль Олимпиады, когда у её участника появляется возможность сравнения своих математических способностей и олимпиадных достижений не только с учащимися своей школы. Участники получают дополнительные стимулы для регулярных занятий математикой в кружках и на факультативах. Кроме того, муниципальный этап олимпиады является серьёзным отборочным соревнованием, поскольку по его итогам из большого числа сильнейших детей различных муниципальных образований формируется состав участников регионального этапа.

Соответственно меняется и характер заданий олимпиады. Они предполагают знакомство участников со спецификой олимпиадных задач по математике: умение строить цепочки логических рассуждений, доказывать утверждения. Стилистически задания ещё в большей, по сравнению со школьным этапом, степени начинают отличаться от заданий повышенной трудности, включаемых в школьные учебники по математике, что предполагает психологическую готовность участников олимпиады к таким заданиям. Наконец, большое количество обладающих математическими способностями участников муниципального этапа олимпиады (в особенности в крупных муниципальных образованиях) предполагает заметно более высокий уровень сложности заданий.

Таким образом, основными целями муниципального этапа олимпиады являются формирование и закрепление интереса математически способных обучающихся к регулярным дополнительным занятиям математикой; повышение качества работы учителей математики в школах и развитие системы работы с одарёнными детьми в регионе, отбор наиболее способных школьников в каждом муниципальном образовании, формирование регионального списка наиболее одарённых учащихся.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на муниципальном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Олимпиада проводится для учащихся параллелей 7 – 11 классов. Рекомендуется проведение муниципального этапа олимпиады и для параллелей 5 и 6 классов, в особенности в тех регионах, где развита система дополнительного образования (например, проводятся кружки при университетах). Кроме того, согласно п. 38 Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады. Таким образом, участники школьного этапа олимпиады, выступавшие за более старшие классы по отношению к тем, в которых они проходят обучение, на муниципальном этапе также выполняют задания для более старших классов.

Согласно Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, на муниципальном этапе олимпиады принимают участие участники школьного этапа олимпиады текущего учебного года, набравшие необходимое для участия в муниципальном этапе олимпиады количество баллов, установленное организатором муниципального этапа олимпиады. Кроме того, участниками олимпиады являются обучающиеся, ставшие победителями и призёрами муниципального этапа олимпиады предыдущего года, при условии, что они продолжают обучение в общеобразовательных учебных заведениях. Вышесказанное означает недопустимость ограничения числа участников Олимпиады от одного образовательного учреждения.

Рекомендуемая продолжительность олимпиады:

- для учащихся 5 и 6 классов – 3 часа;

- для учащихся 7 – 11 классов – 4 часа.

Во время Олимпиады участники:

- должны соблюдать установленный порядок проведения Олимпиады;

- должны следовать указаниям организаторов;

- не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории;

не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой.

При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещённых источников информации решением Оргкомитета соответствующего этапа Олимпиады такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Олимпиада должна проходить как абсолютно объективное, беспристрастное и честное соревнование с высоким уровнем качества проверки работ участников и удобными условиями работы для участников. Для достижения этих целей:

а) Требуется выполнение олимпиадных работ в тетрадях в клетку в силу того, что на математических олимпиадах предлагаются задачи на разрезание фигур, задачи на клетчатых досках, задачи, требующие построения рисунков и графиков.

б) Работы участников перед проверкой обязательно шифруются. Наиболее удобной формой кодирования является запись шифра (например, 9-01, 9-02, …) на обложке тетради и на первой беловой странице с последующим снятием обложки и её отдельным хранением до окончания проверки. Расшифровка работ осуществляется после составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призёров олимпиады.

в) В состав жюри олимпиады наряду с лучшими учителями необходимо включение преподавателей университетов, а также студентов и аспирантов, успешно выступавших на олимпиадах высокого уровня. Недопустимой является практика не включения в состав методических комиссий и жюри квалифицированных специалистов, непосредственно ведущих работу с одарёнными детьми.

г) После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своём несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признаётся обоснованным. Жюри олимпиады не вправе «защищать честь мундира» и отказывать участнику олимпиады в исправлении оценки его работы в ситуации, когда реально требуется её повышение. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

д) По результатам олимпиады создаётся итоговая таблица по каждой параллели. Количество победителей и призёров муниципального этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призёров, установленной организатором муниципального этапа Олимпиады. Отметим, что в каждой из параллелей победителями могут стать несколько участников.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике, особенности которого раскрываются в Требованиях к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике (для организаторов и членов жюри) [244], проводится в два тура (два дня подряд) по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки, установленные Минобрнауки России.

Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов. Центральной предметно-методической комиссией также готовится комплект заданий для учащихся 8 класса. Всероссийская олимпиада для учащихся 8 класса носит название олимпиады имени Леонарда Эйлера. Региональный этап олимпиады им. Л. Эйлера проводится в те же сроки, что и региональный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. Регламент олимпиады имени Леонарда Эйлера размещён на сайте http://www.matol.ru.

В региональном этапе олимпиады по математике принимают участие:

- участники муниципального этапа олимпиады текущего учебного года, набравшие необходимое для участия в региональном этапе олимпиады количество баллов, установленное организатором регионального этапа олимпиады;

- победители и призёры регионального этапа олимпиады предыдущего учебного года, продолжающие обучение в организациях, осуществляющих образовательную деятельность по образовательным программам основного общего и среднего общего образования;

- обучающиеся 9 – 11 классов организаций, осуществляющих образовательную деятельность по образовательным программам основного общего и среднего общего образования, расположенных за пределами территории Российской Федерации, и загранучреждений Министерства иностранных дел Российской Федерации, имеющих в своей структуре специализированные структурные образовательные подразделения.

Приведём результаты участия обучающихся в каждой из описанных в п.4.1 структур в ВОШ, математических состязаниях и конкурсах.

Таблица 4 – Достижения обучающихся в Республиканской естественно-математической школы (РЕМШ) при Адыгейском государственном университете (АГУ)

№	Мероприятие	Кол-во учащихся Республики Адыгея, принявших участие					Кол-во участников, обучающихся в РЕМШ при АГУ					Кол-во победителей и призёров					Кол-во победителей и призёров, обучающихся в РЕМШ при АГУ				
		2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
1.	ОМШ по математике	224	275	290	381	357	58	68	81	138	243	51	86	88	98	69	43	29	46	70	50
2.	Выездная 54-я физико-математическая олимпиада МФТИ				427					354					134					112	
3.	Новогодняя математическая Регата			495	551	668			312	283	480			103	131	120			79	103	110
4.	Всероссийская олимпиада школьников по математике, II этап	764	735	788	660	693	263	285	285	312	350	117	72	118	90	140	78	61	63	66	100

Продолжение таблицы 4

№	Мероприятие	Кол-во учащихся Республики Адыгея, принявших участие					Кол-во участников, обучающихся в РЕМШ при АГУ					Кол-во победителей и призёров					Кол-во победителей и призёров, обучающихся в РЕМШ при АГУ				
		2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
5.	Всероссийская олимпиада школьников по математике, III этап	40	42	41	44	45	23	33	21	40	34	10	10	10	13	23	10	1	10	13	23
6.	Заключитель-ный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике		1	2	4	7		1	2	4	7		1	1 1ПГ	-	1		1	1 1ПГ	-	1
7.	Олимпиада Эйлера	11	14				11	14				6	9				6	9			
8.	Олимпиада Эйлера (дистан-ционный этап)			60	68	41			60	68	41			-	-	30			-	-	30

Продолжение таблицы 4

№	Мероприятие	Кол-во учащихся Республики Адыгея, принявших участие					Кол-во участников, обучающихся в РЕМШ при АГУ					Кол-во победителей и призёров					Кол-во победителей и призёров, обучающихся в РЕМШ при АГУ				
		2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
9.	Олимпиада Эйлера (Региональный этап)			8	13	10			8	13	10			5	2	6			5	2	6
10.	Олимпиада Эйлера (Заключительный этап)			3	2				3	2				-	-				-	-	
11.	Первая Кавказская олимпиада					112					24					89					21
12.	Командно-личный турнир школьников «Математическое многоборье»	4	4				4	4				4	4				4	4			
13.	Международный математический турнир городов	46	75	137	57	43	46	75	137	57	43	7	9	16	-	14	7	9	16	-	14

Продолжение таблицы 4

№	Мероприятие	Кол-во учащихся Республики Адыгея, принявших участие					Кол-во участников, обучающихся в РЕМШ при АГУ					Кол-во победителей и призёров					Кол-во победителей и призёров, обучающихся в РЕМШ при АГУ				
		2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
14.	Международный математический турнир городов – летняя конференция	1	1				1	1				1	1				1	1			
15.	Конкурс журнала «Квантик», I тур			6	24	1			6	24	1					1					1
16.	Конкурс журнала «Квантик», II тур			8	13	1			8	13	1					1					1
17.	Конкурс журнала «Квантик», III тур			5	10	1			5	10	1					1					1

Продолжение таблицы 4

№	Мероприятие	Кол-во учащихся Республики Адыгея, принявших участие					Кол-во участников, обучающихся в РЕМШ при АГУ					Кол-во победителей и призёров					Кол-во победителей и призёров, обучающихся в РЕМШ при АГУ				
		2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
18.	Конкурс журнала «Квантик», IV тур			6	6	1			6	6	1					1					1
19.	Конкурс журнала «Квантик», V тур			2					2												
20.	Конкурс журнала «Квантик», VI тур			1					1												
21.	Математическая он-лайн игра для 5-6 классов Ярославского Центра телекоммуникаций и информационных систем в образовании			16	70	15			16	70	15			-	-	5			-	-	5

№	Мероприятие	Кол-во учащихся Республики Адыгея, принявших участие					Кол-во участников, обучающихся в РЕМШ при АГУ					Кол-во победителей и призёров					Кол-во победителей и призёров, обучающихся в РЕМШ при АГУ				
		2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2011-2012 уч. год	2012-2013 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
22.	Турнир имени М.В.Ломоносова				161	110				161	105				16	48				16	46
23.	Азиатско-Тихоокеанская олимпиада по математике			4					4					-					-		

В таблице 5 представлены результаты ЕГЭ, которые показывают учащиеся РЕМШ с 2013 по 2016 гг.

Таблица 5 – Эффективность образовательного процесса. Результаты ЕГЭ учащихся РЕМШ

Отделение	Кол-во выпускников			Кол-во выпускников, сдававших профильный предмет (по отделению)			Средний балл		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Математики	32	69	50	32	69	47	67,25	71	72

В таблицах 6 и 7 отражено поступление в ВУЗы (по городам) учащихся РЕМШ,100% выпускников РЕМШ при АГУ успешно поступают в ВУЗы.

Таблица 6 – Эффективность образовательного процесса.

Город	Доля выпускников РЕМШ при АГУ, успешно поступивших в ВУЗы		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Брянск			1%
Волгоград	4%	1%	
Воронеж		2%	
Краснодар	29%	33%	27%
Майкоп	34%	24%	22%
Москва	15%	20%	26%
Новочеркасск		4%	
Пятигорск	2%		
Ростов-на-Дону	8%	4%	12%
Санкт-Петербург	8%	8%	9%
Ставрополь			1%
Сумы			1%
Таганрог		2%	
Тамбов			1%
Уппсала		1%	
Ханты-Мансийск		1%	

Таблица 7 – ВУЗы, в которые поступили выпускники РЕМШ при АГУ

ВУЗ	Кол-во выпускников РЕМШ при АГУ, успешно поступивших в ВУЗы		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Адыгейский государственный университет	10	16	8
Академия Федеральной службы безопасности Российской Федерации		1	1

Продолжение таблицы 7

ВУЗ	Кол-во выпускников РЕМШ при АГУ, успешно поступивших в ВУЗы		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Брянский государственный университет			1
Балтийской технический университет «Военмех»			1
Военная академия связи им. С. М. Будённого	1	1	
Военно-космическая академия им. Можайского			1
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)		2	
Волгоградский государственный технический университет		1	
Высшая школа экономики		2	2
Донской государственный технический университет	1		
Краснодарское высшее военное училище им. Генерала армии Штеменко С. М.		2	
Кубанский государственный аграрный университет им. И. Т. Трубилина	3	9	5
Кубанский государственный технологический университет		10	6
Кубанский государственный университет	5	8	3
Майкопский государственный гуманитарно-технический колледж Адыгейского государственного университета	1		

Продолжение таблицы 7

ВУЗ	Кол-во выпускников РЕМШ при АГУ, успешно поступивших в ВУЗы		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Майкопский государственный технологический университет	7	8	9
Михайловской военной артиллерийской академии			1
Московский авиационный институт			2
Московский государственный машиностроительный университет «МАМИ»	1		
Московский государственный строительный университет		1	
Московский государственный технический университет им. Баумана		1	1
Московский государственный университет	3	5	1
Московский физико-технический институт		2	7
Московский энергетический институт		1	1
Национальный исследовательский ядерный университет «Московский инженерно-физический институт»	1	1	
Российский государственный гидрометеорологический университет	1		
Российский университет дружбы народов	1		
Ростовский государственный университет путей сообщения			1
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова		1	2

Продолжение таблицы 7

ВУЗ	Кол-во выпускников РЕМШ при АГУ, успешно поступивших в ВУЗы		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Санкт-Петербургский горный университет		1	1
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет		1	
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Технический университет)	1	1	1
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»	1	1	1
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого	1	1	
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения		1	
Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций			1
Северо-Кавказский федеральный университет			1
Тамбовский государственный университет им. Державина			1
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации	1		
Шосткинский институт Сумского государственного университета			1
Южно-Российский государственный политехнический университет им. М. И. Платова		4	
Южный федеральный университет		2	2

Таблица 8 демонстрирует социальную активность и внешние связи РЕМШ при АГУ.

