Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Армавирский государственный педагогический университет»

На правах рукописи

Мозговая Мария Александровна

МЕТОДИКА КОНСТРУИРОВАНИЯ ГРАФИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ПОНЯТИЙ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

5.8.2. – Теория и методика обучения и воспитания
(математика, уровень общего образования)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Научный руководитель
доктор педагогических наук,
профессор Е.И. Санина

Армавир – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Обучение геометрии занимает особое место в развитии мышления обучающихся средней школы, в формировании компонентов и качеств мышления, необходимых не только для продолжения образования и освоения новых областей знаний, но и обеспечивающих успешность будущей профессиональной деятельности и полноценность повседневной жизни в современном обществе. Специфика геометрического содержания математической подготовки в школе способствует овладению математическими методами познания окружающего мира, развитию логического мышления, овладению графическими, символическими умениями и навыками, необходимыми для развития пространственного мышления обучающихся.

На изменение внутренней и внешней политики Российской Федерации в сфере применения информационных и коммуникационных технологий и развития информационного общества направлен Указ Президента Российской Федерации от 9 мая 2017 г. № 203 «Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы».

В целях реализации указа в сфере образования принято постановление Правительства РФ от 07.12.2020 г. № 2040 «О проведении эксперимента по внедрению цифровой образовательной среды». Для оснащения организаций современным оборудованием и развития цифровых сервисов и контента для образовательной деятельности принято Постановление Правительства Российской Федерации от 16.11.2020 г. № 1836 «О государственной информационной системе «Современная цифровая образовательная среда» и разработан Федеральный проект «Цифровая образовательная среда». Создание и внедрение современной и безопасной цифровой образовательной среды направлено на «обеспечение формирования ценности к саморазвитию и самообразованию у обучающихся образовательных организаций всех видов и уровней, путем обновления информационно-коммуникационной инфраструктуры, подготовки кадров, создания федеральной цифровой платформы».

В связи с изменением образовательной среды возникает необходимость поиска новых методов и средств обучения математике, в целом, и геометрии, в частности.

Одним из аспектов обеспечения цифрового обучения является использование систем динамической математики (СДМ). В настоящее время в обучении используются программы динамической геометрии (DGS): Живая математика, GeoGebra, Cinderella, Geometria, Cabri 3D, Kig, C.a.R., Geometrix, MathKit, GeoView, 1С: Математический Конструктор и др.

Созданная на их основе цифровая образовательная среда, способствует реализации целей федеральных государственных образовательных стандартов: повышению качества обучения и формированию компьютерной компетенции обучающихся основной и средней школы. Это обуславливает потребность по-новому взглянуть на проблему обучения школьников успешному решению геометрических задач, поиска методических подходов, обеспечивающих единство традиционных и цифровых средств обучения геометрии в формировании графических образов геометрических понятий.

Специфика геометрического материала требует от учащегося овладения многими умениями и навыками, наличие которых связано с необходимостью математического, логически обоснованного, графического, символического, словесно оформленного решения задач геометрической составляющей основного государственного экзамена (ОГЭ) и единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике. При отсутствии в школьной программе учебного предмета «Черчение» актуализируется проблема формирования графических умений в процессе обучения геометрии. Как показывают результаты ЕГЭ, уровень графических умений у выпускников средних школ является крайне невысоким, что делает задачи по стереометрии сложными, а то и «нерешаемыми». Это обуславливает необходимость построения методики конструирования графических образов геометрических понятий в обучении геометрии в старших классах средней общеобразовательной школы.

Степень разработанности научной проблемы. Обучению геометрии в школе посвящены исследования Г.Д. Глейзера, В.А. Гусева, В.В. Орлова, Н.С. Подходовой, Е.В. Потоскуева, Е.И. Саниной, И.М. Смирновой, Р.С. Черкасова, Н.В. Четверухина и др.

Проблемам, связанным с графическим сопровождением курса стереометрии, посвящены работы многих методистов Ж. Адамара, Н.Ф. Четверухина, А.Д. Семушина, Л.М. Лоповок, Р.С. Черкасова, Н.М. Бескина, Г.И. Саранцева и др.

Методистами-математиками такими как, Л.И. Боженкова, А.В. Василенко, В.А. Гусев, З.А. Скопец, Г.Д. Глейзер, В.А. Далингер, Н.Ф. Четверухин, Р.С. Черкасов и др., показано, что обучение решению различного рода задач способствует проявлению приёмов мышления, в том числе и пространственного.

Развитию пространственного восприятия и пространственных представлений в процессе обучения геометрии в начальной, основной и средней школе посвящены работы С.Б. Верченко (1983), Ю.А. Волковой (2004), И.Г. Вяльцевой (1972), С.Ю. Дивногоцевой, Е.А. Захаровой (2003), Е.В. Знаменской (1995), Н.С. Кудаковой (1999), Л.А. Миносяна (1983), А.В. Мухановой (2004), Л.П. Петрич (2003), А.А. Постнова (1966), Т.В. Расташанской, Н. Рузиева (1968), А.В. Старшиновой (2005), Л.С. Секретарёвой (2007), Н.И. Царькова (2001), А.Р. Черняевой (2004) др.

Формирование графических навыков и графической грамотности рассматривалось в работах А. Амирбекова (1984), Л.Н. Барановой (2000), С.М. Ганеева (2004), Г.И. Ковалёвой (2017) С.И. Кийко (1998), Т.А. Покровской (2003), А.В. Фурмана, О.Н. Щепина (1999) и др.

Е.И. Смирновым разработана концепция наглядно-модельного обучения, которая нашла отражение в трудах В.С. Абатуровой, В.Л. Жолудевой, Р.М. Зайниева, Т.Н. Карповой, Н.Д. Кучугуровой, И.Н. Муриной, В.Н. Осташкова, Т.В. Скоробогатовой, Е.Н. Трофимец и др.

Формирование пространственных образов с опорой на идеи фузионизма нашло отражение в исследованиях Ю.В. Булычевой (2006), Н.Я. Варнавской (2005), З.Р. Федосеевой (1998), В.Н. Фрундина (1998) и др.

Развитию пространственного мышления посвящены работы Т.А. Будановой (2009), Н.Н. Зепновой (2005), И.А. Кочетковой (1997), Н.И. Никулиной (2006), Н.Н. Орловой (2001), М.В. Подаева (2011), О.Ю. Тихомировой (2004), В.М. Шевченко (2006) и др.

Обучение геометрии с применением информационных технологий представлено в работах А.Н. Горшковой (2003), М.Н. Марюкова (1998), М.Г. Мехтиева (2002), использование GeoGebra представлено в работах, А.Н. Бакурова, М.А Павловой (2017), В.И. Рыжика, М.В. Шабановой, Т.С. Шириковой (2014), А.В. Ястребова и др.

В.Р. Майер (2001) разработал концепцию геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий. М.А. Артюхина, Е.И. Санина (2016) разработали концепцию интерактивного обучения математике бакалавров гуманитарного направления подготовки в информационной образовательной среде.

В последнее десятилетие в обучении математике, как в средней школе, так и в вузе предлагаются различные подходы к внедрению в учебный процесс информационных технологий и программных средств обучения. Система компьютерного сопровождения обучающего курса стереометрии в средней школе представлена в работах О.А. Гришиной (2013). Компьютерная анимация в обучении математике рассматривалась В.В. Абдулкиным, С.И. Колачёвой, М.А. Кейв, С.В. Лариным (2019). Н.Р. Колмакова (2021) предложила формирование функциональных понятий при поддержке в среде «Живая математика».

Однако в настоящее время не существует методического обоснования системы обучения геометрии в цифровой образовательной среде. Решение проблемы конструирования графических образов понятий в обучении геометрии возможно с использованием систем динамической геометрии. Решение стереометрических задач невозможно без наличия у решающего умения выполнять адекватный условию проекционный чертеж. Теоретические основы построения изображения пространственной конструкции на плоском чертеже составляет композиция преобразований параллельная проекция на плоскость и преобразование подобия этой плоскости. Однако точное построение чертежа с соблюдением всех требований на уроке неосуществимо, да и не нужно. На этот факт указывал Н.Ф. Четверухин, различая «иллюстративный чертёж» и «чертёж решающий». Не ставя перед собой задачу строгого выполнения «чертежа решающего», учитель должен добиться от учащихся грамотного и быстрого выполнения «иллюстрирующего чертежа».

Конструирование графических образов понятий в обучении геометрии имеет положительное влияние на формирование пространственных образов и представлений.

Констатирующий этап эксперимента, анализ результатов проведения ОГЭ и ЕГЭ и ежегодное тестирование первокурсников направления подготовки бакалавриата «Педагогическое образование», направленность «Математика» в ФГБОУ ВО «Армавирском государственном педагогическом университете», подтвердил, что у большинства учащихся крайне слабая связь между словесным определением того или иного геометрического понятия и соответствующим графическим образом. Прямым следствием является тот факт, что около 80 % выпускников (средний балл ЕГЭ по математике выше 70) стараются, например, изображение правильной треугольной пирамиды построить с помощью равнобедренных треугольников, что делает чертеж не наглядным и не читаемым.

Результаты экспериментальной и аналитической работы, характеризующие уровень предметной подготовки учащихся по геометрии, теоретический анализ разнообразных литературных источников (монографий, диссертаций, статей, учебников, отчетов, документов министерств и ведомств) позволили выделить ряд **противоречий:**

– между наличием нормативных документов «Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы», в том числе, и в образовательной сфере, и недостаточным методическим обоснованием изменений, происходящих в образовательной среде в направлении цифровизации в обучении математике (в частности, геометрии в старших классах);

– между дидактическими возможностями цифровых средств обучения в процессе обучения геометрии и необходимостью использования новых средств, форм и методов обучения для актуализации когнитивной деятельности по выявлению и моделированию динамических связей и отношений между отдельными элементами графического образа геометрического понятия;

– между развивающим потенциалом конструирования в цифровой среде графических образов геометрических понятий в обучении и не разработанностью методики конструирования графических образов в обучении геометрии с использованием систем динамической математики с эффектом развития пространственного мышления обучающихся.

Именно эти противоречия и позволили сформулировать **проблему исследования**: Какова методика конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики с эффектом развития пространственного мышления обучающихся?

Проблема определила выбор **темы** исследования: **«Методика конструирования графических образов понятий в обучении геометрии с использованием систем динамической математики».**

Объект исследования: процесс обучения геометрии в средней школе в условиях цифровой образовательной среды.

Предмет исследования: методика конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики с эффектом развития пространственного мышления обучающихся.

Цель исследования: разработать, теоретически обосновать и экспериментально проверить методику конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики с эффектом развития пространственного мышления обучающихся средней школы.

В основу исследования положена следующая **гипотеза:** методика конструирования графических образов понятий в обучении геометрии в старшей школе с использованием систем динамической математики с эффектом развития пространственного мышления обучающихся, будет эффективной, если:

– в основе конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики будет метод наглядного моделирования содержания понятий;

– будет обеспечена этапность и актуализация когнитивной деятельности по выявлению и моделированию динамических связей и отношений между отдельными элементами геометрического образа;

– будет организован рефлексивный контроль наглядности моделирования и словесно-логического обоснования построения графических образов геометрических понятий.

В соответствии с целью и гипотезой поставлены следующие **задачи** исследования:

– уточнить сущность конструкта «графический образ геометрического понятия»: выявить его содержание, структуру и основные характеристики;

– разработать методику конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики (на примере GeoGebra) на основе метода наглядного моделирования;

– выявить критерии отбора заданий и разработать иерархический банк задач на конструирование графических образов геометрических понятий;

– разработать структурно-функциональную модель компьютерного сопровождения уроков геометрии по решению стереометрических задач с использованием GeoGebra;

– провести экспериментальную работу по конструированию графических образов геометрических понятий с эффектом развития пространственного мышления обучающихся в старших классах средней школы с использованием систем динамической математики.

Методологическую и теоретическую основу диссертационного исследования составили:

– системный, личностно-деятельностный и средовой подходы, основанные на идеях целостности, фундаментальности, эволюционности;

– труды психологов, методистов-математиков по формированию пространственного мышления (Б.Г. Ананьев, Е.Н. Кабанова-Меллер, И.Л. Каплунович, А.Н. Леонтьев, Б.Ф. Ломов, Ж. Пиаже, С.Л. Рубинштейн, И.С. Якиманская и др.);

– исследования по конструированию образов геометрических понятий и развитию пространственного мышления при обучении решению стереометрических задач (А.В. Василенко, В.А. Гусев, Г.Д. Глейзер, Л.И. Боженкова, В.А. Далингер, Г.И. Ковалева, В.А. Крутецкий, Е.В. Потоскуев, З.А. Скопец, Н.Ф. Четверухин, Р.С. Черкасов и др.);

– основы обучения в цифровой образовательной среде (С.А. Бешенков, Л.Л. Босова, А.Ю. Уваров, М.А. Шутиков и др.).

– научные работы по изучению использования информационных технологий в области обучения стереометрии (А.А. Домунян, О.А. Кривцов, В.Р. Майер, Т.Ф. Сергеева, И.В. Трайнев, И.Г. Захарова, М.А. Павлова, Р.С. Рафикова, Е.И. Смирнов, Ю.А. Толыпина, М.В. Шабанова, Т.С. Ширикова, С.В. Щербатых, А.В. Ястребов и др.);

– различные подходы и концепции наглядного обучения математике, позволяющие рассматривать процесс обучения геометрии в тесной связи со знаково-символической и графической деятельностью обучающихся (В.Г. Болтянский, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, Л.В. Занков, Н.Г. Салмина, Е.И. Смирнов, Л.М. Фридман, В.Д. Шадриков и др.).

Организация и этапы исследования. Исследование проводилось в течение 2015-2022 гг. на базе ФГБОУ ВО «Армавирский государственный педагогический университет».

Этапы исследования:

– на первом этапе (2015 – 2017 гг.) был проведен анализ психолого-педагогической, методической, учебно-методической литературы по проблеме исследования, результатом которого явилось уточнение проблемы, разработка замысла понятийного аппарата исследования, анализ и обобщение передового и массового педагогического опыта, констатирующий этап эксперимента, разработан научный аппарат исследования;

– на втором этапе (2018 – 2020 гг.) была разработана и апробирована структурно-функциональная модель компьютерного сопровождения уроков геометрии по решению стереометрических задач с использованием GeoGebra, и методика конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики (на примере GeoGebra) на основе метода наглядного моделирования с эффектом развития пространственного мышления в обучении геометрии;

– на третьем этапе (2021–2022 гг.) выполнен формирующий эксперимент, проведён анализ, систематизация и обобщение результатов экспериментальной работы, оформлены результаты исследования, сформулированы положения, выносимые на защиту; подготовлен ряд научных публикаций, отражающих основные результаты исследования.

Научная новизна проведенного исследования заключается в том, что:

1. Уточнена сущность конструкта «графический образ геометрического понятия»:

– содержание понятия раскрывается через знаково-символическую и словесно-логическую деятельность как результат познавательного процесса наглядного изображения геометрического объекта, которое включает создание графических моделей геометрических понятий (объектов), визуализацию (представление) изображений графических образов объектов на моно и стереоэкранах; движение графических объектов (анимация);

– структура графического образа состоит из геометрических примитивов (точки, линии, плоскости, поверхности, простейшие геометрические тела) из них формируются детали, из которых создаются конструкции объектов.

– основные характеристики: наглядность, информационность, декомпозируемость.

2. Разработана методика конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики (на примере GeoGebra) на основе метода наглядного моделирования с эффектом развития пространственного мышления в обучении геометрии. Методика состоит из трёх блоков: организационно-целевого, операционально-содержательного и контрольно-оценочного.

Организационно-целевой блок методики определяет цели и этапы обучения. Детальное описание целей обучения на каждом этапе.

Операционально-содержательный блок обеспечивает выбор оптимальных форм, методов и средств обучения, отбор содержания.

Определены инструментарий и структурно-функциональная модель компьютерного сопровождения уроков геометрии по решению стереометрических задач с использованием GeoGebra. Специфику процессуального блока методики отражают такие специфические методы обучения учащихся решению геометрической задачи, как наглядное моделирование и рефлексивный контроль.

Контрольно-оценочный блок содержит тестовый контроль и диагностические задачи для определения уровня конструирования графических образов геометрических понятий. Представлены критерии и показатели оценки качества результатов обучения (мотивационный, когнитивный, технологический).

3. Выявлены критерии отбора заданий и разработан иерархический банк задач на конструирование графических образов геометрических понятий. Разработана структурно-функциональная модель компьютерного сопровождения обучения геометрии с использованием GeoGebra.

Теоретическая значимость исследования состоит в следующем:

1. Обоснована методика конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики (на примере GeoGebra). Методика базируется на актуализации средового, системного, деятельностного подходов в управлении уровневой когнитивной деятельностью обучающихся в реализации трёх этапов: организационно-целевого, операционально-содержательного и контрольно-оценочного.

2. Выявлены этапы формирования графических образов геометрических понятий в условиях цифровой образовательной среды и их влияние на развитие пространственного мышления обучающихся. Процесс обучения конструированию графических образов на основе наглядного моделирования с применением динамических систем математики преодолевает ряд закономерных этапов своего развития: от представления пространственных образов, к установлению отношений между ними путем

оперирования самими образами и их элементами к обобщению этих отношений и к созданию пространственных образов в собственных наиболее развитых и самостоятельных формах.

3. Обосновано и раскрыто содержание компонентов структурно-функциональной модели компьютерного сопровождения обучения геометрии с использованием цифровых инструментов на основе метода наглядного моделирования с эффектом развития пространственного мышления обучающихся.

4. Доказано, что основой конструирования является наглядное моделирование графических образов геометрических понятий, базирующееся на познавательной активности, устойчивости восприятия на основе эффекта понимания и процессах моделирования. Наглядная модель может быть представлена как самостоятельный физический объект, как символический и графический образ в мыслях, так и записан ручным способом или с применением компьютера.

Практическая значимость исследования состоит в следующем:

Реализована структурно-функциональная модель компьютерного сопровождения обучения геометрии с использованием цифровых инструментов.

Разработаны иерархические комплексы задач с использованием цифровых инструментов на примере темы «Комбинация многогранников и круглых тел».

Разработана методика диагностики уровней сформированности процессов конструирования графических образов геометрических понятий.

Результаты исследования могут быть использованы учителями общеобразовательных школ в практике обучения учащихся решению геометрических задач, а также преподавателями учреждений высшего образования, реализующих подготовку учителей математики.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечиваются использованием научных методов, адекватных объекту, предмету, цели и задачам исследования; результатами экспериментальной проверки гипотезы и применением полученных результатов исследования в обучении математике в цифровой образовательной среде.

