*На правах рукописи*

**АГАХАНОВ Назар Хангельдыевич**

# НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАБОТЫ С МАТЕМАТИЧЕСКИ ОДАРЁННЫМИ ДЕТЬМИ В МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ ПРЕДМЕТНЫХ ОЛИМПИАД И КОНКУРСОВ

5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания
(математика, уровень общего образования)

**АВТОРЕФЕРАТ**
диссертации на соискание учёной степени
доктора педагогических наук

Елец – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»

**Научный консультант:** доктор педагогических наук, профессор
**Щербатых Сергей Викторович**

**Официальные оппоненты:**

**Далингер Виктор Алексеевич**
доктор педагогических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет», профессор кафедры математики и методики обучения математики

**Деза Елена Ивановна**
доктор педагогических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики

**Шабанова Мария Валерьевна**
доктор педагогических наук, профессор
ГАОУ ДПО г. Москвы «Московский центр качества образования», заместитель начальника отдела методического обеспечения процедур оценки качества общего образования

**Ведущая организация:** ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Защита диссертации состоится «23» марта 2023 г. в 10.00 часов на заседании объединенного диссертационного совета 99.2.084.02 по защите докторских и кандидатских диссертаций, созданного на базе ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина», по адресу: 399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, ауд. № 301.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале научной библиотеки Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина по адресу: 399740, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28 и на сайте https://elsu.ru/dissovet2022/ods99208402/defence/321

Автореферат разослан «____» февраля 2023 года

Учёный секретарь
диссертационного совета С.В. Щербатых

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

**Актуальность исследования**. На протяжении последней четверти века система образования в России переживает интенсивные преобразования, направленные на утверждении гуманистических, личностно ориентированных принципов обучения, позволяющих максимально раскрыться индивидуальным качествам учащихся. Одной из важнейших задач при этом является обеспечение условий для работы с одарёнными учащимися, обладающими высоким уровнем развития способностей в разных сферах человеческой деятельности. Постепенно в общественном сознании формируется понимание того, что переход в век наукоемких технологий невозможен без сохранения и приумножения интеллектуального и кадрового потенциала страны.

Создание условий для раннего выявления, обучения и поддержки одарённых детей и подростков рассматривается как значимая государственная проблема, решение которой обеспечивает формирование интеллектуального и творческого потенциала нации и повышает её конкурентоспособность. На государственном уровне это означает:

– нормативное выделение одарённых детей в особую категорию учащихся и создание условий всестороннего развития их творческого потенциала;

– актуализация проблемы «одарённости» в общественном сознании;

– акцентирование внимания на предметных областях обучения, в которых в наибольшей степени проявляются способности детей;

– учет социальных и психологических аспектов в работе с одарёнными детьми при реализации образовательных инициатив и др.

К настоящему времени в России уже немало сделано в области развития одарённости: созданы специальные образовательные учреждения, общественные организации и фонды, задачами которых выступают выявление, обучение и развитие способностей одарённых детей, разработаны соответствующие учебные и социальные программы. Растет интерес к изучению психологических закономерностей и механизмов развития одарённости, все шире проводятся практические исследования по выявлению и обучению одарённых детей, результаты которых находят своё отражение в образовательном процессе. Среди нормативно-правовых документов, регулирующих работу с одарёнными детьми, особое значение имеют:

– Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа» (утв. приказом Президента РФ от 4.02.2010 № Пр-271);

– Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов (утв. Президентом РФ 03.04.2012 № Пр-827);

– Положение «О Национальном координационном совете по поддержке молодых талантов России» (утв. постановлением Правительства РФ от 10.09.2012 № 897 (ред. от 24.06.2017));

– Постановление Правительства РФ от 17.11.2015 № 1239 «Об утверждении Правил выявления детей, проявивших выдающиеся способности, и сопровождения их дальнейшего развития»;

– Указ Президента Российской Федерации от 21.07.2020 № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года».

В последнем документе вторую позицию занимает национальная цель «Возможности для самореализации и развития талантов», которая декларирует «формирование эффективной системы выявления, поддержки и развития способностей и талантов у детей и молодёжи, основанной на принципах справедливости, всеобщности и направленной на самоопределение и профессиональную ориентацию всех обучающихся…». При этом следует отметить, что в новом Федеральном законе «Об образовании в Российской Федерации» термин «одарённые дети» не использован. Данная категория обучающихся обозначена как «лица, проявившие выдающиеся способности, а также лица, добившиеся успехов в учебной деятельности, научной (научно-исследовательской) деятельности, творческой деятельности и физкультурно-спортивной деятельности» (гл. 11, ст. 77).

В Концепции общенациональной системы выявления и развития молодых талантов, утвержденной 3 апреля 2012 года, были определены базовые принципы построения и основные задачи общенациональной системы выявления и развития молодых талантов, а также основные направления её функционирования.

В ней, в частности, отмечается, что сегодня в России широко применяются зарекомендовавшие себя формы работы с одарёнными детьми и молодёжью – это специализированные школы для детей, проявивших выдающиеся способности; центры дополнительного образования и технического творчества; проводятся интеллектуальные, творческие и спортивные состязания; расширяется сотрудничество школ с университетами, учреждениями культуры, науки и спорта; организуются летние и зимние школы для учащихся по разным отраслям знаний, заочные и вечерние школы при вузах; осуществляются исследовательские проекты и научные экспедиции. Всё это в совокупности способствует формированию среды для проявления и развития одарённости.

Ежегодно в стране проводится всероссийская олимпиада школьников (далее ВсОШ) по математике, в которой участвует около 2 миллионов учащихся 4-11 классов. В Приказе Министерства просвещения РФ от 27 ноября 2020 года № 678, утвердившем Порядок проведения олимпиады, записано, что «Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности, в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам».

Десятки тысяч школьников участвуют в предметных олимпиадах, которые проводятся Российским советом олимпиад школьников (далее – РСОШ), формируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Приказ Минобрнауки России от 04.04.2014 № 267 «Об утверждении Порядка проведения олимпиад школьников»). В Приказе записано, что «олимпиады проводятся в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской), инженерно-технической, изобретательской деятельности, пропаганды научных знаний, содействия профессиональной ориентации школьников». При этом «экспертное и аналитическое сопровождение организации и проведения олимпиад осуществляет Российский совет олимпиад школьников».

Предметные олимпиады и конкурсы носят многоуровневый характер. Так, при проведении олимпиады РСОШ от степени диплома (победитель или призер) зависит льгота, которую может получить участник олимпиады при поступлении в вуз. Абитуриент, успешно выступивший на олимпиаде, получает такую льготу в случае, если экспертным советом утверждается уровень олимпиады: первый, второй или третий. Статус олимпиады РСОШ определяется ежегодно с учетом «стажа» олимпиады, уровня её организационного и методического сопровождения, доступности информации об олимпиаде, количества и широты географии её участников, но, главное, уровня творческого содержания заданий.

Математические олимпиады являются наиболее распространённой и отработанной формой отбора математически одарённых детей. В олимпиадах по математике главную роль играют не сумма конкретных знаний молодого человека, а его способность за конечное время олимпиады построить и исследовать достаточно сложную модель или логическую конструкцию, с которыми он прежде не сталкивался.

Анализ литературных источников и изучение образовательной практики выявили, что проблемы работы с математически одарёнными детьми стали предметом исследования широкого круга ученых. Вопросам развития математического образования посвящены труды ученых-математиков А.Д. Александрова, П.С. Александрова, И.К. Андронова, И.М. Виноградова, В.С. Владимирова, И.М. Гельфанда, Б.В. Гнеденко, Б.Н. Делоне, А.Н. Колмогорова, Л.Д. Кудрявцева, А.И. Маркушевича, С.М. Никольского, А.В. Погорелова, Д. Пойа, В.А. Садовничего, А.Н. Тихонова, Г. Фройденталя, А.Я. Хинчина, Г.Н. Яковлева и др.; методика обучения математике стала предметом исследования В.А. Гусева, В.А. Далингера, С.Н. Дворяткиной, Г.В. Дорофеева, Г.С. Евдокимовой, А.Н. Колмогорова, Ю.М. Колягина, Г.Л. Луканкина, А.Г. Мордковича, Д. Пойа, Н.Х. Розова, Е.И. Саниной, Г.И. Саранцева, Т.Ф. Сергеевой, В.А. Смирнова, И.М. Смирновой, А.А. Столяра, О.В. Тарасовой, М.В. Шабановой, С.В. Щербатых и др.

Современные концепции и модели развития одарённости представлены в работах зарубежных (Г. Гарднер, Б. Кларк, Дж. Рензулли, Дж. Стенли, Р. Стернберг, А. Танненбаум, К. Тейлор, Дж. Фельдхьюсен и др.) и отечественных (Ю.Д. Бабаева, Д.Б. Богоявленская, В.Н. Дружинин, Н.С. Лейтес, А.М. Матюшкин, В.И. Панов, Т.Ф. Сергеева, В.Д. Ушаков, М.А. Холодная, В.Д. Шадриков, Н.Б. Шумакова, В.С. Юркевич и др.) ученых.

Теоретическому осмыслению олимпиадного движения (определению целей, задач, структуры и содержания математических олимпиад и др.) способствовали исследования таких ученых и педагогов, как П.С. Александров, Г.И. Глейзер, А.Н. Колмогоров, Л.А. Люстерник, А.И. Маркушевич, И.С. Петраков, Д. Пойа, С.Л. Соболев, В.А. Тартаковский, Г.А. Тоноян, Г.М. Фихтенгольц, С.И. Шварцбурд, Л.Г. Шнирельман и др., вопросы содержания, методического обеспечения олимпиад школьников раскрываются в трудах С.Д. Абдурахманова, Т.П. Адамович, А.Л. Брудно, П. Будруджака, Г.И. Васильевой, И. Вендти, С.У. Гончаренко, В. Горшковского, П.Л. Капицы, Л.И. Каплана, З. Квапневского, М.О. Кицай, С.М. Козела, Л.Г. Корнеевой, К.К. Кудава, М.А. Лаврентьева, В.И. Лукашика, Р.И. Малафеева, М.С. Маскиной, В.А. Орлова, И.С. Петракова, П.Н. Протасова, В.Г. Разумовского, А.П. Савина, И.П. Середы, Л. Силверберга, И.Ш. Слободецкого, Г.А. Тонояна, А.Л. Toома, В.Ю. Шадрина, Т. Шаршаневича и др.

Можно утверждать, что существуют определённые теоретические и практические предпосылки для решения проблемы создания системы работы с математически одарёнными детьми, которая бы обеспечивала развитие их способностей. При этом следует отметить, в настоящее время имеется ряд противоречий, связанных с развитием математически одарённых детей в отечественной системе образования:

– между объективной потребностью в создании системы выявления, отбора и сопровождения развития математически одарённых детей и недостаточной разработанностью теоретически обоснованных её компонентов в контексте современной образовательной парадигмы и с учетом достижений психолого-педагогических исследований;

– между существующим опытом проведения предметных олимпиад и конкурсов по математике, ориентированным преимущественно на выявление математически одарённых детей, и необходимостью формирования многоуровневой системы их отбора, последующего сопровождения и развития;

– между сложившимся профессионально-субъективным подходом к научно-методическому обеспечению олимпиад и конкурсов по математике и необходимостью его научно-обоснованной разработки и масштабирования для системы образования в целях предоставления равных условий и возможностей для выявления и дальнейшего развития математически одаренных детей независимо от места проживания и получения образования.

Эти противоречия обусловили **проблему** диссертационного исследования: каковы теоретико-методологические основы и организационно-методическое обеспечение деятельности по выявлению, отбору и развитию математически одарённых детей в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов?

Обозначенная проблема определила выбор **темы** диссертационного исследования: *«Научно-методическое обеспечение работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов»*.

**Объектом исследования являются** процесс и система образования математически одарённых детей.

**Предмет исследования** – организация работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

**Цель исследования** состоит в разработке методологических, концептуальных, организационно-методических основ организации работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов и экспериментальной проверке их эффективности.

В качестве **гипотезы исследования** выдвинуто предположение о том, что организация работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов будет результативной, если:

– методологической основой её проектирования будут системный, личностно ориентированный, полисубъектный, деятельностный и средовой подходы, в совокупности определяющие целевой, содержательный и организационный аспекты деятельности по выявлению и развитию математически одарённых детей;

– её концептуальное обоснование базируется на принципах: самоактуализации, индивидуальности, субъектности, выбора, творчества и успеха, доверия и поддержки;

– её реализация предусматривает создание мотивирующей образовательной среды, обеспечивающей интеллектуальное, коммуникативное, кооперативное и личностное развитие математически одарённых учащихся;

– содержание образования ориентировано на обучение математической деятельности с учетом типологии математических способностей и включает: освоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей, что позволяет охватить основные компоненты математической деятельности;

– организация образования математически одарённых детей предполагает использование различных форм обучения адекватно их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям.

**Задачи исследования:**

1. Определить основные тенденции развития математически одарённых детей в контексте современных концепций одарённости на основе анализа российского и международного научно-педагогического опыта.

2. Определить методологические основы организации работы с одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

3. Разработать концепцию работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

4. Описать реализацию системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад посредством создания мотивирующей образовательной среды.

5. Определить содержание образования математически одарённых учащихся и методику его освоения, обеспечивающее обучение математической деятельности с учётом типологии математических способностей.

6. Систематизировать формы образования математически одарённых детей, адекватные их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям.

7. Осуществить педагогический эксперимент по проверке гипотезы исследования в условиях различных моделей региональных образовательных систем по работе с математически одарёнными детьми.

**Методологической базой** для проведения исследования послужили:

– общенаучный принцип системности, принципы единства и развития мира;

– положения философского конструктивизма и синергетики о самодостаточности субъекта и обусловленности его активности в сложноорганизованных системах;

– идеи соотношения индивидуального и коллективного субъекта;

– идея понимания человека как целеустремлённой, свободной и развивающейся личности;

– идеи системного подхода (В.Г. Афанасьев, Ю.К. Бабанский, К.Л. фон Берталанфи, В.П. Беспалько, А.А. Богданов, П. Друкер, Т.А. Ильина, Ф.Ф. Королев, Л.М. Панчешникова, Г. Саймон, Г.Н. Сериков, А.В. Усова, А. Чандлер, В.А. Черкасов и др.);

– идеи и принципы личностно ориентированного подхода (Л.И. Божович, Е.В. Бондаревская, Л.С. Выготский, А.В. Кирьякова, И.С. Кон, А.Н. Леонтьев, В.А. Петровский, С.Л. Рубинштейн, А.В. Усова, И.С. Якиманская и др.);

– полисубъектный подход (К.А. Абульханова, Г.И. Аксенова, И.В. Вачков, С.Д. Дерябо, Е.И. Исаев, Т.Б. Казачкова, В.А. Петровский, С.Л. Рубинштейн, Е.А. Сергиенко, В.И. Слободчиков, В.О. Татенко, Е.В. Улыбина и др.);

– деятельностный подход (Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, С.Л. Рубинштейн; впоследствии были раскрыты в трудах Л.А. Безбородовой, П.Я. Гальперина, Л.М. Гура, В.В. Давыдова, Л.В. Занкова, В.Г. Кочетковой, Н.Ф. Талызиной, Д.Б. Эльконина и др.);

– культурологический подход (А.Г. Асмолов, Л.С. Выготский, В.П. Зинченко, А.Н. Леонтьев, А.Р. Лурия, В.М. Розин, в западной психологии – В. Вундт);

– индивидуально-творческий подход (В.В. Грачев, Н.Г. Руденко, В.Н. Сластенин);

– средовой подход (В.Я. Барышников, А.К. Белоусова, Л.В. Волкова, Р.А. Кассина, Ю.С. Мануйлов, А.В. Растянников, В.И. Слободчиков, С.Ю. Степанов, Д.В. Ушаков, В.А. Ясвин и др.).

**Теоретической основой** диссертационного исследования явились:

– нормативные документы в образовательной сфере (Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации», Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов, Положение «О Национальном координационном совете по поддержке молодых талантов России», Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа», «Правила выявления детей, проявивших выдающиеся способности, и сопровождения их дальнейшего развития»; Указ Президента Российской Федерации «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года»;

– современные концепции одарённости (концепция возрастного подхода Н. С. Лейтеса; одарённость как проявление творческого потенциала А.М. Матюшкина; интеллектуально-личностный подход к развитию общей одарённости В.С. Юркевич; динамическая теория одарённости Ю.Д. Бабаевой; экопсихологический подход В.И. Панова; психодидактический подход В.П. Лебедевой, В.А. Орлова, В.И. Панова и др.);

– представления о стратегии развития образования в современном мире и принципах образовательной политики государства (А.Г. Асмолов, И.В. Бестужев-Лада, Г.А. Бордовский, Б.С. Гершунский, А.А. Гусейнов, В.В. Давыдов, В.И. Загвязинский, А.С. Запесоцкий, А.М. Матюшкин, Л.М. Митина, Н.В. Наливайко, Н.Д. Никандров, А.М. Новиков, В.В. Рубцов, М.В. Рыжаков, В.С. Степин, А.И. Субетто, Д.И. Фельдштейн, Н.И. Чуприкова, В.Д. Шадриков, Д.Б. Эльконин, И.С. Якиманская и др.);

– теория конструирования содержания образования (Ю.К. Бабанский, В.В. Краевский, В.С. Леднев, И.Я. Лернер и др.);

– психолого-педагогические исследования когнитивных процессов и концепция учебной мотивации (Э.Г. Гельфман, А.К. Маркова, Ж. Пиаже, Г.И. Щукина и др.);

– труды в области учебной деятельности, условий её формирования и развития (В.В. Давыдов, И.Я. Зимняя, А.К. Маркова, Д.Б. Эльконин и др.);

– теория дифференцированного обучения математике (В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.М. Монахов, Н.Х. Розов, М.В. Ткачева и др.);

– теория проблемного обучения (В.И. Загвязинский, А.М. Матюшкин, М.И. Махмутов, Н.А. Менчинская, И.С. Якиманская и др.);

– исследования, посвящённые вопросам педагогической диагностики (С.Д. Дерябо, К. Ингенкамп, В.П. Симонов, А.В. Усова, Т.И. Шамова, В.А. Ясвин);

– работы по методологическим основам математики и методологии математического образования (Ж. Адамар, А.Д. Александров, В.И. Арнольд, Г. Вейль, Д. Гильберт, Б.В. Гнеденко, В.А. Гусев, Е.И. Деза, Ф. Клейн, А.Н. Колмогоров, Ю.М. Колягин, Л.Д. Кудрявцев, Г.Л. Луканкин, В.Л. Матросов, Д. Пойа, Н.Х. Розов, В.А. Садовничий, Г.И. Саранцев, Т.Ф. Сергеева, Е.И. Смирнов, В.М. Тихомиров, А.Я. Хинчин и др.).