Таблица 8 – Социальная активность и внешние связи РЕМШ при АГУ

ВУЗ	Доля выпускников РЕМШ при АГУ, успешно поступивших в ВУЗы		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Организация и проведение Всероссийской смены «Юный математик» в ВДЦ «Орлёнок»	100	100	100
Организация и проведение южного математического турнира в ВДЦ «Орлёнок»	178	200	76
Организация и проведение турнира имени М.В. Ломоносова		161	110
Организация и проведение осеннего тура Международного математического турнира городов (базовый вариант)	48	29	48
Организация и проведение осеннего тура Международного математического турнира городов (сложный вариант)	35	25	40
Организация и проведение II этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике	788	660	693
Организация и проведение регионального этапа олимпиады имени Леонарда Эйлера (дистанционный тур)	60	71	41
Организация и проведение Южной математической смены в образовательном центре «Сириус»			200
Кавказская олимпиада по математике			200
Новогодняя математическая регата РЕМШ при АГУ для учащихся 6 – 11 классов	495	564	564

Продолжение таблицы 8

ВУЗ	Доля выпускников РЕМШ при АГУ, успешно поступивших в ВУЗы		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Организация и проведение (совместно с МОиН РА) III этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике	41	44	45
Организация и проведение Республиканского этапа олимпиады имени Леонарда Эйлера	8	13	10
Международный конкурс по применению ИКТ в естественных науках, технологиях и математике – конкурс КИО – 2014 («Конструируй, Исследуй, Оптимизируй»)	19		
Организация и проведение весеннего тура Международного математического турнира городов (базовый вариант)	25	24	43
Организация и проведение весеннего тура Международного математического турнира городов (сложный вариант)	29	33	43
Организация и проведение международного математического конкурса – игры «Кенгуру»	9192	8191	8337
Организация и проведение выездной физико-математической олимпиады МФТИ		487	40
Организация и проведение олимпиады для учащихся 3 – 4 классов по математике «Ступенька»	153	199	236
Организация и проведение олимпиады по математике для учителей начальных классов		382	52
Организация и проведение олимпиады младших школьников РЕМШ при АГУ по математике	290		357

Продолжение таблицы 8

ВУЗ	Доля выпускников РЕМШ при АГУ, успешно поступивших в ВУЗы		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Организация и проведение Турнира имени М.В. Ломоносова (заключительный этап)		22	
Организация и проведение Весенней естественно-математической школы в ВДЦ «Орлёнок»	96	84	105
Проведение тренировочных сборов команд Республики Адыгея по математике, физике, информатике и биологии по подготовке к заключительному этапу Всероссийской олимпиады школьников	15	20	30
Организация и проведение творческого конкурса учителей и преподавателей математики информатики (заочный тур)	31	8	8
Проведение творческого конкурса учителей и преподавателей математики и информатики (очный тур)	16	7	5
Награждение победителей и призёров олимпиады младших школьников по математике, физике и биологии и олимпиады «Ступенька»	219	216	190
Участие в Заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике, информатике и биологии	8	11	13
Организация и проведение региональной олимпиады РЕМШ при АГУ по математике	58	68	68
Вручением дипломов об окончании и свидетельств учащимся РЕМШ при АГУ	85	143	120

Продолжение таблицы 8

ВУЗ	Доля выпускников РЕМШ при АГУ, успешно поступивших в ВУЗы		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Отбор в начинающую олимпиадную группу на Летнюю математическую школу учащихся 6 классов математических кружков РЕМШ при АГУ	28	31	46
Организация и проведение летней математической школы РЕМШ при АГУ	133	146	220
Научно-исследовательская конференция школьников РЕМШ при АГУ	19	24	42
Организация и проведение вступительных испытаний в РЕМШ на отделения математики, физики, химии, биологии, истории и культуры адыгов на дистанционную форму обучения			36
Организация и проведение вступительных испытаний в РЕМШ на отделения математики, физики, химии, биологии, истории и культуры адыгов на очную форму обучения	959	105	623

Продолжение таблицы 8.

	Число участников РЕМШ при АГУ					
	2016-2017 уч. год	2017-2018 уч. год	2018-2019 уч. год	2019-2020 уч. год	2020-2021 уч. год	2021-2022 уч. год
Турнир Городов (число участников)	43	44	22	12	101	61

	Число участников РЕМШ при АГУ					
	2016-2017 уч. год	2017-2018 уч. год	2018-2019 уч. год	2019-2020 уч. год	2020-2021 уч. год	2021-2022 уч. год
Число дипломантов Турнира Городов	14	17	10	4	нет данных	нет данных
Турнир Ломоносова	39	48	106	124	нет данных	нет данных

В таблице 9 приведены данные по Центру дополнительного образования школьников Кировской области.

Таблица 9 – Математические мероприятия ЦДООШ для всех желающих школьников региона 2013/2016 учебного года

Город	Число участников		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Осенний Турнир городов	67	89	115
Весенний Турнир городов	118	63	72

Продолжение таблицы 9

Город	Число участников		
	2013-2014 уч. год	2014-2015 уч. год	2015-2016 уч. год
Математическая абака		184	348
Математический конкурс «Кенгуру»	31615	29554	30398
Математическое Домино	1205	1336	1408
Олимпиада им. И. Ф. Шарыгина			20
Олимпиада по математике «Росатом»: отборочный этап	69	72	148
Олимпиада по математике «Росатом»: заключительный этап	12	16	9
Он-лайн турнир математических игр им. Н. Г. Чеботарёва	40	37	40
Открытый турнир математических игр им. П. А. Широкова	40	39	44
Тестирование «Кенгуру – выпускникам»	4094	3901	5492
Турнир им. М. В. Ломоносова	311	334	356
Турнир юных математиков им. Нордана		40	

Продолжение таблицы 9.

	Число участников					
	2016-2017 уч. год	2017-2018 уч. год	2018-2019 уч. год	2019-2020 уч. год	2020-2021 уч. год	2021-2022 уч. год
Заключительный этап всероссийской олимпиады школьников по математике (число участников)	15	11	10*	3	8	8
Заключительный этап всероссийской олимпиады школьников	5	4	8	3	5	4

	Число участников					
	2016-2017 уч. год	2017-2018 уч. год	2018-2019 уч. год	2019-2020 уч. год	2020-2021 уч. год	2021-2022 уч. год
по математике (число победителей и призёров)						

* В 2018 году **Сергей Лучинин** был включён в состав сборной команды России по математике и завоевал на Международной математической олимпиаде серебряную медаль.

Рассмотрим эффективность работы с математически одарёнными детьми в Ярославской области

Успешная практика реализуется в масштабе системы образования всего региона:

- охват целевой аудитории (2016 год – 18 024уникальных пользователя Интернет из всех муниципальных образований Ярославской области).

Специфика существующей практики предполагает показатели, связанные с доступностью ресурсов (посещение портала «Математика для всех», участие в дистанционных конкурсах, участие в дистанционных курсах и онлайн-лекториях).

Уникальные посетители портала «Математика для всех» Ярославской области (Рисунок 21).

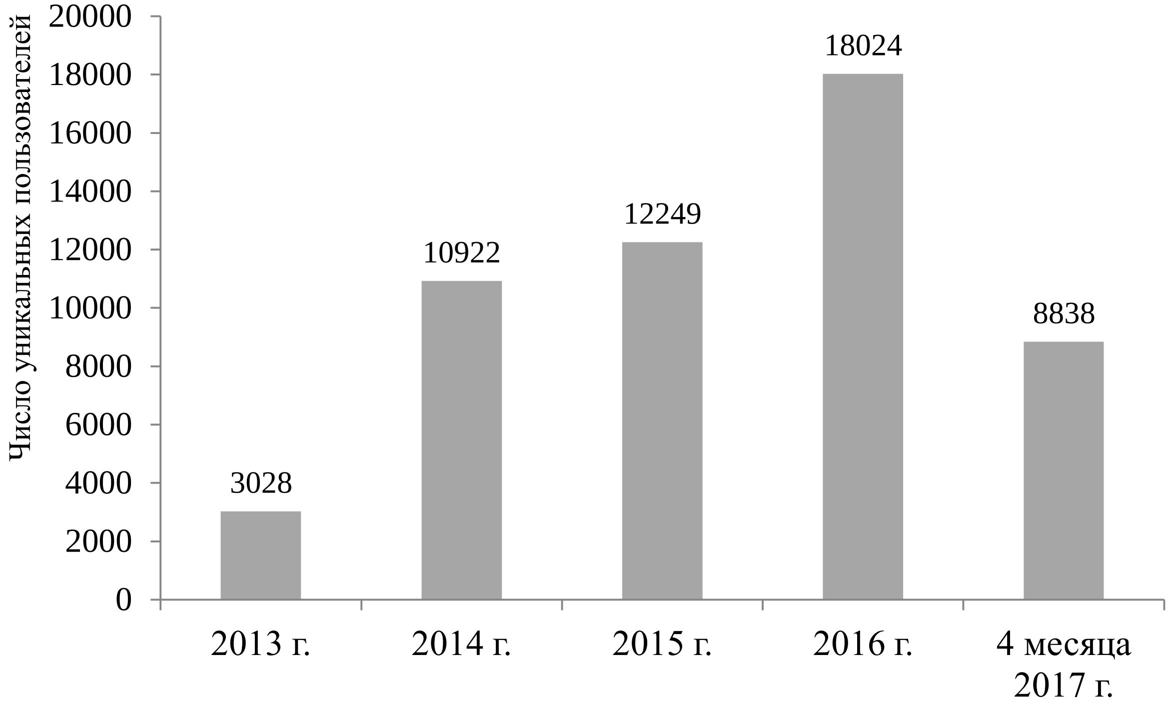


Рисунок 21 – Число уникальных посетителей портала «Математика для всех» Ярославской области

Интерес к ресурсам портала проявили пользователи 72 регионов РФ.

Среди ключевых мероприятий успешной практики следующие:

- командные и личные дистанционные конкурсы;

- организация участия высокомотивированных школьников в международных мероприятиях с заочным (дистанционным) участием;

- онлайн-лекторий «Математика для всех»;

- дистанционные уроки на портале «Математика для всех».

<u>Командные и личные дистанционные конкурсы</u>:

1. Математические командные онлайн-игры для школьников на региональном портале «Математика для всех» (2013 – 2017 гг.):

- количество победителей 125 чел.;

- количество призёров 210 чел.;

- участниками математических онлайн-игр с 2013 года стали 2735 школьников 5 – 7 классов из Ярославской области, а также команды детей из других регионов: Архангельская область, Ивановская область, Краснодарский край, Московская область, Республика Адыгея, республика Мордовия.

2. Дистанционный непрерывный конкурс решения задач – личное соревнование школьников 5 – 11 классов в решении математических задач, организованное на региональном портале «Математика для всех» (2013 – 2017 гг.):

- количество победителей 32 чел.;
- количество призёров 153 чел.;
- количество участников 800 чел.

Организация участия высокомотивированных детей в международных мероприятиях с заочным (дистанционным) участием:

2016 год – участие 6 обучающихся в заочной международной Азиатско-Тихоокеанской олимпиаде (APMO-2016);

2017 год – участие 7 обучающихся в заочной международной Азиатско-Тихоокеанской олимпиаде (APMO-2017).

Онлайн-лекторий «Математика для всех»

На портале «Математика для всех» в режиме видеоконференции проводятся открытые занятия учёных-математиков для школьников 6 – 8 классов.

Февраль – апрель 2017 года – 304 школьника.

Дистанционные уроки на портале «Математика для всех»

Дистанционные уроки, размещённые на портале «Математика для всех», доступны для школьников для индивидуального обучения, а также для педагогов для организации группового обучения детей. Уроки для школьников 5 – 7 классов объединены в модульные 3-х годичные курсы, участниками которых стали более 600 детей.

В таблице 10 представлены достижения обучающихся Ярославской области, охваченных успешной практикой (за последние пять лет).

Таблица 10 – Достижения обучающихся Ярославской области, охваченных успешной практикой

Мероприятия	2014 г.			2015 г.			2016 г.			2017 г.		
	кол-во участников	кол-во победителей	кол-во призёров	кол-во участников	кол-во победителей	кол-во призёров	кол-во участников	кол-во победителей	кол-во призёров	кол-во участников	кол-во победителей	кол-во призёров
МЕЖДУНАРОДНЫЕ												
Всекитайская женская математическая олимпиада	2		2	2		2						
Международнаяолимпиада Romanian Masters of Mathematics							1		1	2		2
Европейская женская математическая олимпиада				1		1						
Международная олимпиада по математике							1		1			
Международной олимпиаде Туймаада							2	2				
Международная Азиатско-Тихоокеанская олимпиада (APMO-2017)										7	2	2
ВСЕРОССИЙСКИЕ												
Заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике		1	1		1	3	7	2	1	9	2	4
Турнир городов. Финал		1			1							
Кубок имени Колмогорова (командный турнир)					6							
Южный математический турнир (командный турнир)								6				

Продолжение таблицы 10.

	Число участников					
	2016-2017 уч. год	2017-2018 уч. год	2018-2019 уч. год	2019-2020 уч. год	2020-2021 уч. год	2021-2022 уч. год
Заключительный этап всероссийской олимпиады школьников по математике (число участников)	18*	9	6	3	9	8
Заключительный этап всероссийской олимпиады школьников по математике (число победителей и призёров)	9	3	5	3	7	4

* В 2017 году **Георгий Вепрев** был включён в состав сборной команды России по математике и завоевал на Международной математической олимпиаде серебряную медаль.

Далее покажем результаты участия Республики Адыгея, Кировской и Ярославской области во Всероссийской олимпиаде школьников 2010 – 2016 гг. и в сравнении с другими регионами с аналогичными социально-экономическими условиями. В таблицах 11 – 13 приведены общие данные по ВОШ и всем регионам РФ.

Таблица 11 – Количество участников всероссийской олимпиады школьников 2010 – 2016 гг.

Этапы	Количество участников						
	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.	2014 г.	2015 г.	2016 г.
Школьный	7 833 837	14 689 978	16 113 476	6 723 897	5 660 814	5 735 959	5 762 520
Муниципальный	1 625 277	1 946 479	2 104 390	2 328 774	1 651 397	1 372 667	1 421 314
Региональный	97 322	106 709	114 715	117 516	114 420	116 341	120 803
Заключительный	4640	4338	4527	4487	4734	4811	5000

Таблица 12 – Победители и призёры заключительного этапа всероссийской олимпиады школьников по математике

Параметры	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.	2014 г.	2015 г.	2016 г.
РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП							
Общее кол-во участников	97 322	106 709	114 715	117 516	114 420	116 341	120 803
- из них по математике, кол-во		7416	7847	7591	7536	7314	7752
- из них по математике, доля		6,9%	6,8%	6,6%	6,6%	6,3%	6,4%
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП							
Кол-во предметов	20	21	21	21	21	21	24
Общее кол-во участников	4640	4338	4527	4487	4734	4811	5000
- из них по математике, кол-во	255	249	281	265	339	355	387

Продолжение таблицы 12

Параметры	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.	2014 г.	2015 г.	2016 г.
- из них по математике, доля	5,5%	5,7%	6,2%	5,9%	7,2%	7,4%	7,7%

Параметры	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.	2014 г.	2015 г.	2016 г.
Общее кол-во победителей	313	306	305	314	362	370	365
- - из них по математике, кол-во	20	17	14	17	19	18	25
- из них по математике, доля	6,4%	5,5%	4,6%	5,4%	5,2%	4,9%	6,8%
Общее кол-во призёров	1165	1240	1282	1191	1048	1683	1829
- из них по математике, кол-во	90	95	106	88	80	127	117
- из них по математике, доля	7,7%	7,7%	8,3%	7,4%	7,6%	7,5%	6,4%
Всего участников по математике	255	249	281	265	339	355	387
- из них победителей и призёров, кол-во	110	112	120	105	99	145	142
- из них по математике, доля	43,1%	44,5%	42,7%	39,6%	29,2%	40,8%	36,7%

Таблица 13 – Эффективность участия региональных команд в заключительном этапе ВсОШ по математике

Субъект РФ	2010 г.			2011 г.			2012 г.			2013 г.			2014 г.			2015 г.			2016 г.		
	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)
Республика Адыгея	3	1	33	2	0	0	1	0	0	1	1	100	2	1	50	4	0	0	7	1	14
Республика Алтай	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Республика Башкортостан	3	2	67	4	1	25	3	0	0	1	0	0	7	1	14	4	1	25	4	2	50
Республика Бурятия	1	1	100	1	0	0	0	0	0	1	1	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Республика Дагестан	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0
Республика Ингушетия	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Кабардино-Балкарская Республика	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Республика Калмыкия	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Карачаево-Черкесская Республика	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Республика Карелия	1	0	0	1	1	100	2	1	50	2	1	50	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Республика Коми	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Республика Крым													1	0	0	1	0	0	1	0	0
Республика Марий Эл	1	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	3	1	33	1	0	0
Республика Мордовия	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	4	0	0	1	1	100