Апробация и внедрение результатов исследования осуществлялась через выступления с докладами:

– на международных конференциях:

«Проблемы теории и практики обучения математике», «Герценовские чтения» СПб.: РГПУ им. А.И. Герцена (2014, 2017); IV международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 80-летию Е.В. Потоскуева), Тольятти (29 – 30 ноября 2019 г.); VII Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы современного образования. Организация исследовательской деятельности в образовательных учреждениях» Астрахань (2019, 2021, 2023); на XV Колмогоровских чтениях: Международной научно-практической конференции, посвященной памяти профессора М.И. Зайкина, Арзамас (10-13 сентября 2019 г.); на Международной научной конференции «Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования», Елец 30 сентября-2 октября 2022 г.

– на всероссийских конференциях и семинарах:

«Тенденции и проблемы развития математического образования», Армавир (2013, 2014, 2015, 2017); «Современная система педагогического образования: Опыт прошлого – взгляд в будущее», Армавир (2014, 2019); «Современный урок: проблемы разработки и реализации» Всероссийская научно-практическая конференция (г. Армавир, 6-7 ноября 2019 г.);

– на региональных научно-методических конференциях:

Армавирский государственный педагогический университет – региональный центр развития личностного ресурса субъектов образования, Армавир (2017).

Положения, выносимые на защиту:

1. Построение методики обучения геометрии в цифровой образовательной среде динамической математики (на примере GeoGebra) на основе наглядного моделирования графических образов геометрических понятий позволяет активизировать познавательный интерес и интерактивную познавательную деятельность с эффектом развития пространственного мышления обучающихся.

Дидактические возможности систем динамической математики обеспечивают новый уровень реализации технологий обучения геометрии средствами наглядного моделирования на основе интерактивной деятельности. Использование комплекта динамических визуальных дидактических материалов в процессе обучения геометрии способствует целостности восприятия и преодолению фрагментарности в формировании графических образов геометрических понятий.

2. Методика конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики с эффектом развития пространственного мышления обучающихся обеспечивает рациональное использование динамических систем и интерактивности при графическом изображении геометрического чертежа. Наглядное моделирование в конструировании графических образов геометрических понятий проходит следующие этапы:

– восприятие наглядного образа геометрического объекта (рисунок или оригинал объекта);

– словесно-логическое описание геометрического образа и наглядное его представление (изображение и анализ чертежа);

– доказательство адекватности визуального представления (графического образа) на основе обобщения отношений геометрических объектов;

– математическое описание графического образа и изображение его ручным способом, сочетание обучающего и развивающего эффекта посредством визуализации математической модели.

Специфическим результатом обучения геометрии с использованием систем динамической математики является формирование пространственных представлений графических образов и оперировании ими в процессе решения стереометрических задач.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ ГРАФИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

1.1. Ретроспективный анализ, оценка и особенности обучения геометрии в цифровой образовательной среде

Понимание учащимися существования и происхождения различных пространственных форм, возможность их преобразования является важной предпосылкой для формирования динамичности пространственных образов, что является показателем развития пространственного мышления. Изучение геометрии способствует выполнению указанных функций. На необходимость развития пространственного мышления для восприятия учебного материала курса геометрии и для решения различного рода практических и теоретических задач указывает В.А. Далингер [46].

Формированию пространственных образов геометрических понятий у учащихся посвящены исследования [91]: А.В. Василенко [26], Г.Д. Глейзера [39], В.А. Гусева [45], В.В. Орлова [118], Н.С. Подходовой [127], И.М. Смирновой [152], Р.С. Черкасова [167], Н.В. Четверухина [170], И.Ф. Шарыгина [174] и др. В методической литературе представлены различные подходы по формированию и развитию пространственного мышления учащихся в процессе обучения геометрии в средней школе.

Рассмотрим, как решается вопрос формирования графических образов геометрических понятий и развития пространственного мышления в процессе обучения геометрии.

Традиционно обучение геометрии в средней школе разделяется на четыре этапа: начальная и младшая школа (1-4 классы); пропедевтический период (5-6 классы) основной школы, систематический курс планиметрии (7-

9 классы), систематический курс стереометрии (10-11 классы). Проблема развития пространственного мышления обучающихся в средней школе находит решение с учетом возрастных особенностей на каждом этапе обучения.

Относительно преподавания математики в младшей школе с учетом развития пространственных представлений/воображения/мышления обучающихся рассмотрим методические исследования конца XX – начала XXI веков. В таких исследованиях, проводимых для классов, предшествующих систематическому курсу геометрии, выделяются следующие направления исследований: наглядная геометрия, развитие пространственных представлений учащихся посредством определенной дидактической организации изучения геометрического материала пропедевтического курса, реализация фузионистского подхода, использование определенных компьютерных программ.

Тарасова О.В. (2006) исследовала генезис методических идей в преподавании, реализованных в контексте различных подходов к построению начального курса геометрии; показала трансформацию содержания систематического школьного курса геометрии и его взаимосвязи с начальным курсом геометрии [155].

Анализ истории развития методических идей показал, что начальные курсы геометрии целесообразно разделить на практический, фузионистский, логический в зависимости от степени абстракции [155].

Н.В. Шилина (1999) обращает внимание на то, что формирование элементарных геометрических представлений у младших школьников должно происходить с учетом индивидуально-типологических особенностей школьников и средствами различных учебных предметов. Соответствующую *систему методов автор называет «адаптивной методической системой формирования элементарных геометрических представлений у младших школьников» и* предлагает разработку такой системы с вовлечением в процесс различных учебных предметов, что, по мнению автора, помогает учитывать индивидуальность каждого учащегося. Отметим, что в исследовании акцентируется связь представлений и понятий при изучении геометрии [179]. Аналогичный подход присутствует в исследовании Ю.А. Волкова (2004). Условием успешного осуществления методической системы комплексного познания объектов действительности автор считает целенаправленное и систематическое использование межпредметных связей, соблюдение этапности формирования и развития, взаимосвязь и преемственность форм, средств и принципов обучения и терминологии [33].

С.Ю. Дивногорцева (1998 г.) исследует понятие «геометрического видения», его психологические основы, основные компоненты, уровни развития и критерии их определения. Обращается внимание на необходимость целенаправленной подготовки обучающихся к необходимости *устанавливать по заданному условию задачи соотношения и взаимоположение элементов чертежа.* На основе исследования разработана система упражнений на развитие «геометрического видения» учащихся 1-6 классов [48].

С.Б. Верченко (1983 г.) с целью совершенствования методики изучения начальных сведений по геометрии исследует состояние условий формирования пространственных представлений учащихся 4-5 классов. Основной идеей методического подхода к подготовительному этапу курса геометрии избрано обучение *«через задачи»,* выявлены основные типы задач, направленных на развитие пространственных представлений, разработана методика решений [29]. Е.В. Знаменская (1995 г.) на основе анализа подходов к изучению геометрического материала в начальной школе в процессе исторического развития делается вывод о том, что следует рассматривать не только плоские, но и пространственные геометрические объекты, делая акцент на развитии пространственных представлений, связанных с формой и взаимным положением фигур. Строится методика формирования пространственных представлений у младших школьников при изучении геометрического материала *на основе взаимосвязанного изучения элементов плоскости и пространства* [54]. И.А. Кочеткова (1997) развивает идею специфики пространственного мышления как вида умственной деятельности с опорой на курс *«наглядной геометрии»* [73].

Н.С. Кудакова (2000) исследует психолого-педагогические предпосылки *использования движения* при формировании интуитивно-опытной базы пространственных представлений учащихся 5-6 классов. Выделены основные типы движений, обеспечивающих, по мнению автора, умственную активность учащихся при работе с геометрическим материалом с целью определить доминирующую роль определенных типов движений. Такой путь *ознакомления с началами геометрии при помощи интуиции и опыта* дает возможность накопления и первых обобщений геометрических сведений и представлений [76]. В.А. Захарова (2003) определяет и обосновывает *принципы моделирования пространственных фигур как средства формирования пространственного* воображения школьников. Автором разработаны научно-теоретические положения системы формирования пространственного воображения у детей младшего школьного возраста и средства её технологического обеспечения [55]. Л.П. Петрич (2004) исследует состояние разработанности основных положений методики *формирования пространственных представлений и воображения* у младших школьников в тесной связи с аналогичной работой в начальных классах на основании системного подхода в процессе изучения геометрии как имеющей ведущую роль в этом процессе [122].

Т.В. Расташанская (2004) считает, что на современном этапе отбор содержания геометрического образования должен проходить в соответствии с его возможностями обогащения познавательного опыта школьников. Построена система заданий, обеспечивающая деятельность механизмов *воображения не только как средство совершенствования геометрической* *подготовки школьников, но и ориентированная на гармоническое развитие* ребенка [133]. А.Г. Белоусова (2005) исследует особенности развития мыслительной деятельности, специфику формирования и динамику пространственного мышления младших подростков в процессе обучения математике. Разработан и реализован *пропедевтический курс наглядно-практической геометрии,* а также комплекс методического обеспечения, направленного на развитие пространственного мышления младших подростков [16].

Д.А. Курдин (2006) исследует проблему интуитивного познания в философии, психологии, математике, строит *модель интуитивного компонента* геометрической подготовки обучающихся. Для формирования образной базы обучающихся 5-6 классов построена модель интуитивного компонента геометрической подготовки обучающихся с использованием вариативно-позиционных заданий [77]. В исследовании Л.С. Секретаревой (2007) обоснована необходимость *развития воображения* младших школьников на начальном этапе изучения геометрии, разработана соответствующая специальная система заданий.

Л.Н. Ерганжиева (1992), соотнося цели, содержание, методы развивающего обучения математике с последними исследованиями психологии и возрастными особенностями учащихся 5-6 классов, выделяет досисматический курс геометрии, который должен быть организован с ориентацией на визуальное изучение, наглядность. Таким образом, курс геометрии 5-6 классов должен быть курсом *«наглядной геометрии»,* разработанной на наглядно-эмпирической основе с ориентацией на развитие пространственных представлений и овладение геометрическим методом. Автором представлены материалы, реализующие эти требования [10]. Дальнейшее развитие эти идеи получили в учебном пособии для учащихся V-VI классов «Наглядная геометрия», созданным в 1995 году в соавторстве с И.Ф Шарыгиным [174]. Близкой по тематике является и диссертационное исследование Г.Ю. Гаркавцевой (2009). Основываясь на исследовании развития начального геометрического образования и идей наглядной геометрии, автор теоретически обосновывает и экспериментально доказывает целесообразность геометрической подготовки учащихся в курсе *«Наглядная геометрия»,* целью которого является развитие пространственного мышления младших школьников [38].

Идеи фузионистского подхода к пропедевтическому курсу геометрии представлены в работах Г.Д. Глейзера, В.А. Гусева и др. Отметим, что в педагогической науке идея фузионизма означает сближение между собой родственных предметов или разделов одного предмета, в методике преподавания геометрии идея фузионизма означает сближение преподавания планиметрии и стереометрии.

Данная идея не является принципиально новой в методике преподавания геометрии. Еще в конце XIX – начале XX века многие программы и учебники по геометрии в России и других странах писались на основе идеи фузионизма, а на первых Всероссийских съездах преподавателей математики эта идея занимает достойное место в решениях съездов по реформе математического образования в России [54; 146].

Реализация идеи фузионизма в построении курса геометрии в том или ином виде исследовалась в работах А.К. Артемова, Б.И. Аргунова [8], М.Б. Балка [15], Н.Н. Бескина [20], Г.Д. Глейзера [39], В.В. Кутузова, Г.Г. Масловой [116], Н.В. Метельского [90], Я.М. Жовнира, Н. Рузиева, Р.Х. Хабиба, А. Эргашева и др. Во многих работах, посвященных совершенствованию геометрического образования в начальной школе (И.И. Барбул, Н.Д. Мацько, М.В. Пидручная, А.М. Пышкало, Е.В. Знаменская [59] и др.), проблеме формирования и развития пространственных представлений, пространственного воображения, пространственного мышления в рамках пропедевтического курса математики 5-6 классов и систематического курса планиметрии (С.Б. Верченко [29], С.В. Петров [122], А.А. Постнов, Н.С. Подходова [127], Л.Н. Ерганжиева, А.Г. Полякова, А. Пардала и др.) рассматриваются различные аспекты, связанные с проблемой совместного изучения плоских и пространственных фигур.

В исследовании В.Н. Фрундина (1998) представлен подробный обзор исторического развития *идеи фузионизма* в преподавании геометрии, опыта сочетания таких путей познания, как интуитивный, образный, логический, а также психолого-педагогических основ реализации взаимосвязанного изучения свойств плоских и пространственных фигур. Автором разработаны основные направления взаимосвязанного изучения свойств плоских и пространственных фигур в 5-6 классах основной школы, особое внимание уделено методике изучения взаимного расположения и изображения геометрических фигур [165]. Т.А. Покровская (1999) рассматривает применение структурно-системного подхода к построению курса геометрии в средней школе с реализацией *идей фузионизма*. Автором исследованы психологические предпосылки изучения геометрического материала учащимися 1-6 классов: особенности восприятия геометрических объектов, развитие системы перцепт - понятие и условия ее становления при изучении геометрии, специфика пространственного мышления, разработана концепция обучения геометрии учащихся 1-6 классов [124]. Н.Я. Варнавская (1999) исследует представления о сущности подготовительного этапа к изучению курса геометрии в отечественной педагогике. Автором разработан *«Стандарт геометрической подготовки школьников, обучающихся в 5-6 классах»,* содержащий обязательный минимум образовательной программы и полную систему требований к уровню подготовки учащихся с учетом *фузионистского подхода* к изучению геометрического материала [25].

С.В. Кириллова (2001) исследует научно-педагогические основы пропедевтико-геометрической подготовки обучающихся 5-6 классов средней школы. Сформулированы цели, основные принципы отбора и конструирования содержания такой подготовки, обеспечивающей *разностороннее геометрическое развитие учащихся*. Автором особое внимание уделяется методике развития пространственного мышления, формирования геометрических понятий и развития логического мышления, конструктивно-геометрической подготовке обучающихся [66]. М.В. Подаев (2011) проводит обзор и анализирует научно-методические исследования современного состояния обучения элементам геометрии младших подростков. Автором разработан и внедрен дидактический комплекс средств *развития логического и пространственного компонентов мыслительной деятельности* в рамках пропедевтического курса и кружковых занятий с мультимедийной поддержкой [126].

О многогранности проблемы развития геометрических представлений в рамках пропедевтики систематического курса геометрии и разнообразии подходов к её решению говорит работа Н.А. Грачевой (2002), в которой исследуется проблема развития творческих способностей и формирования творческой деятельности у учащихся 5-6 классов при изучении свойств геометрических фигур, симметрии и равенства фигур. Автором разработана методика *формирования творческой деятельности* учащихся 5-6 классов посредством решения геометрических задач [41]. В диссертационной работе Е.А. Первушиной (2006) исследуются теоретические основы и методические аспекты развития геометрической *креативности* учащихся 5-6 классов, особенности использования репродуктивно-вариативных заданий с использованием информационных технологий обучения как средство обогащения интуитивно-образной базы геометрической деятельности школьников [121].

Р.С. Альванус (2008) рассматривает в своём диссертационном исследовании положения теории проблемного обучения с целью организации на таких принципах изучения геометрического материала в 5-6 классах, в частности, неопределяемых геометрических понятий и свойств основных геометрических фигур [6].

В большинстве исследований методических проблем пропедевтического курса геометрии в 5-6 классах акцент делается на наглядность и развитие пространственных представлений/воображения/ мышления. Однако геометрия требует ещё и активной мыслительной деятельности в плане освоения законов логики, без чего подготовить учащихся к особенностям изучения геометрии невозможно. Каждое изображение в геометрии строится с учетом определений понятий, их свойств, присущих им графических образов и их конфигураций. В рамках обучения математике в 5-6 классах такая деятельность не может быть представлена в явном виде в силу возрастных особенностей обучающихся и недостаточности математической базы, однако её пропедевтика необходима с целью развития пространственного геометрического мышления.

В направлении методической проблемы нашего исследования особую значимость приобретают следующие исследования.

В работе доктора педагогических наук Н.С. Подходовой (1999) на основе исторического опыта изучения геометрического материала в школах России, с учетом особенностей восприятия геометрических объектов младшими школьниками, представлена *концепция обучения геометрии учащихся 1-6 классов.* Эта работа во многом определила направление дальнейшего развития методических исследований по организации изучения и пропедевтических функций геометрического материала в младшей школе [127]. Отмечая низкий уровень развития пространственного мышления выпускников средней школы по результатам многочисленных исследований, проведенных во второй половине XX века, автор пишет о «неподготовленности учащихся к деятельности в геометрическом пространстве», что позже «проявляется в уровне развития пространственных представлений большинства выпускников школ» [127, с. 4]. Одной из причин автор называет понимание развития «пространственных представлений» или «пространственного мышления» исходя из предмета математики и методики её преподавания, в то время как нельзя не учитывать, что эти понятия относятся к области психологии. Н.С. Подходова сформулировала и обосновала выделение курса геометрии 1-6 классов в самостоятельный учебный предмет с «единой основной обучающей задачей – подготовкой к изучению курса геометрии 7-11 классов» интегрировано с учебным материалом предметов, требующих приоритетной деятельности образных компонентов мышления [127, с. 9]. С использованием психологических закономерностей развития выделяются этапы знакомства с геометрическим пространством в рамках «целостной структуры: перцепт (восприятие) – предпонятие (обобщенное представление) – понятие» [176]. Таким образом, рассматривается деление школьного курса геометрии на пропедевтический (единый) и основной (с делением на планиметрию и стереометрию на основе идеи фузионизма).

Из этой схемы ясно, что геометрическое понятие формируется на определенной базе приобретенных в пропедевтическом курсе геометрических представлений. При переходе в систематическом курсе геометрии на более высокий логический уровень на этой основе строится как само геометрическое понятие, так и его обобщенный графический образ. В этом процессе формирование геометрических представлений сопровождается использованием приемов мыслительной деятельности. На этот важный момент пропедевтической работы концентрирует внимание в своем исследовании В.М. Шевченко (2006). Ею исследуются основные закономерности теории обучении математике и их взаимосвязи с элементами теории мышления и методикой изучения геометрического материала. Исследуются особенности математических понятий, их определения, основные требования методики формирования геометрических понятий. Разработана методика выявления в процессе изучения математики в 5-6 классах свойств и признаков основных геометрических фигур, формирование соответствующих представлений, понятий и их определений [176].