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач и проверки гипотезы применялся комплекс взаимодополняющих методов исследования: теоретический анализ монографий, диссертационных исследований, авторефератов, статей и других научных публикаций, отражающих состояние изученности проблемы. В качестве теоретических методов применялись также теоретическое моделирование и проектирование. В качестве эмпирических методов исследования использовались: опрос, наблюдение, анкетирование, контент-анализ, методы математической обработки данных.

**Базой исследования** являлись региональные системы Кировской области (Кировское областное государственное автономное образовательное учреждение дополнительного образования детей – «Центр дополнительного образования одарённых школьников»), Ярославской области (Региональный портал «Математика для всех» Государственного учреждения Ярославской области «Центр телекоммуникаций и информационных систем в образовании» департамента образования Ярославской области), Республики Адыгея (Республиканская естественно-математическая школа).

**Исследование проводилось в несколько этапов.**

*На первом этапе (2007 – 2008 гг.)* осуществлялся теоретический анализ философской, психолого-педагогической и методической литературы по различным аспектам работы с математически одарёнными детьми. Результатом первого этапа стало осмысление проблемы и обоснование актуальности исследования, выделение объекта, предмета, целей и задач исследования, определение его методологии и методов.

*На втором этапе (2008 – 2012 гг.)* проводился анализ современного состояния работы с одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов, осуществлялась систематизация теоретического и накопленного эмпирического опыта в аспекте поставленной проблемы, проверялась и уточнялась гипотеза исследования, разрабатывалась его концептуальная основа. Результатом этого этапа явилась разработка концепции работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

*На третьем этапе (2012 – 2019 гг.)* разрабатывалось содержание и организационные формы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов, осуществлялась их апробация, определялись критерии эффективности; осуществлялась обработка результатов опытно-экспериментальной работы и их анализ, систематизация и корректировка основных теоретических положения исследования.

*На четвёртом этапе (2020 – 2021 гг.)* проводилось обобщение результатов исследования, формулировались его выводы и рекомендации по внедрению разработанных материалов в образовательную практику; определялись перспективы дальнейшего исследования поставленной проблемы.

**Результаты, полученные лично соискателем, и их научная новизна:**

– в контексте современной образовательной парадигмы разработаны методологические основы организации работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов, которые включают системный, личностно ориентированный, полисубъектный, деятельностный и средовой подходы, совокупность которых задают целевой, содержательный и организационный аспекты деятельности по выявлению и развитию математически одарённых учащихся;

– разработана концепция работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов, определяющая: цели проведения предметных олимпиад и конкурсов как средства выявления, отбора, самореализации и профессиональной ориентации математически одарённых школьников;

– описан способ реализации системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов посредством создания мотивирующей образовательной среды, способствующей развитию четырёх сфер математически одарённых учащихся: интеллектуальной (овладение математической деятельностью), коммуникативной (формирование навыков общения у субъектов образовательной среды, которое происходит в процессе совместной деятельности), кооперативной (отвечает за организацию взаимодействия субъектов образовательной среды в различных типах (сотрудничество, конкуренция) и формах) и личностной (обеспечивает возможности для самореализации обучающихся и педагогов посредством представления их учебных и творческих достижений в разнообразных интеллектуальных и творческих состязаниях);

– раскрыты особенности конструирования содержания (направленного на обучение математической деятельности и включающего освоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей);

– определены формы образования на каждом возрастном этапе обучения математически одарённых школьников с учетом их возможностей, образовательных потребностей и психолого-педагогических особенностей;

– определены подходы к разработке олимпиадных и конкурсных заданий посредством специального вида творчества – задачного композиторства;

– описана классификация олимпиадных заданий, согласованная с логической структурой их содержания и методов решения;

– описана актуальная учебно-методическая модель работы со школьниками, направленная на поиск и выявление детей, обладающих математическими способностями;

– раскрыты особенности конструирования содержания образования, ориентированного на обучение математической деятельности с учетом типологии математических способностей, которое включает два направления: логическое (задачи по комбинаторике и геометрии) и техническое (задачи по алгебре, теории чисел (арифметике), основам математического анализа), и определены возрастные этапы наиболее благоприятные для освоения каждого направления;

– определены условия создания мотивирующей образовательной среды и представлены соответствующие им региональные модели системы работы с математически одарёнными детьми.

**Теоретическая значимость исследования** заключается в том, что результаты, полученные автором, дополняют имеющиеся теоретические представления по ряду направлений:

– в области систематизации современных исследований отечественных и зарубежных ученых о структуре математических способностей, которые включают способности к усвоению математических знаний, к их репродуцированию и самостоятельному применению, творческие математические способности, связанные с самостоятельным созданием оригинального и имеющего общественную ценность продукта в сфере математической деятельности; главными признаками математических способностей признаются способность к обобщению, логичность и формализованность мышления, гибкость и глубина, систематичность, рациональность и аргументированность рассуждений, математическое восприятие и память;

– в области педагогики одаренности установлено, что условием формирования мотивирующей образовательной среды для развития математически одарённых школьников является многоуровневое и многовекторное партнерство, инструментом реализации которого является сетевое взаимодействие;

– дидактика математики дополнена совокупностью принципов работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов: самоактуализации, индивидуальности, субъектности, выбора, творчества и успеха, доверия и поддержки;

– методика обучения математически одаренных детей обогащена: введением термина «задачное композиторство» и разработкой на его основе подхода к созданию заданий для математических олимпиад и конкурсов, ориентированного на использование авторских творческих идей для конструирования нестандартных задач; структурой и содержанием обучения математически одаренных учащихся, содержащим логическое и техническое направления и систему специальных методов для его освоения; введением новой классификации олимпиадных задач и описанием учебно-организационной модели работы с математически одарёнными школьниками, направленной на выявление одарённых школьников и более эффективную их олимпиадную подготовку.

В целом полученные в исследовании объективные научные результаты дополняют и расширяют теорию педагогики, теорию и методику обучения математике.

**Практическую значимость представляют** следующие результаты исследования:

– определено содержание образования математически одарённых школьников, основанное на формировании у них умений проведения анализа данных и построения новых логических конструкций и моделей;

– разработаны организационные формы работы с математически одарёнными детьми с учетом возрастных особенностей обучаемых;

– разработаны методические рекомендации по организации и проведению школьного, муниципального, регионального и заключительного этапов всероссийской олимпиады школьников по математике;

– описаны региональные модели работы с математически одарёнными школьниками в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов;

– подготовлены учебно-методические материалы, включая сборники олимпиадных задач и методики их решения;

– введено понятие «задачное композиторство» и описана связь содержания олимпиадных заданий и решаемых ими спортивно-творческих задач;

– создана классификация олимпиадных заданий не по тематическому принципу, а на основе логической структуры их решений;

– описана актуальная учебно-методическая модель работы со школьниками, направленная на поиск и выявление детей, обладающих математическими способностями.

Разработанные в диссертации материалы прошли многолетнюю апробацию в 13 регионах Российской Федерации (Иркутской, Кировской, Московской, Нижегородской, Томской, Тульской, Тюменской, Ярославской областях, Республиках Адыгея, Башкортостан, Коми, Саха (Якутия), Красноярском крае), а также в Образовательном центре «Сириус» при проведении этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике, различных форм дополнительного образования математически одаренных детей (профильных школ и лагерей, математических состязаний и др.), в которых автор исследования принимал участие в качестве педагога и организатора.

**Достоверность и обоснованность результатов исследования** обеспечивается четкостью методологических, философских, математических, психолого-педагогических и методических позиций, положенных в основу исследования; корректным применением к исследуемой проблеме системного, личностно ориентированного, полисубъектного, деятельностного и средового подходов, а также выбором комплекса методов, адекватных объекту, предмету, целям и задачам исследования; существенной продолжительностью опытно-экспериментальной работы диссертанта в качестве члена жюри Всесоюзной с 1974 года (в 1992 году – Межреспубликанской, с 1993 года – Всероссийской) олимпиады школьников по математике, лидера национальной команды России на Международной математической олимпиаде (с 1995 по 2019 годы), члена Консультативного совета Международной математической олимпиады (с 2000 года по настоящее время), председателя Центральной предметно-методической комиссии по математике всероссийской олимпиады школьников на протяжении последних 15 лет, соруководителя математических смен в Образовательном центре «Сириус» с момента его создания.

**Апробация теоретических положений и результатов исследования** на международных и всероссийских научных конференциях, проходивших в разное время (с 1994 по 2022 гг.), в том числе на Международной конференции «Математическое образование: сегодня и завтра» (Москва, 28-29 ноября 2013 г.), V Всемирном Конгрессе математиков тюркоязычных стран (Иссык-куль, Кыргызстан, 5-7 июня 2014 г.), Всероссийской научно-практической конференции «Развитие математического образования в школе как фактор конкурентоспособности науки и высокотехнологических производств» в рамках XIV Сибирского образовательного форума (Томск, 25 марта 2015 г.), III Всероссийском съезде «Школьное математическое образование» (Новосибирск, 17-18 ноября 2015 г.), в рамках III Всероссийского съезда «Школьное математическое образование», I Всероссийской научно-практической конференции «Университеты в системе поиска и поддержки математически одарённых детей и молодежи» (Майкоп, 8-10 октября 2015 г.), семинара для учителей «Региональный, муниципальный и школьный этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике: составление заданий, проведение, проверка и оценка работ» (Сочи, Образовательный центр «Сириус», 12-15 мая 2016 г.), семинара для учителей «Интеллектуальные соревнования как среда развития профильной одарённости школьников и некоторые аспекты преподавания углублённого курса математики» (Сочи, Образовательный центр «Сириус», 22-27 июня 2016 г.), Всероссийской конференции «Вопросы дополнительного образования одарённых школьников в области точных и естественных наук» (Киров, 2-4 октября 2016 г.), регионального Форума учителей (педагогов, преподавателей) математики, физики, химии, биологии, географии образовательных организаций ЯНАО «Современное математическое и естественнонаучное образование ЯНАО: состояние, проблемы и перспективы развития» (г. Ноябрьск, 8-10 ноября 2016 г.), IX Международной конференции «Математическое образование в школе и вузе» MATHEDU"2019 (Казань, 23-27 октября, 2019 г.), Всероссийского съезда учителей математики (Сочи, Образовательный центр «Сириус»,15-18 августа 2021 г.), семинара для учителей «Геометрическое образование в современной школе» (Сочи, Образовательный центр «Сириус», 14-20 июня 2022 г.), Международной научной конференции «Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования» (Елец, 30 сентября – 2 октября 2022 г).

Внедрение результатов исследования также осуществлялось через публикацию монографий, учебных пособий, учебных программ, статей в научных сборниках и журналах. Разработанные научно-методические материалы и опыт работы с математически одаренными детьми отражены в 223 публикациях, общим объемом более 172 п. л., среди которых 2 монографии и 89 статей в журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ.

Научно-практическая разработка «Система развития всероссийских предметных олимпиад школьников, отбора и подготовки национальных сборных команд России на международные олимпиады по физике и математике» удостоена премии Правительства Российской Федерации в области образования за 2010 год.

**На защиту выносятся следующие положения:**

1. Исследования зарубежных и отечественных ученых демонстрируют единство взглядов на проблему математических способностей, которые включают способности к усвоению математических знаний, к их репродуцированию и самостоятельному применению, и творческие математические способности, связанные с самостоятельным созданием оригинального и имеющего общественную ценность продукта в сфере математической деятельности.

Главными признаками математических способностей признаются способность к обобщению, логичность и формализованность мышления, гибкость и глубина, систематичность, рациональность и аргументированность рассуждений, математическое восприятие и память.

2. Методологическими основаниями проектирования системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов выступает совокупность подходов*:* системного, личностно ориентированного, полисубъектного, деятельностного и средового. Каждый из подходов определяет отдельные аспекты организации работы с математически одарёнными детьми, а их совокупность – проектирование целостной системы выявления, обучения и развития.

3. Система работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе математических олимпиад и конкурсов основана на следующих концептуальных положениях:

– целевым компонентом в работе с математически одаренными выступает, с одной стороны, формирование большой группы высококвалифицированных кадров, обусловленное возрастающей потребностью математизации различных сфер человеческой деятельности; с другой – необходимость предоставления специальных условий для математически одаренных школьников, средством выявления, отбора, самореализации и профессиональной ориентации которых выступают математические олимпиады и конкурсы;

– содержание образования математически одарённых учащихся, направленное на обучение математической деятельности, должно включать освоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей, что достигается созданием соответствующих заданий посредством специального вида творчества – задачного композиторства и системы специальных методов для его освоения;

– для выявления и развития математически одаренных учащихся используются разнообразные формы и содержание обучения адекватно их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям.

4. Необходимым условием образования и самореализации математически одарённых учащихся является формирование мотивирующей образовательной среды, которая обеспечивает их развитие в интеллектуальной, коммуникативной, кооперативной, личностной сферах.

Интеллектуальная сфера ориентирована на овладение математической деятельностью. Коммуникативная сфера предполагает формирование навыков общения у субъектов образовательной среды, которое происходит в процессе совместной деятельности. Кооперативная сфера отвечает за организацию взаимодействия субъектов образовательной среды в различных типах (сотрудничество, конкуренция) и формах. Личностная сфера обеспечивает возможности для самореализации обучающихся и педагогов посредством представления их учебных и творческих достижений в разнообразных интеллектуальных и творческих состязаниях.

5. Содержание образования математически одарённых школьников в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов должно обеспечивать элемент новизны, когда учащийся должен продемонстрировать умение «нестандартно мыслить», а также овладение математической деятельностью, что включает усвоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей.

В содержании образования должны быть представлены два направления: логическое и техническое. К первому относятся задачи по комбинаторике и геометрии, ко второму – по алгебре, теории чисел (арифметике), основам математического анализа. Восприятие каждого из указанных направлений наиболее успешно проходит в разном возрасте. Логического – в среднем звене школы, когда математический аппарат ещё недостаточен, но школьник уже воспринимает понятие доказательства; к техническому школьник может быть подготовлен только в результате овладения им всем необходимым математическим инструментарием, т.е. в старших классах школы.

6. Формы математических состязаний на каждом возрастном этапе обучения математически одарённых детей должны выбираться с учётом их возможностей, образовательных потребностей и психолого-педагогических особенностей. Базовые сценарии математических соревнований как личные, так и командные различаются подходами к решению задач и включают три варианта. На олимпиаде участники сдают полные решения задач, жюри их проверяет и выставляет баллы. Вариант блиц предполагает жёсткое ограничение времени решения и только ответы, без обоснований и объяснений. При использвании теста список вариантов ответа для каждой задачи приведен изначально, нужно только сделать правильный выбор.

7. Реализация концепции *работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов* может осуществляться посредством создания различных организационных структур, осуществляющих работу с математически одарёнными детьми в условиях региона, обусловленных его особенностями, возможностями и сложившимися традициями. Наиболее продуктивными являются модели, основанные на использовании сетевого взаимодействия между организациями общего и высшего образования, обеспечивающие дистанционную поддержку и предоставление различных форм математических состязаний, популяризацию математики, вовлечение и стимулирование педагогов к работе с математически одарёнными детьми.

**Структура диссертации.** Структура диссертации отражает логику, содержание и результаты исследования и состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы; определены цель, предмет и объект исследования, сформулированы задачи и гипотеза; раскрыты научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы; сформулированы положения, выносимые на защиту.

В первой главе **«Теоретические основы организации работы с математически одарёнными учащимися»** проводится анализ проблем одарённости на современном этапе развития образования, раскрывается сущность и структура математической одарённости, описывается история становления и развития многоуровневой системы математических олимпиад в России и за рубежом.

Феномен одарённости уже несколько десятилетий находится в центре внимания научной и педагогической общественности во всём мире.

Создание условий для раннего выявления, обучения и поддержки одарённых детей и подростков рассматривается как значимая государственная проблема, решение которой обеспечивает формирование интеллектуального и творческого потенциала нации и повышает её конкурентоспособность.

Зарубежный опыт работы с одарёнными детьми отражает разнообразие подходов и моделей, реализующих особенности государственной политики.

В Европе с 1975 года осуществляет свою работу Всемирный совет по одарённым и талантливым детям (World Council for Gifted and talented children, сокращённо WCGTC). В состав Всемирного совета входят 500 представителей из 23 государств. Исполнительный комитет Совета представлен 8 учёными, за каждым из которых закреплён тематический комитет по направлениям:

1. Написание учебных программ.
2. Исследование феномена «одарённости».
3. Актуализация и популяризация проблемы «одарённости».
4. Консультирования по проблемам «одарённости».
5. Подготовка творческого педагогического контингента, способного руководить одарёнными детьми.
6. Разработка программ для дополнительных, факультативных занятий с одарёнными детьми.
7. Разработка обогащённых программ и учебников для занятий с одарёнными детьми.
8. Проведение научных исследований проблем «одарённости».

Совет ставит своей целью привлечь внимание общественности и мировых правительств к проблеме «одарённости», к психологическим особенностям таких детей.

Наряду со Всемирным советом по одарённым и талантливым детям, с 1988 года действует Европейский комитет по образованию одарённых детей (Евроталант – Eurotalent). С 1992 года эта международная неправительственная организация наделена консультативным статусом при Совете Европы. В состав Евроталанта входят представители 11 европейских объединений по работе с одарёнными детьми. Деятельность Евроталанта разворачивается по трём направлениям:

1. Законотворческая деятельность при Совете Европы.
2. Исследовательская деятельность, то есть разработка концепции «одарённости», проведение научных исследований и образовательных подходов к одарённым детям.
3. Практическая деятельность, то есть всесторонняя, в том числе и материальная, поддержка одарённых детей, методологическая и финансовая помощь специализированным учебным заведениям, летним лагерям, консультативным центрам.

В 1994 году Парламентской ассамблеей Евросоюза были одобрены «Рекомендации по развитию образования одарённых и талантливых детей». В данном документе странам – участницам Евросоюза – были предложены положения, которых рекомендовано придерживаться в ходе осуществления внутренней образовательной политики:

– на государственном уровне нормативно выделять одарённых детей в особую категорию учащихся для всестороннего развития творческого потенциала;

– способствовать популяризации проблемы «одарённости»;

– в рамках государственной системы образования акцентировать внимание на те предметные области обучения, в которых проявляются наиболее высокие способности детей;

– при апробации любой образовательной инициативы в обучении одарённых детей учитывать социальные и психологические аспекты.

Следует отметить, что часть стран, в большей степени это касается северных европейских стран (Швеции, Дании, Норвегии, Финляндии), не выделяет одарённых детей в особую категорию, для которой требуются специальные условия. Государственная политика образования в этих странах направлена на предоставление равных условий для получения образования всем категориям обучающихся при одновременном обеспечении индивидуализации обучения. Тем не менее, и в этих странах в последние годы наблюдается всё большее возрастание интереса к исследованию проблемы одарённости, разработки и реализации образовательных программ для одарённых учащихся.

К странам, в которых на государственном уровне осуществляется организация работы с одарёнными детьми, относятся Великобритания, Австрия и Германия, а также целый ряд восточноевропейских стран, таких как Венгрия, Болгария и др.