Продолжение таблицы 13

Субъект РФ	2010 г.			2011 г.			2012 г.			2013 г.			2014 г.			2015 г.			2016 г.		
	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)
Республика Саха	2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	3	1	33
Республика С. Осетия	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Республика Татарстан	14	8	57	17	10	59	15	11	73	16	10	63	24	5	21	20	7	35	26	13	50
Республика Тыва	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Удмуртская Республика	8	3	38	6	6	100	13	4	31	8	5	63	15	6	40	13	6	46	12	6	50
Республика Хакасия	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Чеченская Республика	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Чувашская Республика	1	0	0	4	0	0	1	0	0	2	2	100	6	1	17	8	1	13	3	0	0
Алтайский край	2	0	0	1	0	0	1	1	100	2	1	50	4	1	25	2	1	50	4	1	25
Забайкальский край	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Камчатский край	2	0	0	1	1	100	3	1	33	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0
Краснодарский край	5	4	80	3	3	100	3	3	100	7	4	57	13	4	31	12	4	33	7	2	29
Красноярский край	5	0	0	2	0	0	1	1	100	1	0	0	1	0	0	3	0	0	1	0	0
Пермский край	4	3	75	6	0	0	3	1	33	3	0	0	3	1	33	1	1	100	1	0	0
Приморский край	0	0	0	1	0	0	1	1	100	2	1	50	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Ставропольский край	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0
Хабаровский край	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Продолжение таблицы 13

Субъект РФ	2010 г.			2011 г.			2012 г.			2013 г.			2014 г.			2015 г.			2016 г.		
	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)
Амурская область	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Архангельская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	100	1	0	0	1	0	0
Астраханская область	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	100
Белгородская область	6	3	50	5	2	40	2	0	0	3	0	0	2	0	0	2	1	50	3	0	0
Брянская область	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Владимирская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Волгоградская область	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Вологодская область	2	1	50	1	0	0	2	1	50	2	0	0	1	0	0	2	1	50	1	0	0
Воронежская область	1	0	0	2	0	0	1	1	100	2	1	50	5	1	20	5	1	20	1	0	0
Ивановская область	1	0	0	1	1	100	1	0	0	1	0	0	1	1	100	2	1	50	2	1	50
Иркутская область	4	3	75	5	4	80	3	2	67	1	0	0	4	1	25	4	1	25	4	1	25
Калининградская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Калужская область	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
Кемеровская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0
Кировская область	3	1	33	6	5	83	8	3	38	7	2	29	8	2	25	7	1	14	15	5	33
Костромская область	2	0	0	3	1	33	1	0	0	3	1	33	2	0	0	2	1	50	1	0	0

Продолжение таблицы 13

Субъект РФ	2010 г.			2011 г.			2012 г.			2013 г.			2014 г.			2015 г.			2016 г.		
	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)
Курганская область	9	5	56	9	7	78	7	5	71	8	3	38	7	4	57	9	6	67	11	4	36
Курская область	2	1	50	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Ленинградская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Липецкая область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Магаданская область	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Московская область	11	6	55	7	4	57	5	2	40	7	3	43	5	1	20	9	1	11	11	5	45
Мурманская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	100	1	1	100	0	0	0	1	0	0
Нижегородская область	4	2	50	3	1	33	8	3	38	6	1	17	10	1	10	11	5	45	14	3	21
Новгородская область	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Новосибирская область	5	3	60	4	0	0	4	1	25	6	6	100	13	5	38	13	9	69	14	7	50
Омская область	3	0	0	1	0	0	7	4	57	3	2	67	6	4	67	3	1	33	1	0	0
Оренбургская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3	1	33	2	0	0
Орловская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	100
Пензенская область	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	100	1	0	0	1	0	0
Псковская область	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ростовская область	5	1	20	3	0	0	1	0	0	1	0	0	2	2	100	2	0	0	1	0	0
Рязанская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Продолжение таблицы 13

Субъект РФ	2010 г.			2011 г.			2012 г.			2013 г.			2014 г.			2015 г.			2016 г.		
	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)
Самарская область	3	1	33	3	3	100	3	1	33	2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Саратовская область	2	2	100	3	3	100	1	0	0	2	1	50	0	0	0	2	0	0	1	0	0
Сахалинская область	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Свердловская область	2	0	0	2	2	100	9	5	56	6	2	33	10	1	10	4	0	0	7	3	43
Смоленская область	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Тамбовская область	1	0	0	2	0	0	4	1	25	6	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0
Тверская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
Томская область	3	1	33	2	1	50	1	1	100	1	1	100	1	1	100	1	1	100	0	0	0
Тульская область	1	0	0	1	0	0	1	1	100	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Тюменская область	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0
Ульяновская область	7	5	71	5	3	60	4	2	50	7	3	43	6	3	50	8	5	63	8	2	25
Челябинская область	10	4	40	9	6	67	8	5	63	10	4	40	13	2	15	12	3	25	5	3	60
Ярославская область	9	5	56	3	0	0	3	1	33	2	2	100	10	5	50	8	6	75	16	7	44
г. Москва	52	27	52	63	28	44	77	34	44	70	24	34	89	27	30	108	46	43	116	45	39
Санкт-Петербург	18	14	78	23	17	74	41	24	59	36	23	64	40	17	43	46	31	67	52	26	50
г. Севастополь													2	0	0	0	0	0	1	0	0

Продолжение таблицы 13

Субъект РФ	2010 г.			2011 г.			2012 г.			2013 г.			2014 г.			2015 г.			2016 г.		
	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)	кол-во участников	кол-во победителей и	эффективность (%)
Еврейская автономная область	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ненецкий автоном. округ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ханты-Мансийский автономный округ	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	100	3	0	0
Чукотский автономный округ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ямало-Ненецкий автономный округ	2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

В таблицах 14, 15 представлены результаты участия во Всероссийской олимпиаде школьников учащихся Республики Адыгея и для сравнения приведены данные по Республике Дагестан (таблицы 16, 17).

Таблица 14– Результаты участия во Всероссийской олимпиаде школьников учащихся Республики Адыгея

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников школьного этапа ВсОШ	69888	53299	54116	17856			44756
Всего участников муниципального этапа ВсОШ	7199		8420	5216	4818		8548
из них количество участников по математике			764	735	788	660	693
процент от числа участников этапа			9,1%	14,1%	16,4%		8,1%
Всего участников регионального этапа ВсОШ	575	696	674	745	687	724	708
из них количество участников по математике			51	56	49	55	55
процент от числа участников этапа			7,6%		7,1%	7,6%	7,8%
Всего участников заключительного этапа ВсОШ	16	13	13	15	10	16	16
из них количество участников по математике	3	2	2	1	1	4	7
процент от числа участников этапа	18,8%	15,4%	15,4%	6,7%	10,0%	25,0%	43,8%

Таблица 15 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников по математике учащихся Республики Адыгея

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников муниципального этапа ВсОШ по математике			764	735	788	660	693
Всего участников регионального этапа ВсОШ по математике			51	56	49	55	55
процент от муниципального этапа ВсОШ по математике			6,7%	7,6%	6,2%	8,3%	7,9%
Всего участников заключительного этапа ВсОШ по математике	3	2	2	1	1	4	7
процент от регионального этапа ВсОШ по математике			3,9%	1,8%	2,0%	7,3%	12,7%

Таблица 16 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников учащихся Республики Дагестан

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников школьного этапа ВсОШ	585468	736100	701420	152908	150475		704859
Всего участников муниципального этапа ВсОШ	45338	50703	64396	89418	88780		131114
из них количество участников по математике							
процент от числа участников этапа							
Всего участников регионального этапа ВсОШ	2339	1828	1848	2155	1977	1227	1104
из них количество участников по математике				128	102	59	61
процент от числа участников этапа				5,9%	5,2%	4,8%	5,5%
Всего участников заключительного этапа ВсОШ	13	15	17	16	12	5	15
из них количество участников по математике	1	1	0	0	0	1	2
процент от числа участников этапа	7,7%	6,7%	0%	0%	0%	20,0%	13,3%

Таблица 17 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников по математике учащихся Республики Дагестан

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников муниципального этапа ВсОШ по математике							
Всего участников регионального этапа ВсОШ по математике				128	102	59	61
процент от муниципального этапа ВсОШ по математике							
Всего участников заключительного этапа ВсОШ по математике	1	1	0	0	0	1	2
процент от регионального этапа ВсОШ по математике				0%	0%	1,7%	3,3%

В таблицах 18, 19 представлены результаты участия во Всероссийской олимпиаде школьников учащихся Кировской области и для сравнения приведены данные по Оренбургской области (таблицы 20, 21).

Таблица 18 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников учащихся Кировской области

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников школьного этапа ВсОШ	182139	192770	217874	46025			
Всего участников муниципального этапа ВсОШ	18963	24856	26610	14565	8064		5091
из них количество участников по математике			601	628	633	725	701
процент от числа участников этапа			2,3%	4,3%	7,8%		13,8%
Всего участников регионального этапа ВсОШ	960	1056	1151	1130	1061	1378	1472
из них количество участников по математике			111	148	115	137	158
процент от числа участников этапа			9,6%	13,1%	10,8%	9,9%	10,7%
Всего участников заключительного этапа ВсОШ	90	89	99	95	91	87	96
из них количество участников по математике	3	6	8	7	8	7	15
процент от числа участников этапа	3,3	6,7	8,1%	7,4%	8,8%	8,0%	15,6%

Таблица 19 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников по математике учащихся Кировской области

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников муниципального этапа ВсОШ по математике			601	628	633	725	701
Всего участников регионального этапа ВсОШ по математике			111	148	115	137	158
процент от муниципального этапа ВсОШ по математике			18,5%	23,6%	18,2%	18,9%	22,5%
Всего участников заключительного этапа ВсОШ по математике	3	6	8	7	8	7	15
процент от регионального этапа ВсОШ по математике			7,2%	4,7%	7,0%	5,1%	9,5%

Таблица 20 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников учащихся Оренбургской области

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников школьного этапа ВсОШ	237321	222149	216582	36637	38759		157727
Всего участников муниципального этапа ВсОШ	24719	23610	24810	8520	8610		31612
из них количество участников по математике							
процент от числа участников этапа							
Всего участников регионального этапа ВсОШ	1432	1373	1705	1902	1817	1670	1535
из них количество участников по математике				99	120	95	97
процент от числа участников этапа				5,2%	6,6%	5,7%	6,3%
Всего участников заключительного этапа ВсОШ	40	58	69	60	78	72	59
из них количество участников по математике	1	1	1	1	0	3	2
процент от числа участников этапа	0,025%	1,7%	0,017%	1,7%	0%	4,2%	3,4%

Таблица 21 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников по математике учащихся Оренбургской области

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников муниципального этапа ВсОШ по математике							
Всего участников регионального этапа ВсОШ по математике				99	120	95	97
процент от муниципального этапа ВсОШ по математике							
Всего участников заключительного этапа ВсОШ по математике	1	1	1	1	0	3	2
процент от регионального этапа ВсОШ по математике				1,01%	0%	3,2%	2,1%

В таблицах 22, 23 представлены результаты участия во Всероссийской олимпиаде школьников учащихся Ярославской области и для сравнения приведены данные по Рязанской области (таблицы 24, 25).

Таблица 22 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников учащихся Ярославской области

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников школьного этапа ВсОШ	135413	154732	149985	42539			
Всего участников муниципального этапа ВсОШ	18692	21214	21194	19296	3882		3861
из них количество участников по математике	708	575	483	288	314	324	
процент от числа участников этапа	3,9%	2,7%	2,3%	1,5%	8,1%		
Всего участников регионального этапа ВсОШ	1377	1575	1608	1488	1425	1434	1580
из них количество участников по математике				90	94	82	92
процент от числа участников этапа				6,0%	6,6%	5,7%	5,8%
Всего участников заключительного этапа ВсОШ	34	39	43	37	46	48	57
из них количество участников по математике	9	3	3	2	10	8	16
процент от числа участников этапа	26,5%	7,7%	7,0%	5,4%	21,7%	16,7%	28,1%

Таблица 23 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников по математике учащихся Ярославской области

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников муниципального этапа ВсОШ по математике	708	575	483	288	314	324	
Всего участников регионального этапа ВсОШ по математике				90	94	82	92
процент от муниципального этапа ВсОШ по математике				31,3%	29,9%	25,3%	
Всего участников заключительного этапа ВсОШ по математике	9	3	3	2	10	8	16
процент от регионального этапа ВсОШ по математике				2,2%	10,6%	9,8%	17,4%

Таблица 24 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников учащихся Рязанской области

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников школьного этапа ВсОШ	88217	83796	84100	83796	30288		
Всего участников муниципального этапа ВсОШ	10463	15345	11817	11797	8180		
из них количество участников по математике							
процент от числа участников этапа							
Всего участников регионального этапа ВсОШ	1030	1019	1171	1255	1189	916	1032
из них количество участников по математике				57	68	51	76
процент от числа участников этапа				4,5%	5,7%	5,6%	7,4%
Всего участников заключительного этапа ВсОШ	40	34	24	38	24	27	23
из них количество участников по математике	1	1	1	1	1	1	1
процент от числа участников этапа	2,5%	2,9%	4,2%	2,6%	4,2%	4%	4%

Таблица 25 – Участие во Всероссийской олимпиаде школьников по математике учащихся Рязанской области

Участников ВсОШ по этапам	Учебный год						
	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016
Всего участников муниципального этапа ВсОШ по математике							
Всего участников регионального этапа ВсОШ по математике				57	68	51	76
процент от муниципального этапа ВсОШ по математике							
Всего участников заключительного этапа ВсОШ по математике	3	1	1	1	1	1	1
процент от регионального этапа ВсОШ по математике				1,8%	1,5%	2%	1%

Таким образом, результаты педагогического эксперимента подтвердили выдвинутую гипотезу и доказали эффективность реализации концепции работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

Выводы по IV главе

1. *Для реализации концепции системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов* создаются различные организационные структуры, осуществляющие работу с математически одарёнными детьми в условиях региона, обусловленные его особенностями, возможностями и сложившимися традициями.

Наиболее продуктивными являются модели, основанные на использовании сетевого взаимодействия: организация дополнительного образования при вузе, Центр дополнительного образования в системе общего образования и модель Интернет-образования.

2. Одним из вариантов организации дополнительного образования при вузе является физико-математическая школа, которая в нашем исследовании представлена Государственной бюджетной организацией дополнительного образования Республики Адыгея «Республиканская естественно-математическая школа» (РЕМШ).

Структура образовательных программ РЕМШ включает три составляющих (базовую, вариативную и индивидуальную), что способствует удовлетворению образовательных потребностей обучаемых и их познавательных интересов.

Программы РЕМШ предусматривают углублённое изучение вопросов основного школьного курса и обучение приемам и методам решения математических задач, которые требуют использования высокого уровня логической и операционной культуры и научно-теоретического мышления учащихся.

Повышению интереса к математике обеспечивают игровые и соревновательные направления, которые реализуются в таких формах, как математические драки, математические бои, олимпиады различного уровня и т. д., а также летние математические школы.

Образовательный процесс в РЕМШ осуществляется как в очном, так и в очно-заочном формате. На очном отделении обучение осуществляется на основном и углублённом уровнях, а на очно-заочном только на основном уровне.