Н.И. Никулина (2006) исследует возможности, методические принципы и условия пропедевтической подготовки по геометрии с помощью программных средств обучения геометрии в 5-6 классах, в частности компьютерной среды Лого. Выявляются психолого-педагогические особенности формирования геометрических понятий, проведения геометрических исследований, развития пространственного мышления школьников при обучении геометрии средствами Лого [115].

Теоретический анализ проблемы формирования и развития пространственного мышления в обучении геометрии средней школы показал, что основной единицей пространственного мышления является образ. На сложный процесс формирования пространственного образа объекта влияет очень много факторов, как объективных (недостатки наглядных моделей, трудность самого процесса объективного восприятия действительности), так и субъективных (активность обучаемого, его внимательность и так далее) [158].

Развитие пространственного мышления учащихся осуществляется в преподавании многих учебных дисциплин. Однако обучение стереометрии имеет в этом отношении явные преимущества перед другими предметами. В преподавании выделенной дисциплины создание и оперирование пространственными образами особенно ярко выступают на первый план. Ученики познают пространственные формы стереометрических объектов и их различных комбинаций в активном использовании. Активное восприятие дает возможность учащимся накапливать запас представлений, что является необходимым этапом познания пространственных форм. На основе полученных пространственных представлений создаются понятия, устанавливаются связи между ними – математические предложения, излагаются теоремы, то есть совершается переход к абстрактному мышлению.

По мнению А.Д. Александрова «пространное воображение, развитию которого служит геометрия, составляет важный компонент в общей способности человека к воображению и имеет существенное значение в ряде отношений [3]. Оно, разумеется, необходимо каждому человеку для ориентировки в окружающем мире и в развитой форме существенно для многих видов деятельности» [4].

Стереометрия содержит богатый материал для демонстрации объемных форм окружающей нас действительности. При этом использование таких форм должно отличаться доступностью, четкостью, наглядностью. К этому призывает основоположник наглядного обучения, классик педагогической науки Я.А. Коменский. Чешский педагог рассматривал вопрос восприятия наглядности учащимися, так как оно, по его мнению, находится в прямой связи с мышлением.

Наглядность обучения – один из принципов дидактики. Под дидактическим принципом будем понимать основные положения, определяющие содержание, организационные формы и методы учебного процесса в соответствии с его общими целями [71].

Н.И. Лобачевский отмечал, что «…первыми данными, без сомнения, будут всегда те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством наших чувств» [81] и в своих наставлениях преподавателям математики рекомендует опираться на наглядность. Геометр Н.Ф. Четверухин указывает, что наглядные изображения «вызывают у учащихся пространственное представление изучаемых соотношений» и имеют значение в развитии пространственного мышления [170].

Наглядное обучение опирается не на отвлеченные представления и слова, а на конкретные образы, которые воспринимаются непосредственно, поэтому необходимо в процессе обучения использовать различные средства визуальной наглядности, основная задача которых — стимулировать процессы мышления, опирающиеся на образы. К средствам наглядности отнесем: натуральные (вещественные) модели (фотографии, рисунки, реальные предметы, муляжи, геометрические тела); условно-графические изображения (чертежи, проекции, разрезы, сечения); знаковые модели (математические формулы и символы); компьютерные модели (передаваемый по сети текст или изображение информации на экране компьютера, графика и звук).

Отмечается возникновение трудностей у учащихся в процессе обучения с оторванностью мышления от образной основы: образ — это не просто основа теоретической мысли, это ее необходимая составная часть. Мышление, лишенное элементов образности, рискует стать сухим, бесплодным, формальным. Обучение, совсем не адресованное к образному мышлению, не только не способствует его развитию, но и в конечном счете подавляет его.

Р. Арнхейм утверждает, что никакую информацию о предмете не удастся непосредственно передать читателю, если не представить этот предмет в разборчивой форме, в виде грамотно построенных чертежей и рисунков [9].

И.В. Трайнев выделяет следующие условия повышения эффективности наглядного материала:

1. Содержание средств визуальной наглядности должно соответствовать цели его предъявления и методу обучения. В качестве целей предъявления можно привести следующий их перечень: распознавание зрительных образов, приобретение зрительного опыта, развитие наблюдательности, обобщение сравнение, анализ, систематизация, синтез, абстракция и т.д.

2. Объем визуальной информации должен соответствовать эргономическим и психофизиологическим возможностям обучающегося.

3. Комбинации и структуры, применяемые в иллюстративном материале, должны обеспечивать однозначное без искажений восприятие и преобразование предметов и явлений в образы, понятия и представления [156].

Г.Ф. Хакимов считает, что, используя оптимальное сочетание разнообразных динамических средств наглядности при формировании понятий об образовании геометрической формы предметов, также при ознакомлении учащихся с терминологией, применяемой на уроках черчения, можно развивать динамические пространственные представления школьников [166].

А.Д. Семушин констатирует о возможности формирования пространственного мышления с помощью применения моделей на уроках стереометрии в сочетании с иллюстративными чертежами [145].

По мнению, Р.С. Черкасова, применение средств наглядности в обучении подчинено ряду правил: ориентировать учащихся на разностороннее восприятие предмета с помощью разных органов чувств; показать предмет в его развитии; предоставить учащимся максимум активности и самостоятельности при рассмотрении наглядных пособий; использовать средства наглядности ровно столько, сколько это нужно, не допускать перегрузки обучения наглядным пособиям [167].

Применение в процессе обучения стереометрии разнотипных средств наглядности способствует накоплению богатого запаса зрительных пространственных образов, а также формированию их динамичности, что по мнению С.Л. Рубинштейна, является необходимым условием высокого уровня развития пространственного мышления [137].

Все виды учебной наглядности чувственно воспринимаемы, но их содержание принципиально различно, что определяет характер возникающих на их основе пространственных образов. Психологическая многогранность средств визуальной наглядности позволяет утверждать, что они имеют разностороннюю педагогическую ценность в развитии пространственного мышления учащихся в процессе обучения стереометрии.

Если при создании пространственного образа на уроках стереометрии мысленному преобразованию подвергается наглядная основа, на базе которой происходит возникновение образа, то оперирование заключается в преобразовании уже созданного на этой основе образа, иногда в условиях отвлечения от наглядной основы. Отечественный геометр, методист Н.Ф. Четверухин указывает на значение решения стереометрических задач без опоры на наглядность для развития пространственного мышления: «…пространственная гимнастика без чертежа представляет более сильное, но в то же время и более трудное средство развития пространственного воображения» [168].

Процесс оперирования пространственными образами характеризуется числом и характером преобразований созданных образов. Исследователи выделили несколько способов преобразования пространственных образов (типов оперирования) в ходе решения задач. Умение мысленно изменять положение образа стереометрической комбинации в пространстве по отношению к другим объектам или их элементам относится к первому типу оперирования. Второй тип оперирования характеризуется умением учащихся мысленно изменять структуру образа геометрической конфигурации путем мысленной перегруппировки её составных элементов с помощью применения различных приемов, например, совмещения, добавления, наложения, усечения. Третий тип оперирования подразумевает умение изменять образ геометрической конфигурации одновременно по положению и по структуре. И, наконец, четвертый тип оперирования требует умения конструировать образы новых геометрических конфигураций и воспроизводить их с помощью различных видов учебной наглядности.

Приёмы мышления, в том числе и пространственного, особенно ярко проявляются при обучении решению различного рода практических и теоретических задач. Старшеклассники в процессе обучения стереометрии стремятся овладеть наиболее рациональными приёмами оперирования пространственными образами. От них требуются умения в ходе решения стереометрических задач осуществлять переход от трехмерного пространства к двухмерному и обратно, переход от натуральных моделей к условно-графическим изображениям стереометрических объектов и обратно, переход от фиксированной системы отсчета при восприятии объекта к свободно выбранной или произвольно заданной.

Использование особой системы задач по четко разработанной схеме может быть использовано как одно из средств развития пространственного мышления. Например, Н.Н. Зепнова разработала специальную систему задач, направленную на развитие пространственного мышления учащихся на элективных курсах геометрии [57]. Задачи на «преобразование пространства» рассматривались в работе Р.Ф. Мамалыга как средство развития пространственного мышления студентов [86]. З.Р. Федосеева в своем исследовании констатирует необходимость включения в процесс обучения планиметрии пропедевтики стереометрических знаний [160].

В.Ю. Щербакова предлагает развивать пространственное мышление учащихся через систему диагностических задач, направленных на выявление слабо сформированных подструктур [181].

Л.И. Боженкова в своей диссертационной работе констатирует о низком уровне сформированности умений, необходимых учащимся при изучении систематического курса геометрии для развития пространственного мышления. Исследователь указывает на проблему организации такого обучения геометрии, при котором накопление указанных умений и коммуникативного опыта, ведёт к его интеллектуальному и социальному становлению. Для решения этой проблемы Л.И. Боженкова разработала концепцию интеллектуального воспитания личности, учитывающую необходимость модернизации системы школьного, и в частности, математического образования [23]. Для этого были созданы методики обогащения умственного опыта учащихся при изучении геометрических фигур и их свойств (самостоятельное открытие определений геометрических понятий, построение локальных теорий, чтение и понимание учебной информации); при работе с задачами: систематизация задач; использование алгоритмического подхода при решении задач определённых типов; составление задач (по неполным данным, на основе данной задачи, с использованием различных видов аналогии) [23].

Как показывают исследования А.В. Василенко, формирование в процессе обучения геометрии пространственного воображения возможно за счет применения методики изучения параллельной, ортогональной и центральной проекций в старших классах средней школы, которая включает построение этих проекций различных геометрических фигур и рассмотрение их приложений в различных областях науки, например, технике, искусстве, архитектуре [153].

Обучение геометрии в цифровой образовательной среде приобретает новые черты. Визуальное представление геометрических образов, использование интерактивных сред и ИКТ на уроках геометрии обусловлены изменениями, происходящими как в обществе, в целом, так и в обучении математике, в частности.

Государственная политика в сфере образования закреплена в следующих нормативно-правовых документах: Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы, в программе «Цифровая экономика Российской Федерации», Федеральный государственный образовательный стандарт основного и среднего общего образования. В этих документах представлены цели и задачи развития цифровой образовательной среды образовательных учреждений. Однако, в настоящее время точных определений, что понимается под цифровой образовательной средой, и какие информационными технологии при этом могут использоваться в образовательном процессе, в этих документах не указывается. Актуальным направлением в исследованиях по теории и методике обучения математике является разработка информационно-образовательной среды и инструментов, которые наиболее эффективны в обучении геометрии [85; 119; 172; 180].

Становление цифрового образования происходит на фоне вступления науки в новый постнеклассический этап своего развития (В.Г. Буданов, Е.Н. Князева, С.П. Курдюмов, В.М. Курейчик, Г.Г. Малинецкий, В.И. Писаренко, В.С. Степин и др.), основанный на идеях целостности, фундаментальности, эволюционности, самоорганизации и его направленности на человека. Философские основания постнеклассического образования ориентированы на формирование автономной личности, которая рассматривается как динамическая система, способная к самоорганизации и стремящаяся к актуализации своих внутренних потенций (Н.З. Алиева, С.Н. Дворяткина [47], А.П. Краснопольская, Н.С. Пурышева, Е.И. Смирнов [150] и др.). Повышение роли субъектности в познавательном процессе смещает педагогическое внимание на процессы самосовершенствования, саморазвития, самореализации и самоактуализации личности, воспитание таких качеств, как способность взять на себя ответственность, креативность, рефлексивность, умение работать в коллективе и готовность к дальнейшему саморазвитию. Математическое образование сегодня ориентировано не только на изучение математической науки как таковой, а направлено на интеллектуальное воспитание и развитие личности, необходимое для полноценного функционирования человека в современном обществе. В связи с этим возрастает актуальность педагогических исследований, направленных на обновление системы математического образования, как в школе, так и в вузе.

Современная образовательная парадигма основывается на принципах:

– динамичности, быстро меняющихся требований к математической подготовке обучающихся;

– плюрализма как возможности свободного выбора средств и технологий обучения в открытой образовательной среде;

– нелинейности, который в педагогике понимается как многообразие и всесторонности подходов к обучению и развитию обучающихся;

– вероятности, обусловленный неоднозначностью и непредсказуемостью развития техники, производства и других факторов развития общества и, в конечном счёте, самого процесса образования.

Методологической основой современного образования являются, деятельностный, системный и синергетический подходы.

Деятельностным подходом называют концепцию философии, которая придает деятельности более фундаментальный онтологический статус, нежели констатация существования отдельных объектов-вещей. В качестве объяснительного принципа в эпистемологии этот подход предполагает, что смысл понятий и человеческих представлений порождается характером деятельности и представляет собой результат ее опредмечивания.

Основоположником теории деятельности в обучении является Л.С. Выготский. Деятельность с точки зрения философии имеет динамическую основу и развитие деятельности продолжается всю сознательную жизнь человека, меняясь в направлении деятельности и её интенсивности. Психология как наука раскрывает этот феномен с позиции психических процессов, происходящих с индивидом как взаимосвязанные компоненты: мотивационный, операционный и контрольно-оценочный. Развитие учебной деятельности характеризуется изменениями, происходящими в действиях обучающихся.

Необходимым условием повышения мотивации деятельности человека является персонализация, т.е. признание его другими людьми как личности, значимой для них [18]. Включая обучающихся в процесс персонализации и самореализации, педагог побуждает их к непроизвольной, но активной мыслительной деятельности. Исследования Д.Б. Эльконина и В.В. Давыдова показали, что если в группу социального взаимодействия входят обучающиеся с разным уровнем развития, но так, чтобы эти уровни не отличались больше, чем на один шаг друг от друга, то это способствует их развитию. При этом обучающиеся с более высоким уровнем развития мотивируются за счет персонализации, а с более низким – за счет самореализации.

Операционный компонент включает формирование умений и действий, направленных на качественное усвоение знаний через ведущий тип деятельности, соответствующий данному возрастному периоду.

Контрольно-оценочный компонент наиболее актуально имеет направление развития в сторону самооценки и саморефлексии, которые мотивируют обучающихся к действию или бездействию.

Важным моментом в развитии учебной деятельности является системный подход к обучению.

Понятие «системный подход» (англ. «systems approach») стало широко употребляться с конца 1960-х – начала 1970-х гг. в англоязычной и русской философской литературе. Понятие система происходит от греческого слова «systema», означающего целое, составленное из отдельных частей, и определяется как совокупность (соединение) взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, объединенных с определенной целью. Понятие элемент происходит от латинского слова «elementarius» и означает: начальный, простой, простейший, конечный, неделимый, лежащий в основе чего-либо [182].

Системный подход определяется пятью основными принципами: целостностью, иерархичностью, структуризацией, множественностью и системностью и предполагает исследование объектов как систем, раскрытие целостности объекта через выявление многообразных типов связей элементов сложного объекта и представление его как единого целого. (И.В. Блауберг, П.П. Гайденко, В.Н. Садовский, Э.Г. Юдин [182], М.Р. Шагиахметов и др.). Это подход, при котором любая система (объект) рассматривается как совокупность взаимосвязанных элементов (компонентов), имеющая выход (цель), вход (ресурсы), связь с внешней средой и обратную связь. Системный подход – направление философии и методологии науки, специально-научного познания и социальной практики, в основе которого лежит исследование объектов как систем.

Синергетический подход в организации и формировании образовательной среды как инструмент, способствующий повышению ее структурного и функционального многообразия. (В.В. Гуньков, Н.А. Монаков, Е.И. Смирнов, Г. Хакен и др.). Синерге́тика (от др.-греч. συν- – приставка со значением совместности и ἔργον «деятельность») – междисциплинарное направление науки объясняющее образование и самоорганизацию моделей и структур в открытых системах, далеких от термодинамического равновесия. Принципы синергетического подхода к исследованию систем, в частности, методической системы обучения математике, опираются на сотрудничество, содружество всех компонентов системы, обеспечивающие связи между элементами структуры, способствующие интенсивному взаимодействию системы обучения с окружающей средой, повышающие упорядочивание подсистем и приводят к самоорганизации сложных систем.

Для всякой сложной системы наступает критический момент неустойчивости системы, когда сложная система осуществляет выбор дальнейшего пути эволюции. Динамичное развитие информационных технологий, современных сред обучения, средств наглядного моделирования, технологий интерактивного обучения привело к изменению образовательной среды, включая внедрение цифровых инструментов учебной деятельности в информационную образовательную среду, обеспечения возможности обучения по индивидуальному учебному плану в течение всей жизни. В новых условиях образования – учитель организует деятельность ученика в инновационной образовательной среде, ученик осуществляет поиск, выбор, анализ, систематизацию и обобщение информации.

Современная образовательная среда, являясь внешним фактором перестройки системы образования, в целом, и методики обучения математике, в частности, несёт тенденции цифровизации. Потребность в развитии пространственного мышления обучающихся в процессе обучения геометрии в школе активизирует поиск новых подходов к исследованию методической системы конструирования графических образов понятий в обучении геометрии с использованием систем динамической математики.

1.2. Сущность понятия «графический образ геометрического понятия»: его содержание, структура и основные характеристики

Специфика геометрического содержания математической подготовки в школе требует от учащегося овладения умениями и навыками, связанных с необходимостью математического, логически обоснованного, графического, символического, словесного оформленного решения задач геометрической составляющей основного государственного экзамена (ОГЭ) и единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике. Проблема обучения решению геометрических задач становится для учителя математики приоритетной в системе подготовки выпускника средней школы к ЕГЭ по математике. Однако, обучение геометрии в рамках школьного курса по ряду позиций не соответствует содержательным, организационным, оформительским требованиям ОГЭ и ЕГЭ по математике [92].

Однако, как показывает анализ результатов проведения ОГЭ и ЕГЭ и ежегодное тестирование первокурсников направления подготовки бакалавриата «Педагогическое образование», профиль «Математика» в Армавирском государственном педагогическом университете у большинства учащихся крайне слабая связь между словесным определением того или иного геометрического понятия и с соответствующим графическим образом. Каждый ученик формально знает определения треугольника (общего вида), равнобедренного треугольника, равностороннего треугольник, но, однако, на чертеже при этом чаще всего изображается остроугольный равнобедренный треугольник.

Прямым следствием является тот факт, что около 80 % выпускников (средний балл ЕГЭ по математике выше 70) стараются, например, изображение правильной треугольной пирамиды построить с помощью равнобедренных треугольников, что делает чертеж край ненаглядным и не читаемым. Очевидно, что недоработки основной школы прямо проявляются при изучении стереометрии [92].