На протяжении последней четверти века система образования в России переживает интенсивные преобразования, направленные на её включение в мировое образовательное пространство. Главная цель этих реформ заключается в утверждении гуманистических, личностно ориентированных принципов обучения, позволяющих максимально раскрыться индивидуальным качествам различных участников образовательного процесса. Одной из важнейших задач при этом является обеспечение условий для работы с одарёнными учащимися, обладающими теми или иными способностями. Постепенно в общественном сознании формируется понимание того, что переход в век наукоёмких технологий невозможен без сохранения и приумножения интеллектуального и кадрового потенциала страны.

К настоящему времени в России уже немало сделано в указанном направлении: созданы специальные образовательные учреждения, общественные организации и фонды, задачами которых выступает выявление, обучение и развитие способностей одарённых детей, разработаны соответствующие учебные и социальные программы. Растёт интерес к изучению психологических закономерностей и механизмов развития одарённости, всё шире проводятся практические исследования по выявлению и обучению одарённых детей, результаты которых находят своё отражение в образовательном и воспитательном процессе.

Сотни тысяч школьников и студентов участвуют в различных конкурсах и олимпиадах. Однако они не всегда находят себя во взрослой жизни. В связи с этим задача обеспечения «социального лифта» для талантливой молодёжи в условиях изменчивой и конкурентной экономики становится приоритетной.

Миссия государства в сфере поиска и поддержки одарённых детей и молодёжи состоит в том, чтобы создать эффективную систему образования, обеспечив условия для обучения, воспитания, развития способностей всех детей и молодёжи, их дальнейшей самореализации, независимо от места жительства, социального положения и финансовых возможностей семьи.

Сформулированные задачи государства получили развитие в Указе Президента Российской Федерации от 21.07.2020 № 474. В этом документе вторую позицию занимает национальная цель «Возможности для самореализации и развития талантов», которая декларирует «формирование эффективной системы выявления, поддержки и развития способностей и талантов у детей и молодёжи, основанной на принципах справедливости, всеобщности и направленной на самоопределение и профессиональную ориентацию всех обучающихся…».

Математическую одаренность часто рассматривают как специфический вид одаренности, что ставит вопрос о соотношении общей и специальной одарённости, являющийся сложным и не до конца решённым в психологии. Известный советский психолог Б.М. Теплов отрицал наличие общей одарённости безотносительно к конкретной деятельности. Он полагал, что понятия способности и одарённости имеют смысл только в соотношении с конкретными формами и видами общественно-трудовой деятельности.

Приведём ключевые компоненты математических способностей, выделяемые разными психологами (Рисунок 1).

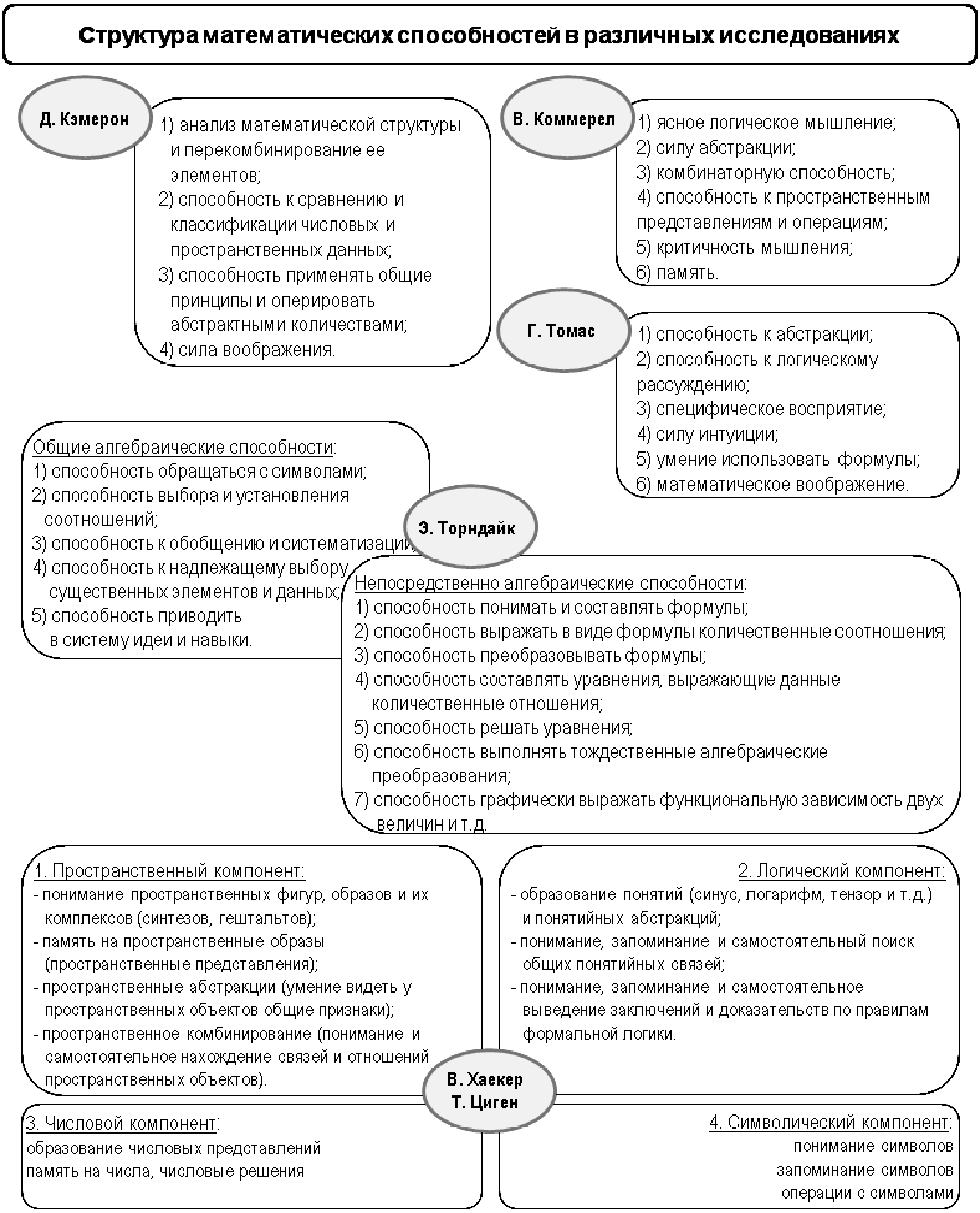



*Рисунок 1 – Структура математических способностей в различных исследованиях*

Среди советских психологов наиболее значимый вклад в разработку данной проблемы внёс В.А. Крутецкий (Рисунок 2).

**Общая схема структуры математических способностей школьников по В. А. Крутецкому**

1. Получение математической информации (способность к формализованному восприятию математического материала, схватыванию формальной структуры задачи).
2. Переработка математической информации:
   - способность к логическому мышлению в сфере количественных и пространственных отношений, числовой и знаковой символики (способность мыслить математическими символами);
   - способность к быстрому и широкому обобщению математических объектов, отношений и действий.
   - способность к свертыванию процесса математического рассуждения и системы соответствующих действий (способность мыслить свернутыми структурами);
   - гибкость мыслительных процессов в математической деятельности;
   - стремление к ясности, простоте, экономности и рациональности решений;
   - способность к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении).
3. Хранение математической информации – математическая память (обобщенная память на математические отношения, типовые характеристики, схемы рассуждений и доказательств, методы решения задач и принципы подхода к ним).
4. Общий синтетический компонент (математическая направленность ума).

*Рисунок 2 – Общая схема структуры математических способностей школьников по В.А. Крутецкому*

Наиболее распространённой формой отбора математически одарённых школьников являются математические олимпиады. В олимпиадах по математике главную роль играют не сумма конкретных знаний молодого человека, а его способность за ограниченное время создать сложную модель или логическую конструкцию, новые для него.

Стремление к достижению олимпиадных успехов выступает стимулом для учащихся, позволяет поддерживать серьёзный интерес к учебе и дополнительным занятиям. Важную роль в проявлении и поддержании интереса к занятиям математикой играет эстетическая красота олимпиадных задач.

Математическая олимпиада – это творческое соревнование, являющееся гармоничным сочетанием спорта и науки. Спортивная сторона олимпиады проявляется в характерном для подросткового возраста желании соперничать. Свойственный подростковому возрасту дух состязательности является стимулом к систематическим углублённым занятиям математикой с целью максимальной реализации своих способностей во время олимпиады. Научная составляющая математических олимпиад выражается в том, что вырабатывающиеся в процессе решения олимпиадных задач навыки творческой деятельности в дальнейшем дают быстрый переход после окончания университета к самостоятельным научным исследованиям. Научная значимость олимпиад подтверждается и тем, что подавляющее большинство выдающихся российских математиков занималось организацией олимпиад и подготовкой школьников к ним. Помимо этого, математические олимпиады сближают людей, объединённых идеями как повышения качества математического образования в стране вообще, так и работы с одарёнными школьниками в частности.

Для достижения математическими олимпиадами стоящих перед ними спортивных и научных целей задания олимпиад разрабатываются на основании принципов: *нарастание сложности заданий от первого до последнего, тематическое разнообразие заданий, обязательная новизна задач и эстетическая красота заданий.*

Во второй главе работы «**Концептуальные основы организации работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов**» определены методологические подходы к проектированию системы работы с математически одарёнными детьми в условиях многоуровневой системы математических олимпиад и конкурсов, раскрыты концептуальные положения системы работы с этой категорией школьников в указанных условиях, рассматривается формирование мотивирующей образовательной среды как необходимого условия развития математически одарённых учащихся.

На основе анализа современных исследований в области работы с одарёнными детьми и направлений развития математического образования в ходе исследования были выделены методологические подходы к проектированию системы работы с математически одарёнными детьми в условиях многоуровневой системы математических олимпиад и конкурсов: системный, личностный, личностно ориентированный, полисубъектный, индивидуально-творческий, деятельностный и средовый. Каждый из подходов определяет отдельные аспекты организации работы с математически одарёнными детьми, а их совокупность – проектирование целостной системы выявления, обучения и развития.

Концептуальными положениями системы работы с математически одарёнными детьми в условиях многоуровневой системы математических олимпиад и конкурсов являются:

а) в современном мире высоких технологий важнейшей задачей становится подготовка и формирование высококвалифицированных кадров, что инициирует усиление внимания и создание условий для развития одарённых детей;

б) повышение роли математики в современном обществе вызвано все возрастающей потребностью математизации различных сфер человеческой деятельности;

в) математические олимпиады и конкурсы выступают средством выявления, отбора и самореализации математически одарённых детей;

г) успехи на интеллектуальных состязаниях помогают школьнику в определении сферы деятельности, способствуют его профессиональной ориентации;

д) поиск одарённых школьников предполагает привлечение к участию в олимпиадах и конкурсах максимально большого числа обучающихся;

е) осуществление в массовой школе подготовки к олимпиадам начального (школьного) уровня;

ж) ошибочность возложения на учителя массовой школы полноты функций поиска, мотивации и отбора одарённых учащихся;

з) формирование педагогами, осуществляющими работу со школьниками, обладающими математическими способностями, календаря математических событий с включением в него списка олимпиад и конкурсов, отвечающих задачам выявления математических способностей, в том числе с учётом математического содержания заданий;

и) мотивирование учащихся, продемонстрировавших математические способности к дальнейшему углублённому изучению математики, выстраивание траектории их роста;

к) выделение специального вида творчества – задачного олимпиадного композиторства;

л) осуществление олимпиадного тренинга (муниципальный и последующие этапы) в рамках дополнительного образования силами высококвалифицированных педагогов средней и высшей школы, а также студентов-олимпиадников;

м) организация занятий с одарёнными школьниками не только по тематическому принципу, но с обучением также нахождению логической структуры решения задачи;

н) использование при организации дополнительного образования математически одарённых детей разнообразных форм и содержания занятий адекватно их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям;

о) интеллектуальные состязания школьников выступают стимулом для профессиональной самореализации педагогов;

п) работа с математически одарёнными детьми нуждается в обеспечении управленческой поддержки территориальными органами управления образованием.

Основными принципами организации системы работы с математически одарёнными детьми являются:

1. ***Принцип самоактуализации.*** В каждом ребёнке существует потребность в актуализации своих способностей. Важно побудить и поддержать стремление учащихся к проявлению и развитию своих природных и социально приобретенных возможностей.

2. ***Принцип индивидуальности.*** Создание условий для формирования индивидуальности личности учащегося и педагога – главная задача образовательный среды. Необходимо не только учитывать индивидуальные особенности ребенка или взрослого, но и всячески содействовать их дальнейшему развитию.

3. ***Принцип субъектности.*** Индивидуальность присуща лишь тому человеку, который реально обладает субъектными полномочиями и умело использует их в построении деятельности, общения и отношений. Следует помочь ребенку стать подлинным субъектом жизнедеятельности в классе и школе, способствовать формированию и обогащению его субъектного опыта. Межсубъектный характер взаимодействия должен быть доминирующим в процессе воспитания и обучения детей.

4. ***Принцип выбора.*** Без выбора невозможно развитие индивидуальности и субъектности, самоактуализации способностей ребенка. Педагогически целесообразно, чтобы учащийся жил, учился и воспитывался в условиях постоянного выбора, обладал субъектными полномочиями в выборе цели, содержания, форм и способов организации учебно-воспитательного процесса и жизнедеятельности в классе и школе.

5. ***Принцип творчества и успеха.*** Индивидуальная и коллективная творческая деятельность позволяет определять и развивать индивидуальные особенности учащегося и уникальность учебной группы. Благодаря творчеству ребёнок выявляет свои способности, узнаёт о «сильных» сторонах своей личности. Достижение успеха в том или ином виде деятельности способствует формированию позитивной Я-концепции личности учащегося, стимулирует осуществление ребёнком дальнейшей работы по самосовершенствованию и самостроительству своего «я».

6. ***Принцип доверия и поддержки.*** Решительный отказ от идеологии и практики социоцентрического по направленности и авторитарного по характеру учебно-воспитательного процесса, присущего педагогике насильственного формирования личности ребенка.

*Формирование мотивирующей образовательной среды рассматривается как необходимое условие* развития математически одарённых детей в четырёх сферах: интеллектуальной, коммуникативной, кооперативной, личностной.

Интеллектуальная сфера ориентирована на овладение предметными знаниями, в данном случае математическими, что включает в себя: теоретические знания; математический язык; приемы математического мышления; способы математической деятельности; познавательные стратегии.

Коммуникативная сфера предполагает формирование навыков общения у субъектов образовательной среды, которое происходит в процессе совместной деятельности. Общение, осуществляемое как на предметном, так и на надпредметном уровне, включает в себя: общение между обучающимися; общение между обучающимися и педагогами; общение между педагогами.

Кооперативная сфера отвечает за организацию взаимодействия субъектов образовательной среды в различных типах (сотрудничество, конкуренция) и формах (коллективная и групповая работа; совместная творческая деятельность; мозговой штурм, дискуссия и др.).

Личностная сфера обеспечивает возможности для самореализации обучающихся и педагогов, что подразумевает создание условий для представления их учебных и творческих достижений в разнообразных интеллектуальных и творческих состязаниях.

Формирование мотивирующей образовательной среды для развития математически одарённых школьников невозможно без организации многоуровневого и многовекторного партнёрства, что подразумевает развитие сетевого взаимодействия.

В настоящее время сетевое взаимодействие является одним из мощных ресурсов инновационного образования, что определяется следующими возможностями:

– расширения спектра образовательной деятельности;

– более активного продвижения продуктов инновационной деятельности и получения дополнительного финансирования;

– усиления ресурсов учреждения за счёт ресурсов других учреждений;

– проведения экспертиз собственных разработок.

Сеть создаётся на добровольной основе, поддерживается общей проблематикой и интересами всех членов сети. Таким образом, сеть всегда является результатом проектного замысла, поскольку ее участники должны быть связаны единым целеполаганием, согласовывать механизмы и схемы взаимодействия, договариваться о результатах деятельности.

Основными функциями сетевого взаимодействия являются:

*политическая* (Преследует конкретную цель найти единомышленников. Сотрудничество с ними позволяет создать активное сообщество и, таким образом, популяризировать инновационные идеи);

*информационная* (Сеть обеспечивает быстрый обмен информацией и способствует распространению инноваций);

*психологическая* (Новаторы обычно изолированы в своих организациях. Сеть предоставляет им возможности для сотрудничества и обмена идеями);

*образовательная* (Инновационная работа требует освоения новых навыков, связанных с разработкой, реализацией и продвижением инновационных идей, организации продуктивного взаимодействия, в том числе с использованием информационно-коммуникационных технологий).

Для организации продуктивного сетевого взаимодействия при организации работы с математически одарёнными детьми необходимо соблюдение следующих условий:

1. Обучение учащихся навыкам самостоятельной работы и самостоятельного проведения исследований. Совокупность таких навыков должна включать как предметные, связанные с математической деятельностью, так и метапредметные, включая организацию поиска и обмена информацией, продуктивное взаимодействие между разными категориями участников сети (учащимися, педагогами), представления собственных исследований и др.

2. Сочетание индивидуальной и групповой работы. Работа в группе требует от обучаемых аргументации и вовлекает обучающихся в идеи обмена, развивает критическое мышление. Установлено, что когда математически одарённым учащимся предлагаются для решения лёгкие задачи, то они предпочитают работать независимо друг от друга или вместе со своими товарищами. Однако когда задачи являются достаточно сложными, одарённые учащиеся предпочитают работать в группе для обмена знаниями и доступа к сети поддержки.

3. Наличие возможностей работать со своими единомышленниками, которые разделяют их интересы и будут оспаривать их идеи, а также возможностей презентации своих идей. Для этого необходимо предусмотреть различные формы работы: олимпиады, конкурсы, профильные лагеря и др. Формы работы должны соответствовать возрастным особенностям учащихся.

В третьей главе работы **«Содержание и формы организации работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов»** описываются содержание образования математически одарённых школьников и формы работы с ними.

Основу школьного образования составляет усвоение учащимися определённого набора знаний и овладение ими определённым набором навыков. Таким образом, задачей школьного образования и обязанностью школьного учителя является привитие своим ученикам этих стандартных знаний и навыков. При этом каждый учащийся должен достичь одинакового со всеми одноклассниками уровня обучения предмету независимо от степени восприятия ими предмета.

Абсолютно по-другому формируются задания предметных математических олимпиад школьников. Здесь требуется умение проведения анализа данных и построения новых логических конструкций и моделей. И основой успеха является не сумма конкретных знаний учащегося, а его способность логически мыслить, умение создать за короткое время олимпиады достаточно сложную и, главное, новую для него логическую конструкцию. Недаром только в математических олимпиадах задание может начинаться со слов: «Докажите, что…». В отличие от ряда других дисциплин, где тестовыми заданиями проверяется начитанность, энциклопедичность знаний участника, в математических олимпиадах обязательным является условие новизны заданий. Ведь с точки зрения выявления математических способностей два задания «на одну идею», т. е. различающиеся только числовыми данными, являются абсолютно идентичными. В силу этого проявляется главное отличие математических олимпиад от других предметных олимпиад школьников: задания в них разительно отличаются как от заданий стандартной школьной программы, так и от достаточно сложных заданий конкурсных испытаний при поступлении в вузы. Фактически сразу после зарождения математических олимпиад возникла и практически самостоятельно развивается так называемая «олимпиадная математика».