3. Одной из успешных моделей Центра дополнительного образования в системе общего образования является Кировское областное государственное автономное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Центр дополнительного образования одарённых школьников» (ЦДООШ).

Его основными целями и задачами являются:

- выявление детей, одарённых способностями к занятиям наукой, пробуждение у них интереса к таким занятиям;

- создание благоприятных условий для раскрытия интеллектуальных и творческих способностей одарённого ребёнка путем адекватного одарённости обучения и воспитания,

- подготовка наиболее одарённых детей к будущей научной работе;

- привлечение учёных, специалистов, студентов к работе с одарёнными детьми, подготовка студентов к работе с одарёнными учащимися в школах,

- организационно-методическая помощь учителям, родителям и наставникам одарённых детей.

Реализация вышеперечисленных задач осуществляется Центром на нескольких уровнях. На первом из них осуществляется организация и проведение соревнований по предметам. Второй уровень работы – заочное обучение. Он ориентирован, прежде всего, на учащихся школ области, не имеющих возможности заниматься в продвинутых профильных кружках. Третий уровень – очное обучение, на котором организована работа сети кружков для школьников города Кирова и летняя многопредметная школа (ЛМШ). Четвёртый уровень – это работа с особо одарёнными детьми, которая осуществляется индивидуально, либо в малых учебных группах. На каждом из названных уровней проводится методическая работа с педагогами.

4. Моделью дополнительного образования с использованием информационно-коммуникационных технологий является региональный портал «Математика для всех», который создан на базе Государственного учреждения Ярославской области «Центр телекоммуникаций и информационных систем в образовании». Его целями являются создание условий для выявления, развития и сопровождения талантливых детей с использованием Интернет-технологий.

Интернет-портал «Математика для всех» представляет собой современную среду для взаимодействия школьников с учёными, педагогами, наставниками, тренерами национальной сборной страны по математике.

Целью проекта является разработка и апробация инновационной среды опосредованного (дистанционного) взаимодействия, отвечающая следующим условиям:

- использование потенциала новых информационных технологий для развития интеллектуальных и творческих способностей учащихся;
- разработка и реализация информационных образовательных технологий и методов обучения, способствующих выявлению, поддержке и развитию способностей учащихся;
- расширение сферы познавательных интересов детей и подростков в ходе применения информационных технологий;
- организация индивидуальной и коллективной деятельности субъектов дистанционного образовательного процесса.

Особенностью портала является ориентация на активное включение в работу педагогов-математиков посредством:

- стимулирования интереса педагогов к внедрению новых форм работы с одарёнными школьниками в рамках изучения математических дисциплин;
- овладения педагогами навыками проектирования вариативных образовательных траекторий в системах дистанционного обучения;
- вовлечением педагогов в систему дистанционного взаимодействия с использованием технологий Интернет, в том числе с использованием потокового Интернет-вещания медиаконтента.

Педагогическая поддержка математически одарённых учащихся осуществляется в форме наставничества и управления игровыми формами. Образовательный процесс строится на основе индивидуального и дифференцированного подходов.

5. Педагогический эксперимент по проверке эффективности разработанной концепции работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов доказал эффективность её реализации на базе различных региональных моделей дополнительного образования. Их характерными особенностями являются сетевое взаимодействие, использование дистанционного обучения, широкий спектр форм математических состязаний в соответствии с возрастными особенностями, популяризация математики, вовлечение и стимулирование педагогов общеобразовательных школ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Исследования зарубежных и отечественных учёных демонстрируют единство взглядов на проблему математических способностей, которые включают школьные способности к усвоению математических знаний, к их репродуцированию и самостоятельному применению, и творческие математические способности, связанные с самостоятельным созданием оригинального и имеющего общественную ценность продукта в сфере математической деятельности.

Главными признаками математических способностей признаются способность к обобщению, логичность и формализованность мышления, гибкость и глубина, систематичность, рациональность и аргументированность рассуждений, математическое восприятие и память.

2. Работа с одарёнными детьми рассматривается в качестве одного из приоритетных направлений развития образования во многих странах мира, в том числе и России, и направлена на создание эффективной системы для их обучения, воспитания и развития. *Методологическими основаниями* проектирования системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе математических олимпиад и конкурсов является *совокупность подходов*: системного, личностно ориентированного, полисубъектного, культурологического, индивидуально-творческого, деятельностного и средового. Каждый из подходов определяет отдельные аспекты организации работы с математически одарёнными детьми, а их совокупность – проектирование целостной системы выявления, обучения и развития.

3. *Концепция работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов* включает следующие основные положения:

а) в современном мире высоких технологий важнейшей задачей становится подготовка и формирование высококвалифицированных кадров, что инициирует усиление внимания и создание условий для развития одарённых детей;

б) повышение роли математики в современном обществе вызвано все возрастающей потребностью математизации различных сфер человеческой деятельности;

в) математические олимпиады и конкурсы выступают средством выявления, отбора и самореализации математически одарённых детей;

г) успехи на интеллектуальных состязаниях помогают школьнику в определении сферы деятельности, способствуют его профессиональной ориентации;

д) поиск одарённых школьников предполагает привлечение к участию в олимпиадах и конкурсах максимально большого числа обучающихся;

е) осуществление в массовой школе подготовки к олимпиадам начального (школьного) уровня;

ж) ошибочность возложения на учителя массовой школы полноты функций поиска, мотивации и отбора одарённых учащихся;

з) формирование педагогами, осуществляющими работу со школьниками, обладающими математическими способностями, календаря математических событий с включением в него списка олимпиад и конкурсов, отвечающих задачам выявления математических способностей, в том числе с учётом математического содержания заданий;

и) мотивирование учащихся, продемонстрировавших математические способности, к дальнейшему углублённому изучению математики, выстраивание траектории их роста;

к) выделение специального вида творчества – задачного олимпиадного композиторства;

л) осуществление олимпиадного тренинга (муниципальный и последующие этапы) в рамках дополнительного образования силами высококвалифицированных педагогов средней и высшей школы, а также студентов-олимпиадников;

м) организация занятий с одарёнными школьниками не только по тематическому принципу, но с обучением также нахождению логической структуры решения задачи;

н) использование при организации дополнительного образования математически одарённых детей разнообразных форм и содержания занятий, адекватно их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям;

о) интеллектуальные состязания школьников выступают стимулом для профессиональной самореализации педагогов;

п) работа с математически одарёнными детьми нуждается в обеспечении управленческой поддержки территориальными органами управления образованием.

4. *Необходимым условием о*бразования и самореализации математически одарённых детей *является формирование мотивирующей образовательной среды*, которая обеспечивает их развитие в четырёх сферах: интеллектуальной, коммуникативной, кооперативной, личностной.

Интеллектуальная сфера ориентирована на овладение математической деятельностью. Коммуникативная сфера предполагает формирование навыков общения у субъектов образовательной среды, которое происходит в процессе совместной деятельности. Кооперативная сфера отвечает за организацию взаимодействия субъектов образовательной среды в различных типах (сотрудничество, конкуренция) и формах. Личностная сфера обеспечивает возможности для самореализации обучающихся и педагогов посредством представления их учебных и творческих достижений в разнообразных интеллектуальных и творческих состязаниях.

5. *Содержание образования математически одарённых детей в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов должно обеспечивать* элемент новизны, когда учащийся должен продемонстрировать умение «нестандартно мыслить» и обеспечивать овладение математической деятельностью, что включает освоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей.

В содержании образования должны быть представлены два направления: логическое и техническое. К первому относятся задачи по комбинаторике и геометрии, ко второму – по алгебре, теории чисел (арифметике), основам математического анализа. Восприятие каждого из указанных направлений наиболее успешно проходит в разном возрасте. Логического – в среднем звене школы, когда математический аппарат ещё недостаточен, но школьник уже воспринимает понятие доказательства, к техническому школьник может быть подготовлен только в результате овладения им всем необходимым математическим инструментарием, т.е. в старших классах школы.

6. *Формы проведения математических соревнований на каждом возрастном этапе обучения математически одарённых детей* должны выбираться с учётом их возможностей, образовательных потребностей и психолого-педагогических особенностей. Базовые сценарии математических соревнований как личные, так и командные, различаются подходами к решению задач и включают три варианта. На о*лимпиаде* участники сдают полные решения задач, жюри их проверяет и выставляет баллы. Вариант *блиц* предполагает жёсткое ограничение времени решения и только ответы, без обоснований и объяснений. При использвании *теста с*писок вариантов ответа для каждой задачи приведён изначально, нужно только сделать правильный выбор. Каждый из сценариев имеет устоявшиеся варианты. Олимпиады могут быть письменными и устными. Стоимость задач может быть одинаковой либо различной. Сценарий проведения игры может быть конкурентным и неконкурентным. Наиболее зрелищными и динамичными являются конкурентные сценарии, которые соответствуют особенностям подросткового возраста – стремлению к состязательности.

7. *Реализация концепции работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов* может осуществляться посредством создания различных организационных структур, осуществляющих работу с математически одарёнными детьми в условиях региона, обусловленных его особенностями и возможностями и сложившимися традициями. Наиболее продуктивными являются модели, которые основаны на использовании сетевого взаимодействия между организациями общего и высшего образования, обеспечивают дистанционную поддержку и предоставление различных форм математических состязаний, популяризацию математики, вовлечение и стимулирование педагогов общеобразовательных школ к работе с математически одарёнными детьми.

Список литературы

1. Абульханова, К. А. Мировоззренческий смысл и научное значение категории субъекта / К. А. Абульханова // Российский менталитет: вопросы психологической теории и практики / под ред. К. А. Абульхановой, А. В. Брушлинского, М. И. Воловиковой. – М.: ИП РАН, 1997. – С. 56–75.

2. Агаханов, Н. Х. Математические олимпиады Московской области / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – М.: Физматкнига, 2006. – 320 с.

3. Агаханов, Н. Х. Математика. Всероссийские олимпиады : Вып 2 / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – М.: Просвещение, 2009. – 159 с.

4. Агаханов, Н. Х. Летние учебно-тренировочные сборы по подготовке команд школьников России к международным математическим олимпиадам / Н. Х. Агаханов // Математика. – 2007. – № 15. – С. 9 – 10.

5. Агаханов, Н. Х. Принципы отбора и подготовки команды на Международную математическую олимпиаду / Н. Х. Агаханов, П. А. Кожевников, О. К. Подлипский // Труды XLIX научной конференции Московского физико-технического института (государственного университета). Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Ч. IX. – М.: МФТИ, 2006. – С. 35 – 36

6. Агаханов, Н. Х. Математическая одарённость. Поиск отбор и сопровождение одарённых школьников / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский, Д. А. Терёшин // Наука и образование эпохи нового возрождения в мировой научно-образовательной системе: материалы Международной научной конференции.(9 – 11 сентября 2009 года). – Ашхабад, 2009. – С. 117 – 118.

7. Агаханов, Н. Х. Программа «Наша новая школа». Модернизация системы работы с математически одарёнными школьниками / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский, Д. А. Терёшин // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Ч. XII. – М.: МФТИ, 2010 – С. 34 – 35.

8. Агаханов, Н. Х. Современный российский опыт работы по отбору, сопровождению и подготовке школьников к математическим соревнованиям / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский, Д. А. Терёшин // Труды Международной науч-

но-методической конференции «Роль новых технологий в реализации реформ образования Президента Туркменистана Гурбангулы Бермухамедова и современные методы обучения». – Ашхабад, 2011 – С. 151 – 153

9. Агаханов, Н. Х. Математика. Международные олимпиады / Н. Х. Агаханов, П. А. Кожевников, Д. А. Терёшин . – М.: Просвещение, 2010. – 127 с.

10. Агаханов, Н. Х. Средовой подход как условие развития математически одарённых школьников / Н. Х. Агаханов // Вестник ТГПУ. – 2013. – № 1 (129). – С. 120 – 124.

11. Агаханов, Н. Х. Задачи российской математической олимпиадной школы / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников [и др.] // Математика. Первое сентября. – 2014. – № 11.

12. Агаханов, Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2009: заключительные этапы / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников [и др.]; под ред. Н. Х. Агаханова. – М.: МЦНМО, 2014. – 552 с.

13. Агаханов, Н. Х. Муниципальный этап XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский // Математика в школе. – 2016. – № 2. – С. 14 – 26.

14. Агаханов, Н. Х. Муниципальный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский // Математика в школе. – 2017. – № 3. – С. 21 – 33.

15. Агаханов, Н. Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2015» по математике / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, С. Е. Городецкий [и др.] // Математика в школе. – 2016. – № 3. – С. 13 – 25.

16. Агаханов, Н.Х. Теория и практика работы с математически одаренными детьми / Н.Х.Агаханов, Т.Ф. Сергеева, О.К. Подлипский // Монография. – М.: Илекса, 2018 – 327 с.

17. Агаханов, Н.Х. Муниципальные олимпиады Московской области по математике / Н.Х.Агаханов, О.К. Подлипский // М.: МЦНМО, 2019. – 400 с.

18. Агаханов, Н.Х. ФИЗТЕХОВСКАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ. Задачи вступительных экзаменов в МФТИ и олимпиады «Физтех» (1991–2014) / Н.Х.Агаханов, И.И.Богданов, С.Е. Городецкий, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский // М.:Физматкнига, 2019 – 436 с.

19. Агаханов, Н.Х. ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ». МАТЕМАТИКА (задачи 2015-2020 гг.) / И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головко, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, П.А. Кожевников, Ю.В. Кузьменко, Е.Г. Молчанов, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин // М.:Физматкнига, 2022 – 344 с.

20. Агаханов, Н.Х. Применение теоремы Виета для решения задач повышенной сложности / О.К. Подлипский, С.В. Щербатых // Математика в школе. 2017. № 8. С. 41-47.

21. Агаханов, Н.Х. Формирование мотивирующей образовательной среды развития математически одаренных школьников / С.В. Щербатых // Вестник ТГПУ. – 2017. – № 12(189). – С. 134 – 138.

22. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х.Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. 2019. № 2. С. 18-28.

23. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х.Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. 2020. № 3. С. 18-27.

24. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х.Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. 2021. № 3. С. 6-16.

25. Агаханов, Н. Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015 / 2016 учебного года / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников [и др.] // Математика в школе. – 2016. – № 5. – С. 16 – 28.

26. Агаханов, Н. Х. О технологиях взаимодействия МФТИ с учителями, школьниками и студентами в области математики / Н. Х. Агаханов, П. А. Кожевников, О. К. Подлипский [и др.] // Гуманитарные науки. Труды 55-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе», Научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики и астрономии», Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». – М.: МФТИ, 2012. – С. 35 – 36.

27. Агаханов, Н. Х. «Онлайн-тур олимпиады «Физтех-2014» по математике / Н. Х. Агаханов, П. А. Кожевников, О. К. Подлипский // Математика в школе. – 2014. – № 6. – С. 24 – 30; № 10. – С. 22 – 28.

28. Агаханов, Н. Х. Муниципальный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский // Математика в школе. – 2017. – № 3. – С. 21 – 33.

29. Агаханов, Н. Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2016» по математике / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, И. В. Глухов [и др.] // Математика в школе. – 2016. – № 7. – С. 11 – 22.

30. Агаханов, Н.Х. О методах решения олимпиадных задач / Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. // Математика в школе. 2020. № 8. С. 11-24.