Решение школьной геометрической задачи, как планиметрической, так и стереометрической, подразумевает выполнение определенной последовательности действий: прочтение словесного условия, перевод описанной геометрической конструкции в воображаемый графический образ, изображение этой конструкции на чертеже (от руки или с помощью инструментов). Одновременно прописывание в краткой записи данных задачи (частичный анализ условия), на основе анализа условия составление плана решения, реализация этого плана с выполнением обоснования доказательных рассуждений и необходимых вычислений (синтез), исследование полученного результата [92].

Значительная часть этих действий прямо связана с уровнем развития пространственного мышления учащегося. Помимо естественного жизненного опыта ребенка развитие пространственного мышления происходит в период обучения и, прежде всего, на уроках геометрии за счет целенаправленно методически грамотно организованного учебного процесса.

И.С. Якиманская отмечает, что для механизма пространственного мышления «содержанием является оперирование образами, их преобразование, причем, нередко длительное и многократное. В этот процесс вовлекаются образы, возникающие на различной графической основе, поэтому в пространственном мышлении происходит постоянное перекодирование образов, то есть переход от пространственных образов реальных объектов к их условно-графическим изображениям; от трехмерных изображений к двумерным и обратно» [183].

И.Ф. Шарыгин утверждает, что «геометрия, впрочем, как и алгебра, является носителем собственного метода познания мира…» и «главным действующим лицом Геометрии должна быть фигура…, а главным средством обучения рисунок, картинка», следовательно, эта самая «картинка» должна соответствовать всем требованиям теории и методики [175].

Г.И. Ковалёва отмечает важность наглядного представления геометрического понятия в развитии мышления обучающихся в школе. Раскрывает сущность понятий образ и представление. «Образ возникает благодаря ощущениям и восприятию. Представление – форма отражения в виде наглядно-образного знания, одно из проявлений памяти, следовой образ ранее бывшего ощущения или восприятия», при этом различает понятия «графический образ» и «графическое представление». «Графический образ математического понятия несет в себе совокупность изобразительных элементов, имеющих условное значение. Графическое представление понятия – это наглядно-образное знание о его существенных признаках, открывающихся в ходе анализа отношений данного понятия с другими понятиями» [70, с. 32].

Педагогическая проблема изображения пространственных фигур на плоском чертеже была наиболее полно изложена начиная с середины XX века в работах Ж. Адамара, Н.Ф. Четверухина, А.Д. Семушина, Л.М. Лоповок, Р.С. Черкасова, Н.М. Бескина, Г.И. Саранцева и многих других математиков и методистов. В этих работах приведены теоретические математические положения построения стереометрического чертежа и сформулированы те методические проблемы, с которыми сталкивается учитель математики в процессе преподавания стереометрии. Несмотря на это, проблема построения и использования чертежа в процессе преподавания стереометрии остается, а то и стала более острой в свете современных реалий и состояния процесса изучения геометрии в средней школе. Именно, в начале систематического курса геометрии, становится очевидным значительные различия в степени развитости у учащихся способности восприятия и оперирования геометрическими образами [100; 101]. Даже в 10 классе можно обнаружить ученика, который не воспринимает изображение треугольной пирамиды как аналог (модель) пространственной конструкции, а видит чертеж как плоский набор треугольников. Для учителя математики с необходимостью возникает проблема конструирования графических образов геометрических понятий. В старшей школе к этому добавляется также необходимость использовать правила изображения пространственной фигуры на проекционном чертеже. Чертеж существенно облегчит процесс решения задачи, если он верен и нагляден [100]. Применение доказанных утверждений осложняется необходимостью «узнавания» описанных в них геометрических конструкций в измененных условиях на таком чертеже. Понять в процессе прочтения словесного условия задачи, о каких геометрических понятиях идет речь, затем соотнести с этими понятиями соответствующие графические образы, объединить их и построить правильный и наглядный чертеж есть нелегкая задача для школьника, требующая конкретной методической работы со стороны учителя. Положительный результат здесь может быть достигнут благодаря методики конструирования графических образов геометрических понятий с эффектом развития пространственного мышления обучающихся в старших классах средней школы с использованием систем динамической математики (на примере GeoGebra). В старшем школьном возрасте учебная успешность связана преимущественно с уровнем развития пространственного мышления.

Сущность феномена «графический образ геометрического понятия» заключается в том, что в процессе мышления образ даётся в форме понятия, суждения и умозаключения, результатом восприятия геометрического понятия является графическая модель. Содержание понятия включает графические модели геометрических понятий (объектов), визуализацию (представление) изображений графических образов объектов, движение графических объектов (анимация). Математический подход дает ключ к пониманию графического образа как некоторого характерного чертежа, конфигурации, структуры. Структура графического образа состоит из геометрических примитивов (точки, линии, плоскости, поверхности, простейшие геометрические тела) из них формируются детали, из которых создаются конструкции объектов. Основные характеристики: наглядность, информационность, декомпозируемость.

Формирование соответствующих навыков по созданию графических образов начинается с первых уроков систематического курса геометрии основной школы в 7 классе. Практически каждый школьник к этому времени из пропедевтического материала и собственного жизненного опыта имеет представление, как выглядит, например, геометрическая фигура «треугольник». Именно визуальное восприятие этой геометрической конструкции здесь выходит на первый план. Не погружаясь в тонкости математического определения понятия, важно четко выстроить в сознании учащегося соотношение между понятиями треугольник, равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, равносторонний треугольник. Учитель с необходимостью должен следить за точным соотнесение термина с графической иллюстрацией, то есть с графическим образом. Недопустима подмена всех вариантов изображения треугольника изображением равнобедренного или равностороннего треугольника. В процессе отработки навыков построения геометрических конструкций на плоском чертеже закладываются очень важные, отстраненные во времени негативные последствия при переходе к пространственным конструкциям [92]. Формально в школьных учебниках геометрии присутствуют некоторые разделы, посвященные теоретическим основам построения проекционного чертежа, но они малополезны для практической работы. Кроме того, в некоторых современных учебниках, рекомендованных Министерством образования и науки к массовому использованию в школах страны имеются изображения, искажающие пространственную конструкцию. В иллюстративном материале к определению пирамиды представлены изображения, которые ещё в середине XX века в рекомендациях учителю математики приводились в качестве примера методически недопустимых [92].

Покажем на примере построения *изображения правильного шестиугольника* механизм оперирования образами и их преобразованием (рис. 1). В этот процесс вовлекаются образы, возникающие на различной графической основе, поэтому в пространственном мышлении происходит постоянное перекодирование образов, то есть переход от пространственных образов реальных объектов к их условно-графическим изображениям.

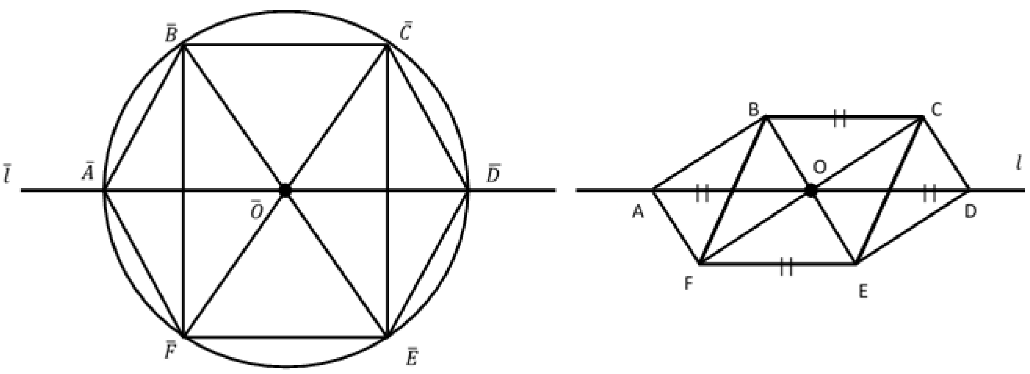


Рис. 1

Используя свойства аффинных отображений, можно свести изображение правильного шестиугольника к следующим шагам построения:

1) строим произвольный параллелограмм $BCEF$ с диагоналями – изображение прямоугольника $\overline{B}\overline{C}\overline{E}\overline{F}$ с диагоналями;

2) обозначим $O = FC \cap BE$;

3) строим прямую $l : O \in l, l \,//\, BC, l \,//\, FE$;

4) отложим на l $AO = DO = BC$.

5) $ABCDEF$ – изображение правильного шестиугольника.

Таким образом, основой создания стереометрических образов является точное формирование графических образов геометрических понятий, в первую очередь, при изучении планиметрии.

Именно, в начале систематического курса геометрии, становится очевидным значительные различия в степени развитости у учащихся способности восприятия и оперирования геометрическими образами [92]. Даже в 10 классе можно обнаружить ученика, который не воспринимает изображение треугольной пирамиды как аналог (модель) пространственной конструкции, а видит чертеж как плоский набор треугольников. Для учителя математики с необходимостью возникает проблема дифференцирования учащихся.

В старшей школе к этому добавляется также необходимость использовать правила изображения пространственной фигуры на проекционном чертеже. Чертеж существенно облегчит процесс решения задачи, если он верен и нагляден [92]. Применение доказанных утверждений осложняется необходимостью «узнавания» описанных в них геометрических конструкций в измененных условиях на таком чертеже. Понять в процессе прочтения словесного условия задачи, о каких геометрических понятиях идет речь, затем соотнести с этими понятиями соответствующие графические образы, объединить их и построить правильный и наглядный чертеж есть нелегкая задача для школьника, требующая конкретной методической работы со стороны учителя. Известно, что основой обучения вообще, и решению геометрических задач в частности, являются «подражание и опыт» [92]. Положительный результат здесь может быть достигнут лишь методом проб и ошибок самого ученика под руководством учителя, который должен владеть теорией методов изображений и методически грамотно строить соответствующую работу с учащимися, работать над развитием пространственного мышления школьников. Без такого развития невозможно обучение доказательным рассуждениям, отработка навыков последовательных логических умозаключений, основанных на строгих математических определениях понятий и соотнесения этих понятий с их геометрическими образами. В старшем школьном возрасте учебная успешность связана преимущественно с уровнем развития понятийного мышления, а развитое пространственное мышление способствует успеваемости по предметам физико-математического, технического профиля.

Методика формирования графических умений при изучении планиметрии, прежде всего, формирует умение переводить словесный текст условия задачи в графическую конструкцию. Здесь крайне важно соотнесение каждого геометрического понятия со зрительным образом.

Приведем пример. При изучении темы «Треугольники» в начале систематического курса геометрии учитель знакомит учащихся с различными видами треугольников и их свойствами (многое по этой теме известно учащимся из пропедевтического курса геометрии). Учащиеся успешно осваивают этот учебный материал, уверенно отличат тупоугольный, прямоугольный, остроугольный и другие виды и создается впечатление, что проблем с изображением треугольника не будет. Однако в каждой конкретной задаче школьного курса крайне редко идет речь о треугольнике общего вида. Единственное исключение – это указание конкретных длин сторон треугольника, но тогда сам текст задачи требует соответствия чертежа.

Конструирование графических образов геометрических понятий в цифровой образовательной среде имеет ряд особенностей:

– интерактивность за счёт применения систем динамической геометрии;

– наглядность в представлении графических моделей геометрических объектов и представлении изображений графических образов в динамике;

– информационность насыщенность содержанием, информацией, представление знаний в формализованном виде, накоплении, хранении и передачи визуальных данных;

– декомпозируемость способствует разделению проблемы конструирования графического образа на части, обучение графическим умениям на разных уровнях сложности стереометрической задачи и с помощью объединения формируется умение конструировать графические образы геометрических понятий.

Таким образом, методическая система обучения геометрии основана на методе наглядного моделирования. Наглядное моделирование в обучении математике тесно связано с понятием образа, для нашего исследования интерес представляют абстрактные математические понятия, образы которых создаются в процессе восприятия, памяти, мышления и воображения.

Наглядный метод в обучении основан не только на практическом действии с объектом изучения, что определяет деятельностный компонент наглядного обучения. В старших классах наглядное обучение математике происходит на двух уровнях: конкретном и абстрактном. Актуализируется знаково-символическая деятельность, графический образ представляет результат познавательной деятельности обучающихся по созданию графической модели как результат восприятия геометрического понятия.

1.3. Формирование графических образов как средство развития пространственного мышления при решении стереометрических задач

С позиции психологии, как отмечала И.С. Якиманская, формирование у школьников современных научных представлений и понятий о пространстве – одна из важнейших задач интеллектуального развития учащихся [184].

Пространственное мышление присуще каждому человеку, оно дает возможность ориентироваться в окружающем пространстве и начинает формироваться у ребенка уже в самом раннем возрасте. В дальнейшем достаточно развитое пространственное мышление является необходимой составляющей многих профессий взрослого человека. Целенаправленная работа по развитию пространственного мышления учащихся должна пронизывать весь курс геометрии средней школы, основой является требование с первых уроков геометрии выстраивать четкое соответствие между словесными определениями геометрических понятий и их графическими образами. «В психологии пространственное мышление понимается как процесс создания пространственных образов и установления отношения между ними путем оперирования самими образами и их элементами» [184].

Долгое время психологи считали наглядно-образное мышление более низким в сравнении со словесно-логическим, а изучение математики способствующим развитию абстрактного мышления. Анализ учебных материалов по математике показывает, что, игнорируя осознание полноценного мысленного образа, сразу происходил переход от определения понятий к оперированию знаками. В результате большинство учащихся формально запоминали определение понятий и оперирование ими, а также их свойства и испытывали трудности при изучении данной дисциплины. Это привело к тому, что на современном этапе развития психолого-педагогических наук проблема формирования и развития образного мышления становится приоритетной.

Психологические исследования определяют пространственное мышление как локальное образование, потому что его формирование происходит в связи с общим психическим развитием человека по мере овладения им предметным миром, процессом общения, обучения. Считается, что пространственное мышление преодолевает ряд закономерных этапов своего становления, сначала являясь частью других видов мышления, а затем в виде пространственных образов в собственных наиболее развитых и самостоятельных формах [62; 63; 91; 137; 184].

Психологи считают, что пространственное мышление является разновидностью «визуального» мышления, что его основу составляет в основном зрительная система, так как оно формируется как правило на наглядном материале.

Под пространственным мышлением психологи и методисты понимают:

– специфическую разновидность одного из видов мышления, связанного с представливанием, воображением (образного мышления), основу которого составляют геометрические образы, и основная функция которого – оперировать образами в математическом (абстрактном) пространстве;

– мыслительный процесс, представляющий по своему содержанию обобщенное и опосредованное отражение пространственных свойств и отношений объекта, включенного в этот мыслительный процесс; многократные мыслительные действия с образами, требующие их динамичности, интуитивное определение какие именно действия целесообразно выполнять для получения нужного результата [65; 91; 184].

Структурными компонентами пространственного мышления являются: пространственное восприятие (образное отражение пространственных характеристик окружающего мира, восприятие величины и формы предметов, их взаимного расположения); пространственное представливание (процесс и результат произвольного восстановления в памяти или в сознании человека пространственного образа какого-либо объекта, представление о форме, положении, величине, направлении и других пространственных соотношениях объектов реального мира); пространственное воображение (умение мысленно моделировать и «представлять» различные проекты или конструкции, видеть их внутренним зрением в цвете и деталях; оперирование пространственными представлениями) [184].

Анализ психолого- педагогических исследований, показал, что понятие пространственное мышление ученые связывают с такими понятиями как «пространственное воображение», «пространственное восприятие». Эти понятия и связи раскрываются в трудах Б.Г. Ананьева [7], А.В. Брушлинского, А.Н. Леонтьева, И.Я. Лернера, Р.С. Немова, И.С. Якиманская и других ученых при исследовании механизмов и видов процессов мышления, восприятия, воображения, представления.

Задача развития пространственного мышления школьников является актуальной в методике обучения математике. Её важность акцентируется многими видными учёными, педагогами, психологами, такими как В.А. Гусев, Г.Д. Глейзер, В.А. Далингер, Р.С. Черкасов, С.Л. Рубинштейн, И.Я. Каплунович, И.С. Якиманская и др. [27; 32; 33; 45; 46; 80; 98; 105; 118].

Развитость пространственного мышления рассматривается как основной показатель общего интеллектуального совершенствования, проявления специальных способностей личности [98].

Для решения методических задач формирования пространственного мышления обучающихся в процессе обучения геометрии рассмотрим психологический аспект содержания этого понятия. Пространственное мышление – вид умственной деятельности, обеспечивающий создание пространственных образов, мышление в терминах изображений и оперирование графическими образами в процессе решения практических и творческих задач [75]. Содержанием пространственного мышления является оперирование пространственными образами на основе их создания с использованием наглядной опоры (предметной или графической, разной меры общности и условности). Оперирование пространственными образами определяется их исходным содержанием (отражение в образе геометрической формы, величины, пространственной размещенности объектов); типом оперирования (изменение в ходе оперирования положения объекта, его структуры); полнотой, динамичностью образа (наличием в нем различных характеристик, их системности, подвижности и т. п.) [19; 75; 65].

Существенным признаком пространственного мышления учащихся, позволяющим выявить качественные изменения в его формировании и развитии, является работа с графическими образами геометрических понятий [91].

Пространственное мышление в обучении геометрии формируется на геометрических образах пространственных предметов окружающей действительности. Переход от одних зрительных образов, отражающих пространственные свойства и отношения, к другим, постоянно наблюдается в решении тех задач, где используются разнотипные графические изображения. На их основе возникают не только отдельные образы, адекватные каждому изображению, но их целостная система [185, с. 97]. Рассмотрим возрастные и индивидуальные особенности проявления этого процесса у учащихся старшего подросткового возраста.

Исходя из тезиса Рубинштейна С.Л., что восприятие пространства является сложным образованием [137, с. 89], в котором в тесном единстве сплетаются разнородные компонент, выделим бинарные процессы, влияющие на формирование и развитие пространственного мышления учащихся.

Восприятие и ощущения. В восприятии пространственных свойств вещей известную роль играют различные ощущения. В отличие от процесса ощущения при восприятии человек познает не отдельные свойства предметов и явлений, а предметы и явления окружающего мира в целом. В основе восприятия лежат ощущения, но восприятие не сводится к сумме ощущений [137, с. 89]. Человек ориентируется в пространстве, главным образом, на основе зрительных данных. Восприятие пространства является у него по преимуществу функцией зрения. «Чувственная основа восприятия пространства – дана, так же как интенсивность, непосредственно, первично, вместе с чувственными качествами ощущений. Но лишь в результате более или менее длительного развития формируется у человека восприятие пространства, в котором получают всё более дифференцированное и адекватное отражение реальные пространственные свойства и отношения предметов» [75].