Если назначение курса математики в школе – усвоение учащимися алгоритмов действий при решении различных типов задач, то в олимпиадной математике в основу заданий закладывается, напротив, элемент новизны, когда школьник должен самостоятельно построить логическую конструкцию, т. е. продемонстрировать умение «нестандартно мыслить». В действительности грань между стандартной школьной математикой и олимпиадной математикой не всегда является такой чёткой. В традициях российской математической школы всегда было включение в учебники так называемых задач повышенной трудности и «занимательных» задач («Арифметика» Магницкого), являющихся, по своей сути, олимпиадными. Авторы таких учебников стремились помочь учителю в поиске способных учеников, в поддержке у них интереса к предмету, который не может вызвать рутинное изучение стандартных приемов и методов.

В олимпиадной математике существуют два направления: логическое и техническое. К первому относятся задачи по комбинаторике и геометрии, ко второму – по алгебре, теории чисел (арифметике), основам математического анализа. Восприятие каждого из указанных направлений наиболее успешно проходит в разном возрасте. Логического – в более раннем возрасте (среднее звено школы), когда математический аппарат еще недостаточен, но школьник уже воспринимает понятие доказательства. Позитивного, основанного на построении конструкций (например, «докажите, что существует число, делящееся на 2007, с суммой цифр равной 2007», и он приводит описание построения указанного числа: нужно 223 раза повторить набор цифр 2007. Это число, очевидно, делится на 2007, а сумма его цифр равна 2007, так как $223 \cdot (2+0+0+7)=2007$). Негативного, основанного на методе доказательства «от противного». (Например, «докажите, что в любой момент школьного однокругового турнира по волейболу всегда найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей». И школьник приводит рассуждение: пусть не так и в некоторый момент у всех команд разное число сыгранных игр. Это возможно, только если одна из $N$ команд сыграла $N$-1 игру, другая – $N$-2, …, $N$-я – 0 игр. Но это означает, что последняя команда не играла с первой командой, сыгравшей матчи со всеми. Противоречие.)

К техническому направлению школьник может быть подготовлен только в результате овладения им всем необходимым математическим инструментарием, т.е. в старших классах школы. Кроме того, не только российский, но и международный опыт показывают, что даже при более раннем овладении математическим аппаратом, успешное использование его, как правило, возможно только в старшем школьном возрасте.

Таким образом, формирование комплектов заданий должно значительно различаться в разных классах. Ниже приведено содержание образования математически одарённых школьников в России, которое отражает многолетнюю сложившуюся систему работы.

## VI – VII КЛАССЫ

**Числа и вычисления.**

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Чётность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

**Уравнения.**

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

**Функции.**

Функция. График функции. Функции: $y = kx$ , $y = kx + b$.

Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

**Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.**

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

**Специальные олимпиадные темы.**

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски. Игры.

## VIII – IX КЛАССЫ

**Числа и вычисления.**

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Чётность. Деление с остатком. Признаки делимости на $2^k$, 3, $5^k$, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

**Выражения и их преобразования.**

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращённого умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трёхчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

**Уравнения и неравенства.**

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

**Функции.**

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трёхчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

**Планиметрия.**

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и её свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырёхугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и её свойства. Площади четырёхугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и её свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

**Специальные олимпиадные темы.**

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания. Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

## X – XI КЛАССЫ

**Числа и вычисления.**

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Чётность. Деление с остатком. Признаки делимости на $2^k$, 3, $5^k$, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа.

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число $\pi$.

**Выражения и их преобразования.**

Многочлены. Формулы сокращённого умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень $n$-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

**Тригонометрия**.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

**Уравнения и неравенства.**

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

**Функции.**

Числовые функции и их свойства: периодичность, чётность и нечётность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, её свойства и график. Логарифмическая функция, её свойства и график. Степенная функция, её свойства и график.

Производная, её геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и её свойства.

**Планиметрия и стереометрия.**

*Планиметрия.*

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и её свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

*Стереометрия.*

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трёх перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

**Специальные олимпиадные темы.**

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Для освоения вышеперечисленного содержания в исследовании описана классификация специальных методов обучения, проиллюстрированная соответствующими примерами олимпиадных задач.

**Метод от противного**

В ряде задач рассмотрение «дополнительного объекта», в котором доказываемое утверждение не выполняется, приводит к доказательству того, что этот объект не существует.

**Пример.** На доске написаны несколько натуральных чисел. Известно, что сумма любых двух из них оканчивается либо на 2018, либо на 2019, причем оба варианта встречаются. Докажите, что среди записанных на доску чисел либо ровно одно – чётное, либо ровно одно – нечётное.

**Решение.** Во-первых, из условия следует, что сумма каких-то двух чисел – нечётна (оканчивается на 2019), значит, среди рассматриваемых чисел есть как чётные, так и нечётные. **Предположим противное:** не выполняется условие, что среди этих чисел либо ровно одно – чётное, либо ровно одно – нечётное. Тогда как чётных, так и нечётных чисел среди рассматриваемых – по крайней мере по два. Пусть числа $a$ и $b$ –

чётные, а числа $c$ и $d$ – нечётные. Следовательно, числа $a + b$ и $c + d$ оканчиваются на 2018, а поэтому число $A = a + b + c + d$ оканчивается цифрой 6. С другой стороны, числа $a + c$ и $b + d$ оканчиваются на 2019, а поэтому число $A$ оканчивается цифрой 8. **Противоречие.**

**Метод решения или анализа от конца (метод редуцирования)**

В некоторых случаях трудно сразу найти всю цепочку рассуждений, приводящую к доказательству требуемого утверждения. В то же время можно найти утверждение А, из которого следует доказываемое утверждение Б. И цепочка математических рассуждений сокращается за счёт того, что теперь нужно доказать более простое утверждение А.

**Пример.** На диагоналях *AC* и *DB* вписанного четырехугольника *ABCD* выбраны соответственно точки *K* и *L* так, что *AK* = *AB* и *DL* = *DC* (точка *K* лежит на отрезке *OC*, а точка *L* – на отрезке *OB*, где *O* – точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*). Докажите, что прямые *KL* и *AD* параллельны.

**Решение.** Доказываемое утверждение Б равносильно равенству углов *CAD* и *AKL*. Но вписанные, опирающиеся на одну дугу *CD* углы *CAD* и *CBD* равны, а углы *CKL* и *AKL* – смежные. Поэтому нам достаточно доказать, что сумма углов *CBD* и *CKL* равна $180°$, то есть то, что четырёхугольник *BLKC* – вписанный (утверждение А). Последнее равносильно равенству углов *BKC* и *BLC* (ещё один «обратный шаг»), то есть равенству смежных с ними углов *BKA* и *CLD*. А это равенство следует из подобия равнобедренных треугольников *AKB* и *CLD* с равными вписанными углами *BAC* и *BDC*.

При решении задач, связанных с игрой двух игроков, отыскиваются выигрышные (проигрышные) финальные позиции. После этого определяется выигрышная стратегия для одного из игроков.

**Метод моделирования**

Задание с текстовым описанием условия переводится на математический язык, создаётся так называемая математическая модель, включающая в себя логические выражения и алгебраические формулы, связанные соотношениями.

**Пример.** На День защитника Отечества девочки в классе принесли подарки. Первая принесла один подарок, вторая – два подарка, третья – три подарка, и т.д. Оказалось, что каждому мальчику в классе досталось одинаковое число подарков. Затем на 8 Марта мальчики принесли подарки: первый – один подарок, второй – два подарка, и т.д. И оказалось, что каждой девочке в классе досталось одинаковое число подарков. Докажите, что девочек или мальчиков в классе нечётное количество.

**Решение.** Пусть в классе $x$ мальчиков и $y$ девочек. Первое условие задачи означает, что $\frac{y(y+1)}{2} = nx$ (1), где $n$ – натуральное число (количество подарков, доставшихся каждому мальчику). Аналогично получаем, что $\frac{x(x+1)}{2} = my$ (2), где $m$ – натуральное число. Уравнения (1) и (2) дают математическую модель данной задачи. Данная система не решается однозначно. Однако можно сделать вывод относительно переменных $x$ и $y$. Перемножим уравнения (1) и (2) и умножим полученное уравнение на 4. Получим следующее уравнение: $y(y+1)x(x+1) = 4nxmy$ или с учётом того, что $y \neq 0, x \neq 0$, $(y+1)(x+1) = 4nm$. Отсюда следует, что произведение $(y+1)(x+1)$ – чётное число, то есть по крайней мере один из множителей $y + 1$ и $x + 1$ – чётный. Но тогда хотя бы одно из чисел у или $x$ – нечётно. Утверждение доказано.

### Метод аналогий

Для ряда задач или математических моделей бывает возможным обнаружить их совпадение или идейную близость с ранее решавшимися задачами или встречавшимися теоремами. В таких случаях достаточно провести знакомое рассуждение для новой задачи.

**Пример.** Даны 72 последовательных натуральных числа. Их разбили на 24 группы по три числа, в каждой группе числа перемножили. Затем у каждого из полученных произведений подсчитали сумму цифр. Могли ли все полученные суммы оказаться равными?

**Решение.** В задаче рассматриваются суммы цифр, и она схожа по звучанию с более простой задачей: известно, что натуральное число $n$ в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что $n$ делится на 27. Эта задача решается так: обозначим через $s$ сумму цифр данного числа $n$. По условию $n = 3s$, следовательно, $n$ делится на 3. Значит, $s$ делится на 3, то есть $s = 3k$ . Это означает, что $n$ делится на 9. Тогда и $s$ делится на 9, то есть $s = 9m$. Но тогда $n = 27m$. Задача решена.

Применим идею использования признака делимости на 9 в нашей задаче (формально в ней не идет речь о делимости на 9, но задача включает рассмотрение сумм цифр чисел, что и подсказывает идею решения). Среди данных 72 чисел есть числа, делящиеся на 9. Значит, произведения, в которые данные числа входят, также делятся на 9. Но тогда и суммы цифр этих произведений делятся на 9. Предположим, что все полученные суммы одинаковы. Тогда каждая из них должна делиться на 9, а потому и каждое из 24 произведений должно делиться на 9. Это возможно только в двух случаях: в произведение входит число, делящееся на 9, или же входят два числа, делящихся на 3. Среди 72 последовательных натуральных чисел ровно 8 делятся на 9, а также ровно 24 – 8 = 16, делящихся на 3, но не делящихся на 9. Они могут образовать ещё 8 пар сомножителей, делящихся в произведении на 9. То есть всего 8 + 8 = 16 произведений могут делиться на 9. А их – 24. Получили противоречие. Значит, искомого разбиения не существует.

### Метод изменения тематики

При данном методе для решения задач из одних разделов математики используются приёмы и теоремы из других её разделов.

**Пример 1.** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AL$ и $CN$. Пусть $P$ – произвольная точка отрезка $LN$. Докажите, что расстояние от точки $P$ до стороны $AC$ равно сумме расстояний от этой точки до сторон $AB$ и $CB$.

**Решение.** Пусть $LP = x$ и $LN = a$. Рассмотрим функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, являющиеся, соответственно расстояниями от точки $P$ до сторон $AC$, $AB$ и $CB$. Легко заметить, что эти функции являются линейными. В то же время при $x = 0$ (точка $P$ совпадает с точкой $L$) $f(x) = g(x)$, а $h(x) = 0$. Также при $x = a$ выполняются равенства $f(x) = h(x)$ и $g(x) = 0$. Значит, значения линейных функций $f(x)$ и $g(x) + h(x)$ совпадают при двух различных значениях аргумента, а потому эти функции тождественно равны. Последнее означает выполнение утверждения задачи.

### Метод обобщения

Для доказательства исходного утверждения, выполняемого при конкретном значении некоторой величины В, доказывается, что утверждение выполняется при всех значениях В из некоторого множества. И, тем самым, оно будет верным и при конкретном значении В. Как правило, доказательство проводится с помощью метода математической индукции.

**Пример.** Докажите, что если на плоскости произвольным образом провести 20 прямых, то части, на которые они разбивают плоскость, можно раскрасить в шахматном порядке (это означает, что любые две части разбиения, имеющие общую границу: отрезок, луч или прямую, при такой раскраске будут иметь разные цвета).

**Решение.** Докажем с помощью метода математической индукции следующее утверждение: при любом натуральном $n$ если провести $n$ прямых, то области, на которые они разобьют плоскость, можно раскрасить в шахматном порядке. База индукции: $n = 1$. Достаточно раскрасить две полуплоскости в разные цвета. Индукционный переход. Пусть при $n = k$ искомая раскраска существует. Проведем $(k + 1)$-ю прямую $b$. Сохраним все цвета по одну сторону от проведенной прямой, а по другую сторону от неё поменяем цвета на противоположные. Тогда любые две области с общей границей, не лежащей на прямой $b$, по-прежнему будут разных цветов, и для них требуемое условие будет выполняться. А любые две области, граница которых лежит на НОВОЙ прямой $b$, будут иметь разные цвета в силу перекраски. Утверждение доказано.

В некоторых случаях доказывается более сильное утверждение, которое, тем не менее, доказывается проще. Нередко так доказываются неравенства. В следующих примерах решения упрощаются, если числа в условии обозначить переменными.

### Методы введения дополнительных объектов: дополнительные построения при решении задач по геометрии, введение новых переменных в алгебре и теории чисел

**Пример.** Внутри остроугольного треугольника $abc$ выбирается точка $p$. Докажите, что сумма расстояний от точки $p$ до вершин треугольника минимальна, если стороны треугольника видны из точки $P$ под углом $120°$ (то есть углы $APB$, $BPC$ и $CPA$ равны $120°$).

**Решение.** Построим новый треугольник $AB_1C_1$, полученный поворотом треугольника $ABC$ вокруг вершины $A$ по часовой стрелке на угол $60°$. Пусть $P_1$ – образ точки $P$ при таком повороте. Тогда $AP = AP_1$, угол $PAP_1$ равен $60°$. Это означает, что треугольник $APP_1$ – равносторонний. Значит, $PP_1 = PA$. Кроме того, треугольник $AP_1C_1$ получен из треугольника $APC$ поворотом, поэтому $P_1C_1 = PC$. Тогда $PA + PB + PC = BP + PP_1 + P_1C_1$. Эта сумма минимальна, когда ломаная $BPP_1C_1$ является отрезком, и точка $P$ лежит на нём. Но тогда смежные с углами $APP_1$ и $AP_1P$ равностороннего треугольника $APP_1$ углы $APB$ и $AP_1C_1$ равны $120°$. Значит, и угол $APC$ равен $120°$. Утверждение доказано (эта точка называется точкой Торричелли треугольника).

### Метод интуитивного угадывания ответа

В задачах, в которых ответ не приведен (в отличие от задач с формулировкой «докажите, что …», где ответ заранее указан), рассмотрением некоторых частных случаев высказывается гипотеза о том, что ответ равен такой-то величине (такому-то выражению), который впоследствии обосновывается строгими математическими рассуждениями.

**Пример.** Рассмотрим последовательность натуральных чисел, построенную по следующему правилу: $x_1 = 4, x_2 = 6,$ а $x_{n+1}$ – наименьшее составное число, которое больше, чем $2x_n - x_{n-1}$. Найдите $x_{200}$.

**Решение.** Выпишем несколько первых членов последовательности: $x_3 = 9, x_4 = 14 = x_3 + 5, x_5 = 20 = x_4 + 6, x_6 = 27 = x_5 + 7$. Высказывается гипотеза о том, что $x_n = x_{n-1} + n + 1$ при $n \geq 3$.

Это равносильно тому, что

$$x_n = x_{n-1} + n + 1 = x_{n-2} + n + n + 1 = x_{n-3} + n - 1 + n + n + 1 = \ldots = x_3 + 5 + 6 + \ldots + n + 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Докажем это равенство по индукции. При $k = 3$ оно верно. Пусть оно верно при $k = n$, покажем, что оно верно и при $k = n+1$. Имеем: $x_{n+1}$ – это число большее, чем $2x_n - x_{n-1}$, т.е. большее числа $2\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+5n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1$. Это означает, что $x_{n+1} \geq \frac{(n+1)(n+4)}{2}$. Но данное число при любом $n \geq 3$ – составное, так как является произведением двух чисел разной четности, каждое из которых больше 2. Значит, именно об этом числе и идет речь в условии. Ответ: $x_{200} = \frac{200 \cdot 203}{2} = 2030$.

Кроме того, метод позволяет определиться с путём решения задачи для следующего широкого класса задач. Так, если в задаче ставится вопрос «верно ли, что при всех значениях переменной из множества М выполняется условие А?», то ответ в задаче может быть позитивным, и тогда предъявляется доказательство этого утверждения; либо же ответ негативный, и тогда требуется предъявление контрпримера, показывающего, что данное следствие выполняется не всегда. Есть еще один класс задач, когда вопрос ставится следующим образом: «существует ли объект Р, удовлетворяющий условию В?». Негативный ответ на вопрос задачи требует доказательства того, что данный объект не существует. А позитивный ответ на вопрос предполагает простое предъявление объекта Р с проверкой того, что он удовлетворяет условиям В. Метод решения задач такого типа называется **Методом «примеров» и «контрпримеров».** Понятно, что он является частным случаем **Метода интуитивного угадывания ответа**, так как угадывание правильного ответа «Да» или «Нет» резко упрощает нахождение решения задачи.

**Метод поиска оригинального (нестандартного) решения**

В ряде случаев решение сложной задачи может быть найдено с помощью нестандартного приёма, оригинального рассуждения, при том что нахождение решения с помощью стандартных приёмов затруднено. Путь решения не имеет очевидной связи с формулировкой задачи.

**Пример.** Дана последовательность, построенная по следующему правилу: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, при $n \geq 2$. Докажите, что $x_{100} > 14$.

**Решение.** Оказывается, что для оценки скорости роста членов последовательности нужно рассмотреть скорость роста их квадратов! Возведём рекуррентное соотношение в квадрат: $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2} > x_n^2 + 2$. Следовательно, $x_{100}^2 > x_{99}^2 + 2 > x_{98}^2 + 4 > \cdots > x_1^2 + 198 = 199 > 196$, откуда следует утверждение задачи.

**Метод оценки и метод полного перебора**

Вначале доказывается, что значения некоторой величины не превосходят, например, приведённого числа, а затем для теперь уже конечного числа значений этой величины проводится полный перебор по этим случаям.

**Пример.** Найдите все натуральные $n$, для которых система $\begin{cases} x_1+x_2+...+x_n=9 \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1 \end{cases}$ имеет решения в положительных числах.