31. Агаханов, Н.Х. О современных тенденциях в подготовке школьников к математическим олимпиадам / Агаханов Н. Х., Марчукова О. Г., Подлипский О. К. // Вопросы образования. 2021 № 4. С. 266–284.

32. Агаханов, Н.Х. О модели работы с математически одарёнными школьниками / Н. Х. Агаханов, О. Г. Марчукова // Научно-методический журнал «CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование». Елец. 2022. № 2 (26). С. 8-21.

33. Адамар, Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж. Адамар. – М.: Советское радио, 1970. – 152 с.

34. Адамович, Т. П. Сборник олимпиадных задач по химии / Т. П. Адамович, Г. И. Васильева, С. А. Мечковский [и др.]. – Мн.: Народная асвета, 1980. – 111 с.

35. Аксенова, Э. А. Инновационные подходы к обучению одарённых детей за рубежом / Э. А. Аксенова // Интернет-журнал «Эйдос». – 15.01.2007. – Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2007/0115-9.htm.

36. Аксенова Г. И. Формирование субъектной позиции учителя в процессе профессиональной подготовки : автореф. дисс. … д-ра пед. наук : 13.00.01 / Аксенова Галина Ивановна. – М., 1998. – 24 с.

37. Акулова, О. В. Современная школа : опыт модернизации / О. В. Акулова, С. А. Писарева, А. П. Тряпицына [и др.]; под общ. ред. А. П. Тряпицыной. – СПб.: РГПУ, 2005. – 290 с.

38. Александров, А. Д. Общий взгляд на математику / А. Д. Александров // Математика, её содержание, методы и значение: в 3-х т. / ред. А. Д. Александров, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев. – М.: Академии наук СССР, 1956. – Т. 1. – С. 5 – 78.

39. Александров, П. С. Математика как наука / П. С. Александров // Вопросы общей методики математики. – М.: АПН РСФСР, 1958. – С. 5 – 35.

40. Алексеева, Г. И. Из истории становления и развития математических олимпиад (Опыт и проблемы) : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Галина Ивановна Алексеева. – Якутск, 2002. – 144 с.

41. Алексеевский, А. В. «Математик – тот, кто понимает». Памяти И. М. Гельфанда // «Троицкий вариант – Наука». – 2010. – № 01 (45). – С. 4 – 5.

42. Ананьев, Б. Г. О соотношении способностей и одарённости / Б. Г. Ананьев // Проблемы способностей / под ред. В. Н. Мясищева – М.: АПН РСФСР, 1962. – 308 с.

43. Андрей Александрович Суслин // Выдающиеся матмеховцы: Совместный проект математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета и Фонда Эйлера. – Режим доступа: http://www.math.spbu.ru/Euler/pages/16_9_suslin.htm.

44. Андронов, И. К. Полвека развития школьного математического образования в СССР / И. К. Андронов. – М.: Просвещение, 1967. – 180 с.

45. Арнольд, В. И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2004. – 32 с.

46. Арутюнян, Е. Б. Занимательная математика Е. Б. Арутюнов, Г. Г. Левитас. – М.: АСТ-ПРЕСС, 1999. – 368 с.

47. Асмолов, А. Г. Психология личности: культурно-историческое понимание развития человека / А. Г. Асмолов. – М.: Академия, 2007. – 528 с.

48. Атанасян, С. Л. Проектирование структуры информационной образовательной среды педагогического вуза / С. Л. Атанасян, С. Г. Григорьев, В. В. Гриншкун // Информатика и образование. – 2009. – № 3. – С. 90 – 96.

49. Афанасьев, В. Г. Человек в системах управления / В. Г. Афанасьев. – М.: Знамя, 1975. – 64 с.

50. Бабаева, Ю. Д. Динамическая теория одарённости / Ю. Д. Бабаева // Основные современные концепции творчества и одарённости / под ред. Д. Б. Богоявленской. – М.: Молодая гвардия, 1997. – С. 275 – 294.

51. Бабанский, Ю. К. Избранные педагогические труды / сост. М. Ю. Бабанский. – М.: Педагогика, 1989. – 558 с.

52. Барышников, В. Я. Средовой подход в управленческой деятельности специалиста по физической культуре : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Виталий Яковлевич Барышников. – Елец, 2005. – 149 с.

53. Башмаков, М. И. Информационная среда обучения / М. И. Башмаков, С. Н. Поздняков, Н. А. Резник. – СПб.: Свет, 1997 – 400 с.

54. Безбородова, Л. А. Методика преподавания музыки в общеобразовательных учреждениях : учеб. пособие для студ. / Л. А. Безбородова, Ю. Б. Алиев. – М.: Академия, 2002. – 416 с.

55. Белоусова, А. К. Развивающая образовательная среда для одарённых детей / А. К. Белоусова. – Ростов на/Д., 2009. – 70 с.

56. Берталанфи Л. фон. Общая теория систем – обзор проблем и результатов / Л. фон Берталанфи // Системные исследования: Ежегодник. – М.: Наука, 1969. – С. 30 – 54.

57. Беспалько, В. П. Слагаемые педагогической технологии / В. П. Беспалько. – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.

58. Бестужев-Лада, И. В. Поисковое социальное прогнозирование: перспективные проблемы общества. Опыт систематизации / И. В. Бестужев-Лада. – М.: Наука, 1984. – 271 с.

59. Богданов, А. А. Тектология. Всеобщая организационная наука : в 2-х кн. / А. А. Богданов – М.: Экономика, 1989. – Кн. 1. – 304 с.; Кн. 2. – 351 с.

60. Божович, Л. И. Избранные психологические труды: Проблемы формирования личности / Л. И. Божович; под. ред. Д. И. Фельдштейна. – М.: Междунар. пед. акад., 1995. – 209 с.

61. Бондаревская, Е. В. Теория и практика личностно-ориентированного образования / Е. В. Бодаревская. – Ростов н/Д.: Ростовского пед. ун-та, 2000. – 352 с.

62. Бордовский, Г. А. Принцип диалогизации обучения и его реализация в образовательной системе «Диалог» (Начальное образование) / Г. А. Бордовский, М. П. Воюшина, Е. П. Суворова // Герценовские чтения. Начальное образование. – Т. 5. – Вып. 1. – СПБ.: ВВМ, 2014. – С. 11 – 19.

63. Борис Николаевич Делоне // Сайт кафедры высшей геометрии и топологии мехмата МГУ. – Режим доступа: http://higeom.math.msu.su /history/delone_r.html.

64. Брудно, А. Л. Московские олимпиады по программированию / А. Л. Брудно, Л. И. Каплан. – М.: Наука, 1990. – 208 с.

65. Бурбаки, Н. Теория множеств. Кн. 1. Основные структуры анализа / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1965. – 456 с.

66. Будруджак, П. Задачи по химии / П. Будруджак. – М.: Мир, 1989. – 343 с.

67. Васильев, Н. Б. Избранные олимпиадные задачи. Математика / Н. Б. Васильев, А. П. Савин, А. А. Егоров. – М.: Бюро Квантум, 2007. – 160 с.

68. Васильев, Н. Б. Заочные математические олимпиады / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, А. Л. Тоом [и др.]. – М.: Наука, 1981. – 128 с.

69. Вачков, И. В. Полисубъектное взаимодействие в образовательной среде / И. В. Вачков // Психология. Журнал Высшей школы экономики. – 2014. – Т. 11. – № 2. – С. 36 – 50.

70. Вейль, Г. Пространство, время, материя. Лекции по общей теории относительности / Г. Вейль. – М.: Янус, 1996. – 480 с.

71. Венгер, Л. А. Педагогика способностей / Л. А. Венгер. – М.: Знание, 1973. – 117 с.

72. Виноградов, И. М. Избранные труды / И. М. Виноградов. – М.: Акад. наук СССР, 1952. – 436 с.

73. Владимиров, В. С. О школьном математическом образовании / В. С. Владимиров, Л. С. Понтрягин, А. Тихонов // Математика в школе. – 1979. – № 3. – С. 12 – 14.

74. Волкова, Л. В. Субъектная роль педагогов в процессе целерационального изменения образовательной среды / Л. В. Волкова // Психология в педагогической деятельности: традиции и инновации: материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 85-летию психологической науки и образования в Герценовском университете (к юбилею кафедры психологии развития и образования психолого-педагогического факультета). – СПб. РГПУ, 2010. – С. 153 – 157.

75. Всероссийская олимпиада школьников по математике. Победители и призёры Всероссийской олимпиады школьников по математике (1992–…). – Режим доступа: http://olympiads.mccme.ru/vmo /prisery.htm.

76. Вундт, В. Очерки психологии / В. Вундт. – М.: Московское книгоиздательство, 1912.

77. Выготский, Л. С. Антология гуманной педагогики / Л. С. Выготский. – М.: Шалвы Амонашвили, 1996. – 305 с.

78. Выготский, Л. С. Психология искусства / Л. С. Выготский. – М. Искусство, 1986. – 573 с.

79. Выготский, Л. С. Умственное развитие детей в процессе обучения / Л. С. Выготский. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 135 с.

80. Выготский, Л. С. Проблема обучения и умственного развития в школьном возрасте / Л. С. Выготский // Выготский Л. С. Педагогическая психология. – М.: Педагогика-Пресс, 1996. – С. 321 – 336.

81. Гальперин, П. Я. Основные результаты исследований по проблеме «Формирование умственных действий и понятий» : [Доклад, представленный на соиск. уч. степени д-ра психол. наук] / П. Я. Гальперин. – М., 1965. – 51 с.

82. Гальперин, Г. А. Московские математические олимпиады / Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. – М.: Просвещение, 1986. – 305 с.

83. Гарднер, Г. Структура разума: Теория множественного интеллекта / Г. Гарднер. – М.: И. Д. Вильяме», 2007. – 512 с.

84. Гершунский, Б. С. Философия образования / Б. С. Гершунский. – М.: Флинта», 1998. – 432 с.

85. Гильберт, Д. Основания геометрии / Д. Гильберт. – М., Л.: ОГИЗ, Гос. технико-теоретической лит-ры, 1948. – 491 с.

86. Глейзер, Г. И. История математики в школе. IV – VI кл. / Г. И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1981. – 239 с.

87. Гнеденко, Б. В. Развитие мышление и речи при изучении математики / Б. В. Гнеденко // Математика в школе. – 1991. – № 4. – С. 3 – 9.

88. Гончаренко, С. У. Фізика. Олімпіадні задачі. 7-8 класи : Вип. 1 / С. У. Гончаренко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 1998. – 72 с.

89. Гордеева, Т. О. Мотивация учебной деятельности: структура, механизмы, условия развития : дисс. ... д-ра психолог. наук: 19.00.07 / Тамара Олеговна Гордеева. – М., 2013. – 444 с.

90. Горшковский, В. Польские физические олимпиады / В. Горшковский; под ред. канд. физ.-мат. наук Е.Л. Суркова. – М.: Мир, 1982. – 260 с.

91. Грачев, В. В. Индивидуально-творческий подход в системе высшего профессионального образования : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Владимир Викторович Грачев. – М., 1998. – 179 с.

92. Гура, Л. М. Кредитно-модульная система организации учебного процесса в СГГУ : сб. документов и материалов / Л. М. Гура. – Севастополь: Рибэст, 2007. – 46 с.

93. Гусейнов, А. А. Образование: традиционные основы, новые перспективы / А. А. Гусейнов // Знание. Понимание. Умение. – 2006. – № 4. – С. 29 – 30.

94. Гуткина, Н. И. Психологическая готовность к школе / Н. И. Гуткина. – СПб.: Питер, 2004. – 208 с.

95. Давыдов, В. В. Содержание и структура учебной деятельности школьников / В. В. Давыдов; под ред. В.В. Давыдова [и др.]. – М.: Педагогика, 1982. – 216 с.

96. Демиденко, Г. В. Великий математик XX столетия. К столетию со дня рождения Сергея Львовича Соболева // Наука в Сибири. – 2008. – № 39 (2674). – С. 6 – 7.

97. Демиденко, Г. В. К столетию со дня рождения К столетию со дня рождения Сергея Львовича Соболева // Вестник НГУ. Серия: Математика. – 2008. – Т. 8, вып. 4. – С. 3 – 12.

98. Дерябо, С. Д. Феномен субъектификации природных объектов : автореф. дисс. … д-ра психолог. наук : 19.00.01 / Сергей Дмитриевич Дерябо. – М., 2002. – 40 с.

99. Дерябо, С. Д. Экологическая психология: диагностика экологического сознания / С. Д. Дерябо. – М.: МПСИ, 1999. – 310 с.

100. Дорофеев, Г. В. О принципах отбора содержания школьного математического образования / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1990. – № 6.

101. Дружинин, В. Н. Психология общих способностей / В. Н. Дружинин. – СПб.: Питер, 1999. – 368 с.

102. Друкер, П. Эффективное управление / П. Друкер. – М.: АСТ: Астрель, 2004. – 284 с.

103. Дункер, К. Качественное (экспериментальное и теоретическое) исследование продуктивного мышления / К. Дункер // Психология мышления : сб. / под ред. А. М. Матюшина. – М.: Прогресс, 1965. – С. 21 – 85.

104. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д., Семенова Д.В. О содержании школьного математического образования и тестировании остаточных знаний по математике // Педагогика. 2022. №5. С. 57-69.

105. Евдокимова, Г. С. Математическая культура – высшее проявление образованности и профессиональной компетентности / Г. С. Евдокимова, В. Д. Бочкарева // Вестник Мордовского университета. – 2015. – Т. 25. – № 1. – С. 37 – 43.

106. Загвязинский, В. И. Стратегические ориентиры развития отечественного образования и пути их реализации / В. И. Загвязинский // Инновационные проекты и программы в образовании. – 2013. – № 2 – С. 3 – 8.

107. Загвязинский, В. И. Педагогическая инноватика: проблемы стратегии и тактики / В. И. Загвязинский, Т. А. Строкова. – Тюмень: Тюменского гос. ун-та, 2011. – 176 с.

108. Занков, Л. В. Обучение и развитие (экспериментально-педагогическое исследование) / Л. В. Занков. – М.: Педагогика, 1975. – 440 с.

109. Запесоцкий А. С. Образование: Философия, культурология, политика / А. С. Запесоцкий. – М.: Наука, 2003. – 456 с.

110. Зимняя, И. А. Педагогическая психология / И. А. Зимняя. – М.: МПСИ; Воронеж: МОДЭК, 2010. – 447 с.

111. Зинченко, В. П. Аффект и интеллект в образовании / В. П. Зинченко. – М.: Тривола, 1995. – 29 с.

112. Ильина, Т. А. Системно-структурный подход к организации обучения Вып. 1 / Т. А. Ильина. – М.: Знание, 1972. – 20 с.

113. Ильин, Е. П. Психология индивидуальных различий / Е. П. Ильин. – СПб.: Питер, 2004. – 701 с.

114. Ингенкамп, К. Педагогическая диагностика / К. Ингенкамп. – М.: Педагогика, 1991. – 240 с.

115. Информационные и коммуникационные технологии в образовании / И. В. Роберт, С. В. Панюкова, А. А. Кузнецов [и др.]; под ред. И. В. Роберт. – М.: Дрофа, 2008. – 312 с.

116. Кабардин, О. Ф. Международные физические олимпиады школьников / О. Ф. Кабардин, В. А. Орлов; под ред. В. Г. Разумовского. – М.: Наука, 1985. – 160 с.