При формировании графических образов геометрических понятий наиболее распространены такие виды восприятия, как зрительные, слуховые, кинестетические восприятия. Сложные виды восприятия представляют комбинации, сочетания различных видов восприятия. Например, восприятие учебного текста по геометрии при его чтении вслух есть сочетание зрительного и слухового восприятий. Восприятие в процессе создания графических образов геометрических понятий есть сочетание зрительного, слухового, кинестетического восприятий [137].

Рассмотрим взаимодействие восприятия и внимания как процессов, влияющих на формирование пространственного мышления [91]. Переключение внимания всегда сопровождается некоторым нервным напряжением, которое выражается в волевом усилии. Отсюда понятно, почему школьнику трудно бывает начинать новую работу, особенно если она не вызывает приятных чувств, а предыдущая деятельность, наоборот, была более интересной [137, с. 75]. Воспитание произвольного (волевого) внимания сводится к тренировке волевого усилия. Переключение внимания учащихся с существенных признаков понятия на не существенные способствует усилению произвольного внимания и выделению свойств геометрического понятия образ, которого надо воспринять.

Наблюдение и восприятие. Наблюдение – это восприятие, тесно связанное с деятельностью мышления – сравнением, различением, анализом. Недаром наблюдение называют иногда «думающим восприятием». Наблюдение всегда осуществляют с той или иной познавательной целью, связанной с ясным представлением задач и предварительной разработкой плана наблюдения. Успешность наблюдения зависит от знаний и опыта человека в соответствующей области. Для полноты и систематизации результатов наблюдения важно словесно выражать итоги наблюдения (если не письменно, то хотя бы мысленно, про себя), отдавать себе отчет в результатах наблюдения [137, с. 92].

Восприятие и запоминание. Запоминание – это, как правило, установление связи нового с тем, что уже имеется в сознании человека. Запомнить учебный материал – это значит связать его с прежними знаниями, запомнить геометрический образ – это значит связать его с соответствующим геометрическим понятием.

Связь между отдельными геометрическими понятиями и суждениями, отраженными в нашем сознании и закрепленными в памяти, называют ассоциацией (в переводе с греческого – «соединение», «связь»). Без этих связей, сила ассоциаций, невозможна нормальная психическая деятельность человека, в том числе деятельность памяти. Сущность ассоциативной связи заключается в том, что появление в сознании одного элемента этой связи вызывает появление в сознании н другого элемента этой связи. Ассоциативные процессы обеспечивают запоминание и воспроизведение геометрических образов в определенной связи и последовательности.

Основу наших знаний составляют ассоциации более высокого уровня, сложные, или смысловые, ассоциации, отражающие объективные связи типа «причины и следствие», «род и вид», «целое и часть». Иными словами, в этом случае связь между объектами устанавливается не потому, что они воспринимались одновременно или похожи друг на друга, а потому, что одно понятие есть следствие другого, или часть другого, или вид другого [137, с. 100].

Образная память и запоминание. Образная память – это запоминание, сохранение и воспроизведение образов ранее воспринимавшихся предметов и явлений действительности. Различают подвиды образной памяти – зрительную, слуховую и др.

Некоторые люди обладают очень ярко выраженной образной памятью, называемой эйдетической памятью (от греческого слова «эйдос» – образ). Эйдетические образы – следствие длительной инертности возбуждения центрального коркового звена зрительного или слухового анализатора. Поэтому человек-эйдетик некоторое время после восприятия продолжает совершенно отчетливо, во всех деталях видеть только что воспринятую картину, слышать прослушанную мелодию и т. д. [137, с. 102].

Точность воспроизведения, т. е. соответствие образа оригиналу, существенно зависит от участия речи при запоминании. Самую важную роль здесь играет правильное объяснение и понимание того, что воспринимается. Учащиеся, воспринимающие геометрический образ вне словесного объяснения, как правило, воспроизводят его образ неточно фрагментарно (отрывочно). Словесно-логическая память выражается, в запоминании, сохранении и воспроизведении определений понятий, точных формулировок теорем и т.д. Математические суждения не существуют вне речи, вне тех или иных понятий и утверждений. Поэтому и вид памяти называют не просто логическим, а словесно-логическим. Воспроизведение мыслей не всегда происходит в том же словесном выражении, в каком они были первоначально выражены. В обучении геометрии необходимо запоминать и воспроизводить точное, буквальное словесное выражение определения, теорем и т. д. Однако буквальное воспроизведение словесного материала может происходить без понимания его смысла, тогда его заучивание будет уже не логическим, а механическим запоминанием. Форма воспроизведения геометрических образов зависит от уровня речевого развития. Чем менее развита речь школьника, тем труднее ему изобразить геометрический образ и выразить своими словами объяснение построения чертежа. Долговременная память характеризуется относительной длительностью и прочностью сохранения воспринятого материала. Долговременная память обеспечивает хранение, накопленных знаний, в преобразованном виде, за счёт их обобщения и систематизации. При кратковременной памяти воспроизведение материала происходит в той «фотографической» форме и последовательности, в которой он воспринимался. При долговременной памяти воспринятый материал, как уже отмечалось, реконструируется [137, с. 104].

Мышление перерабатывает информацию, которая содержится в ощущениях и восприятии, а результатом мыслительной работы может быть представление нового образа. Человек может представить себе и то, что он никогда не воспринимал ранее, с чем никогда в жизни не сталкивался, или то, что еще будет создано в более или менее отдаленном будущем [137, с. 116]. Такого рода представления называют представлениями воображения или просто воображением. Как бы ни было ново то, что создано воображением человека, оно неизбежно исходит из того, что имеется в действительности, опирается на нее. Поэтому воображение, как и вся психика, есть отражение мозгом окружающего мира, но только отражение того, что человек не воспринимал, отражение того, что станет реальностью в будущем. Физиологически процесс воображения представляет собой процесс образования новых сочетаний и комбинаций из уже сложившихся временных нервных связей в коре головного мозга [137]. Основное значение воображения в обучении геометрии в школе и состоит в том, что без него был бы невозможен любой геометрический образ, так как невозможно выполнить чертёж к задаче, не представляя себе конечного результата или промежуточных результатов. «Все школьные предметы (не только такие, как история, биология, география, литература, но и такие, как математика, язык) не могут полноценно усваиваться без деятельности воображения. Деятельность воображения всегда соотносится с реальной действительностью» [137, с. 130-133].

Исходя из теоретических положений В.А. Крутецкого, С.Л. Рубинштейна, И.С. Якиманской основу пространственного мышления как разновидности образного мышления составляет деятельность представления, протекающая в разнообразных формах, на разном уровне. И.С. Якиманская отмечает, что выделяются два уровня представления: создание образа и оперирование им [185].

Развитие пространственного мышления у учащихся старшего подросткового возраста происходит на базе их восприятия, внимания, образной памяти и преобразования изучаемого материала, перехода от воображения к представлениям. Обогащая опыт восприятия и специальных наблюдений учащихся, учитель тем самым обогащает и развивает их воображение. Важна здесь роль специальных методических приемов. Развитию пространственного мышления предшествует умение выстраивать в сознании пространственные образы, а затем представлять изображения и умение воспроизводить графические образы в новых учебных ситуациях [98].

Таким образом, формирование пространственного мышления в обучении геометрии в средней школе имеет основой наглядно-образное мышление. Учащийся откладывает в памяти образы воспринятых им геометрических объектов. Для обучающихся старшего подросткового возраста мысленное представление графического образа имеет важное значение и является фактором, способствующим развитию пространственного мышления. В этом возрасте наглядно-образное мышление постепенно уступает место понятийному теоретическому мышлению. Этот способ познания в обучении геометрии тесно связан с обобщением и систематизацией геометрических знаний, что способствует мысленному преобразованию информации о геометрическом понятии, развитию воображения и представления геометрических образов этих понятий. Условием для развития пространственного мышления служит речь. Мысленное, письменное или устное объяснение выполненного чертежа способствует преобразованию и реконструкции знаний, а также их обобщению и систематизации. Образная память обогащается за счет словесно-логической, что обеспечивает долгосрочную память. Представления – следующий шаг в развитии пространственного мышления. Каждый из трех способов представления – действенный, образный и символический – отражает специфические особенности графического представления геометрического понятия [91].

Психологическая характеристика содержания пространственного мышления определяет методические приёмы формирования и развития пространственного мышления в процессе обучения геометрии в школе.

Применение системного подхода в изучении психологии мышления предполагает построение такого теоретического представления о нём, которое позволило бы рассматривать мыслительную деятельность как единую систему, и разработать процедуры, релевантные ее экспериментальному исследованию. Определить объект как систему, значит выделить необходимую связь его существенных свойств или компонентов. Одним из характерных типов связи для компонентов психических объектов является уровневая организация их структуры [144].

Структура определяется как «относительно устойчивый и одновременно меняющийся во времени способ связи элементов». Под связью понимается отношение зависимости вещей друг от друга в различных её формах, при котором изменение свойств и состояний одной вещи означает определённые изменения в соответствующих других вещах [84].

И.С. Якиманская также занималась изучением пространственного мышления с позиций системного подхода: анализировала специфику данного вида мышления, его структуру, условия формирования в процессе обучения. Также исследователь особое внимание уделяла возрастным и индивидуальным различиям пространственного мышления, раскрытию их природы, описанию диагностических методов их выявления и оценки.

У учащихся старших классов, по мнению И.С. Якиманской и Г.Д. Глейзера происходит обогащение запаса пространственных образов за счет более богатого содержания материала по геометрии. Также старшеклассникам характерно: перенос усвоенных приёмов оперирования пространственными образами на новые задачи, стремление овладеть наиболее рациональными приёмами оперирования пространственными образами. Исследователи констатируют о трудностях в изучении стереометрии учащихся старших классов, так как полученные ранее планиметрические знания не способствуют перестройки на хорошее усвоение стереометрии [185; 39].

Анализируя проблему формирования пространственного мышления, Г.Д. Глейзер обосновал данный процесс так:

1. Создание целостного образа на наглядной или абстрактно-логической основе путем опоры на ранее сформированные пространственные представления и ранее усвоенные понятия. На этом этапе узнавание, различение, воспроизведение образа должно проходить в тех же условиях, в которых проходило его формирование.

2. Оперирование образом в односложных связях в несколько измененных условиях, закрепление его существенных признаков путем варьирования несущественных.

3. Оперирование образами в сильно измененных условиях, логическое установление таких отношений как конгруэнтность, подобие между элементами образа в простой проблемной ситуации без наглядной опоры.

4. Активное оперирование образами в существенно измененных условиях, внутрипредметных и межпредметных связей и зависимостей.

5. Творческое конструирование новых образов и отношений на базе сформированных ранее обобщенных подвижных и действенных образов [39].

Как было установлено В.А. Крутецким, А.З. Заком, развитость пространственного мышления является проявлением специальных способностей при обучении геометрии. Основой выделенных способностей, по мнению С.Л. Рубинштейна, является свойственное ученику качество процессов анализа и синтеза [51; 75; 137].

Как было установлено в исследованиях Л.С. Выготского, процессы развития идут вслед за процессами обучения, создающими зону ближайшего развития [34]. Основываясь на этом положении, А.З. Зак организовал обучение учащихся по специальным программам, исследовал характер развития у школьников способности действовать «в уме» на протяжении школьного обучения с первого по одиннадцатый класс. Развитая способность действовать «в уме» включает три основных компонента: мысленный анализ условий задачи, планирование решения и осознание способов действий. В итоге было установлено, что данная способность в период обучения в школе проходит три этапа: первый завершается во втором классе, второй охватывает с третьего по пятый классы, третий начинается в шестом классе и не заканчивается в школе [51; 98].

И.А. Крутецкий рассматривал пространственное мышление, как разновидность математического и выделил три его типа – «аналитический», «геометрический», «гармонический». Г. Вейль (единственный из математиков, автор книги, которая так и называется – «Математическое мышление») понимает под математическим мышлением, во-первых, особую форму рассуждений, посредством которых математика проникает в науки о внешнем мире – в физику, химию, биологию, экономику и т. д., и даже в наши размышления о повседневных делах, и, во-вторых, ту форму рассуждений, к которой прибегает в своей области математик, будучи предоставленным самому себе [27]. Ю.М. Колягин под математическим мышлением понимает форму, в которой проявляется мышление в процессе познания математики или её приложений [71].

Первым типом математического мышления, «геометрическим», обладают учащиеся, постоянно опирающиеся при решении задач на различные виды визуальной наглядности. «Аналитический» тип мышления характерен для учащихся, стремящихся к абстракции, логическим рассуждениям. Они легко при решении стереометрических задач оперируют пространственными образами объектов без привлечения наглядности. При наличии гармонического типа мышления, учащиеся хорошо осуществляют и аналитический, и образно-геометрический подход к решению задач различной типологии.

Исследования особенностей развития пространственного мышления важны для определения основных его направлений и перспектив развития у старшеклассников. Изучая содержание пространственного мышления школьников, имеется в виду, что и практически, и теоретически, оно формируется в основном на материале «Евклидова пространства». Наряду с этим существует «пространство Лобачевского», которое имеет существенные отличия. Например, в «Пангеометрии» Н.И. Лобачевского утверждается, что через данную точку можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной прямой, и сумма углов треугольника меньше 180°. В геометрии Лобачевского не существует прямоугольников, подобных треугольников. Теория геометрии Лобачевского помогает взглянуть по – другому на окружающую обстановку, расширяет кругозор, формирует представление о внешнем построении науки. Геометрия даёт материал для размышлений, а именно: рассматривает отношения линий, плоскостей и тел в пространстве, имеющем не только три измерения, а неопределённое их число, которое можно представить, обладая развитым пространственным мышлением [81; 98].

Необходимо отметить о существовании зависимости развития мышления и понимания. Многие исследователи, занимающиеся изучением процесса понимания, считают, что понимание является как бы подсистемой в структуре мышления, наследуя его основные качества и свойства. В процессах понимания происходит восприятие и переработка информации, поступившей к человеку по определённым каналам, в ходе которой происходит взаимодействие двух основных естественных кодов мышления – образного и вербального. Такое взаимодействие является условием надёжности понимания. Чтобы понятие в своей абстрактной сущности было понято человеком, оно должно быть связано с образом, который человек сам себе создает [21; 44; 91; 98].

Трудности понимания учащимися предмета вызваны отсутствием наглядных представлений, личного осмысления наблюдаемых взаимодействий. Без понимания нет мышления, т.е. уровень понимания характеризует уровень мышления. В статье «Процессы понимания в развитии мышления» Л.Л. Гурова пишет: «Чем глубже вскрыта сущность объекта задачи в его закономерных пространственных связях и отношениях, тем лучше он понят. Чем эффективнее решает ученик задачи по данному учебному предмету, тем более высокий уровень предмета он обнаруживает» [44].

Исследования Herbert A. Simon посвящены новым подходам к обучению. Основываясь на огромном различии в обучении наизусть и обучении с пониманием, исследователь ставит эксперименты с учащимися на различных школьных предметах. Знания, полученные с пониманием каждого этапа изучаемого явления или объекта, сохраняются гораздо дольше и применяются в новой учебной ситуации гораздо быстрее [189].

Понимание учащимися существования и происхождения различных пространственных форм, возможность их преобразования является важной предпосылкой для формирования динамичности пространственных образов, что является показателем развития пространственного мышления.

Выводы по первой главе

1. Ретроспективный анализ, оценка и особенности обучения геометрии в цифровой образовательной среде показали, что формированию пространственных образов геометрических понятий у учащихся посвящены исследования: А.В. Василенко, Г.Д. Глейзера, В.А. Гусева, В.В. Орлова, Н.С. Подходовой, И.М. Смирновой, Р.С. Черкасова, Н.В. Четверухина, И.Ф. Шарыгина и др. Анализ методических исследований конца XX – начала XXI веков показал, что выделяются следующие направления исследований в методике обучения геометрии: наглядная геометрия, развитие пространственных представлений учащихся посредством определенной дидактической организации изучения геометрического материала пропедевтического курса, реализация фузионистского подхода, использование определенных компьютерных программ. Выявлено, что большинство исследований проведено для обучающихся начальной и основной школы, поэтому целью нашего исследования является обучение геометрии старших классов и направлено на конструирование графических образов геометрических понятий при изучении стереометрии.

С другой стороны, изменения, происходящие в образовательной среде, обуславливают поиск новых подходов к построению методической системы обучения геометрии в цифровой образовательной среде.

С.А. Бешенков, Л.Л. Босова, А.Ю. Уваров, М.А. Шутиков и др. разработали основы обучения в цифровой образовательной среде, что позволяет применять цифровые средства в обучении геометрии в школе.

Научные работы по изучению использования информационных технологий в области обучения стереометрии А.А. Домуняна, О.А. Кривцова, В.Р. Майера, Т.Ф. Сергеевой, И.В. Трайнева, И.Г. Захаровой, М.А. Павловой, Р.С. Рафиковой, В.И. Рыжика, Е.И. Смирнова, Ю.А. Толыпиной, М.В. Шабановой, Т.С. Шириковой, С.В. Щербатых, А.В. Ястребова и др. положены в основу нашего исследования.

Процесс обучения геометрии тесно связан со знаково-символической и графической деятельностью обучающихся, основу построения методики конструирования графических образов геометрических понятий составляет наглядно-модельные технологии, которые представлены в трудах В.Г. Болтянского, П.Я. Гальперина, В.В. Давыдова, Л.В. Занкова, Н.Г. Салминой, Е.И. Смирнова, Л.М. Фридмана, В.Д. Шадрикова и др.

2. «Графический образ», широко используемый феномен в науке и практике. В философии и гносеологии образ понимается как результат отражательной познавательной деятельности человека. Создание образа происходит на двух уровнях: чувственном и абстрактном. При чувственном познании образ даётся в ощущениях. В процессе мышления в форме понятий.

Для нашего исследования представляют интерес графические образы геометрических понятий, образы которые создаются в процессе восприятия, памяти, мышления и воображения. Определение понятия «графический образ» относится к контекстуальному виду, поэтому содержание понятия раскрывается через знаковые модели, наглядное представление, изображение геометрического объекта. Структура графического образа состоит из геометрических примитивов (точки, линии, плоскости, поверхности, простейшие геометрические тела) из них формируются детали, из которых создаются конструкции объектов.

3. Развитие пространственного мышления происходит в тесной связи с наглядно-образным мышлением.