**Решение.** Перемножим данные равенства. Получим: $n+(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2})+(\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_3})+...+(\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n})=9$. Сумма чисел в каждой скобке не меньше 2. Поэтому левая часть равенства не меньше $n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2=n^2$. Отсюда $n\le 3$. Но при $n=1$ получаем: $x_1=9$ и $\frac{1}{x_1}=1$ – несовместную систему. При $n=2$ решением системы является пара чисел $\frac{1}{2}(9+\sqrt{45})$ и $\frac{1}{2}(9-\sqrt{45})$. А при $n=3$ подходит тройка чисел $(3;3;3)$.

**Ответ:** $n$ = 2, $n$ = 3.

### Метод подзадач

Исходная задача разбивается на совокупность задач, которые логически связаны между собой и которые решаются последовательно.

**Пример.** Функция $f(x)$, определенная при всех $x\in R$, такова, что для любой линейной функции $l(x)$ уравнения $f(x) = l(x)$ и $x^2 = l(x)$ одновременно либо имеют решения, либо не имеют решений. Докажите, что $f(x) = x^2$.

**Решение.** Решение задачи разбивается на две задачи. Первая – доказательство того, что при всех значениях $x\in R$ выполняется неравенство $f(x)\ge x^2$. А вторая, что неравенство $f(x)>x^2$ не может выполняться ни при одном значении $x\in R$. Вместе это и будет означать, что $f(x) = x^2$.

1 подзадача. Пусть существует такое число $x_0$, что $f(x_0)<x_0^2$. Проведем через точку $K(x_0;x_0^2)$ касательную к графику параболы $y=x^2$, а через точку $P(x_0;\ f(x_0))$ – прямую, параллельную этой касательной. Пусть $l(x)=ax+b$ – уравнение этой прямой. Тогда уравнение $f(x) = l(x)$ имеет решение $x=\ x_0$. В то же время уравнение $x^2 = l(x)$ решения не имеет (прямая $y=ax+b$ лежит ниже касательной к параболе $y=x^2$ и параллельна ей). Значит, неравенство $f(x)<x^2$ не выполняется ни при одном $x\in R$. Отсюда $f(x)\ge x^2$.

2 подзадача. Пусть существует такое число $x_1$, что $f(x_1)>x_1^2$. Проведем через точку $M(x_1;x_1^2)$ касательную к графику параболы $y=x^2$. Пусть $y=m(x)$ – уравнение этой прямой. Тогда уравнение $x^2\ =\ m(x)$ имеет решение $x\ =\ x_1$. В то же время уравнение $f(x)=m(x)$ решений не имеет, так как при доказательстве подзадачи 1 мы показали, что весь график $y=f(x)$ лежит внутри параболы $y=\ x^2$ и, по предположению, не проходит через точку $M$, в то время как все точки прямой $y=m(x)$ лежат, за исключением точки $M$, ниже параболы. Утверждение доказано.

Классическими задачами на метод подзадач являются задачи тематики «оценка + пример». В этих задачах вначале устанавливается, что искомая величина не больше (не меньше) некоторого значения – первая подзадача, а потом строится пример, показывающий, что нестрогое неравенство может обратиться в равенство – вторая подзадача.

Одной из важнейших задач работы с математически одарёнными детьми является развитие интереса к математике, формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах, повышение качества математического образования.

Формы проведения математических соревнований на каждом возрастном этапе обучения математически одарённых школьников должны выбираться с учетом их возможностей, образовательных потребностей и психолого-педагогических особенностей.

Базовых сценариев математических соревнований (как личных, так и командных) всего три. Различаются они по тому, что считается решением задачи.

1. ***Олимпиада***. Участники сдают полные решения задач, жюри их проверяет и выставляет баллы.

2. ***«Блиц»***. Время на решение очень жёстко ограничено, поэтому вместо решений разрешено сдавать только ответы без обоснований и объяснений.

3. ***Тест***. Список вариантов ответа для каждой задачи приведен изначально, нужно только сделать правильный выбор.

При этом каждый из сценариев имеет устоявшиеся варианты. Например, олимпиады бывают письменными и устными (в последних участник рассказывает свое решение члену жюри прямо во время олимпиады и имеет фиксированное число попыток на каждую задачу). Стоимость задач может быть одинаковой (как на всех этапах Всероссийской олимпиады) либо различной (как на Турнире Городов, когда каждая задача стоит заранее оговоренное число баллов). Наконец, сценарий проведения игры может быть конкурентным и неконкурентным («драка» или «заплыв»). При «драке» баллы за каждую задачу достаются не всем, а только тем, кто ее решит раньше других (в более мягком варианте баллы начисляются всем, но решившие задачу раньше получают больше баллов, чем решившие позднее). При «заплыве» все решают параллельно одни и те же задачи, и баллы каждой команды не зависят от результатов других команд, а победитель определяется уже на финише по достигнутому результату.

В четвёртой главе работы **«Опытно-экспериментальная работа по проверке эффективности работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов»** описаны организационно-педагогические модели работы с математически одарёнными детьми в условиях региона и результаты проверки эффективности разработанной концепции работы с математически одарёнными детьми в условиях многоуровневой системы предметных олимпиад и конкурсов.

Для реализации разработанной концепции могут быть созданы различные организационные структуры, осуществляющие работу с математически одарёнными детьми в условиях региона, обусловленные его особенностями, возможностями и сложившимися традициями.

Наиболее продуктивными являются модели, основанные на использовании сетевого взаимодействия: организация дополнительного образования при вузе, Центр дополнительного образования в системе общего образования и модель Интернет-образования.

Для проведения педагогического эксперимента были выбраны три соответствующие региональные структуры: Государственная бюджетная организация дополнительного образования Республики Адыгея «Республиканская естественно-математическая школа» (РЕМШ), Кировское областное государственное автономное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Центр дополнительного образования одарённых школьников» (ЦДООШ) и региональный портал «Математика для всех», который создан на базе Государственного учреждения Ярославской области «Центр телекоммуникаций и информационных систем в образовании». Их характерными особенностями являются сетевое взаимодействие, использование дистанционного обучения, широкий спектр форм математических состязаний в соответствии с возрастными особенностями, популяризация математики, вовлечение и стимулирование педагогов общеобразовательных школ.

В ходе исследования был осуществлён анализ их деятельности по работе с математически одарёнными детьми с 2011 по 2019 годы.

На приведенных ниже рисунках 3 – 8 наглядно представлена положительная динамика результатов работы за пять лет трёх учреждений, деятельность которых отвечает разработанной в исследовании методологии и концепции работы с одарёнными детьми.

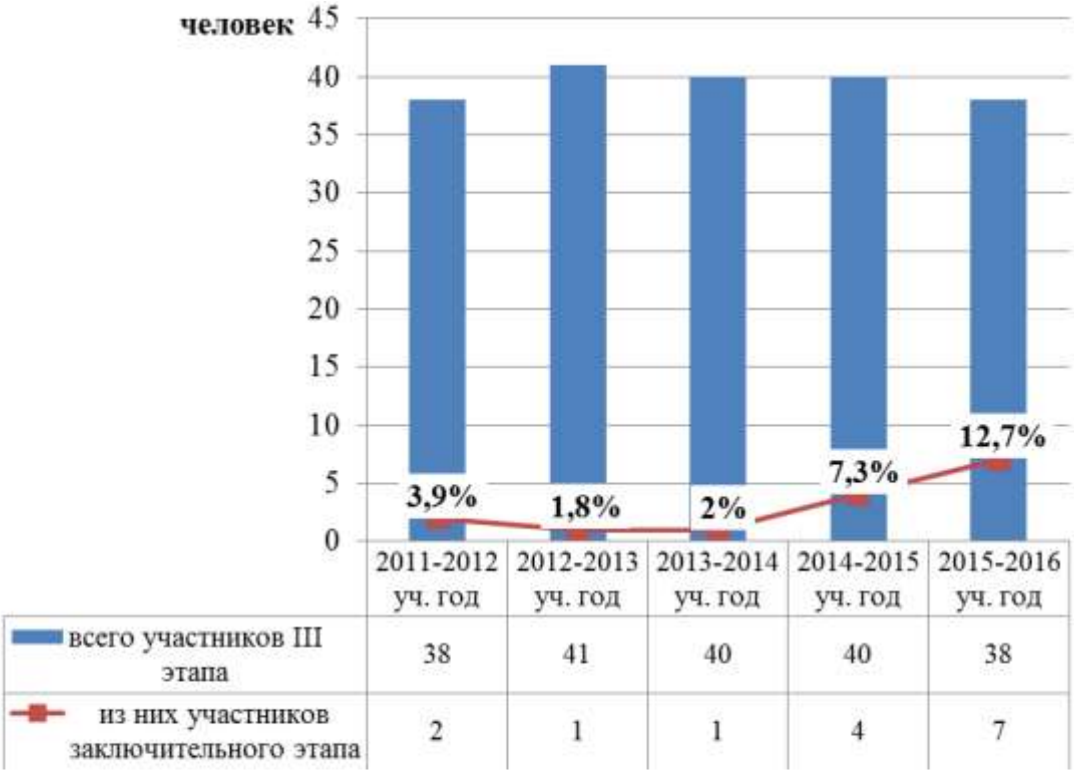



*Рисунок 3 – Доля учащихся Республики Адыгея – участников III этапа, принявших участие в заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике*

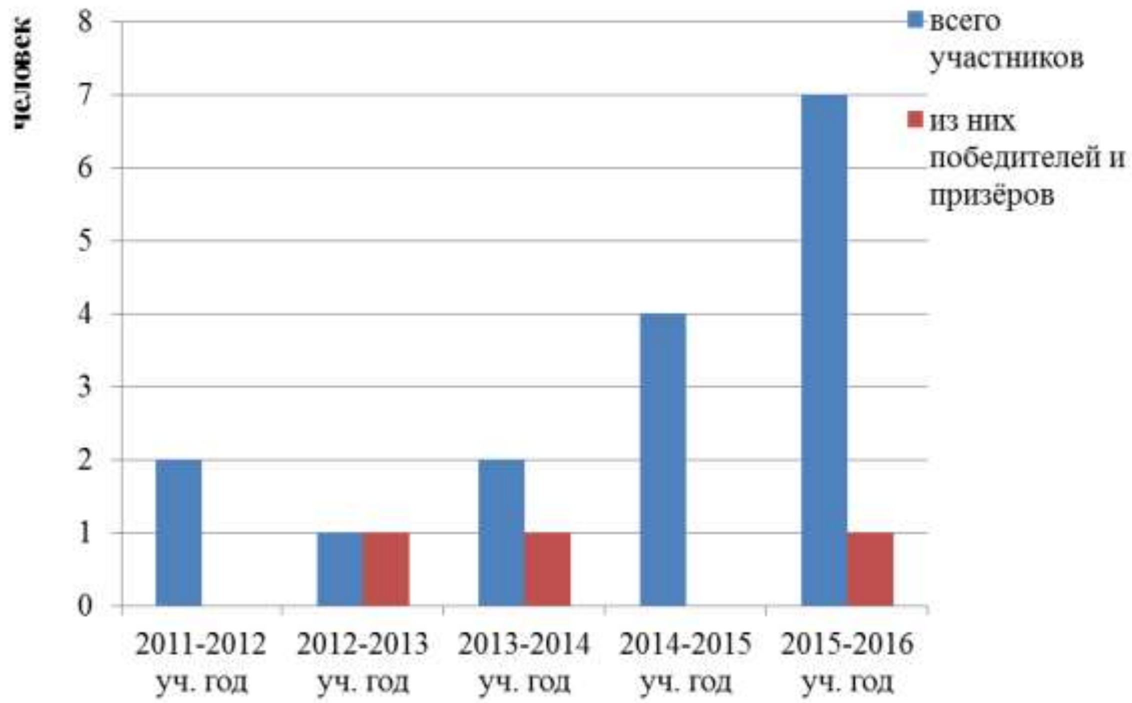



*Рисунок 4 – Количество учащихся Республики Адыгея, принявших участие во Всероссийской олимпиаде школьников по математике (заключительный этап)*

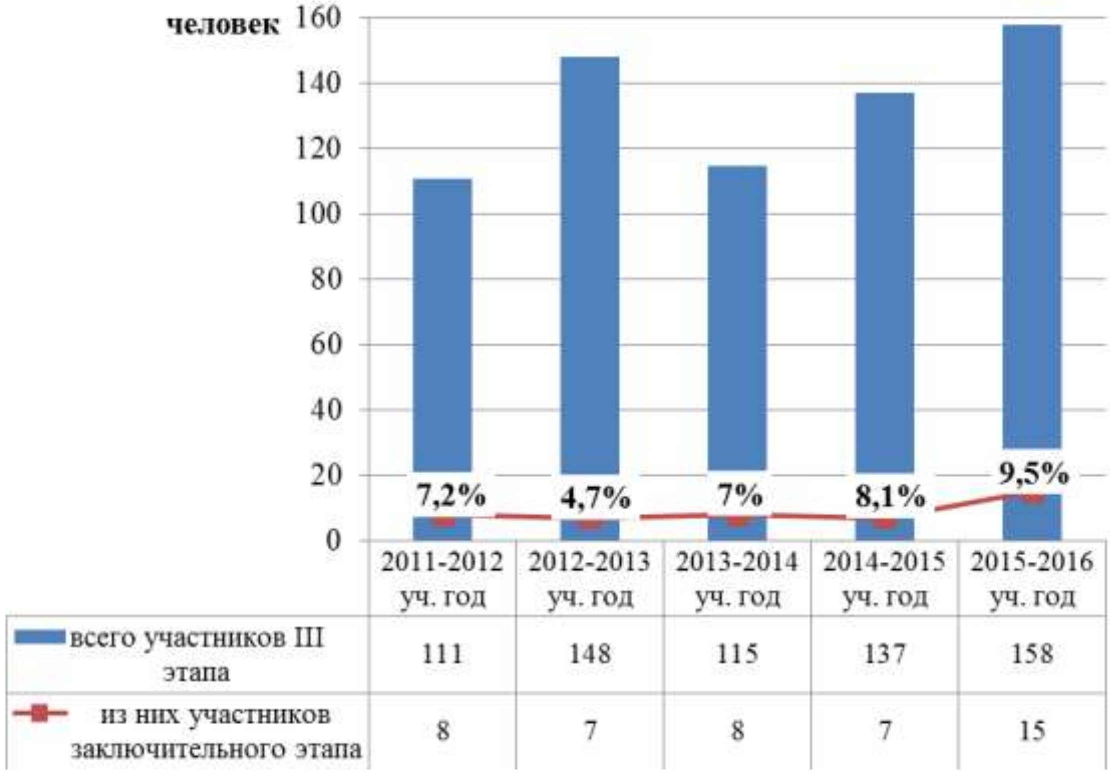



*Рисунок 5 – Доля учащихся Кировской области – участников III этапа, принявших участие в заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике*

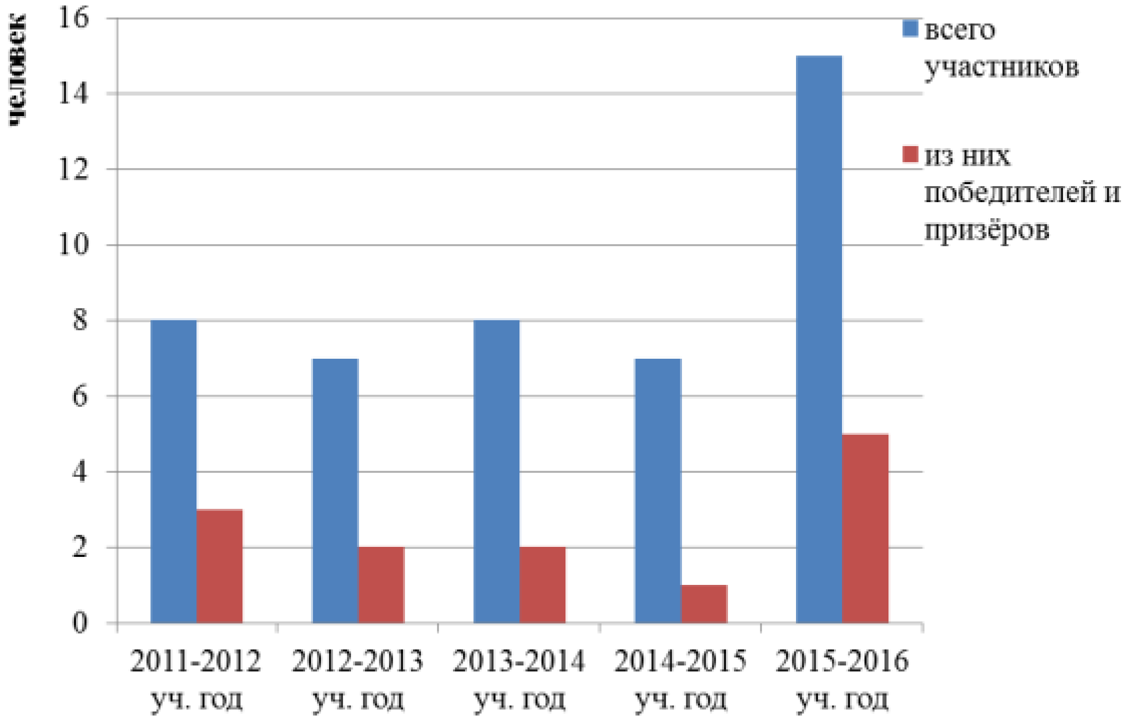
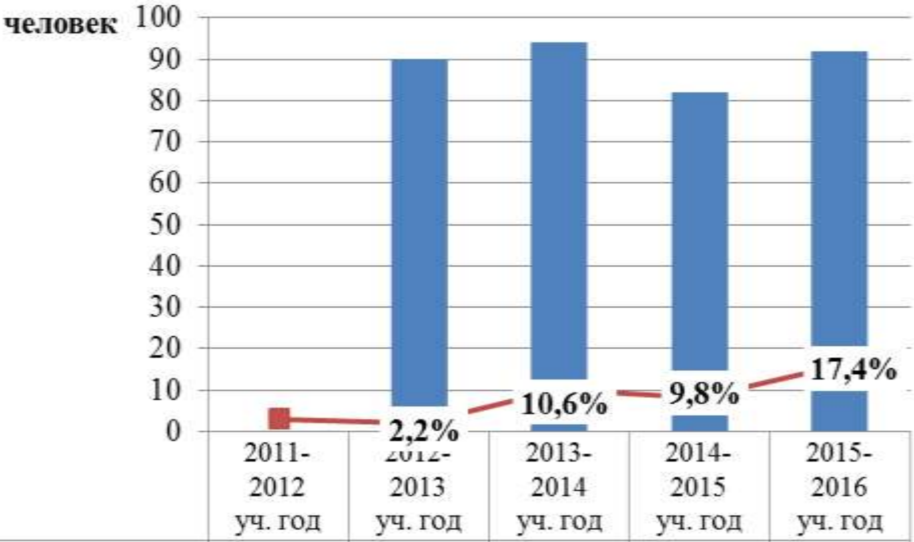