117. Казачкова, Т. Б. Феномен полисубъектного взаимодействия в системе постдипломного образования / Т. Б. Казачкова // Постдипломное образование: проблемы развития личности. 70-летию Санкт-Петербургской Академии постдипломного педагогического образования посвящается : материалы VIII международной научно-практической конференции кафедры педагогики и андрагогики. – СПб., 2009. – С. 52 – 54.

118. Капица, П. Л. Физические задачи / П. Л. Капица. – М.: Знание, 1966. – 16 с.

119. Кассина, Р. А. Инновационная среда образовательного учреждения как интегральное средство профессионального развития учителя : дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.08 / Раиса Алексеевна Кассина. – Н. Новгород, 2006. – 196 с.

120. Квапневский, З. Польские химические олимпиады / З. Квапневский, Т. Шаршаневич, Р. Киешковский [и др.]; под ред. С. С. Чуранова. – М.: Мир, 1980. – 533 с.

121. Кирьякова, А. В. Теория ориентации личности в мире ценностей / А. В. Кирьякова. – Оренбург: Оренбургского гос. пед. ин-та, 1996. – 188 с.

122. Клейн, Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») / Ф. Клейн // Об основаниях геометрии: сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей. – М., 1956. – С. 399 – 434.

123. Ковалев, А. Г. Психология личности / А. Г. Ковалев. – М.: Просвещение, 1965. – 254 с.

124. Ковалев, А. Г. Психические особенности человека : в 2 т. / А. Г. Ковалев, В. Н. Мясищев. – Л.: Ленингр. ун-та, 1960. – Т. 2: Способности. – 304 с.

125. Козел, С. М. Всероссийские олимпиады школьников по физике 1992 – 2001 / С. М. Козел, В. П. Слободянин. – М.: Вербум-М, 2002. – 392 с.

126. Колмогоров, А. Н. О развитии математических способностей (Письмо В. А. Крутецкому) / А. Н. Колмогоров // Вопросы психологии. – 2001. – № 3. – С. 103 – 106.

127. Колмогоров, А. Н. Математика – наука и профессия / А. Н. Колмогоров. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 288 с.

128. Колумбийская Шкала Умственной Зрелости // Психологическая энциклопедия / под ред. Р. Корсини, А. Ауэрбаха. – СПб.: Питер, 2006. – 1876 с.

129. Колягин, Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика / Ю. М. Колягин, В. А. Оганесян, Г. Л. Луканкин [и др.]. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

130. Колягин, Ю. М. Профильная дифференциация обучения математике / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 21 – 27.

131. Кон, И. С. Социология личности / И. С. Кон. – М.: Политиздат, 1967. – 383 с.

132. Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов (утв. Президентом РФ 3.04.2012). – Режим доступа: http://www.kremlin.ru/acts/14907.

133. Королев, Ф. Ф. Системный подход и возможности его применения в педагогике / Ф. Ф. Королев // Проблемы теории воспитания / ред. Л. П. Буева, Л. И. Новикова, Г. Н. Филонов. – М.: Педагогика, 1974. – 260 с.; С. 209 – 222.

134. Кочеткова, В. Г. Уровневая подготовка педагогических кадров для системы дополнительного образования детей : автореф. дис. канд. пед. наук : 13.00.08 / Валентина Григорьевна Кочеткова. – Самара, 2003. – 18 с.

135. Краевский, В. В. Предметное и общепредметное в образовательных стандартах / В. В. Краевский, А. В. Хуторской // Педагогика. – 2003. – № 2. – С. 3 – 10.

136. Крутецкий, В. А. Психология / В. А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1980. – 352 с.

137. Крутецкий, В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 431 с.

138. Кудрявцев, Л. Д. Математическое образование, его роль и специфика / Л. Д. Кудрявцев // Образование и общество. – 2000. – № 6. – С. 4 – 6.

139. Кузнецов, Ю. Ф. Деятельностный подход к учению и основные категории педагогики / Ю. Ф. Кузнецов // Специальное образование. – 2006. – № 6. – С. 29 – 38.

140. Лебедева, В. П. Психодидактические аспекты проектирования образовательной среды (Из опыта работы школ ЦКФЛ РАО в пос. Черноголовка) / В. П. Лебедева, В. А. Орлова, В. И. Панов // Школа 2000. Концепции, методики, эксперимент: сб. научн. тр. / под ред. Ю. И. Дика, А. В. Хуторского. – М., 1999. – С. 275 – 280.

141. Леднев, В. С. Содержание образования: сущность, структура, перспективы / В. С. Леднев. – М.: Высшая школа, 1991. – 224 с.

142. Лейтес, Н. С. Умственные способности и возраст / Н. С. Лейтес. – М.: Педагогика, 1971. – 279 с.

143. Леонтьев, А. Н. Деятельность. Сознание. Личность / А. Н. Леонтьев. – М.: Политиздат, 1975. – 304 с.

144. Леонтьев, А. Н. Образ и модель / А. Н. Леонтьев // Избр. психолог. произведения. – М.: Педагогика, 1983. – С. 251 – 261.

145. Леонтьев, А. Н. О формировании способностей / А. Н. Леонтьев // Вопросы психологии. – 1960. – № 1. – С. 13 – 21.

146. Леонтьев, А. Н. Психологические воззрения Л. С. Выготского / А. Н. Леонтьев, А. Р. Лурия // Выготский Л. С. Избранные психологические исследования. – М.: АПН РСФСР, 1956. – С. 4 – 33.

147. Ли, Д. Геометрическая интерпретация комплексных чисел / Д. Ли. – Режим доступа: http://ib.mazurok.com/2014/05/08.

148. Лукашик, В. И. Физическая олимпиада в 6-7 классах средней школы / В. И. Лукашик. – М.: Просвещение, 1987. – 192 с.

149. Лурия, А. Р. Лекции по психологии / А. Р. Лурия. – СПб.: Питер, 2001. – 480 с.

150. Лурия, А. Р. Основы нейропсихологии / А. Р. Лурия. – М.: МГУ, 1973. – 374 с.

151. Люстерник, Л. А. Молодость Московской математической школы / Л. А. Люстерник // Успехи математических наук. – 1967. – Т. 22. – Вып. 4 (136). – С. 147 – 185.

152. Ляудис, В. Я. Структура продуктивного учебного взаимодействия / В. Я. Ляудис // Психолого-педагогические проблемы взаимодействия учителя и учащихся / под ред. А. А. Бодалев, В. Я. Ляудис. – М.: НИИОП АПН СССР, 1980. – С. 37 – 52.

153. Майер, Н. Об одном аспекте мышления / Н. Майер // Психология мышления : сб. / под ред. А. М. Матюшина. М.: Прогресс, 1965. – С. 300 – 313.

154. М. А. Лаврентьев и реформа образования // Научно-методический журнал «Сибирский Учитель». – 2007. – № 4 (52) – С.28 – 35.

155. Малафеев, Р. И. Творческие экспериментальные задания по физике. 9 – 11 классы / Р. И. Малафеев. – М.: Школьная пресса, 2003. – 48 с.

156. Мануйлов, Ю. С. Воспитание средой: сборник статей разных лет / Ю. С. Мануйлов. – Н. Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 2003. – 119 с.

157. Маркова, А. К. Формирование мотивации учения в школьном возрасте / А. К. Маркова. – М.: Просвещение, 1983. – 96 с.

158. Маркушевич, А. И. Возвратные последовательности / А. И. Маркушевич. – М.: Гос. технико-теоретической литературы, 1950. – 52 с.

159. Маркушевич, А. И. Преподавание в школе естественно-математических наук и формирование научного мировоззрения / А. И. Маркушевич // Математика в школе. –1976. – № 2. – С. 10 – 16.

160. Маркушевич, А. И. Об очередных задачах преподавания математики в школе / А. И. Маркушевич // На путях обновления школьного курса математики. – М.: Просвещение, 1978. – С. 3 – 27.

161. Маскина, М. С. Обучение доказательству математически одаренных учащихся на факультативных курсах : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Маскина Мария Сергеевна. – Рязань, 2003. – 189 с.

162. Матиясевич Юрий Владимирович // Официальный сайт «Специализированный учебно-научный центр МГУ – Школа имени А. Н. Колмогорова. – Режим доступа: http://www.vipschool.ru /oneperson.php?personnumber=234.

163. Матросов, В. Л. О реализации принципа непрерывности образования / В. Л. Матросов, Г. Г. Брайчев // Проблемы и перспективы педагогического образования в XXI веке: труды научно-пр. конф. – М., 2000. – С. 242 – 244.

164. Матюшкин, А. М. Концепция творческой одарённости / А. М. Матюшкин // Вопросы психологии. – 1989. – № 6. – С. 29 – 33.

165. Матюшкин, А. М. Проблемное обучение: прошлое, настоящее, будущее : в 3 кн. / А. М. Матюшкин, А. А. Матюшкина, Е. В. Ковалевская [и др.]; под ред. Е. В. Ковалевской. – Нижневартовск: Нижневарт. гуманит. ун-та, 2010. – Кн. 1. Лингво-педагогические категории проблемного обучения. – 300 с.

166. Махмутов, М. И. Проблемное обучение. Основные вопросы теории / М. И. Махмутов. – М.: Педагогика, 1975. – 368 с.

167. Менчинская, Н. А. Проблемы обучения, воспитания и психического развития ребёнка / Н. А. Менчинская. – М.: МПСИ, Воронеж: Модэк, 2004. – 512 с.

168. Методика обучения геометрии / учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчищина [и др.]; под ред. В. А. Гусева. – М.: Академия, 2004. – 368 с.

169. Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников в 2016/2017 учебном году по математике (утв. на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (Протокол № 2 03.06.2016 // Официальный сайт «Всероссийская олимпиада школьников». – Режим доступа: http://www.rosolymp.ru/attachments/10646_12%20Mathematics%20Recommendations%20ME_2016-2017.pdf.

170. Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного этапа всероссийской олимпиады школьников в 2016/2017 учебном году по математике (утв. на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (Протокол № 2 03.06.2016 // Методический сайт Всероссийской олимпиады школьников. – Режим доступа: http://olymp.apkpro.ru/mm/mpp/files/mat-s-2017.pdf.

171. Митина, Л. М. Психология личностно-профессионального развития субъектов образования / Л. М. Митина. – М.; СПб.: Нестор-История, 2014. – 376 с.

172. Монахов, В. М. Дифференциация обучения в средней школе / В. М. Монахов, В. А. Орлов, В. В. Фирсов // Советская педагогика. – 1990. – № 8. – С. 42 – 46.

173. Мордкович, А. Г. О некоторых проблемах школьного математического образования / А. Г. Мордкович // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы I Всероссийской научно-практической конференции. Красноярск, 14 – 15 ноября 2013 г. / отв. ред. Л. В. Шкерина. – Красноярск, 2013. – С. 706 – 722.

174. Мордухай-Болтовский, Д. Философия. Психология. Математика / Д. Мордухай-Болтовский. – М.: Серебряные нити, 1998. – 556 с.

175. Мясищев, В. Н. Психология отношений / В. Н. Мясищев; под ред. А. А. Бодалева. – М.: Ин-та практической психологии; Воронеж: МОДЭК, 1995. – 356 с.

176. Наливайко, Н. В. Образовательная политика и ценностные ориентиры отечественного образования / Н. В. Наливайко // Вестник НГУ. Серия «Философия». – 2012. – Т. 10. – Вып. 3. – С. 168 – 173.

177. Никандров, Н. Д. Гражданское воспитание в современной России / Н. Д. Никандров // Образование и наука. – 2011. – № 2 (81). – С. 3 – 15.

178. Никольский, С. М. О роли математики / С. М. Никольский // Математика: Газета. – 2003. – № 30. – С. 30.

179. Новиков, А. М. Развитие отечественного образования // Полемические размышления / А. М. Новиков. – М.: Эгвес, 2005. – 176 с.

180. Основы общей теории и методики обучения информатики / под общ. ред. А. А. Кузнецова. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. – 154 с.

181. Официальный сайт «Международный ABLE (Ассоциация по улучшению жизни и образования)». – Режим доступа: http://able.org.ru/probras/.

182. Официальный сайт «Международная Математическая Олимпиада». – Режим доступа: http://www.imo-official.org/default.aspx.

183. Официальный сайт «Образовательный центр «Сириус». – Режим доступа: https://sochisirius.ru/.

184. Официальный сайт «Олимпиады Кировской области». – Режим доступа: http://olimp43.ru/news.

185. Официальный сайт «Республиканская естественно-математическая школа». – Режим доступа: http://remshagu.ru/Obshay_inf /istoriy_i_dostigeniy/.

186. Павел Сергеевич Александров // Сайт кафедры высшей геометрии и топологии мехмата МГУ. – Режим доступа: http://higeom.math.msu.su /history/alexan_r.html.

187. Панов, В. И. Экопсихологические аспекты детства / В. И. Панов // Мир психологии. – 1997. – № 1. – С. 55 – 68.

188. Панов, В. И. Психодидактика образовательных систем: теория и практика / В. И. Панов. – СПб.: Питер, 2007. – 352 с.

189. Панчешникова, Л. М. О системном подходе в методических исследованиях / Л. М. Панчешникова // Советская педагогика. – 1973. – № 4. – С. 71 – 80.

190. Панюкова, С. В. Комплексная система автоматизации управления университетом / С. В. Панюкова // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. – 2011. – № 2. – С. 71 – 77.

191. Пермякова М.Ю., Перфильева А.В. Олимпиады по математике как одна из форм внеурочной деятельности в рамках реализации государственных стандартов // Мир науки. Педагогика и психология. 2020. Т.8. №1.

192. Петраков, И. С. Математические олимпиады школьников / И. С. Петраков. – М.: Просвещение, 1982. – 96 с.

193. Петровский, В. А. Феномен субъектности в психологии личности : автореф. дисс. … д-ра психолог. наук : 19.00.11 / Петровский Вадим Артурович. – М., 1998. 76 с.

194. Пиаже, Ж. Психология интеллекта / Ж. Пиаже // Пиаже Ж. Избр. психолог. тр. – М.: Просвещение, 1969. – 659 с.; С. 58 – 231.

195. Платонов, К. К. Проблемы способностей / К. К. Платонов. – М.: Наука, 1972. – 312 с.

196. Погорелов, А. В. Элементарная геометрия / А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1972. – 208 с.

197. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – М.: Наука, 1975. – 463 с.

198. Полат, Е. С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / Е. С. Полат. – М.: Академия, 2005. – 272 с.

199. Положение о Всероссийской олимпиаде школьников (утв. Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 02.12.2009 № 625) // Российское образование. Федеральный образовательный портал: нормативные документы. – Режим доступа: http://www.edu.ru/db/mo /Data/d_09/prm695-1.htm.

200. Постановление Правительства Российской Федерации «О Национальном координационном совете по поддержке молодых талантов России» от 10.09.2012 № 897 // СЗ РФ. – 17.09.2012. – № 38. – Ст. 5109.

201. Приказ Министерства просвещения РФ от 27 ноября 2020 г. № 678 "Об утверждении Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников". - Режим доступа: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/400311428/#review

202. Постановление Правительства Российской Федерации «Об утверждении Правил выявления детей, проявивших выдающиеся способности, и сопровождения их дальнейшего развития» от 17 ноября 2015 года N 1239 (с изменениями на 18 сентября 2021 года) – режим доступа: https://base.garant.ru/71251462/

203. Приказ Президента Российской Федерации от 04.02.2010 № Пр-271 «Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа» // Президентская инициатива «Наша новая школа». – Режим доступа: http://nasha-novaya-shkola.ru/.