Исходя из теоретических положений В.А. Крутецкого, С.Л. Рубинштейна, И.С. Якиманской развитие пространственного мышления у учащихся старшего подросткового возраста происходит на базе их восприятия, внимания, образной памяти и преобразования изучаемого материала, перехода от воображения к представлениям. Обогащая опыт восприятия и специальных наблюдений учащихся, учитель тем самым обогащает и развивает их воображение. Развитию пространственного мышления предшествует умение выстраивать в сознании пространственные образы, а затем представлять изображения и умение воспроизводить графические образы в новых учебных ситуациях. И.С. Якиманская отмечает, что выделяются два уровня представления: создание образа и оперирование им.

Особое место в процессе усвоения и осмысления геометрического понятия занимает наглядно-действенное мышление. Формирование образов (графических) в случае изучения геометрии влияет на долгосрочную память и способствует умению выстраивать в сознании пространственные образы, а затем представлять изображения и воспроизводить графические образы в новых учебных ситуациях.

Таким образом, методическая система обучения геометрии основана на методе наглядного моделирования, посредством визуализации математической модели, что позволяет проектировать интерактивную познавательную деятельность с эффектом развития пространственного мышления обучающихся посредством конструирования графических образов геометрических понятий. Конструирование графических образов геометрических понятий включает в себя как процесс построения графической модели геометрического понятия, так и процесс формирования графических умений, что положительно сказывается на мотивации познавательной деятельности обучающихся старших классов. В следующей главе рассмотрим методику конструирования графических образов геометрических понятий в цифровой образовательной среде.

ГЛАВА 2. ФОРМИРОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

2.1. Методика конструирования графических образов геометрических понятий с эффектом развития пространственного мышления обучающихся в старших классах средней школы с использованием систем динамической математики (на примере GeoGebra)

Геометрия как школьный предмет способствует овладению обучающимися умением логически рассуждать, доказывать, развивает навыки графического и символического представления математических знаний, письменного и устного обоснования решения задач, что в свою очередь играет важную роль в развитии математической речи обучающихся [92]. При отсутствии в школьной программе учебного предмета черчение вся графическая составляющая переложена на урок геометрии. Как показывают результаты ЕГЭ, уровень графических умений у выпускников средних школ является крайне невысоким, что делает задачи по стереометрии сложными, а то и «нерешаемыми». Решение проблемы конструирования графических образов понятий в обучении геометрии возможно с использованием систем динамической математики.

Конструирование графических образов геометрических понятий в цифровой образовательной среде имеет ряд особенностей:

– интерактивность за счёт применения систем динамической геометрии;

– наглядность в представлении графических моделей геометрических объектов и представлении изображений графических образов в динамике;

– информационность насыщенность содержанием, информацией, представление знаний в формализованном виде, накоплении, хранении и передачи визуальных данных;

– декомпозируемость способствует разделению проблемы конструирования графического образа на части, обучение графическим умениям на разных уровнях сложности стереометрической задачи и с помощью объединения формируется умение конструировать графические образы геометрических понятий [94; 99].

Таким образом, методическая система обучения геометрии основана на методе наглядного моделирования, посредством визуализации математической модели, что позволяет проектировать интерактивную познавательную деятельность с эффектом развития пространственного мышления обучающихся посредством конструирования графических образов геометрических понятий [94].

Методика конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики (на примере GeoGebra) состоит из трёх блоков: организационно-целевого, операционально-содержательного и контрольно-оценочного [94].

Организационно-целевой компонент методики определяет этапы и детальное описание целей обучения на каждом этапе.

Цель: обучение конструированию графических образов геометрических понятий на основе метода наглядного моделирования с использованием средств цифровой образовательной среды с эффектом развития пространственного мышления старшеклассников.

Созданием стереометрических образов является точное формирование графических образов геометрических понятий, как при изучении планиметрии, так и стереометрии. В обучении геометрии выделяют следующие этапы формирования графических образов геометрических понятий.

На первом этапе в начальной школе цель усвоение умений и навыков изображения геометрических фигур на плоскости.

На втором этапе (пропедевтическом курс геометрии в 5-6 классах) целью является закрепление образов планиметрических фигур, их обобщение и планомерное движение по созданию образов стереометрических понятий, знакомство с многогранниками и круглыми телами.

На третьем этапе изучения систематического курса геометрии развитие пространственного мышления происходит на основе, имеющихся знаний, умений и навыков построения геометрического чертежа и собственного практического опыта обучающихся. На этом этапе целью целенаправленного развития пространственного мышления становится не только представление наглядного образа, но и словесно-логическое обоснование конструирования чертежа по условию задачи. Именно, визуальное восприятие этой геометрической конструкции здесь выходит на первый план.

На четвёртом этапе в курсе стереометрии (10 – 11 классы) развитие пространственного мышления учащихся особенно в современных условиях, когда курс черчения является необязательным в основной школе, происходит неоднозначно и многие обучающиеся испытывают трудности в построении чертежа к стереометрической задаче. Цель этого этапа – оперирование образами, словесно-логическое описание действий построения чертежа, воображение графического изображения и запоминание его, самостоятельное конструирование графического образа геометрических понятий.

Операционально-содержательный компонент обеспечивает выбор оптимальных форм, методов и средств обучения, отбор содержания и разработку структурно-функциональной модели компьютерного сопровождения уроков геометрии с использованием систем динамической математики.

Исследование показало, что использование инструментов СДМ на уроке зависит от типа урока (объяснение нового материала, закрепление, обобщающее повторение и др.). Значимость использования СДМ зависит от целесообразности их применения. На применение СДМ влияет чертёж к задаче, если он не подчиняется основным правилам изображения и возникают проблемы с представлением геометрического образа, то задавая параметры условия, динамика движения изображения помогает созданию образа в GeoGebra и его запоминанию. Ключевым моментом развития пространственного мышления обучающихся является изображение чертежа и словесно-логическое объяснение его построения. Обязательным шагом в развитии пространственного мышления является решение задач с изменёнными условиями, что влияет на развитие воображения и закрепление графического образа геометрического понятия, суждений и умозаключений. Как результат длительной работы по развитию пространственного мышления является самостоятельное конструирование графического образа в GeoGebra и его изображение на чертеже. Исследовательские задачи позволяют мотивировать обучающихся к самостоятельному оперированию представления геометрического образа и последовательного и целенаправленного перехода от представливания к воображению.

Контрольно-оценочный компонент обеспечивает систематическое использование обратной связи для оценки результатов и дальнейшей коррекции, и управления процессом обучения. Диагностические материалы представлены критериально-ориентированными тестами, цепочками задач. Задачи, раскрывающие способность обучающегося создавать отличный образ от той графической основы, на которой этот образ первоначально создавался. Задачи, показывающие изменение положения пространственного объекта и его элементов. Задачи на полноту образа (отражение различных характеристик: формы, величины, пространственной размещенности, протяженности).

Критериями оценки уровней развития пространственного мышления старшеклассников являются:

– успешность создания пространственного образа, соответствующего графическому изображению;

– подвижность образа (способность к произвольному изменению положения пространственного объекта, его элементов);

– широта оперирования (степень свободы манипулирования образом с учетом той графической основы, на которой образ первоначально создавался);

– полнота образа (отражение различных характеристик: формы, величины, пространственной размещенности, протяженности).

– типы оперирования образом: изменение положения воображаемого объекта, изменение структуры объекта, комбинация первых двух преобразований.

Выделим условно три группы показателей и назовём их: мотивационный, когнитивный и технологический. Критерии: способность создавать отличительные образы от графической основы, пассивное или активное преобразование положения пространственного объекта и его элементов; полнота и точность изображения пространственного образа; типы оперирования образом (изменение положения воображаемого объекта, изменение структуры объекта, комбинация первых двух преобразований).

Таблица 1.

Показатели и критерии оценки

уровня развития пространственного мышления

Категории / Уровни	Мотивационный	Когнитивный	Технологический
I уровень (низкий)	Пассивное отношение к построению чертежа	Отражение отдельных характеристик: формы, величины, пространственной размещенности, протяженности.	Использование готового чертежа к задаче.

II уровень (низкий)	Проявляет интерес к построению чертежа изменение положения воображаемого объекта, изменение структуры объекта.	Способность к произвольному изменению положения пространственного объекта, его элементов).	Успешность создания пространственного образа, соответствующего графическому изображению.
III уровень (высокий)	Активное преобразование положения пространственного объекта, его элементов.	Степень свободы манипулирования образом с учетом той графической основы, на которой образ первоначально создавался).	Изменение положения воображаемого объекта, изменение структуры объекта, комбинация первых двух преобразований. полнота и точность изображения пространственного образа.

Поиск оптимальных методических подходов к обучению учащихся решению задач актуализируется сегодня структурой и содержанием единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике. Как отмечено в научно-методическом обосновании этого экзамена ФИПИ, требования к математической подготовке предусматривают главным образом наличие умения применять полученные теоретические знания в конкретных условиях, что выходит далеко за рамки простого воспроизведения знаний. Требования определяют необходимость включения знаний, направленных на проверку сформированности разнообразных предметных умений, включающих такие важнейшие умения, как умение анализировать ситуацию и делать логически корректные выводы, обосновывать их математически грамотно, записывать рассуждения. Проблема подготовки выпускника средней школы к ЕГЭ, то есть проблема обучения его решению задач, становится для учителя математики приоритетной. В плане геометрической подготовки к ЕГЭ – это умение анализировать текстовое условие задачи, переводить его в графическую конструкцию, сопровождающую анализ, выполнение необходимых построений на проекционном чертеже, применение теоретических знаний для обоснования решения, доказательные и вычислительные рассуждения. Таким образом, графические умения являются неотъемлемой и весьма важной составляющей подготовки старшеклассника к ЕГЭ.

В последние годы одним из аспектов решения стереометрических задач является построение сечений многогранников плоскостью. Решение таких задач требует от учащихся развитых пространственных представлений, определённых конструктивных навыков, уверенного знания теоретических основ взаимного положения прямых и плоскостей в пространстве, владения различными приемами построений на проекционном чертеже.

Таким образом, формирование графических умений старшеклассников не ограничивается умением правильно и наглядно строить изображение заданной фигуры на проекционном чертеже. Требуется также умение выполнять в рамках тех же правил определенные построения на проекционном чертеже, приводящие к построению изображения сечения многогранника плоскостью. При анализе содержания школьных учебников, учебных программ по стереометрии школьного курса математики становится ясно, что на отработку у старшеклассников устойчиво сформированного графического умения выполнять решение конструктивных задач отводится крайне мало времени. Задача на построение в школьной стереометрической практике, как правило, является определённой конструктивной составляющей задач на вычисление и доказательство. Рассмотрим построение сечений многогранников плоскостью как одну из методических задач формирования графических образов геометрических понятий.

Формулировки задач в материалах ЕГЭ по математике, связанные с необходимостью выполнять такие построения, каждый год претерпевают определенные изменения. Однако, требование построить сечение многогранника плоскостью в той или иной модификации присутствуют в стереометрической задаче. Это могут быть прямые требования построить сечение, удовлетворяющее условию задачи, также такие построения могут быть составляющей частью доказательных рассуждений или вычислительной задачи.

В учебнике геометрии Л.С. Атанасяна проблеме построения сечений многогранников плоскостью посвящен пункт 14 «Задачи на построение сечений» в главе 1 §4 «Тетраэдр и параллелепипед». Таким образом, в 10 классе в теме «Параллельность прямых и плоскостей» после изучения тетраэдра и параллелепипеда отводится 1 час на изложение соответствующего параграфа и решение задач на построение сечений, после чего тема считается изученной и далее в учебнике приведено достаточно много задач с требованием построить сечение многогранника плоскостью [12].

Чтобы решить задачу построения сечения многогранника ученик должен знать ответы на вопросы:

– какая плоскость называется секущей для многогранника;

– что такое сечение многогранника плоскостью;

– что значит построить сечение многогранника плоскостью;

– как могут располагаться относительно друг друга многогранник и плоскость;

– как может быть задана секущая плоскость;

– какой многоугольник может получиться в сечении данного многогранника плоскостью;

– какие построения считаются допустимыми;

– какие методы построения секущей плоскости могут им быть использованы;

– когда задача на построение сечения многогранника считается решённой.

Для отработки умения строить сечения многогранника плоскостью все ответы на перечисленные вопросы должны быть четко усвоены учащимся [169].

По способу задания секущей плоскости можно выделить следующие формулировки задач на построение сечений:

– построение сечения многогранника плоскостью, проходящее через заданную точку параллельно заданной плоскости;

– построение сечения, проходящего через заданную прямую параллельно другой заданной прямой;

– построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно двум заданным скрещивающимся прямым;

– построение сечения многогранника плоскостью, проходящей через заданную прямую перпендикулярно заданной плоскости;

– построение сечения многогранника плоскостью, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданной прямой.

В методической литературе выделяют три основных метода построения сечений многогранников: метод следов, метод вспомогательных сечений, метод вспомогательных точек, комбинированный метод. Первые три метода являются разновидностями аксиоматического метода построения сечений. Учитель, имея целью познакомить учащихся с общим методом построения сечений многогранника плоскостью, из методических соображений выбирает какой-либо метод [67; 79; 114; 146; 147; 169].

В учебнике обсуждается только аксиоматический метод построения сечений, основанный на знании изученных свойств взаимного положения прямых и плоскостей в пространстве, параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Именно, этот метод и предполагается использовать при построении сечений в задачах по стереометрии в материалах ЕГЭ. В учебнике не рассматривается понятие следа прямой или плоскости, метод следов, а также использование параллельного проектирования и его свойств при построении таких сечений. Учитель не имеет возможности уделить этому разделу внимания больше, чем предусмотрено программой, да и большинство учащихся не заинтересованы в решении соответствующих задач в ЕГЭ.

Однако практика показывает, что те учащиеся, которые хотят и добиваются более высоких результатов, легко осваивают общие методы построения сечений, которые могут им быть предложены во внеурочной работе. Знакомство с содержанием заданий по математике в вузах, сохранивших собственные приемные экзамены, помимо ЕГЭ, показывает, что предлагаемые там задачи по стереометрии предполагают владение учащимися именно такими методами построения сечений. При этом разрозненность частных методов построения сечений многогранников плоскостью не дает общего представления о построении сечений и порой «ставит в тупик» даже хорошо подготовленного ученика.

Выработка графических умений построения сечений многогранников плоскостью строится по следующим принципам: наличие у учащихся опорных теоретических знаний, конструктивные навыки, знание свойств многогранников, знания об основах параллельного и центрального проектирования и их свойствах, о правилах построения фигур в параллельном и центральном проектировании. В качестве базовых задач выступают различные способы построения сечений многогранников плоскостью при различных способах задания плоскости.

Суть метода следов заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с выбранной плоскостью. Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания, что не обязательно, но чаще всего используется для наглядности. Эту выбранную плоскость назовем плоскостью проекций, а прямую линию пересечения плоскости сечения и плоскости проекций называют следом секущей плоскости. Точку пересечения любой прямой, принадлежащей секущей плоскости, с плоскостью проекций также называют следом этой прямой. В дальнейшем будем допускать вольность речи, и говорить «строим сечение», вместо «строим изображение сечения». При построении тот факт, что следы всех прямых, расположенных в секущей плоскости и не параллельных следу плоскости, принадлежат этому следу секущей плоскости – используется и при построении следа секущей плоскости, и при дальнейшем построении точек, принадлежащих сечению.

Рассмотрим построение методом следа сечения произвольной призмы и пирамиды. Идея понятна будет из решения, и приведенное рассуждение даст возможность продвинуться дальше в построении сечения.

Строить сечение многогранника секущей плоскостью методом следов удобно в тех случаях, когда секущая плоскость задана тремя точками, ей принадлежащими, или прямой и не принадлежащей ей точкой, или двумя пересекающимися прямыми, или двумя параллельными прямыми. Во всех случаях легко взять три точки M, N, K, принадлежащие плоскости секущей плоскости, и, используя их проекции проводить решение по указанной схеме.

При построении сечения призмы плоскостью для начала будем призму обозначать так, что ABC - вершины нижнего основания призмы, а $A_1B_1C_1$ – соответствующие вершины нижнего основания (далее это ограничение в обозначении будет снято). Пусть M, N, K – точки, по условию принадлежащие секущей плоскости, M_1, N_1, K_1 – их параллельная проекции на плоскость основания в направлении, параллельном боковому ребру призмы AA_1. Точки M, N, K, задающие секущую плоскость, могут быть все, или частично, расположены на боковых ребрах призмы. Условие должно быть сформулировано так, чтобы изображение было полным или приводилось к нему. При заданной призме и перечисленных условиях параллельного проектирования, чертеж всегда становится полным.

Для призмы проведем $MM_1 \parallel AA_1, NN_1 \parallel AA_1, KK_1 \parallel AA_1$.

Для пирамиды *SABC* ... выбирается центральное проектирование с центром в вершине пирамиды *S* и $SM \cap (ABC...) = M_1, SN \cap (ABC...) = N_1, SK \cap (ABC...) = K_1$, где точки M_1, N_1, K_1 принадлежат плоскости основания и, если точки M, N, K лежат на поверхности пирамиды, то точки M_1, N_1, K_1 принадлежат сторонам основания или совпадают с вершинами основания.

Кратко суть метода следов можно записать в общем универсальном виде, применимом и для призм, и для пирамид, как выполнение следующих шагов построений:

1. $MN \cap M_1N_1 = X$,
2. $MK \cap M_1K_1 = Y$,
3. $XY = s$ – след секущей плоскости на плоскости проекций (в данном случае на плоскости основания).

Такой метод предельно упрощает построение следа секущей плоскости, делает его стандартным и универсальным.

Дальнейшее построение зависит от положения точек *M*, *N*, *K*, задающих секущую плоскость относительно многогранника. Поскольку сечением многогранника плоскостью называется многоугольник, полученный в пересечении секущей плоскости с поверхностью многогранника, то далее, с использованием построенного следа секущей плоскости, строятся точки пересечения секущей плоскости с нужными ребрами многогранника.

Пример 1. Постройте сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через три точки M, N, K так, что $M \in BB_1, N \in CC_1, K \in (AA_1E_1)$. (рис. 2).