*Рисунок 6 – Количество учащихся Кировской области, принявших участие во Всероссийской олимпиаде школьников по математике (заключительный этап)*

В 2018 году **Сергей Лучинин** был включён в состав сборной команды России по математике и завоевал на Международной математической олимпиаде серебряную медаль.




| | 2011-2012 уч. год | 2012-2013 уч. год | 2013-2014 уч. год | 2014-2015 уч. год | 2015-2016 уч. год |
|---|---|---|---|---|---|
| всего участников III этапа | | 90 | 94 | 82 | 92 |
| из них участников заключительного этапа | 3 | 2 | 10 | 8 | 16 |

*Рисунок 7 – Доля учащихся Ярославской области – участников III этапа, принявших участие в заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике*

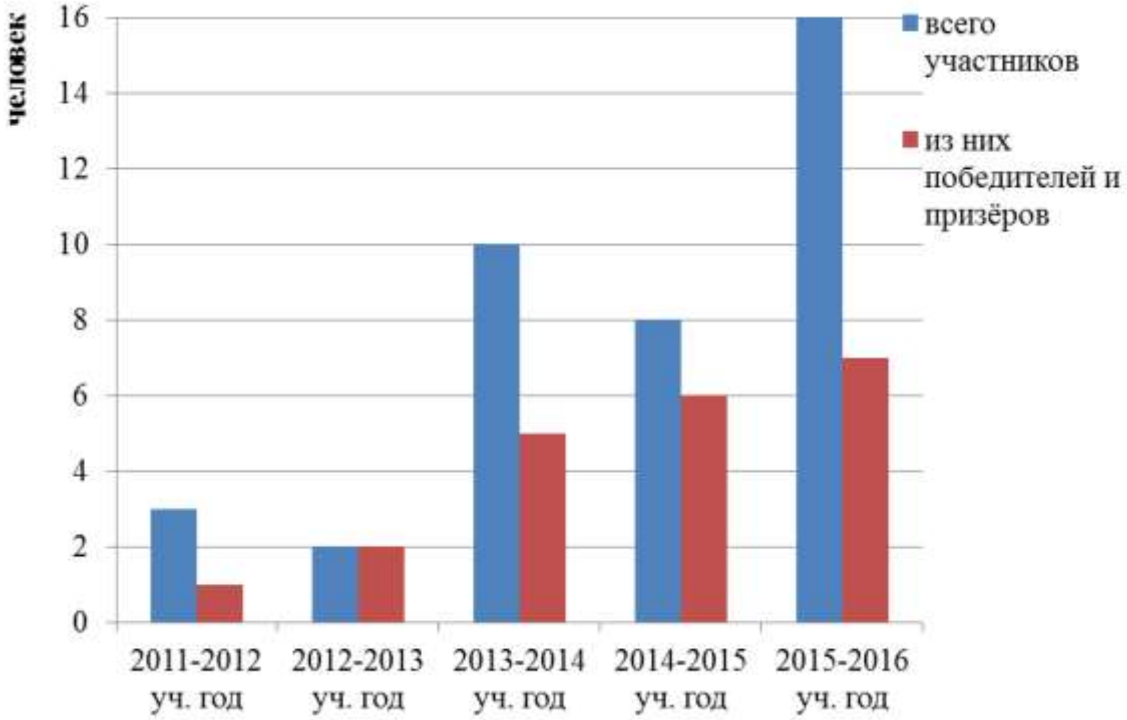



*Рисунок 8 – Количество учащихся Ярославской области, принявших участие во Всероссийской олимпиаде школьников по математике (заключительный этап)*

В 2017 году **Георгий Вепрев** был включён в состав сборной команды России по математике и завоевал на Международной математической олимпиаде серебряную медаль.

Таким образом, педагогический эксперимент подтвердил эффективность разработанной концепции работы с математически одарёнными детьми в условиях многоуровней системы предметных олимпиад и конкурсов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Исследования зарубежных и отечественных учёных демонстрируют единство взглядов на проблему математических способностей, которые включают школьные способности к усвоению математических знаний, к их репродуцированию и самостоятельному применению, творческие математические способности, связанные с самостоятельным созданием оригинального и имеющего общественную ценность продукта в сфере математической деятельности.

Главными признаками математических способностей признаются способность к обобщению, логичность и формализованность мышления, гибкость и глубина, систематичность, рациональность и аргументированность рассуждений, математическое восприятие и память.

2. Работа с одарёнными детьми рассматривается в качестве одного из приоритетных направлений развития образования во многих странах мира, в том числе и России, и направлена на создание эффективной системы для их обучения, воспитания и развития. Методологическими основаниями проектирования системы работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе математических олимпиад и конкурсов является совокупность подходов: системного, личностно ориентиро-

ванного, полисубъектного, культурологического, индивидуально-творческого, деятельностного и средового. Каждый из подходов определяет отдельные аспекты организации работы с математически одарёнными детьми, а их совокупность – проектирование целостной системы выявления, обучения и развития.

3**.** Система работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе математических олимпиад и конкурсов основана на следующих концептуальных положениях:

а) в современном мире высоких технологий важнейшей задачей становится подготовка и формирование высококвалифицированных кадров, что инициирует усиление внимания и создание условий для развития одарённых детей;

б) повышение роли математики в современном обществе вызвано все возрастающей потребностью математизации различных сфер человеческой деятельности;

в) математические олимпиады и конкурсы выступают средством выявления, отбора и самореализации математически одарённых детей;

г) успехи на интеллектуальных состязаниях помогают школьнику в определении сферы деятельности, способствуют его профессиональной ориентации;

д) поиск одарённых школьников предполагает привлечение к участию в олимпиадах и конкурсах максимально большого числа обучающихся;

е) осуществление в массовой школе подготовки к олимпиадам начального (школьного) уровня;

ж) ошибочность возложения на учителя массовой школы полноты функций поиска, мотивации и отбора одарённых учащихся;

з) формирование педагогами, осуществляющими работу со школьниками, обладающими математическими способностями, календаря математических событий с включением в него списка олимпиад и конкурсов, отвечающих задачам выявления математических способностей, в том числе с учётом математического содержания заданий;

и) мотивирование учащихся, продемонстрировавших математические способности, к дальнейшему углублённому изучению математики, выстраивание траектории их роста;

к) выделение специального вида творчества – задачного олимпиадного композиторства;

л) осуществление олимпиадного тренинга (муниципальный и последующие этапы) в рамках дополнительного образования силами высококвалифицированных педагогов средней и высшей школы, а также студентов-олимпиадников;

м) организация занятий с одарёнными школьниками не только по тематическому принципу, но с обучением также нахождению логической структуры решения задачи;

н) использование при организации дополнительного образования математически одарённых детей разнообразных форм и содержания занятий, адекватно их возможностям, образовательным потребностям и психолого-педагогическим особенностям;

о) интеллектуальные состязания школьников выступают стимулом для профессиональной самореализации педагогов;

п) работа с математически одарёнными детьми нуждается в обеспечении управленческой поддержки территориальными органами управления образованием.

4. Необходимым условием *о*бразования и самореализации математически одарённых детей является ф*ормирование мотивирующей образовательной среды,*

которая обеспечивает их развитие в четырёх сферах: интеллектуальной, коммуникативной, кооперативной, личностной.

Интеллектуальная сфера ориентирована на овладение математической деятельностью. Коммуникативная сфера предполагает формирование навыков общения у субъектов образовательной среды, которое происходит в процессе совместной деятельности. Кооперативная сфера отвечает за организацию взаимодействия субъектов образовательной среды в различных типах (сотрудничество, конкуренция) и формах. Личностная сфера обеспечивает возможности для самореализации обучающихся и педагогов посредством представления их учебных и творческих достижений в разнообразных интеллектуальных и творческих состязаниях.

5. Содержание образования математически одарённых детей в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов должно обеспечивать элемент новизны, когда учащийся должен продемонстрировать умение «нестандартно мыслить» и обеспечивать овладение математической деятельностью, что включает освоение математической теории, овладение математическими методами и моделями, развитие способности к выдвижению нестандартных идей.

В содержании образования должны быть представлены два направления: логическое и техническое. К первому относятся задачи по комбинаторике и геометрии, ко второму – по алгебре, теории чисел (арифметике), основам математического анализа. Восприятие каждого из указанных направлений наиболее успешно проходит в разном возрасте. Логического – в среднем звене школы, когда математический аппарат ещё недостаточен, но школьник уже воспринимает понятие доказательства, к техническому школьник может быть подготовлен только в результате овладения им всем необходимым математическим инструментарием, т.е. в старших классах школы.

6. Формы проведения математических соревнований на каждом возрастном этапе обучения математически одарённых детей должны выбираться с учётом их возможностей, образовательных потребностей и психолого-педагогических особенностей. Базовые сценарии математических соревнований как личные, так и командные, различаются подходами к решению задач и включают три варианта (олимпиада, блиц, тест). Каждый из сценариев имеет устоявшиеся варианты. Олимпиады могут быть письменными и устными. Стоимость задач может быть одинаковой либо различной. Сценарий проведения игры может быть конкурентным и неконкурентным. Наиболее зрелищными и динамичными являются конкурентные сценарии, которые соответствуют особенностям подросткового возраста – стремлению к состязательности.

7. Реализация концепции работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов может осуществляться посредством создания различных организационных структур, осуществляющих работу с математически одарёнными детьми в условиях региона, обусловленных его особенностями и возможностями, сложившимися традициями. Наиболее продуктивными являются модели, которые основаны на использовании сетевого взаимодействия между организациями общего и высшего образования, обеспечивают дистанционную поддержку и предоставление различных форм математических состязаний, популяризацию математики, вовлечение и стимулирование педагогов общеобразовательных школ к работе с математически одарёнными детьми.

**Основные положения диссертационного исследования изложены в следующих публикациях:**

**I. Монографии**

1. Агаханов, Н.Х. Всероссийская олимпиада школьников по математике в 2006 году / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский; науч. ред. Э.М. Никитин. – М.: АПК и ППРО, 2006. – 160 с. (личный вклад 50%).
2. Агаханов, Н. Х. Теория и практика работы с математически одаренными детьми: монография / Н.Х. Агаханов, Т.Ф. Сергеева, О.К. Подлипский. – М.: ИЛЕКСА, 2018. – 287 с. – 19,98 п. л. (личный вклад 40%).

**II. Научные статьи**

**а) опубликованные в ведущих российских периодических изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России для публикации основных положений докторской диссертации:**

3. Агаханов, Н.Х. Третий этап XVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, А.Ю. Калинин, Л.П. Купцов [и др.] // Математика в школе. – 1992. – № 2/3. – С. 39. – 0,06 п. л. (личный вклад 20%).
4. Агаханов, Н.Х. Третий этап XIX Всероссийской математической олимпиады школьников / Н.Х. Агаханов, А.Ю. Калинин, Л.П. Купцов [и др.] // Математика в школе. – 1993. – № 2. – С. 45. – 0,06 п. л. (личный вклад 17%).
5. Агаханов, Н.Х. Второй этап XX Российской математической олимпиады школьников / Н.Х. Агаханов, А.Ю. Калинин, С.В. Резниченко [и др.] // Математика в школе. – 1994. – № 2. – С. 51.– 0,06 п. л. (личный вклад 17%).
6. Агаханов, Н.Х. Третий этап XX Российской математической олимпиады школьников / Н.Х. Агаханов, А.Ю. Калинин, С.В. Резниченко [и др.] // Математика в школе. – 1994. – № 3. – С. 49. – 0,06 п. л. (личный вклад 20%).
7. Агаханов, Н.Х. Заключительные этапы XX Российской математической олимпиады школьников / Н.Х. Агаханов, А.Ю. Калинин, С.В. Резниченко [и др.] // Математика в школе. – 1994. – № 6. – С. 56.– 0,06 п. л. (личный вклад 17%).
8. Агаханов, Н.Х. Заключительные этапы Всероссийской математической олимпиады школьников / Н.Х. Агаханов, А.Ю. Калинин, С.В. Резниченко [и др.] // Математика в школе. – 1995. – № 1. – С. 66.– 0,06 п. л. (личный вклад 17%).
9. Агаханов, Н.Х. 35-я Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, А.А. Фомин // Математика в школе. – 1995. – № 2. – С. 54. – 0,06 п. л. (личный вклад 50%).
10. Агаханов, Н.Х. Второй этап XXI Российской математической олимпиады школьников / Н.Х. Агаханов, А.С. Кочерова, С.В. Резниченко [и др.] // Математика в школе. – 1995. – № 3. – С. 42. – 0,06 п. л. (личный вклад 20%).
11. Агаханов, Н.Х. Третий этап XXI Российской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, С.В. Резниченко, Д.Е. Тамаркин [и др.] // Математика в школе. – 1995. – № 4. – С. 48. – 0,06 п. л. (личный вклад 25%).
12. Агаханов, Н.Х. Зональный этап XXI Российской математической олимпиады школьников / Н.Х. Агаханов, С.В. Резниченко, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 1995. – № 6. – С. 49. – 0,06 п. л. (личный вклад 33%).
13. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап XXI Российской математической олимпиады / Н.Х. Агаханов, С.В. Резниченко, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 1996. – № 1. – С. 57. – 0,06 п. л. (личный вклад 33%).
14. Агаханов, Н.Х. XXXVII Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, Г.М. Кузнецова, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 1997. – № 1. – С. 67. – 0,06 п. л. (личный вклад 33%).
15. Агаханов, Н.Х. XXXVIII Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, Г.М. Кузнецова // Математика в школе. – 1998. – № 1. – С. 78. – 0,06 п. л. (личный вклад 50%).

16. Агаханов, Н.Х. Московская областная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, Р.Н. Карасев, С.П. Коновалов [и др.] // Математика в школе. – 1999. – № 2. – С. 55 – 59. – 0,31 п. л. (личный вклад 25%).

17. Агаханов, Н.Х. Третий этап XXV Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, Р.Н. Карасев, С.И. Токарев [и др.] // Математика в школе. – 1999. – № 3. – С. 64 – 70. – 0,44 п. л. (личный вклад 25%).

18. Агаханов, Н.Х. IV этап XXV Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 1999. – № 5. – С. 56 – 62. – 0,44 п. л. (личный вклад 33%).

19. Агаханов, Н.Х. Финал XXV Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин, М.В. Смуров // Математика в школе. – 1999. – № 6. – С. 47. – 0,06 п. л. (личный вклад 33%).

20. Агаханов, Н.Х. XLI Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, Г.М. Кузнецова, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2000. – № 9. – С. 55 – 61. – 0,44 п. л. (личный вклад 33%).

21. Агаханов, Н.Х. Третий этап XXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2002. – № 1. – С. 57 – 66. – 0,62 п. л. (личный вклад 25%).

22. Агаханов, Н.Х. Второй этап XXVIII Всероссийской математической олимпиады школьников в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2002. – № 3. – С. 57 – 62. – 0,37 п. л. (личный вклад 50%).

23. Агаханов, Н.Х. XXIX Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2003. – № 7. – С. 48 – 58.– 0,69 п. л. (личный вклад 33%).

24. Агаханов, Н.Х. Российские олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.С. Медведева // Математика в школе. – 2007. – № 5. – С. 73 – 80. – 0,5 п. л. (личный вклад 50%).

25. Агаханов, Н.Х. XXXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников (IV этап) / Н.Х. Агаханов, О.С. Медведева // Математика в школе. – 2007. – № 9. – С. 67 – 76. – 0,62 п. л. – ISSN 0130-9358. (личный вклад 50%).

26. Агаханов, Н.Х. XXXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников (V этап, заключительный) / Н.Х. Агаханов, О.С. Медведева // Математика в школе. – 2007. – № 10. – С. 60 – 71. – 0,75 п. л. (личный вклад 50%).

27. Агаханов, Н.Х. Задачи по геометрии на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2010. – № 3. – С. 68 – 74. – 0,44 п. л. (личный вклад 33%).

28. Агаханов, Н.Х. Идея четности в задачах муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2010. – № 7. – С. 55 – 63. – 0,56 п. л. (личный вклад 33%).

29. Агаханов, Н.Х. Квадратичная функция в задачах муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2010. – № 9. – С. 60 – 66. – 0,44 п. л. (личный вклад 33%).

30. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2010 г. в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2011. – № 4. – С. 46 – 55. – 0,62 п. л. (личный вклад 50%).

31. Агаханов, Н.Х. Опыт работы МФТИ по отбору, профессиональной ориентации и мотивации к научной деятельности одаренной в области физики и математики молодежи / Н.Х. Агаханов, М.В. Балашов, В.С. Булыгин [и др.] // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 3. – С. 171 – 173. (личный вклад 7%).

32. Агаханов, Н.Х. О работе МФТИ с учащимися и учителями профильных физико-математических учреждений общего образования и центров дополнительного образования

для одаренных детей / Н.Х. Агаханов, А.А. Воронов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, Ю.А. Самарский, В.П. Слободянин, Д.А. Терёшин // Труды МФТИ, – 2012. – Т. 4, № 4 – С. 3–7. – 0,3 п. л. (личный вклад 14%).

33. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике (9 кл.) / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Математика в школе. – 2012. – № 1. – С. 55 – 63. – 0,56 п. л. (личный вклад 20%).

34. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике (10 – 11 кл.) / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Математика в школе. – 2012. – № 2. – С. 55 – 64. – 0,62 п. л. (личный вклад 20%).

35. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Смоленске / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, А.И. Гарбер [и др.] // Известия Смоленского государственного университета. – 2012. – № 3 (19). – С. 543 – 567. (личный вклад 16,7%).

36. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XXXVIII всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2012. – № 6. – С. 43 – 52. – 0,62 п. л. (личный вклад 50%).

37. Агаханов, Н.Х. Математические олимпиады школьников в Китае / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Математика в школе. – 2012. – № 9. – С. 53 – 61. – 0,37 п. л. (личный вклад 20%).

38. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2011/2012 учебного года (9 класс) / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Математика в школе. – 2012. – № 10. – С. 16 – 21. – 0,37 п. л. (личный вклад 20%).

39. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2011/2012 учебного года (10 класс) / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Математика в школе. – 2013. – № 1. – С. 23 – 29. – 0,44 п. л. (личный вклад 20%).

40. Агаханов, Н.Х. Средовый подход как условие развития математически одаренных школьников / Н.Х. Агаханов // Вестник ТГПУ. – 2013. – № 1 (129). – С. 120 – 124. – 0,25 п. л.

41. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2011/2012 учебного года (11 класс) / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Математика в школе. – 2013. – № 2. – С. 34 – 44. – 0,69 п. л. (личный вклад 20%).

42. Агаханов, Н.Х. Олимпиада «Физтех-2012» по математике / Н.Х. Агаханов, С.Е. Городецкий, М.И. Шабунин [и др.] // Математика в школе. – 2013. – № 5. – С. 28 – 34. – 0,44 п. л. (личный вклад 9%).

43. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (часть 1) / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2013. – № 7. – С. 19 – 22. – 0,25 п. л. (личный вклад 50%).