204. Приказ Минобрнауки России от 18.11.2013 № 1252 «Об утверждении Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников» (с изм. от 17.03.2015 № 249, от 17.12.2015 № 1488, от 17.11.2016 № 1435). – Режим доступа: http://base.garant.ru/70575694/.

205. Пуанкаре, А. О науке / А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1983. – 560 с.

206. Рабочая концепция одарённости / отв. ред. Д. Б. Богоявленская; научн. ред. В. Д. Шадриков. – М.: Магистр, 2003. – 95 с.

207. Разумовский, В. Г. ФГОС и изучение физики в школе: о научной грамотности и развитии познавательной и творческой активности школьников / В. Г. Разумовский, В. В. Майер, Е. И. Вараксина. – М.; СПб.: Нестор-История, 2014. – 208 с.

208. Растянников, А. В. Рефлексивное развитие компетентности в совместном творчестве / А. В. Растянников, С. Ю. Степанов, Д. В. Ушаков. – М: ПЕРСЭ, 2002. – 320 с.

209. Ревеш, Г. Раннее проявление одарённости и её узнавание / Г. Ревеш // Что такое одарённость / ред. А. М. Матюшкина, А. А. Матюшкиной. – М.: ЧеРо, 2006. – С. 11.

210. Рекомендации 1248 Совета Европы об образовании одарённых детей (одобрены 7 октября 1994 года Парламентской ассамблеей Совета Европы). – Режим доступа: http://eurotalent-rus.blogspot.ru/2008/02/1248.html.

211. Рензулли, Дж. С. Модель обогащенного школьного обучения: практическая программа стимулирования одарённых детей / Дж. С. Рензулли, С. М. Рис // Современные концепции одарённости и творчества / под ред. Д. Б. Богоявленской. – М.: Молодая гвардия, 1997. – С. 214 – 243.

212. Ридецкая, О. Г. Психология одарённости / О. Г. Ридецкая. – М.: ЕАОИ, 2010. – 374 с.; С. 210 – 211.

213. Розин, В. М. Культурология / В. М. Розин. – М.: Гардарики, 2003. – 462 с.

214. Розов, Н. Х. Мысли о преподавании математики гуманитариям, возникшие при чтении одного учебного пособия // Математика в высшем образовании. – 2012. – № 10. – С. 57 – 66.

215. Российская газета. 22.07.2020. № 159 (8213).

216. Рубинштейн, С. Л. Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер, 2000. – 712 с.

217. Рубинштейн, С. Л. Человек и мир / С. Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер, 2012. – 224 с.

218. Рубцов, В. В. Проектирование развивающей образовательной среды школы / В. В. Рубцов, Т. Г. Ивошина – М., МГППУ. 2002. – 272 с.

219. Руденко, Н. Г. Индивидуально-творческий подход в процессе психолого-педагогической подготовки студентов : автореф. дисс. … канд. пед. наук : 13.00.01 / Николай Григорьевич Руденко. – М., 1991. – 16 с.

220. Рыжаков, М. В. Стандарт принят. Что дальше? / М. В. Рыжаков // География в школе. – 2013. – № 1. – С. 4 – 8.

221. Савенков А.И. Одарённые дети в детском саду и школе: учебное пособие. – М.: Академия, 2000. – 232 с.

222. Садовничий, В. А. О математике и её преподавании в школ / В. А. Садовничий // Сайт «Ассоциация преподавателей математики». – Режим доступа: http://math-congress-2010.msu.ru/sezd2010/ plenary/sadovnichiy.

223. Саймон, Г. Менеджмент в организациях / Г. Саймон, Д. Смитбург, В. Томпсон; общ. ред. и вступ. ст. А. М. Емельянова и В. В. Петрова. – М.: Экономика, 1995. – 335 с.

224. Санина, Е. И. Интерактивные методы и средства обучения математике в средней школе / Е. И. Санина, Т. С. Попова // Ярославский педагогический вестник. – 2016. – № 5. – С. 95 – 99.

225. Саранцев, Г. И. Методика преподавания геометрии в девятилетней школе : учебн. пособие для студентов физико-математ. факультетов пед. ин-тов / Г. И. Саранцев. – Саранск: Мордовского пед. ин-та, 1992. – 130 с.

226. Секей, Л. К проблеме доступности решения задач и магическое тестирование / Л. Секей // Психология мышления : сб. / под ред. А. М. Матюшина. – М.: Прогресс, 1965. – С. 387 – 396.

227. Сергеева, Т. Ф. Актуальные проблемы школьного математического образования / Т. Ф. Сергеева // Математика и математическое образование: материалы международной конференции «Proceedings of the Forty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians Borovetz», Apr il 9 – 12, 2012. – С. 107 – 112.

228. Сергеева, Т. Ф. Word problems in the school mathematics course as a tool for developing students' social competence / Т. Ф. Сергеева // Mathematics and education in mathematics: Proceedings of the Forty Third Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians. – Borovetz, April 2-6, 2014. – P. 217 – 220.

229. Сергеева, Т. Ф. Сетевые исследовательские проекты – модель мотивирующей образовательной среды для школьников и педагогов / Т. Ф. Сергеева // Академия. Педагогический журнал Подмосковья. – 2016. – № 2 (8). – С. 47 – 51.

230. Сергеева, Т. Ф. Основы динамической геометрии / Т. Ф. Сергеева, М. В. Шабанова, С. И. Гроздев. – М.: АСОУ, 2014. – 160 с.

231. Сергеева, Т. Ф. Система работы с одарёнными детьми: теория и практика / Т. Ф. Сергеева, Н. А. Пронина, Е. В. Сечкарева. – Ростов на/Д.: Феникс, 2011. – 286 с.

232. Сергиенко, Е. А. Природа субъекта: онтогенетический аспект / Е. А. Сергиенко // Проблема субъекта в психологической науке / под ред. А. В. Брушлинского, М. И. Воловиковой, В. Н. Дружинина. – М.: Академический проект, 2000. – С. 184 – 203.

233. Середа, И. П. Конкурсные задачи по химии : поступающим в вузы / И. П. Середа. – Киев.: Вища школа», 1982. – 232 с.

234. Сериков, Г. Н. Образование: аспекты системного отражения / Г. Н. Сериков. – Курган: Зауралье», 1997. – 464 с.

235. Симонов В.П. Оценка качества в образовании / В. П. Симонов. – М., 2007. – 128 с.

236. Система работы с одарёнными учащимися в США. – Режим доступа: http://usedu.ru/news/65-s-odarennymi-uchaschimisya-v-usa.html.

237. Сластенин, В. А. Индивидуально-творческий подход в подготовке преподавателей педагогики и психологии / В. А. Сластенин, В. В. Грачев // Формирование личности учителя советской школы: Межвузовский сборник научных трудов. – М.: Прометей, 1991. – С. 11 – 14.

238. Слободецкий, И. Ш. Всесоюзные олимпиады по физике / И. Ш. Слободецкий, В. А. Орлов. – М.: Просвещение, 1982. – 256 с.

239. Слободчиков, В. И. Основы психологической антропологии. Психология человека: Введение в психологию субъективности / В. И. Слободчиков, Е. И. Исаев. – М.: Школа-Пресс, 1995. – 384 с.

240. Слободчиков, В. И. Антропологический смысл кризисов перехода в развитии и образовании / В. И. Слободчиков // Психология обучения. – 2008. – № 1. – С. 4 – 25.

241. Смирнов, В. А. О новой концепции обучения геометрии в школе / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова // Математика. – 2015. – № 7 (765).

242. Смирнов, Е. И. Наглядное моделирование единства математики в задачах / Е. И. Смирнов, В. С. Абатурова, С. В. Сергеев // Теория и практика общественного развития. – 2014. – № 7. – С. 47 – 50.

243. Степин, В. С. Наука, образование и проблемы новой модернизации / В. С. Степин // Социология. – 2012. – № 2. – С. 54 – 59.

244. Стернберг, Р. Дж. Триархическая теория интеллекта / Р. Д. Стернберг // Иностранная психология. – 1996. – № 6. – С. 54 – 61.

245. Столяр, А. А. Педагогика математики / А. А. Столяр. – Мн.: Высш. шк.», 1986. – 414 с.

246. Стэнфордский тест достижений (Stanford achievement test) // Анастази А. Дифференциальная психология. Индивидуальные и групповые различия в поведении. – М.: Апрель Пресс, ЭКСМО-Пресс, 2001. – 752 с.

247. Субетто, А. И. Ноосферно-научные и духовно-нравственные основания выживания человечества в XXI веке : научный доклад на V Всемирный Научный Конгресс) / А. И. Субетто. – СПб.: Астерион, 2013. – 20 с.

248. Талызина, Н. Ф. Теория поэтапного формирования умственных действий / Н. Ф. Талызина // Народное образование. – 1977. – № 7.– С. 34 – 42.

249. Талызина, Н. Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся / Н. Ф. Талызина. – М.: Знание, 1983. – 96 с.

250. Тарасова, О. В. Математическая подготовка будущего учителя начальной школы в вузе : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Тарасова Оксана Викторовна. – Орел, 1997. – 18 с.

251. Тартаковский Владимир Абрамович // Сайт «Музей истории Университета ИТМО». – Режим доступа: http://museum.ifmo.ru/person/79/.

252. Татенко, В. О. Субъект психической активности: поиск новой парадигмы / В. О. Татенко // Психологический журнал. – 1995. – Т. 16. – № 3. – С. 23 – 34.

253. Тейлор, К. Интеллект: проблемы одарённости / К. Тейлор. – М.: Наука, 1976. – 148 с.

254. Теоретические основы содержания общего среднего образования / под ред. В.В. Краевского, И.Я. Лернера. – М.: Владос, 2003. – 350 с.

255. Теплов, Б. М. Способности и одарённость / Б. М. Теплов // Теплов Б. М. Проблемы индивидуальных различий. – М.: Академии педагогических наук РСФСР, 1961. – 536 с.; С. 9 – 20.

256. Тихомиров, В. М. О некоторых проблемах математического образования / В. М. Тихомиров // Всероссийская конференция «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков» (Дубна, сентябрь 2000). – М.: МЦНМО, 2000. – С. 3 – 15.

257. Тоноян, Г. А. В помощь подготовителям школьных математических олимпиад / Г. А. Тоноян, Г. А. Карагебакян, Г. Г. Джрбашян. – Ереван: Луйс, 1991. – 235 с.

258. Торндайк, Э. Процесс учения у человека / Э. Торндайк. – М.: Учпедгиз, 1935. – 160 с.

259. Требования к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016/2017 учебном году (для организаторов и членов жюри) (утв. на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (Протокол № 7 от 10 ноября 2016 г.) // Официальный сайт «Всероссийская олимпиада школьников». – Режим доступа: http://www.rosolymp.ru/attachments/10645_12%20Mathematics%20Recommendations%20SHE_2016-2017.pdf.

260. Туник, Е. Тест интеллекта Слоссона / Е. Туник, Ю. Жихарева. – СПб.: Типография СПб академии постдипломного пед. образования, 2009. – 76 с.

261. Указ Президента Республики Адыгея «О создании Республиканской физико-математической школы при Адыгейском государственном университете : утв. 04.02.1998 № 16; в ред. Указа Президента РА от 28.07.1999 № 136. – Режим доступа: http://www.lawsrf.ru/region /documents/2505545/.

262. Указ Президента Российской Федерации от 21.07.2020 № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года» - режим доступа: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202007210012

263. Улыбина, Е. В. Психология обыденного сознания / Е. В. Улыбина. – М.: Смысл, 2001. – 263 с.

264. Усова, А. В. Проблемы теории и практики обучения в современной школе / А. В. Усова. – Челябинск.: ЧГПУ, 2000. – 221 с.

265. Ушаков, Д. В. Психология интеллекта и одарённости / Д. В. Ушакова. – М.: Институт психологии РАН», 2011. – 464 с.

266. Федеральный закон Российской Федерации «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 № 273-ФЗ // Российская газета. – 31.12.2012. – № 5976.

267. Фельдштейн, Д. И. Глубинные изменения детства и актуализация психолого-педагогических проблем развития образования / Д. И. Фельдштейн. – СПб.: СПбГУП, 2011. – 36 с.

268. Фихтенгольц Григорий Михайлович // Сайт «math.ru». – Режим доступа: http://www.math.ru/history/ /Fikhtengolz.

269. Фомин, Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады / Д. В. Фомин. – СПб.: Политехника, 1994. – 309 с:

270. Фройденталь, Г. Математика как педагогическая задача: в 2-х т. / Г. Фройденталь. – М.: Просвещение, 1983. – Т. 2. – 191 с.

271. Хинчин, А. Я. Педагогические статьи: Вопросы преподавания математики. Борьба с методическими штампами / А. Я. Хинчин. – М.: КомКнига, 2013. – 208 с.

272. Холодная, М. А. Когнитивные стили. О природе индивидуального ума / М. А. Холодная. – СПб.: Питер, 2002. – 430 с.

273. Холодная, М. А. Развивающие учебные тексты как средство интеллектуального воспитания учащихся / М. А. Холодная, Э. Г. Гельфман. – М.: Ин-т психологии РАН, 2016. – 200 с.

274. Черкасов, В. А. Оптимизация методов и приемов обучения в общеобразовательной средней школе / В. А. Черкасов. – Иркутск: Иркут. ун-т, 1985. – 200 с.

275. Чуприкова, Н. И. Умственное развитие: Принцип дифференциации / Н. И. Чуприкова. – СПб.: Питер, 2006. – 448 с.

276. Шадриков, В. Д. Деятельность и способности / В. Д. Шадриков. – М.: Логос, 1994. – 315 с.

277. Шадрин, В. Ю. Развитие математической одаренности подростка в процессе дополнительного образования : дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Шадрин Владимир Юрьевич. – Оренбург, 2015. – 222 с.

278. Шамова, Т. И. Управление образовательными системами / Т. И. Шамова, П. И. Третьяков, Н. П. Капустин; под ред. Т. И. Шамовой. – М.: Владос, 2002. – 320 с.

279. Шварцбурд, С. И. О развитии интереса, склонностей и способностей учащихся математике / С. И. Шварцбурд // Математика в школе. – 1984. – № 6. – С. 32 – 37.

280. Шклярский, Д. О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 1 Арифметика и алгебра / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. – М.: Наука, Физматлит, 1976. – 384 с.

281. Шумакова, Н. Б. Развитие общей одарённости детей в условиях школьного обучения : автореф. дисс. … д-ра психолог. наук : 19.00.13 / Шумакова Наталья Борисовна. – М., 2006. – 50 с.

282. Щербатых, С. В. Исследовательское обучение как основа формирования универсальных учебных действий у учащихся в школьном курсе математики / С. В. Щербатых, Е. М. Натырова // Вестник Брянского государственного университета. – 2015. – № 2. – С. 104 – 106.

283. Щукина, Г. И. Роль деятельности в учебном процессе / Г. И. Щукина. – М.: Просвещение, 1986. – 144 с.

284. Эльконин, Б. Д. Действие как единица развития / Б. Д. Эльконин // Вопросы психологии. – 2004. – № 1. – С. 35 – 49.

285. Эльконин, Б. Д. Я – экстремист деятельностного подхода! / Б. Д. Эльконин // Школьный психолог. – 2001. – № 14. – Режим доступа: http://psy.1september.ru/article.php?ID=200101414.