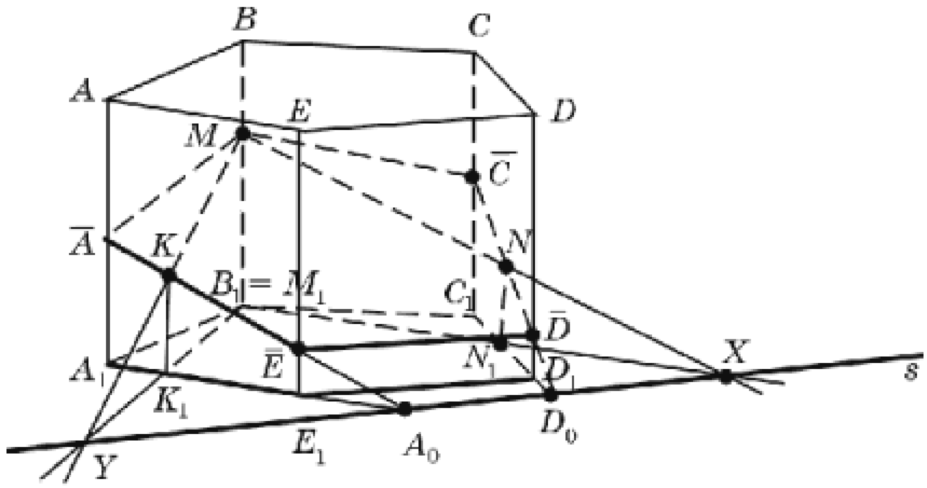


Рис. 2

В данном случае, очевидно, что $M_1 = B_1$. Построение:

1. $MN \cap M_1N_1 = X$,
2. $MK \cap M_1K_1 = Y$,
3. $XY = s$ – след секущей плоскости,
4. $A_1K_1 \cap s = A_{0,}$
5. $A_0K \cap A_1A = \overline{A},\ A_0K \cap EE_1 = \overline{E}$,
6. $D_1N_1 \cap s = D_0$,
7. $D_0N \cap DD_1 = \overline{D}, D_0N \cap CC_1 = \overline{C}$,
8. $\overline{A}M\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ – искомое сечение.

Методически для первого знакомства с методом, проще всего излагать идею на примере сечения куба плоскостью, заданной тремя точками (на полном чертеже). Это позволит так же соотнести эффективность частных приёмов и общего метода.

Пример 2. Постройте сечение пирамиды *SABCDE* плоскостью, проходящей через точку $M \in (SBC)$ и прямую *l*, лежащую в плоскости грани *SED* (рис. 3).

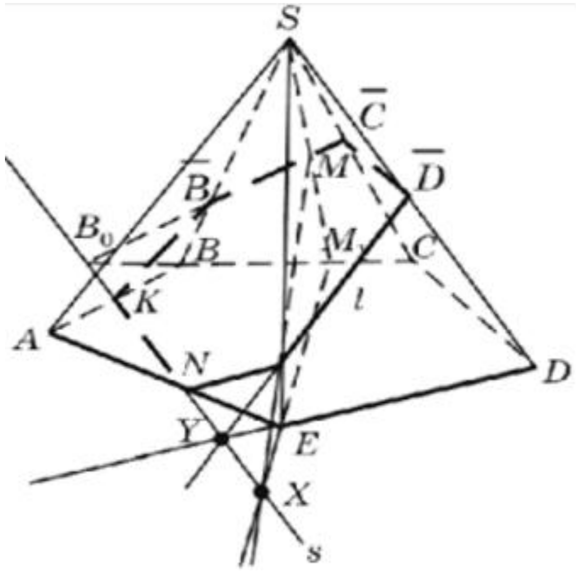


Рис. 3

Построение.

1. $SM \cap BC = M_1$,
2. $l \cap SD = \overline{D}, l \cap SE = \overline{E}$,
3. $M\overline{E} \cap M_1E = X, l \cap ED = Y, XY = s$ – след секущей плоскости.
4. $s \cap AB = K, s \cap AE = N$,
5. $BC \cap s = B_0, B_0M \cap SB = \overline{B}, B_0M \cap SC = \overline{C}$,
6. $K\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}N$ – искомое сечение.

В задачах на построение сечений многогранников условие в задачах ЕГЭ формулируется так, что сечение всегда строится однозначно и исследование вариантов решения не требуется. Однако в процессе подготовки полезно обращать внимание на возможные формы сечения, прогнозирование которых возможно в самом начале анализа условия и построения чертежа. В общем случае количество вершин многоугольника сечения может изменяться от 3 до $n+1$ – для n –угольной пирамиды и до $n+2$ – для n – угольной призмы.

Метод следов легко объясним, нагляден, но не всегда удобен в практике построения сечений многогранников, так как для построения чертежа требуется использовать пространство чертежа, контролировать которое трудно, чертеж может выходить за лист бумаги, на котором он выполняется. В этом смысле более локален в построении метод проектирования на выбранную плоскость с использованием вспомогательных точек (или метод вспомогательных сечений).

Этот метод построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным и в тех случаях, когда нужный след секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, имеет определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь в виду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются слишком плотными. Тем не менее, в некоторых случаях метод вспомогательных точек оказывается наиболее рациональным.

В основе этого метода лежит: для призм – параллельное проектирование на выбранную плоскость (чаще всего это плоскость нижнего основания призмы) в направлении, параллельном боковому ребру, для пирамид – центральное проектирование с центром в вершине пирамиды на плоскость основания. Используется в построении также тот факт, что если прообразы прямых пересекаются, то и их проекции (образы) также пересекаются. Обратное утверждение неверно, так как изображения скрещивающихся прямых также могут пересекаться, т. е. иметь общую точку, в то время, как прообразы общей точки не имеют.

Перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 3. На ребрах BB', $D'E'$ и AA' призмы $ABCDEA'B'C'D'E'$ заданы соответственно точки P, Q и R. Построить сечение призмы плоскостью PQR.

Решение. Ясно, что отрезок *PR* – это пересечение плоскости *PQR* и грани *ABB'A'*, т. е. одна из сторон многоугольника сечения. Проиллюстрируем теперь идею построения сечения заданной призмы, находя пересечение плоскости *PQR*, например, с прямой *DD'* (рис. 4).

1. За плоскость проекций примем плоскость основания призмы, а за направление проектирования – боковое ребро призмы. При этих условиях построим точки *P', Q'* и *R'* – проекции точек *P, R* и *Q*.

Получаем: *P'=B, Q'* – точку пересечения прямой *DE* с прямой, проходящей через точку *Q* параллельно боковому ребру *DD', R'=A.*

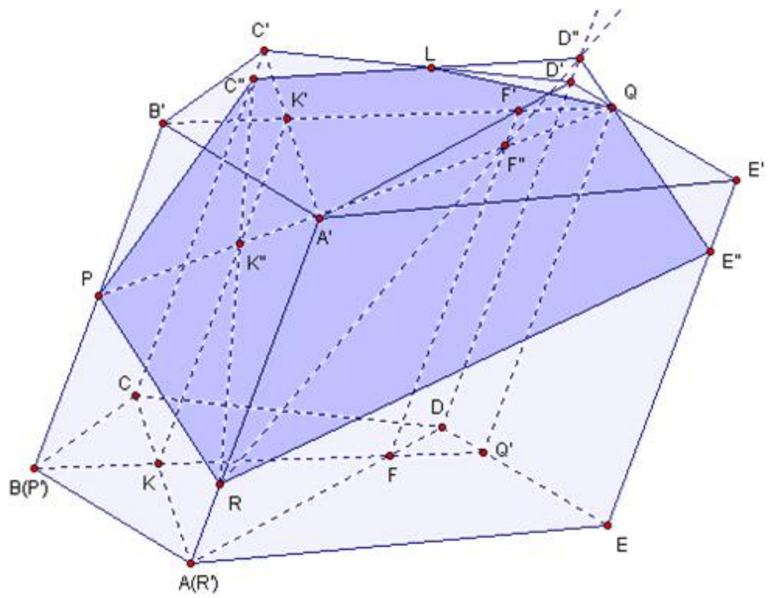


Рис. 4

2. Параллельными прямыми *PP'* и *QQ'* определяется плоскость β_1. Строим сечение призмы плоскостью β_1. Это — первое вспомогательное сечение.

3. Параллельными прямыми *RR'* и *DD'* определяется плоскость β_2. Строим сечение призмы плоскостью β_2. Это — второе вспомогательное сечение (отметим, что прямая *DD'*, выбрана нами потому, что мы решили найти след плоскости *PQR* именно на этой прямой).

4. $\beta_1 \cap \beta_{2=} FF'$, где точка $F=P'Q' \cap AD$ и точка $F'=B'Q \cap A'D'$.

5. В плоскости β_1 проводим прямую PQ и находим точку $F''=PQ \cap FF'$. Так как точка F'' лежит на прямой PQ, то она лежит в плоскости PQR. Тогда прямая RF'' лежит в плоскости PQR.

Замечание. Эти рассуждения можно сократить, используя принцип принадлежности точек и прямых в прообразах и образах, приведенный выше. Вместо построений 2, 3, 4 достаточно провести в плоскости β_1 прямую $FF'// PP'$ и $F''=PQ \cap FF'$.

6. Проводим прямую RF'' и находим точку $D''=RF'' \cap DD'$. Так как точка D'', лежит на прямой RF'' то она лежит в плоскости PQR, т. е. точка D'' – это и есть пересечение плоскости PQR и прямой DD'.

Дальнейшие построения можно выполнить следующим образом:

7. Проводим прямую $D''Q$. Это пересечение плоскости PQR и плоскости DEE'. На прямой EE', получаем точку $E''=D''Q \cap EE'$. Отрезок QE'' – это пересечение плоскости PQR и грани $DEE'D'$.

8. Проводим прямую RE''. Отрезок RE'' – это пересечение плоскости PQR и грани $AEE'A'$.

Для построения искомого сечения найдем еще пересечение плоскости PQR и прямой CC'. Сделаем это также методом вспомогательных сечений. А именно:

9. Параллельными прямыми RR' и CC' определяется плоскость β_3. Строим сечение призмы плоскостью β_3. Это – третье вспомогательное сечение. Находим линию пересечения плоскостей $\beta_1 \cap \beta_3$. Это прямая KK', где точка $K=R'C \cap P'Q'$ и точка $K'=A'C' \cap B'Q$. Находим точку $K''= PQ \cap KK'$. Проводим далее прямую RK'' и находим точку $C'' =RK'' \cap CC'$.

10. Проводим прямые PC'' и $C''D''$. Получаем отрезки PC'', $C''L$ и затем LQ - пересечения плоскости PQR соответственно с гранями $BCC'B'$, $CDD'C'$ и $A'B'C'D'E'$.

Совокупность построенных пересечений плоскости *PQR* с гранями призмы образует многоугольник *PRE''QLC''*, который и является искомым сечением.

Далее перейдём к рассмотрению комбинированного метода. Суть комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.

Пример 4. На ребрах *AB* и *AD* пирамиды *MABCD* зададим соответственно точки *P* и *Q* – середины этих ребер, а на ребре *MC* зададим точку *R*. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки *P, Q* и *R*.

Решение:

1. Ясно, что основным следом плоскости *PQR* на плоскости основания является прямая *PQ*.

2. Найдем точку *К*, в которой плоскость *MAC* пересекает прямую *PQ*. Точки *К* и *R* принадлежат и плоскости *PQR*, и плоскости *MAC*. Поэтому, проведя прямую *KR*, мы получим линию пересечения этих плоскостей.

3 Найдем точку $N=AC\cap BD$, проведем прямую *MN* и найдем точку $F=KR\cap MN$.

4. Точка *F* является общей точкой плоскостей *PQR* и *MDB*, то есть эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку *F*. Вместе с тем так как *PQ* – средняя линия треугольника *ABD*, то *PQ* параллельна *BD*, то есть прямая *PQ* параллельна и плоскости *MDB*. Тогда плоскость *PQR*, проходящая через прямую *PQ*, пересекает плоскость *MDB* по прямой, параллельной прямой *PQ*, то есть параллельной и прямой *BD*. Поэтому в плоскости *MDB* через точку *F* проведем прямую, параллельную прямой *BD*.

5. Дальнейшие построения понятны из рисунка 5. В итоге получаем многоугольник *PQD'RB'* – искомое сечение.

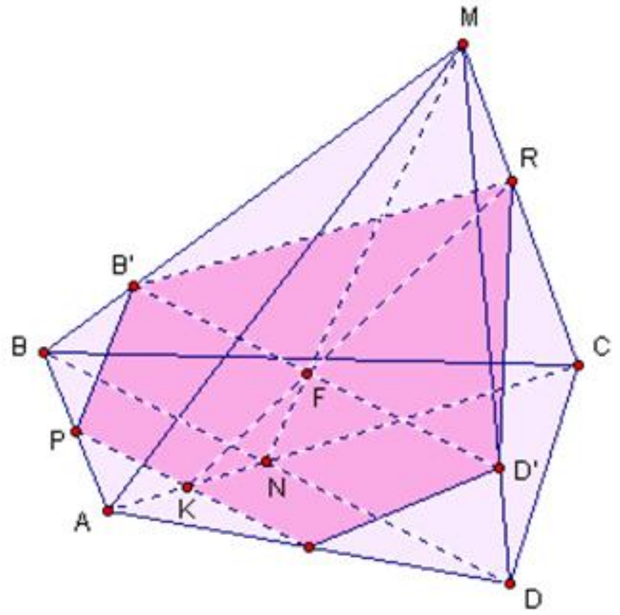


Рис. 5

Итак, рассматривая основные положения теории изображения фигур (параллельное проектирование и его свойства; изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции) и общие методы построения сечений многогранников плоскостью, ученикам предоставляется возможность решать многошаговые стереометрические задачи, в которых построение сечения многогранника плоскостью является элементом решения, при этом метод построения сечения учащиеся могут выбирать сами.

2.2. Структурно-функциональная модель компьютерного сопровождения уроков геометрии по решению стереометрических задач с использованием GeoGebra

Цифровая образовательная среда, включающая электронные образовательные ресурсы, дополняется интерактивными математическими средами, которые представляют собой программное обеспечение, позволяющее выполнять геометрические построения на компьютере таким образом, что при изменении одного из геометрических объектов чертежа остальные также изменяются, сохраняя заданные отношения. Это обеспечивает развитие умений обучающихся геометрического моделирования на компьютере, что способствует актуализации их когнитивной деятельности через создание сложных геометрических образов [42].

Одна из востребованных динамических программ – GeoGebra. На официальном сайте программы можно скачать версию под необходимую операционную систему (так же возможна установка на смартфоны и планшеты), обладает простым интуитивным интерфейсом, поддерживает русский язык и может использоваться в режиме on-line. Главным достоинством GeoGebra является возможность создания динамических чертежей, а также возможность делиться, просматривать и редактировать работы других пользователей.

Геометрия как школьный предмет способствует овладению обучающимися умением логически рассуждать, доказывать, развивает навыки графического и символического представления математических знаний, письменного и устного обоснования решения задач, что в свою очередь играет важную роль в развитии математической речи обучающихся [92]. При отсутствии в школьной программе учебного предмета черчение вся графическая составляющая переложена на урок геометрии. Как показывают результаты ЕГЭ, уровень графических умений у выпускников средних школ является крайне невысоким, что делает задачи по стереометрии сложными, а то и «нерешаемыми». Решение проблемы конструирования графических образов понятий в обучении геометрии возможно с использованием систем динамической геометрии.

Для решения задач исследования необходимо рассмотреть структурно-функциональную модель компьютерного сопровождения уроков геометрии по решению стереометрических задач с использованием GeoGebra.

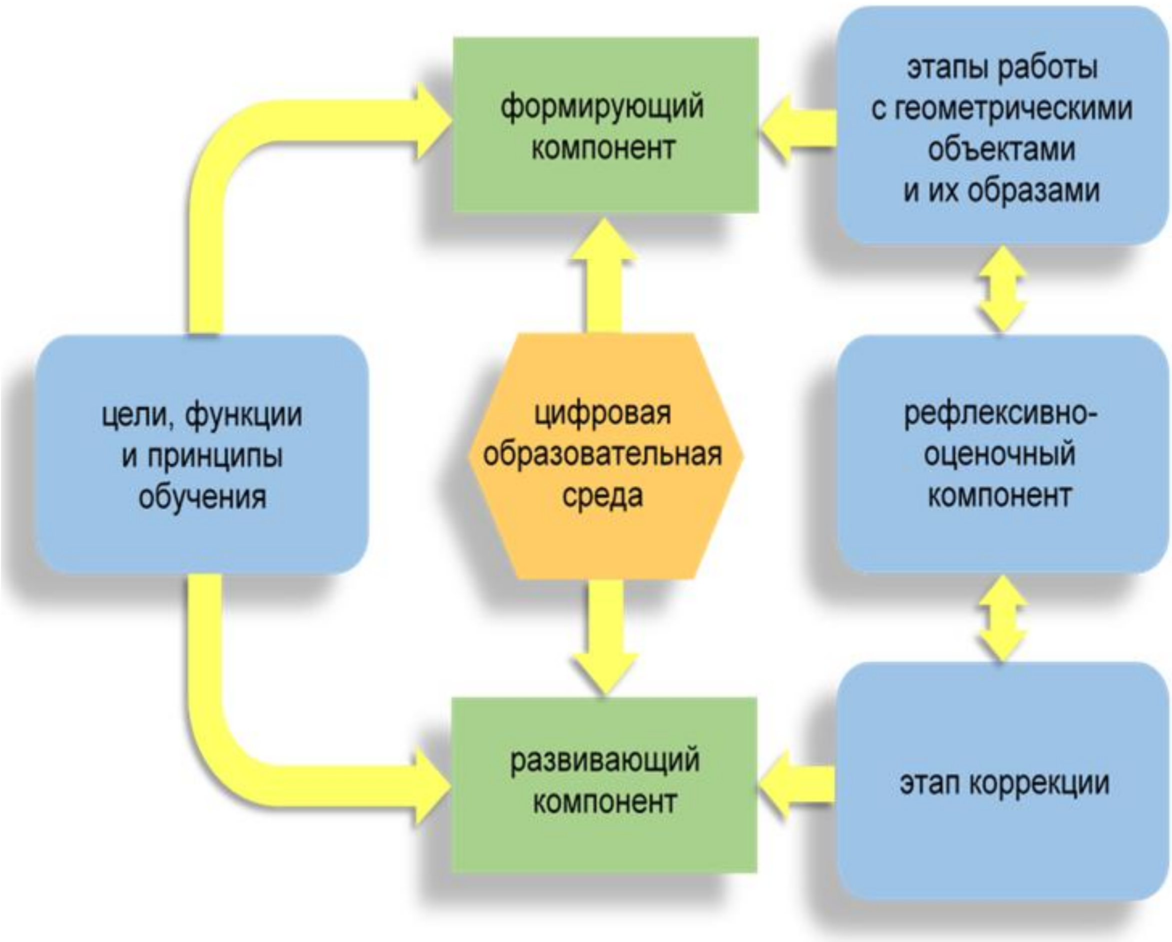


Схема 1. *Структурно-функциональная модель компьютерного сопровождения уроков геометрии по решению стереометрических задач с использованием GeoGebra*

Под сопровождением понимается специфическая форма взаимодействия участников образовательного процесса в цифровой образовательной среде на основе концепции наглядного моделирования с использованием систем динамической геометрии и представляет собой целостный процесс изучения, формирования, развития и коррекции конструирования графических образов геометрических понятий с эффектом развития пространственного мышления обучающихся средней школы (схема 1, таблица 2).