44. Агаханов, Н.Х. С. О геометрических свойствах парабол и гиперболы / Н.Х. Агаханов, Я.С. Агаханова, // Математика в школе. – 2013. – № 8. – С. 24 – 33. – 0,62 п. л. (личный вклад 50%).

45. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (часть 2) / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2013. – № 8. – С. 34 – 42. – 0,5 п. л. (личный вклад 50%).

46. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2012/2013 учебного года / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2013. – № 9. – С. 36 – 46. – 0,69 п. л. (личный вклад 20%).

47. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XL Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Часть 1 / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2014. – № 3. – С. 31 – 37. – 0,44 п. л. (личный вклад 50%).

48. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XL Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Часть 2 / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2014. – № 4. – С. 23 – 27– 0,31 п. л. (личный вклад 50%).
49. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2013/2014 учебного года / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2014. – № 9. – С. 37 – 40. – 0,25 п. л. (личный вклад 20%).
50. Агаханов, Н.Х. Онлайн-тур олимпиады «Физтех-2014» по математике / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский [и др.] // Математика в школе. – 2014. – № 10. – С. 22 – 28. – 0,44 п. л. (личный вклад 25%).
51. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2015. – № 4. – С. 22 – 33. – 0,75 п. л. (личный вклад 50%).
52. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2016. – № 2. – С. 14 – 26. – 0,81 п. л. (личный вклад 50%).
53. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2015» по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, С.Е. Городецкий [и др.] // Математика в школе. – 2016. – № 3. – С. 13 – 25. – 0,17 п. л. (личный вклад 25%).
54. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015 / 2016 учебного года / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2016. – № 5. – С. 16 – 28. – 0,81 п. л. (личный вклад 20%).
55. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2016» по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов [и др.] // Математика в школе. – 2016. – № 7. – С. 11 – 22. – 0,75 п. л. (личный вклад 12%).
56. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2017. – № 3. – С. 21 – 33. – 0,81 п. л. (личный вклад 50%).
57. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2016/2017 учебного года / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Математика в школе. – 2017. – № 5. – С. 27 – 39. – 0,81 п. л. (личный вклад 25%).
58. Агаханов, Н.Х. Онлайн-этап олимпиады «Физтех» 2017 года по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2017. – № 6. – С. 14 – 21. – 0,5 п. л. (личный вклад 50%).
59. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2017» по математике. Ч. 1 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов [и др.] // Математика в школе. – 2017. – № 7. – С. 20 – 29. – 0,625 п. л. (личный вклад 11%).
60. Агаханов, Н.Х. Применение теоремы Виета для решения задач повышенной сложности / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, С.В. Щербатых // Математика в школе. – 2017. – № 8. – С. 41 – 47. – 0,44 п. л. (личный вклад 33%).
61. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2017» по математике. Ч. 2 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов [и др.] // Математика в школе. – 2017. – № 8. – С. 20 – 30. – 0,69 п. л. (личный вклад 11%).
62. Агаханов, Н.Х. Формирование мотивирующей образовательной среды развития математически одаренных школьников / Н.Х. Агаханов, С.В. Щербатых // Вестник ТГПУ. 2017. – № 12 (189). – С. 134 – 138. – 0,31 п. л. (личный вклад 50%).
63. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2018. – № 2. – С. 16 – 26. – 0,69 п. л. (личный вклад 50%).
64. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Phystech.International» по математике 2017-2018 учебного года / Н.Х. Агаханов, И.В. Глухов, С.Е. Городецкий,

О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2018. – № 3. – С. 14 – 20. – 0,44 п. л. (личный вклад 25%).
65. Агаханов, Н.Х. Математические способности в исследованиях зарубежных и отечественных ученых / Н.Х. Агаханов // Профильная школа. – 2018. – Вып. № 4 (91). – № 4. – С. 3 – 10 – 0,75 п. л.
66. Агаханов, Н.Х. Система работы с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов / Н.Х. Агаханов // Профильная школа. – 2018. – Вып. № 5 (92). – № 5. – С. 19 – 26 – 0,75 п. л.
67. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017/2018 учебного года / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2018. – № 4. – С. 17 – 32. – 0,37 п. л. (личный вклад 25%).
68. Агаханов, Н.Х. Онлайн-этап олимпиады «Физтех» 2018 года по математике / Н.Х. Агаханов, И.В. Глухов, С.Е. Городецкий, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2018. – № 5. – С. 12 – 19. – 0,50 п. л. (личный вклад 25%).
69. Агаханов, Н.Х., Заключительный этап олимпиады «Физтех-2018» по математике. Часть 1 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2018. – № 6. – С. 8 – 15. – 0,5 п. л. (личный вклад 14%).
70. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2018» по математике. Часть 2 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2018. – № 7. – С. 22 – 28. – 0,44 п. л. (личный вклад 14%).
71. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2019. – № 2. – С. 18 – 28. – 0,69 п. л. (личный вклад 50%).
72. Агаханов, Н.Х. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2018/2019 учебного года (Первый день) / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов // Математика в школе. – 2019. – № 4. – С. 11 – 21. – 0,69 п. л. (личный вклад 20%).
73. Агаханов, Н.Х. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2018/2019 учебного года (Второй день) / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов // Математика в школе. – 2019. – № 5. – С. 15 – 25. – 0,69 п. л. (личный вклад 20%).
74. Агаханов, Н.Х. Онлайн-этап олимпиады «Физтех-2019» по математике / Н.Х. Агаханов, И.В. Глухов, С.Е. Городецкий, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2019. – № 6. – С. 17 – 27. – 0,69 п. л. (личный вклад 25%).
75. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2019» по математике. Часть 1 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головко, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Ю.В. Кузьменко, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2019. – № 8. – С. 11 – 22. – 0,75 п. л. (личный вклад 11%).
76. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2019» по математике. Часть 2 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головко, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Ю.В. Кузьменко, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2020. – № 1. – С. 31 – 42. – 0,75 п. л. (личный вклад 11%).
77. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. 2020. – № 3. – С. 18 – 27. – 0,50 п. л. (личный вклад 50%).
78. Агаханов, Н.Х. Школьный этап XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2020. – № 4. – С. 24 – 31. – 0,50 п. л. (личный вклад 50%).
79. Агаханов, Н.Х. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2019/2020 учебного года (Первый день) /

Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов // Математика в школе. – 2020. – № 5. – С. 12 – 19. – 0,50 п. л. (личный вклад 20%).

80. Агаханов, Н.Х. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2019/2020 учебного года (Второй день) / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов // Математика в школе. – 2020. – № 6. – С. 10 – 20. – 0,69 п. л. (личный вклад 20%).

81. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2020» по математике. Часть 1 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головко, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Ю.В. Кузьменко, Е.Г. Молчанов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2020. – № 6. – С. 21 – 29. – 0,5 п. л. (личный вклад 10%).

82. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2020» по математике. Часть 2 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головко, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Ю.В. Кузьменко, Е.Г. Молчанов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2020. – № 7. – С. 16 – 25. – 0,62 п. л. (личный вклад 10%).

83. Агаханов, Н.Х. О методах решения олимпиадных задач / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2020. – №.8. – С. 11 – 24. – 0,87 п. л. (личный вклад 50%).

84. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2021. – № 3. – С. 6-16. – 0,69 п. л. (личный вклад 50%).

85. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2021» по математике. 11 класс / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головко, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Н.Ю. Королёв, Ю.В. Кузьменко, Е.Г. Молчанов, П.А. Останин, О.К. Подлипский, С.М. Саулин, А.А. Скубачевский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2021. – № 6. – С. 6 – 16. – 0,69 п. л. (личный вклад 7%).

86. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2021» по математике. 9 и 10 классы / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головко, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Н.Ю. Королёв, Ю.В. Кузьменко, Е.Г. Молчанов, П.А. Останин, О.К. Подлипский, С.М. Саулин, А.А. Скубачевский, Д.А. Терёшин // Математика в школе. – 2021. – № 7. – С. 12 – 18. – 0,44 п. л. (личный вклад 7%).

87. Агаханов, Н.Х. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2020/2021 учебного года (первый день) / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов // Математика в школе. – 2021. – № 7. – С. 19 – 30. – 0,75 п. л. (личный вклад 20%).

88. Агаханов, Н.Х. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2020/2021 учебного года (Второй день) / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов // Математика в школе. – 2021. – № 8. – С. 7 – 18. – 0,75 п. л. (личный вклад 20%).

89. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2022. – № 4. – С. 6 – 14. – 0,5 п. л. (личный вклад 50%).

90. Агаханов, Н.Х. О современных тенденциях в подготовке школьников к математическим олимпиадам / Н.Х. Агаханов, О.Г. Марчукова, О.К. Подлипский // Вопросы образования. – 2021. – № 4. – С. 266 – 284. – 0,5 п. л. (личный вклад 33%).

91. Агаханов, Н.Х. О модели работы с математически одарёнными школьниками / Н.Х. Агаханов, О.Г. Марчукова // Научно-методический журнал «CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование». – Елец. – 2022. – № 2 (26). – С. 8 – 21. – 0,87 п. л. (личный вклад 50%).

**б) опубликованные в международных, российских и региональных периодических изданиях, материалах конференций, вузовских сборниках**

92. Агаханов, Н.Х. XXVIII Всероссийская олимпиада по математике / Г.Н. Яковлев, Н.Х. Агаханов, А.Ю. Калинин [и др.] // Квант. – 1992. – № 10. – С. 60. (личный вклад 16,7%).

93. Агаханов, Н.Х. XIX Всероссийская олимпиада школьников по математике /

Н.Х. Агаханов, А.Ю. Калинин, Д.А. Митькин [и др.] // Квант. – 1993. – № 2/3. – С. 60. (личный вклад 16,7%).
94. Агаханов, Н.Х. XXXVI Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин // Квант. – 1995. – № 6. – С. 50. (личный вклад 50%).
95. Агаханов, Н.Х. XXII Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, А.П. Савин // Квант. – 1996. – № 5. – С. 52 – 54, 61 – 64. (личный вклад 50%).
96. Агаханов, Н.Х. XXXVII Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, С.Е. Рукшин, Д.А. Терёшин // Квант. – 1996. – № 6. – С. 46. (личный вклад 33%).
97. Агаханов, Н.Х. XXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников / Н.Х. Агаханов // Квант. – 1997. – № 5. – С. 46 – 49, 58 – 63. – 0,62 п. л.
98. Агаханов, Н.Х. XXIV Всероссийская математическая олимпиада школьников / Н.Х. Агаханов // Квант. – 1998. – № 5. – С. 50 – 53, 59 – 64. – 0,62 п. л.
99. Агаханов, Н.Х. XXV Всероссийская математическая олимпиада школьников / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин // Квант. – 1999. – № 5. – С. 48 – 52, 61 – 63. – 0,5 п. л. (личный вклад 50%).
100. Агаханов, Н.Х. Курсы повышения квалификации учителей России по физике и математике как элемент поддержки образования в средней школе / Н.Х. Агаханов, Ю.А. Самарский // Тезисы докладов XLIII научной конференции Московского физико-технического института. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть VII. – М.: МФТИ, 2000. (личный вклад 50%).
101. Агаханов, Н.Х. Научно-методическая работа по подготовке и проведению всероссийских олимпиад по математике и физике, подготовке национальных сборных России / Г.Н. Яковлев, Н.Х. Агаханов, Ю.А. Самарский [и др.] // Тезисы докладов XLIII научной конференции Московского физико-технического института. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть VII. – М.: МФТИ, 2000. (личный вклад 20%).
102. Агаханов, Н.Х. Особенности подготовки национальной команды школьников России на 41-ю Международную математическую олимпиаду (июль 2000 г., Ю. Корея) / Г.Н. Яковлев, Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Тезисы докладов XLIII научной конференции Московского физико-технического института. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть VII. – М.: МФТИ, 2000 – С. 32. (личный вклад 33%).
103. Агаханов, Н.Х. XL Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин // Квант. – 2000. – № 2. – С. 46 – 47. (личный вклад 50%).
104. Агаханов, Н.Х. XLI Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин // Квант. – 2001. – № 2. – С. 48 – 49. (личный вклад 50%).
105. Агаханов, Н.Х. XXVII Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин // Квант. – 2001. – № 5. – С. 48 – 51, 57 – 61. (личный вклад 50%).
106. Агаханов, Н.Х. XLII Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин // Квант. – 2002. – № 2. – С. 44 – 46. (личный вклад 50%).
107. Агаханов, Н.Х. XXVIII Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин // Квант. – 2002. – № 5. – С. 48 – 52, 61 – 64. (личный вклад 33%).
108. Агаханов, Н.Х. XLIII Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин // Квант. – 2003. – № 2. – С. 46 – 50. (личный вклад 50%).
109. Агаханов, Н.Х. XXIX Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин // Квант. – 2003. – № 5. – С. 44 – 47, 59 – 63. (личный вклад 33%).
110. Агаханов, Н.Х. XLIV Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин // Квант. – 2004. – № 2. – С. 48 – 51. (личный вклад 50%).
111. Агаханов, Н.Х. XXX Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин // Квант. – 2004. – № 5. – С. 44 – 47, 60 – 63. (личный вклад 50%).

112. Агаханов, Н.Х. О работе МФТИ по организации и проведению предметных олимпиад школьников в Московской области / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин // Труды XLVIII научной конференции Московского физико-технического института (государственного университета). Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Ч. XI. – М.: МФТИ, 2005. – С. 52 – 53. (личный вклад 33%).

113. Агаханов, Н.Х. О математических олимпиадах школьников / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Труды XLVIII научной конференции Московского физико-технического института (государственного университета). Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Ч. XI. – М.: МФТИ, 2005. – С. 51. (личный вклад 50%).

114. Агаханов, Н.Х. XLV Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин // Квант. – 2005. – № 2. – С. 49 – 53. (личный вклад 33%).

115. Агаханов, Н.Х. XXXI Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин // Квант. – 2005. – № 5. – С. 45 – 48, 60 – 63. (личный вклад 33%).

116. Агаханов, Н.Х. 54-я национальная олимпиада Болгарии по математике / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников // Потенциал. – 2005 – № 6. (личный вклад 50%).

117. Агаханов, Н.Х. 46-я Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин // Потенциал. – 2005. – № 7. – С. 74 – 80. (личный вклад 33%).

118. Агаханов, Н.Х. О математических олимпиадах школьников / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Труды XLIX научной конференции Московского физико-технического института (государственного университета). Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Ч. IX. – М.: МФТИ, 2005. – С. 30 – 31. (личный вклад 50%).

119. Агаханов, Н.Х. Тематика математических олимпиад / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Труды XLIX научной конференции Московского физико-технического института (государственного университета). Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Ч. IX. – М.: МФТИ, 2005. – С. 48 – 50. (личный вклад 50%).

120. Агаханов, Н.Х. Принципы отбора и подготовки команды на Международную математическую олимпиаду / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский // Труды XLIX научной конференции Московского физико-технического института (государственного университета). Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Ч. IX. – М.: МФТИ, 2006. – С. 35 – 36. (личный вклад 33%).

121. Агаханов, Н.Х. Всероссийская олимпиада школьников по математике: история и современность (с материалами II и III этапов) / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика (приложение к газете ПС). – 2006. – № 15. – С. 2 – 11. (личный вклад 50%).

122. Агаханов, Н.Х. 47-я Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин // Потенциал. – 2006. – № 10. – С. 58 – 65. (личный вклад 33%).

123. Агаханов, Н.Х. XLVI Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин // Квант. – 2006. – № 2. – С. 49 – 51. (личный вклад 33%).

124. Агаханов, Н.Х. XXXII Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский [и др.] // Квант. – 2006. – № 5. – С. 46 – 49, 61 – 63. (личный вклад 25%).

125. Агаханов, Н.Х. XLVII Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин // Квант. – 2007. – № 2. – С. 48 – 51. (личный вклад 33%).

126. Агаханов, Н.Х. XXXIII Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – 2007. – № 5. – С. 48 – 52, 59 – 63. (личный вклад 25%).

127. Агаханов, Н.Х. Летние учебно-тренировочные сборы по подготовке команд школьников России к международным математическим олимпиадам / Н.Х. Агаханов // Математика. – 2007. – № 15. – С. 9 – 10.

128. Агаханов, Н.Х. XLVIII Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, М.Я. Пратусевич [и др.] // Квант. – 2008. – № 2. – С. 49 – 51. (личный вклад 25%).

129. Агаханов, Н.Х. XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – 2008. – № 5. – С. 51 – 54, 61 – 64. (личный вклад 20%).

130. Агаханов, Н.Х. XLIX Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин [и др.] // Квант. – 2008. – № 6. – С. 39 – 41. (личный вклад 25%).

131. Агаханов, Н.Х. Экзаменационные работы по алгебре для математических и физико-математических классов / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика. – 2008. – № 11. – 0,75 п. л. (личный вклад 50%).

132. Агаханов, Н.Х. Математическая одаренность. Поиск отбор и сопровождение одаренных школьников / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Наука и образование эпохи нового возрождения в мировой научно-образовательной системе. Материалы Международной научной конференции.(9 – 11 сентября 2009 года). – Ашхабад, 2009 – С. 117 – 118 (личный вклад 33%).

133. Агаханов, Н.Х. Региональный этап XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – № 2. – 2009. – С. 54 – 55, 61 – 64. (личный вклад 20%).

134. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – № 5. – 2009. – С. 49 – 51, 60 – 63. (личный вклад 20%).

135. Агаханов, Н.Х. L Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – № 6. – 2009. – С. 48 – 50. (личный вклад 20%).

136. Агаханов, Н.Х. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Ч. XII. – М.: МФТИ, 2010 – С. 32 – 33. (личный вклад 33%).

137. Агаханов, Н.Х. Программа «Наша новая школа». Модернизация системы работы с математически одаренными школьниками / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Ч. XII. – М.: МФТИ, 2010. – С. 34 – 35. (личный вклад 33%).

138. Агаханов, Н.Х. Региональный этап XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – 2010. – № 2. – С. 54 – 55, 61 – 64. (личный вклад 20%).

139. Агаханов, Н.Х. Задачи по геометрии на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика для школьников. – 2010. – № 2 – С. 20 – 27. – 0,5 п. л. (личный вклад 33%).

140. Агаханов, Н.Х. Задачи по геометрии на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Математика для школьников. – 2010. – № 3. – С. 68 – 74. – 0,44 п. л. (личный вклад 33%).

141. Агаханов, Н.Х. Математическая олимпиада школьников. Romanian Master of Mathematics 2010 (Румыния г. Бухарест) / Н.Х. Агаханов, И.И Богданов, П.А. Кожевников // Потенциал. – 2010. – № 4. – С. 71 – 72. (личный вклад 33%).

142. Агаханов, Н.Х. Региональный этап XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – 2011. – № 2. – С. 52 – 53, 60 – 63. (личный вклад 20%).

143. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – 2011. – № 5. – С. 50 – 52, 61 – 64. (личный вклад 20%).

144. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – 2011. – № 5 – 6. – С. 47 – 49, 70 – 73. (личный вклад 20%).

145. Агаханов, Н.Х. Современный российский опыт работы по отбору, сопровождению и подготовке школьников к математическим соревнованиям / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Труды Международной научно-методической конференции «Роль новых технологий в реализации реформ образования Президента Туркменистана Гурбангулы Бермухамедова и современные методы обучения». – Ашхабад, 2011. – С. 151 – 153. (личный вклад 33%).

146. Агаханов, Н.Х. Методическое сопровождение регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин // Тезисы Всероссийской научной школы «Технологии работы с талантливой молодежью для решения задач модернизации страны». – М.: МФТИ, 2011. – С. 8 – 10. (личный вклад 33%).

147. Агаханов, Н.Х. О технологиях взаимодействия МФТИ с учителями, школьниками и студентами в области математики / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский [и др.] // Гуманитарные науки. Труды 55-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе», Научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики и астрономии», Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». – М.: МФТИ, 2012. – С. 35 – 36. (личный вклад 20%).

148. Агаханов, Н.Х. Опыт проведения курсов повышения квалификации учителей математики и физики в МФТИ / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский [и др.] // Гуманитарные науки. Труды 55-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе», Научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики и астрономии», Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». – М.: МФТИ, 2012. – С. 37 – 38. (личный вклад 16,7%).

149. Агаханов, Н.Х. О работе МФТИ с учащимися и учителями профильных физико-математических учреждений общего образования и центров дополнительного образования для одаренных детей / Н.Х. Агаханов, А.А. Воронов, П.А. Кожевников [и др.] // Труды МФТИ. – 2012. – Т. 4. – № 4. – С. 3 – 7. (личный вклад 14,3%).

150. Агаханов, Н.Х. Региональный этап XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И Богданов, А.И. Гербер [и др.] // Квант. – 2012. – № 2. – С. 55 – 56, 61 – 63. (личный вклад 16,7%).

151. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап XXXVIII Всероссийской олимпиады по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, А.И. Гербер [и др.] // Квант. – 2012. – № 5-6. – С. 62 – 64, 87 – 91. (личный вклад 16,7%).

152. Агаханов, Н.Х. LII Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – 2012. – № 5-6. – с. 69 – 70, 92 – 94. (личный вклад 20%).

153. Агаханов, Н.Х. Региональный этап XXXIX Всероссийской олимпиады по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, А.И. Гербер [и др.] // Квант. – 2013. – № 2. – С. 49 – 50, 57 – 60. (личный вклад 20%).

154. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап XXXIX Всероссийской олимпиады по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, А.И. Гарбер [и др.] // Квант. – 2013. – № 5 – 6. – С. 58 – 60, 85 – 88. (личный вклад 16,7%).

155. Агаханов, Н.Х. Региональный этап XL Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, А.И. Гарбер [и др.] // «Квант». – № 2. – 2014. – С. 50 – 51, 58 – 61. (личный вклад 20%).
156. Агаханов, Н.Х. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2013/2014 учебного года / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Математика в профильной школе. Фрактал. – 2014. – № 2. – С. 37 – 47. (личный вклад 16,7%).
157. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап XL Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, А.И. Гербер [и др.] // Квант. – 2014. – № 5 – 6. – С. 61 – 63, 84 – 86. (личный вклад 20%).
158. Агаханов, Н.Х. LV Международная математическая олимпиада / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – 2014. – № 5 – 6. – С. 66 – 68, 92 – 94. (личный вклад 20%).
159. Агаханов, Н.Х. Онлайн-тур олимпиады «Физтех-2014» по математике / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский [и др.] // Математика для школьников. – 2014. – № 6. – С. 24 – 30. – 0,44 п. л. (личный вклад 25%).
160. Агаханов, Н.Х. Региональный этап XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.] // Квант. – 2015. – № 2. – С. 49 – 50, 56 – 59. (личный вклад 25%)
161. Агаханов, Н.Х. Онлайн-тур олимпиады «Физтех-2015» по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика для школьников. – 2015. – № 2. – С. 11 – 21. – 0,44 п. л. (личный вклад 50%).
162. Агаханов, Н.Х. Региональный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский // «Квант», № 3, 2017, с. 50 – 52. (личный вклад 25%).
163. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский // «Квант», 2017, № 7, с. 37 – 39. (личный вклад 25%).
164. Агаханов, Н.Х. Региональный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский // «Квант», № 3, 2018, с. 44 – 46, 55 – 59. (личный вклад 25%).
165. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, А.А. Гайфуллин, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский // «Квант», 2018, № 8, с. 39 – 41. (личный вклад 20%).
166. Городецкий, С.Е. Физико-математическая олимпиада «Физтех» / С.Е. Городецкий, Н. Х. Агаханов, [и др.] // «Квант», № 10, С. 39–43. (личный вклад 6%).
167. Агаханов, Н.Х. Региональный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский // «Квант», № 3, 2019, с. 40 – 42, 56 – 62. (личный вклад 25%).
168. Агаханов, Н.Х. Заключительный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, Д.А. Белов, И.И. Богданов, А.А. Гайфуллин, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский // «Квант», № 7, 2019, С. 40 – 43. (личный вклад 16,7%).
169. Агаханов, Н.Х. Физико-математическая олимпиада «Физтех» / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, [и др.] // «Квант», № 9, 2019, С. 44 – 52. (личный вклад 6%).
170. Агаханов, Н.Х., Региональный этап XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, М.А. Григорьев, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский // Квант», № 3, 2020, с. 48 – 49, 61 – 65. (личный вклад 20%).
171. Агаханов, Н.Х. Физико-математическая олимпиада «Физтех» / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, [и др.] // Квант, 2020, 11 – 12, 41 – 47. (личный вклад 6%).

**III. Методические рекомендации**

172. Агаханов, Н.Х. Математические олимпиады школьников. 9 класс / Н.Х. Агаханов, Л.П. Купцов, Ю.В. Нестеренко. – М.: Владос, 1997. – 207 с. (личный вклад 33%).

173. Агаханов, Н.Х. Математические олимпиады школьников. 9 класс / Н.Х. Агаханов, Л.П. Купцов, С.В. Резниченко [и др.]. – М.: Владос, 1998. – 208 с. (личный вклад 33%).

174. Агаханов, Н.Х. Школьные математические олимпиады / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин, Г.М. Кузнецова. – М.: Дрофа, 1999. – 128 с. (личный вклад 33%).

175. Агаханов, Н.Х. Школьные математические олимпиады / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин, Г.М. Кузнецова. – М.: Дрофа, 2001. – 127 с. (личный вклад 35%).

176. Агаханов Н.Х. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / Н.Х. Агаханов, В.В. Власов, Л.И. Коваленко [и др.]. – М.: Юнимедиастайл, 2002. – 256 с. (личный вклад 33%).

177. Агаханов, Н.Х. Математические олимпиады Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – М.: МФТИ, 2003. – 224 с. (личный вклад 50%).

178. Agakhanov, N. Olimpiade Matematice Rusesti: Moscova 1993 – 2002 / N. Agakhanov, O. Podlipsky. – Zalau: Gil, 2004. – 280 p. (личный вклад 50%).

179. Агаханов, Н.Х. Всероссийская олимпиада школьников по математике: методическое пособие / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский; науч. ред. Э.М. Никитин – М.: АПК и ППРО, 2005. – 140 с. (личный вклад 50%).

180. Агаханов, Н.Х. Математические олимпиады Московской области / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – М.: Физматкнига, 2006. – 320 с. (личный вклад 50%).

181. Агаханов, Н.Х. Математические олимпиады школьников: от истоков до наших дней / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Всероссийская олимпиада школьников в 2007 году. – М.: АПК и ППРО, 2007. – С. 5 – 6. (личный вклад 50%).

182. Агаханов, Н.Х. XXXIII Всероссийская олимпиада школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Всероссийская олимпиада школьников в 2007 году. – М.: АПК и ППРО, 2007. – С. 6 – 9. (личный вклад 50%).

183. Агаханов, Н.Х. Выступления команды России на Международных математических олимпиадах / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Всероссийская олимпиада школьников в 2007 году. – М.: АПК и ППРО, 2007. – С. 9 – 12. (личный вклад 50%).

184. Агаханов, Н.Х. История в лицах. Геннадий Николаевич Яковлев / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, В.Ж. Сакбаев // Всероссийская олимпиада школьников в 2007 году. – М.: АПК и ППРО, 2007. – С. 13 – 15. (личный вклад 33%).

185. Агаханов, Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993 – 2006: Окружной и финальный этапы / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.]; под ред. Н.Х. Агаханова. – М.: МЦНМО, 2007. – 472 с. (личный вклад 33%).

186. Агаханов, Н.Х. Математика. Всероссийские олимпиады: Вып. 1 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.]. – М.: Просвещение, 2008. – 192 с. (личный вклад 33%).

187. Агаханов, Н.Х. Математика. Всероссийские олимпиады: Вып. 2 / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – М.: Просвещение, 2009. – 159 с. (личный вклад 50%).

188. Агаханов, Н.Х. Математика. Районные олимпиады. 6 – 11 класс / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – М.: Просвещение, 2010. – 192 с. (личный вклад 50%).

189. Агаханов, Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993 – 2009: заключительные этапы / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.]; под ред. Н.Х. Агаханова. – М.: МЦНМО, 2010. – 552 с. (личный вклад 33%).

190. Агаханов, Н.Х. Математика. Областные олимпиады. 8 – 11 класс / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.]. – М.: Просвещение, 2010. – 239 с. – (личный вклад 33%).

191. Агаханов, Н.Х. Математика. Международные олимпиады / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терёшин. – М.: Просвещение, 2010. – 127 с. (личный вклад 33%).

192. Агаханов, Н.Х. Математика. Всероссийские олимпиады: Вып. 3 / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов. – М.: Просвещение, 2011. – 207 с. (личный вклад 33%).

193. Агаханов, Н.Х. Региональный и Заключительный этапы XXXVIII Всероссийской

олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – М.: МФТИ, 2012. – 52 с. (личный вклад 50%).

194. Агаханов Н.Х. Задачи физико-математических олимпиад «Физтех-2012» (Методические разработки по физике и математике с ответами и примерами решений) / Д.А. Александров, Н.Х. Агаханов, В.И. Чивилев, [и др.]. – М: МФТИ, 2013 – 42 с. (личный вклад 8,3%).

195. Агаханов, Н.Х. Математика. Всероссийские олимпиады: Вып. 4 / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов. – М.: Просвещение, 2013. – 208 с. (личный вклад 33%).

196. Методические рекомендации к учебнику «Алгебра». 8 класс / Н.Х. Агаханов, Л.Г. Петерсон, О.К. Подлипский [и др.].– М.: Ювента, 2013. – 224 с. (личный вклад 20%).

197. Методические рекомендации к учебнику «Алгебра». 9 класс / Н.Х. Агаханов, Л.Г. Петерсон, О.К. Подлипский [и др.].– М.: Ювента, 2013. – 208 с. (личный вклад 20%).

198. Задачи физико-математических олимпиад «Физтех-2013» (Методические разработки по физике и математике с ответами и примерами решений) / Н.Х. Агаханов, Д.А. Александров, В.И. Плис [и др.]. – М: МФТИ, 2014 – 48 с. (личный вклад 7,7%).

199. Агаханов, Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993 – 2009: заключительные этапы / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.]; под ред. Н.Х. Агаханова. – М.: МЦНМО, 2014. – 552 с. (личный вклад 33%).

200. Агаханов, Н.Х. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / Н.Х. Агаханов, В.В. Власов, Л.И. Коваленко [и др.]; под ред. В.К. Романко. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. – 219 с. (личный вклад 33%).

201. Алгебра. 8 класс: Ч. 1. Учебник для средней школы / Н.Х. Агаханов, Л.Г. Петерсон, А.Ю. Петрович [и др.]. – М.: Ювента, 2014. – 128 с. (личный вклад 33%).

202. Алгебра. 8 класс: Ч. 2. Учебник для средней школы / Н.Х. Агаханов, Л.Г. Петерсон, А.Ю. Петрович [и др.]. – М.: Ювента, 2014. – 160 с. (личный вклад 33%).

203. Агаханов А.Ю. Алгебра. 8 класс: Ч. 3. Учебник для средней школы. – М.: Ювента, 2014. – 144 с.

204. Алгебра. 9 класс: Ч. 1. Учебник для средней школы / Н.Х. Агаханов, Л.Г. Петерсон, А.Ю. Петрович [и др.]. – М.: Ювента, 2014. – 176 с. (личный вклад 33%).

205. Алгебра. 9 класс: Ч. 2. Учебник для средней школы / Л.Г. Петерсон, Н.Х. Агаханов, А.Ю. Петрович [и др.]. – М.: Ювента, 2014. – 200 с. (личный вклад 33%).

206. Задачи физико-математических олимпиад «Физтех-2014» (Методические разработки по физике и математике с ответами и примерами решений) // Д.А. Александров, Н.Х. Агаханов, М.В. Балашов, И.И. Богданов, С.Е. Городецкий, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, В.И. Чивилев, А. А. Шеронов, М.И. Шабунин. – М.: МФТИ, 2015 – 44 с. (личный вклад 10%).

207. Задачи физико-математических олимпиад «Физтех-2015» (Методические разработки по физике и математике с ответами и примерами решений). // Д.А. Александров, Н.Х. Агаханов, М.В. Балашов, И.И. Богданов, С.Е. Городецкий, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, В.И. Чивилев, А. А. Шеронов, М.И. Шабунин. – М.: МФТИ, 2015 – 68 с. (личный вклад 10%).

208. Задачи физико-математической олимпиады «Phystech.International» 2017. (Учебно-методические разработки по физике и математике). // Н.Х Агаханов, И.В Глухов, С.Е. Городецкий, В.И. Плис, О.К. Подлипский, В.В. Усков, В.И. Чивилев, А.А. Шеронов, Ю.В. Юрьев. – М.: МФТИ, 2018 – 48 с. (личный вклад 11%).

209. Агаханов, Н.Х. Теория и практика работы с математически одаренными детьми: Монография // Н.Х Агаханов, Т.Ф. Сергеева, О.К. Подлипский. – М.: Илекса, 2018 – 327 с. (личный вклад 33%).

210. Алгебра. 8 класс: учебник (в 3 частях)/ Ч. 1 // Н.Х Агаханов, Л.Г. Петерсон, А.Ю. Петрович, О.К. Подлипский, М.В. Рогатова, Б.В. Трушин.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. – 128 с. (личный вклад 17%).

211. Алгебра. 8 класс: учебник (в 3 частях). Ч. 2 // Н.Х Агаханов, Л.Г. Петерсон,

А.Ю. Петрович, О.К. Подлипский, М.В. Рогатова, Б.В. Трушин – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. – 160 с. (личный вклад 17%).

212. Алгебра. 8 класс: учебник (в 3 частях). Ч. 3 // Н.Х Агаханов, Л.Г. Петерсон, А.Ю. Петрович, О.К. Подлипский, М.В. Рогатова, Б.В. Трушин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. – 144 с. (личный вклад 17%).

213. Алгебра. 9 класс: учебник (в 2 частях). Ч. 1 // Н.Х Агаханов, Л.Г. Петерсон, А.Ю. Петрович, О.К. Подлипский, М.В. Рогатова, Б.В. Трушин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. – 176 с. (личный вклад 17%).

214. Алгебра. 9 класс: учебник (в 2 частях). Ч. 2 // Н.Х Агаханов, Л.Г. Петерсон, А.Ю. Петрович, О.К. Подлипский, М.В. Рогатова, Б.В. Трушин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. – 200 с. (личный вклад 17%).

215. Агаханов, Н.Х., Муниципальные олимпиады Московской области по математике // Н.Х Агаханов, О.К. Подлипский. – М.: МЦНМО, 2019. – 400 с. (личный вклад 50%).

216. Задачи физико-математических олимпиад «Физтех-2018», 9, 10 классы (Методические разработки по физике и математике с ответами и примерами решений) // Н.Х. Агаханов, В.А. Бабинцев, И.И. Богданов, И.В. Глухов, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин, В.В. Усков, В.И. Чивилев, А.А. Шеронов, Ю.В. Юрьев. – М: МФТИ, 2019 – 60 с. (личный вклад 8%).

217. Задачи физико-математических олимпиад «Физтех-2018», 11 класс (Методические разработки по физике и математике с ответами и примерами решений) // Н.Х Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Л.М. Колдунов, В.И. Плис, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин, В.В. Усков, В.И. Чивилев, А.А. Шеронов, Ю.В. Юрьев. – М: МФТИ, 2019 – 52 с. (личный вклад 7%).

218. Агаханов, Н.Х. Физтеховская математика для абитуриентов. Задачи вступительных экзаменов в МФТИ и олимпиады «Физтех» (1991–2014) // Н.Х Агаханов, И.И. Богданов, С.Е. Городецкий, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский. – М.: Физматкнига, 2019 – 436 с. (личный вклад 20%).

219. Задачи физико-математической олимпиады «Физтех-2019», 9 и 10 классы (Методические разработки по физике и математике с ответами и примерами решений) // Н.Х Агаханов, В.А. Бабинцев, И.И. Богданов, И.В. Глухов, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Л.М. Колдунов, В.И. Плис, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин, В.В. Усков, В.И. Чивилев, А.А. Шеронов, Ю.В. Юрьев. – М: МФТИ, 2019 – 64 с. (личный вклад 7%).

220. Задачи физико-математической олимпиады «Физтех-2019», 11 класс (Методические разработки по физике и математике с ответами и примерами решений) // Н.Х Агаханов, В.А. Бабинцев, И.И. Богданов, И.В. Глухов, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Л.М. Колдунов, В.И. Плис, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин, В.В. Усков, В.И. Чивилев, А.А. Шеронов, Ю.В. Юрьев. – М: МФТИ, 2019 – 64 с. (личный вклад 7%).

221. Методические рекомендации к учебнику «Алгебра. 8 класс» / Н.Х. Агаханов, Л.Г. Петерсон, О.К. Подлипский, М.В. Рогатова, Б.В. Трушин. – М.: Просвещение, 2021. – 232 с. (личный вклад 20%).

222. Методические рекомендации к учебнику «Алгебра. 9 класс»/ Л.Г. Петерсон, Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, М.В. Рогатова, Б.В. Трушин. – М.: Просвещение, 2021. – 206 с. (личный вклад 20%).

223. Олимпиада «Физтех». Математика (задачи 2015-2020 гг.) // Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головко, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, П.А. Кожевников, Ю.В. Кузьменко, Е.Г. Молчанов, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин. – М.: Физматкнига, 2022 – 344 с. (личный вклад 9%).

Лицензия на издательскую деятельность
ИД № 06146. Дата выдачи 26.10.01.
Формат 60 x 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная
Печ.л. 3,4 Уч.-изд.л. 3,3
Тираж 100 экз. Заказ 131

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1