286. Юркевич, В. С. Одарённый ребёнок: иллюзии и реальность / В. С. Юркевич. – М.: Просвещение, 1996. – 136 с.

287. Якиманская, И. С. Личностно ориентированное обучение в современной школе / И. С. Якиманская. – М.: Сентябрь, 2002. – 96 с.

288. Яковлев, Г. Н. О концепции математического образования в средней профессиональной школе / Г. Н. Яковлев // Всероссийская конференция «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков» (Дубна, сентябрь 2000). – М.: МЦНМО, 2000. – С. 324.

289. Ясвин, В. А. Педагогический мажор дополнительного образования. Системная модернизация и инновационное проектирование / В. А. Ясвин. – М.: ФИРО, 2014. – 213 с.

290. Albon, R. Gifted university students: Last chance to ‘come out of the closet’ [Electronic resource] / R. Albon, T. Jewels // 10th Asia-Pacific Conference on Giftedness, Singapore, 2008. – Available online: http://works.bepress.com/cgi/viewcontent.cgi?article=1000&context=rozz_albon.

291. America 2000: An Education Strategy. – Wash. D.C., 1991.

292. Assmus, D. Characteristics of mathematical giftedness in early primary school age (To appear in the Proceedings of ICME13) / D. Assmus. – Hamburg, Germany, 2016.

293. Binet, A. The Development of Intelligence in Children / A. Binet, T. Simon. – Baltimore: Williams & Wilkins, 1916.

294. Bicknell, B. Who are the mathematically gifted? Student, parent, and teacher perspectives / B. Bicknell // Proceedings of ICME11. – TG6: Activities and Programs for Gifted Students, 2008.

295. Bloom, F. E. Brain, Mind and Behavior / F. E. Bloom, A. Lazerson, L. Hofstadter. – New York: W.H. Freeman and Company, 1985. – 248 p.

296. Boaler, J. Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching / J. Boaler. – San Francisco, CA: Jossey-Bass, 2015.

297. Brandl, M. A comparative profile of high attaining and gifted students in mathematics / M. Brandl, C. Barthe // ICME-12 Pre-proceedings. – 2012. – P. 1429 – 1438.

298. Budak, I. Mathematical profiles and problem solving abilities of mathematically promising students / I. Budak // Educational Research and Reviews/ – 2012. – № 7 (16). – P. 344 – 350.

299. Casey, R. 2012. Gifted and Talented Education: The English Policy Highway at a Crossroads? / R. Casey, V. Koshy, Brunel University. – Available online: http://bura.brunel.ac.uk/bitstream/2438/8266/2 /Fulltext.pdf.

300. Centres de FIDJIP – EUROTALENT. – Available online: http://fidjip-centres.blogspot.ru/.

301. Chandler, A. Strategy and Structure: chapters in the history of the industrial enterprise, 19th edition, 1995.

302. Chandler, A. D. Strategy and Structure: Chapters in the History of the American Industrial Enterprise / A. D. Chandler. – Cambridge, MA: MIT Press, 1962/1998.

303. Chapin, S. H. Classroom discussions: Using math talk to help students learn / S. H. Chapin, C. O'Connor, N. C. Anderson. – Sausalito, CA: Math Solutions. 2009.

304. Clark, B. Qrowinq up qifled: Developinq the Potential of Children af Nome and af School / B. Clark. – N.V., 1992. – 120 p.

305. Department of education (DE). 2009. National Academy for Gifted and Talented Youth (NAGTY). – Available online: https://www.gov.uk /government/publications/national-academy-for-gifted-and-talented-youth-evaluation.

306. Department for children, school and families (DCSF). 2008. Identifying gifted and talented learners – getting started. – Available online: http://webarchive.nationalarchives.gov.uk/20130401151715/http://www.education.gov. uk/publications/eOrderingDownload/Getting%20StartedWR.pdf.

307. Diezmann, C. M. (2000). Characteristics of young gifted children / C. M. Diezmann, J. J. Watters // Educating Young Children. – 2000. – № 6 (2). – P. 41 – 42.

308. DGhK. 2015. Die Deutsche Gesellschaft für das hochbegabte Kind. – Available online: www.dghk.de/wir-ueber-uns.

309. Education Commission Report № 4 // Education Commission: Hong Kong, China, 1990.

310. Eyre, D. The English Model of Gifted Education / D. Eyre // Shavinina, L. The International Handbook on Giftedness. – Amsterdam: Springer Science & Business Media, 2009. – P. 145 – 161.

311. Feldhusen, J. F. Creative Thinking and Problem Solving in Gifted Education / J. F. Feldhusen, D. J. Treffinger. – Dubuque, Iowa: Kendall-Hunt, 1980.

312. Feldhusen, J. F. Super Saturday: design and implementation of Purdue's special program for gifted children / J. F. Feldhusen, A. R. Wyman // Gifted Children – Quarterly. – 1980. – 24(1). – P. 15 – 21.

313. Fisher, C. et al. 2005. Country specific information – Germany / C. Fisher // Monks F.J., Pfluger R. (ed.) Gifted Education in 21 European Countries: Inventory and Perspective // Radboud University Nijmengen. – Available online: https://www.bmbf.de/pub/gifted_education_21_eu_countries.pdf.

314. Freehill, M. Gifted children / M. Freehill. – New York: MacMillan, 1961.

315. GE Provision in Hong Kong; Hong Kong Academy for Gifted Education: Hong Kong, China, 2008. – Available online: http://hkage.org.hk/en/background.html.

316. Gifted Education in Singapore: The First Ten Years. – Singapore Ministry of Education: Singapore, 1994.

317. Gross, M. U. M. Exceptionally gifted children (2nd ed.) / M. U. M. Gross. – London: Routledge, 2003.

318. Gruber, H. E. The self constmction of the extraordinary / H. E. Gruber // Stemberg R. et al. Conceptions of giftedness. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. – P. 247 – 263.

319. Hamza, M. Retardation in mathematics amongst grammar-school pupils / M. Hamza // British journal of educational psychology. – 1952. – Vol. XXII. – P. 3.

320. Hamza, M. A study of certain aspects of retardation in mathematics amongst secondary grammar-school pupils by factorial and individual methods untublished / M. Hamza. – Leeds University, 1951.

321. Heller, K. Begabt sein in Deutschland / K. Heller, A. Ziegler. – Berlin: LIT, 2007.

322. Henry, J. Ministers pull the plug on gifted and talented academy / J. Henry // The Telegraph. – Available online: www.telegraph.co.uk/education /educationnews/7062061/Ministers-pull-the-plug-on-gifted-and-talented-academy.html.

323. Hildreth, G. Three gifted children: a developmental study / G. Hildreth / Journal of Genetic Psychology. – 1954. – December. – P. 239 – 262.

324. .Hollingworth, L. S. Children Who Tested Above 180 IQ Stanford-Bind / L. S. Hollingworth. – New York: World Book Co, 1942.

325. Irvine, S. H. The abilities of mankind: A revaluation / S. H. Irvine, J. W. Berry // Irvine S. H., Berry J. W. Human abilities in cultural context. – Cambridge Univ. Press, 1988. – P. 3–59.

326. Käpnick, F. Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter / F. Käpnick. – Frankfurt am Main, 1998.

327. Lim Shan-Loong, M. The gifted education programme in Singapore / M. Lim Shan-Loong. – Ngee Ann Polytechnic: Singapore, 2001.

328. Monks, F. Gifted education in 21 European Countries: Inventory and perspective / F. Monks, R. Pfluger. – Nijmegen: Radboud University, 2005. – 174 p.

329. Muray, J. 2010. Farewell to the gifted and talented scheme / J. Muray // The Guardian. – Available online: http://www.theguardian.com /education/2010/feb/02/gifted-talented-scrapped-funds-redirected.

330. National Academy for Gifted and Talented Youth (NAGTY). – Available online: www.nagty.ac.uk.

331. Nolte, M. Mathematically gifted young children – Questions about the development of mathematical giftedness / M. Nolte // Stöger H., Aljughaiman A., Harder B. Talent development and excellence Berlin, London: Lit Verlag, 2012. – P. 155 – 176.

332. Nolte, M. Twice exceptional children: Mathematically gifted children in primary schools with special needs / M. Nolte // CERME 8 Proceedings. – Ankara: Middle East Technical Univ, 2013.

333. Nordheimer, S. Students with hearing impairment: Challenges facing the identification of mathematical giftedness / S. Nordheimer, M. Brandl // Krainer K., Vondrová N. CERME 9 Proceedings. – Prague, Czech Republic: Charles University and ERME, 2016. – P. 1032 – 1038.

334. Official website of World Council for Gifted and talented children. – Available online: https://www.world-gifted.org/.

335. Official website of Eurotalent. – Available online: http://www.eurotalent.org/en/.

336. Olszewski-Kubilius, P. Setting the record straight on ability grouping / P. Olszewski-Kubilius // Education Week. – Retrieved January 24, 2016. – Available online: http://www.edweek.org/tm /articles/2013/05/20.

337. Oswald, F. at al. 2005. Country specific information – Austria / F. Oswald // Monks F.J., Pfluger R. (ed.) Gifted Education in 21 European Countries: Inventory and Perspective // Radboud University Nijmengen. – Available online: www.bmbf.de/pub/gifted_education_21_eu_countries.pdf.

338. Öystein, H. P. What characterizes high achieving students´ mathematical reasoning? / H. P. Öystein // Sriraman B., Lee K. H. The elements of creativity and giftedness in mathematics. – Rotterdam: Sense, 2011. – P. 193 – 216.

339. Persson, R. S. Gifted Education in Europe: Programs, Practices and Current Research / R. S. Persson, H. Joswig, L. Balogh // Heller K. A. et al. International Handbook of Giftedness and Talent. – Oxford: Elsevier, 2000.

340. Printer, C. P. Characteristics of students' mathematical promise when engaging with problem-based learning units in primary classrooms / C. P. Printer, T. R. Moon, C. M. Brighton // Journal of Advanced Academics. – 2015. – № 26 (1). – P. 24 – 58.

341. Renzulli, J. S. The three ring conception of giftedness: A developmental model for creative productivit / J. S. Renzulli // Sternberg R. J., Davidson J. E. Conceptions of giftedness. – New York: Cambridge University Press, 1986. – P. 53 – 92.

342. Roe, A. The making of a scientist / A. Roe. – New York: Dodd, Mead, 1952.

343. Singer, F. M. Beyond conceptual change: Using representations to integrate domain-specific structural models in learning mathematics / F. M. Singer // Mind, Brain, and Education. – 2007. – № 1 (2).

344. Singer, F. M. The Dynamic infrastructure of mind – A hypothesis and some of its applications / F. M. Singer. – New Ideas in Psychology. – 2009. – № 27 (1). – P. 48 – 74.

345. Singer, F. M. Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions / F. M. Singer, N. Ellerton, J. Cai // Educational Studies in Mathematics.– 2013.– № 83 (1). – P. 1 – 7.

346. Singer, F. M. Mathematical problem posing: From research to effective practice / F. M. Singer, N. Ellerton, J. Cai. – New York: Springer, 2015.

347. Singer, F. M. Curriculum reframed: MI and new routes to teaching and learning in Romanian universities / F. M. Singer, L. Sarivan // Chen J. Q., Moran S., Gardner H. Multiple intelligences around the world. – New York: Wiley, 2009. – P. 230 – 244.

348. Singer, M. Research On and Activities For Mathematically Gifted Students / F. M. Singer, L. J. Sheffield, V. Freiman, M. Brandl. – Hamburg: Spring Open, 2016. – 48 p.

349. Singer, F. M. Masterprof: A program to educate Teachers for the Knowledge Society / F. M. Singer, L. Sarivan // Singer F. M., Sarivan L. Procedia-Social and Behavioral Sciences. – 2011. – № 11. – P. 7 – 11.

350. Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms / B. Sriraman // Journal of Secondary Gifted Education. – 2005. – № 17 (1). – P. 20 – 36.

351. Stanley, J. C. Boys and girls who reason well mathematically / J. C. Stanley // The origin and development of high ability / Ed. by G.R. Bock, K. Ackrill. – Chichester: John Wiley and sons, 1993. – P. 119 – 138.

352. Stepanak, J. Meeting the needs of gifted students: Differentiating mathematics and science instruction / J. Stepanak. – USA: Northwest Regional Educational LaboratoryThe differentiation toolboxKUDs, 2009. – Available online: http://people.virginia.edu/~mws6u/diff/index.htm.

353. Taylor, C. W. Cultirating multiple creative talents in students / C. W. Taylor // Journal for the Education of the Giften. – 1985. – Vol. 8. – P. 187 – 198.

354. Tannenbaum, A. J. Gifted children: Psychological and Educational perspectives / A. J. Tannenbaum. – New York: MacMillan, 1983.

355. Tannenbaum, A. J. Giftedness: a psychosocial approach / A. J. Tannenbaum // In: R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds), Conceptions of Giftedness. – New York: Cambridge University Press, 1986. – PP. 21 – 52.

356. Terman, L. M. The Measurement of Intelligence / L. M. Terman. – New York, Boston: Arno Press, 1975. – 362 p.

357. Usiskin, Z. The development into the mathematically talented / Z. Usiskin // The Journal of Secondary Gifted Education. – 2000. – № 11. – P. 152 – 162.

358. Vilkomir, T. Using components of mathematical ability for initial development and identification of mathematically promising students / T. Vilkomir,

J. O’Donoghue // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 2009. – № 40 (2). – P. 183 – 199.

359. Wang, Z. The Execution of Gifted Education in Taiwan / Z. Wang. – Taiwan Education University: Taipei, Taiwan, 2008.

360. Wechsler, D. Manual for the Wechsler Adult Intelligence Scale / D. Wechsler. – New York: Psychol. Corp., 1955.

361. Weilguny, M. W., 2013. White Paper promoting talent and excellence / M. W. Weilguny, C. Resch, E. Samhaber, B. Hartel. – Available online: www.oezbf.at/cms/tl_files/Publikationen/Veroeffentlichungen /weissbuch_E_fertig_interaktiv.pdf.

362. Werdelin, I. The mathematical ability: Experimental and factorial studies / I. Werdelin. – Sweden: Lund: C. W. K. Gleerup, 1958.

363. Winkler, S. Process-based analysis of mathematically gifted pupils in a regular class at primary school / S. Winkler, M. Brandl // Krainer K., Vondrová N. Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4 – 8 February 2015). – Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Ed. and ERME, 2016. – P. 1101 – 1102.

364. Witty, P. A genetic study of fifty gifted children / P. Witty // 39th Yearb., Nat. Soc. Stud. Educ. – 1940. – Part II. – P. 401 – 409.

365. Yeo, P. Singapore’s experience – Economic development with science and technology / P. Yeo // Presented at Okinawa Institute of Science and Technology. – Okinawa, Japan, October 2010.

366. Youth outreach: Wards and scholarships, A Star, 2011. Agency for Science, Technology and Research Web site. – Available online: http://www.a-star.edu.sg/AwardsScholarships/YouthOutreach/ResourcesActivities /tabid/162/Default.aspx.

367. Ziegler, A. Gifted Education in German-Speaking Europe / A. Ziegler, H. Stoeger, B. Harder, D. P. Balestrini // Journal for the Education of the Gifted. – 2013. – Vol. 36. – № 3. – P. 384.