Таблица 2

Компоненты структурно-функциональной модели

№ п/п	Название компонента	Содержание и сущность
I компонент	Цифровая образовательная среда	Программы динамической геометрии (DGS): живая математика, GeoGebra, Cinderella, Geometria, Cabri 3D, Kig, C.a.R., Geometrix, MathKit, GeoView, Математический Конструктор и др.
II компонент	Цели, функции и принципы обучения	Формирование графических умений, развитие пространственного мышления, повышение качества обучения геометрии; Принципы: интерактивности, информационности, наглядности и декомпозируемости; Функции: интеграции областей знаний, адаптивности к цифровой среде, повышения мотивационно-ценностного отношения к обучению [5].
III компонент	Формирующий	Работа с геометрическими объектами и их графическими образами с использованием систем динамической геометрии.
IV компонент	Развивающий	Самостоятельное решение задач, использование динамического чертежа в решении исследовательских задач на построение сечений и комбинацию многогранников и круглых.
V компонент	Рефлексивно-оценочный	Умение проводить самоанализ, делать выводы, применять знания в новых условиях; адекватная оценка своих действий. Определение уровня сформированности умений.
VI компонент	Коррекционный	Групповой: анализ ошибок и разбор заданий; Индивидуальный: выявление и ликвидация пробелов в знаниях.

Этапы работы с геометрическими объектами и их графическими образами строятся в следующей последовательности:

1. Восприятие наглядного образа геометрического объекта (рисунок или оригинал объекта).

2. Словесно-логическое описание геометрического образа и наглядное его представление (изображение и анализ чертежа).

3. Динамическое представление, создание образа в GeoGebra, варьирование свойств геометрического объекта, запоминание образа.

4. Оперирование образом, изображение чертежа, словесно-логическое объяснение его построения.

5. Закрепление образа через решение задач с изменёнными условиями.

6. Развитие воображения через решение задач на комбинацию многогранников и круглых тел.

7. Оперирование геометрическими образами в изменённых условиях задачи, самостоятельное конструирование чертежа в GeoGebra.

8. Развитие пространственного мышления при решении исследовательских задач по геометрии с использованием инструментов СДМ [94].

Приведём примеры работы над задачами с использованием системы динамической математики и методики компьютерного сопровождения обучения геометрии, на примере темы: «Комбинация многогранников и круглых тел».

Тема выбрана на основании следующих факторов:

– большие затраты учебного времени, необходимого для решения задач на комбинацию и круглых тел;

– ограниченный запас пространственных образов учащихся, не позволяющий устанавливать необходимые зависимости между стереометрическими комбинациями и входящими в их состав элементами;

– возникновение трудности в переходе от трехмерного пространства к двумерному и обратно;

– недостаток наглядных моделей и в связи с этим трудность самого процесса объективного восприятия комбинаций многогранников и круглых тел.

Данные факторы свидетельствуют об актуальности конструирования графических образов геометрических понятий и развития пространственного мышления именно на данном типе задач.

Задача 1. Внутри куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро, которого a, помещается конус так, что его вершина совпадает с одной из вершин куба, а окружность основания касается трех граней куба, сходящихся в противоположной вершине. Образующая конуса составляет с его осью угол α. Определить радиус основания конуса.

1. Наглядный образ комбинации куба и конуса представлен на рис. 6.

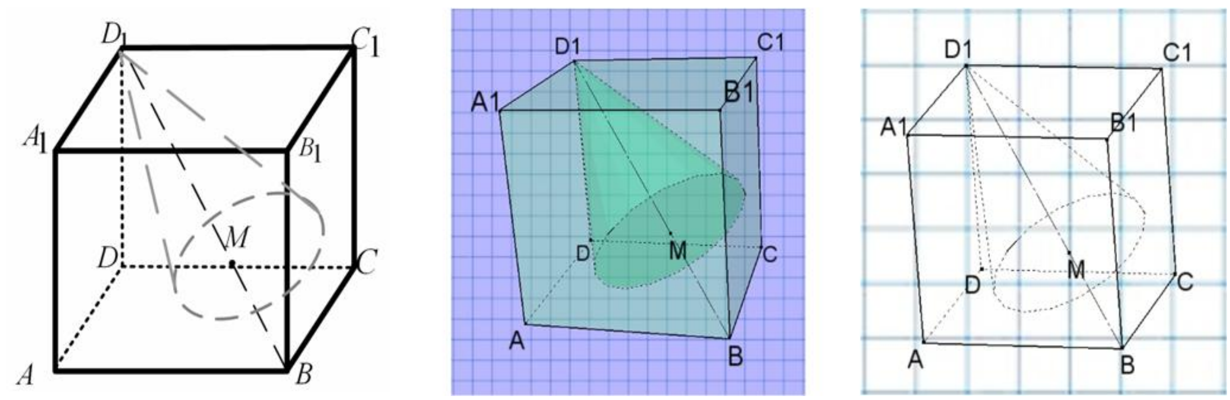


Рис.6

Построение чертежа.

Задача представлена по ссылке: https://www.geogebra.org/3d/tqfhdbkk

2. Словесно-логическое описание геометрического образа и наглядное его представление. Вершина конуса находится в одной из вершин куба, и конус касается трех граней куба, выходящих из одной вершины, противолежащей вершине конуса.

Вопросы, на которые надо ответить при построении чертежа: где находится центр основания конуса и чем является сечение куба, где находится основание конуса?

Возьмём противоположные вершины куба B и D_1. Используя GeoGebra, будем конструировать модель чертежа задачи (рис. 7).

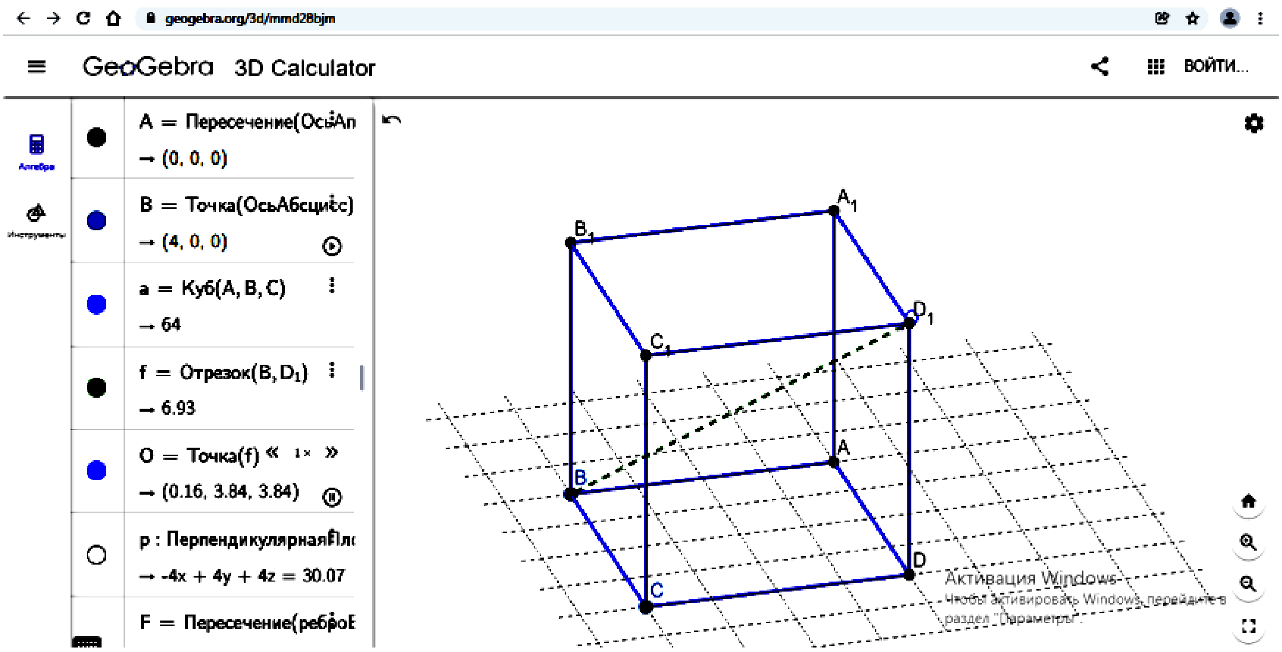


Рис. 7

Анализ и доказательство визуального вывода (рис. 8)

Ось конуса совпадает с диагональю куба BD_1, так как $BD_1 \perp (ACB_1)$ и $BD_1 \cap (ACB_1) = O$, где точка O - центр тяжести равностороннего ΔAB_1C ($AD_1 = B_1C = AC$). Докажем это.

1. $DD_1 \perp (ADC)$. BD_1 – наклонная, BD – ее проекция,

$BD \cap AC$ – диагонали квадрата в основании куба,

$BD \perp AC \;\; => \;\; BD_1 \perp AC$

2. $BB_1 \perp (A_1B_1C_1)$, BD_1 – наклонная,

B_1D_1 – ее проекция,

$BC_1 \perp BB_1 \; => \; BD_1 \perp BC$

3. $AC \cap BC = C => BD_1 \perp (AB_1C)$

$$\left.\begin{matrix} BD_1 \perp A_1D_1 \\ A_1D_1 \| BC \end{matrix}\right\} => BD_1 \perp BC$$

H=D_1O, O – точка пересечения медиан,

ΔAB_1C – правильный.

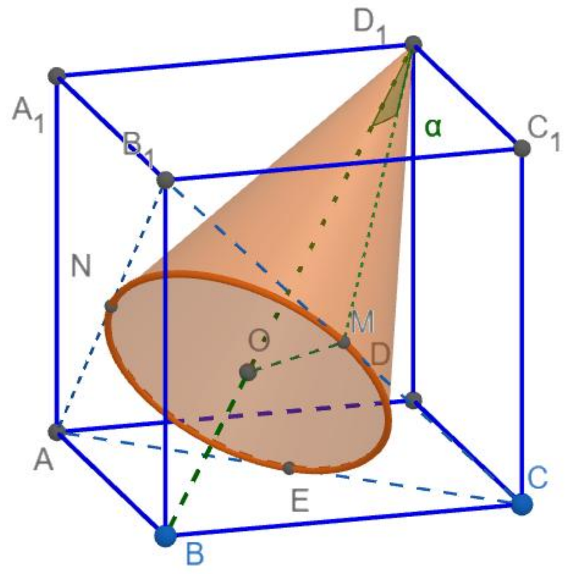


Рис. 8

3. Динамическое представление, создание образа в GeoGebra, варьирование свойств геометрического объекта, запоминание образа (рис. 9, 10).

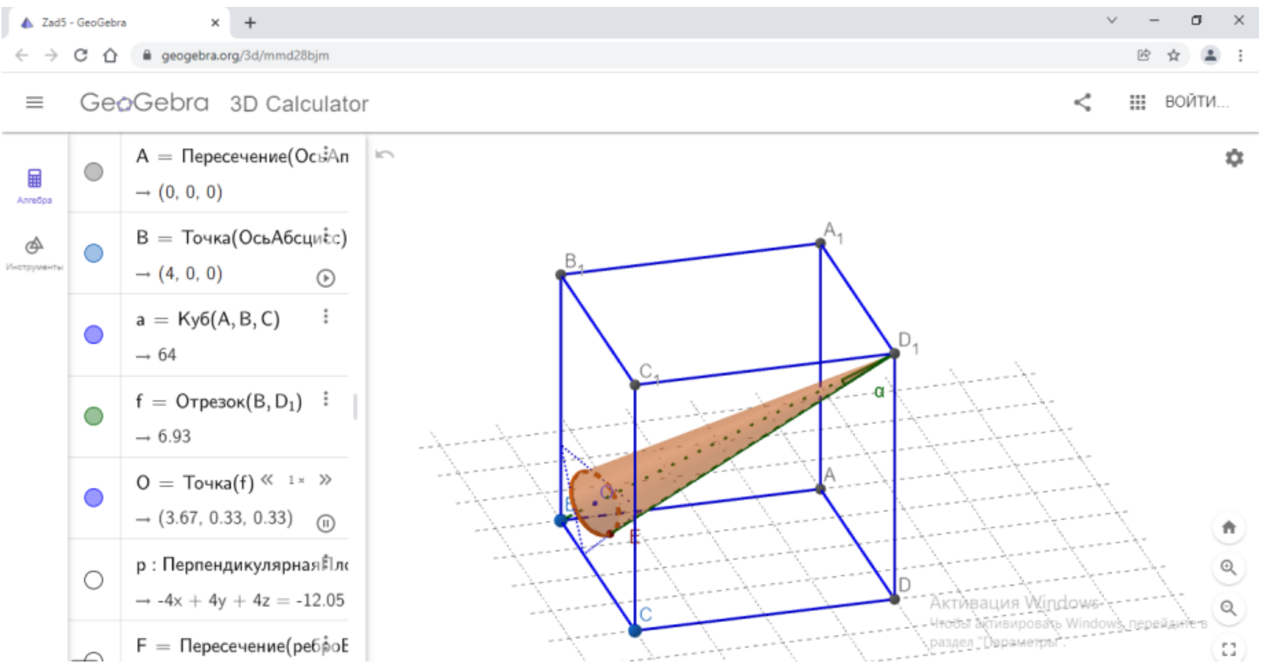


Рис. 9

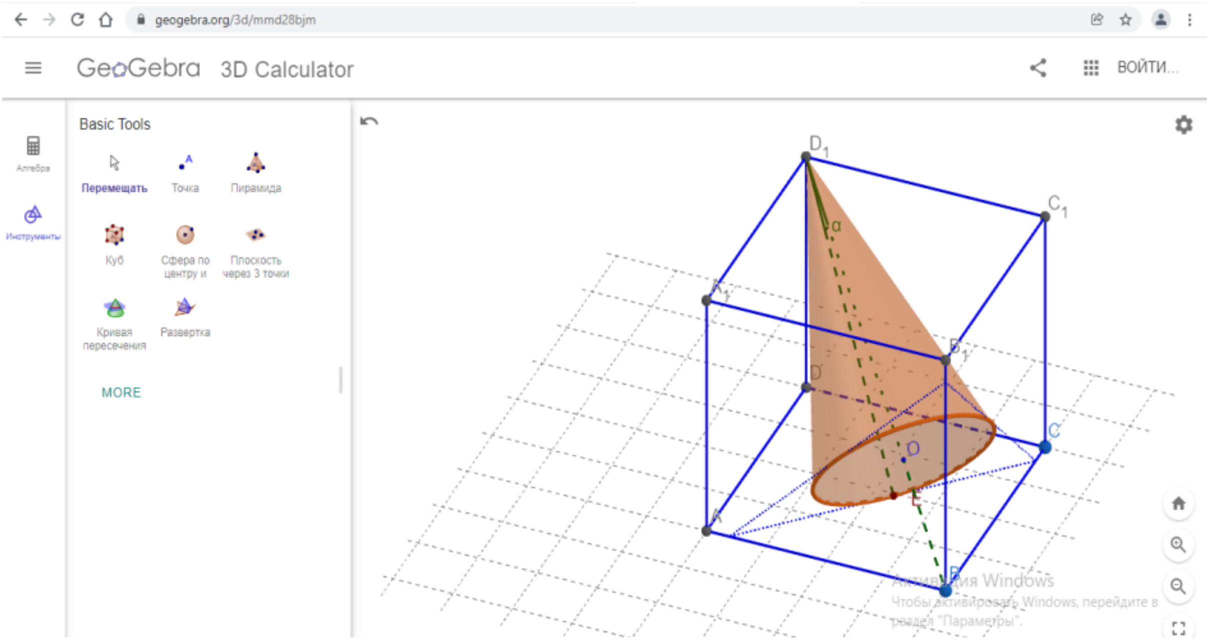


Рис. 10

4. Оперирование образом, изображение чертежа, словесно-логическое объяснение его построения (рис. 8, 11).

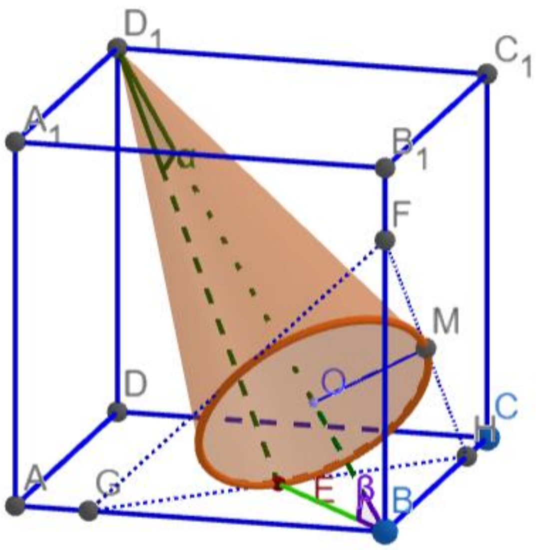


Рис. 11

5. Закрепление образа через решение задач на построение сечения. Рассмотрим диагональное сечение DD_1B_1B (рис. 12).

DB –диагональ основания куба, равная $a\sqrt{2}$,

D_1B – диагональ куба, равная $a\sqrt{3}$,

$OE=x$ – искомый радиус конуса.

1. Пусть $\angle OBE = \beta$

$$tg\,\beta = \frac{EO}{BO} = \frac{DD_1}{DB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$=>$ если $OE = x$, то $OB = x\sqrt{2}$

2. Рассмотрим

$$ctg\,\alpha = \frac{D_1O}{EO} = \frac{D_1B - OB}{EO} = \frac{a\sqrt{3} - x\sqrt{2}}{x}$$

3. Таким образом,

$ctg\,\alpha = \frac{a\sqrt{3}-x\sqrt{2}}{x}$;

$x\,ctg\,\alpha = a\sqrt{3} - x\sqrt{2}$;

$x\,ctg\,\alpha + x\sqrt{2} = a\sqrt{3}$;

$x(ctg\,\alpha + \sqrt{2}) = a\sqrt{3}$;

$x = \frac{a\sqrt{3}}{ctg\,\alpha+\sqrt{2}}$.

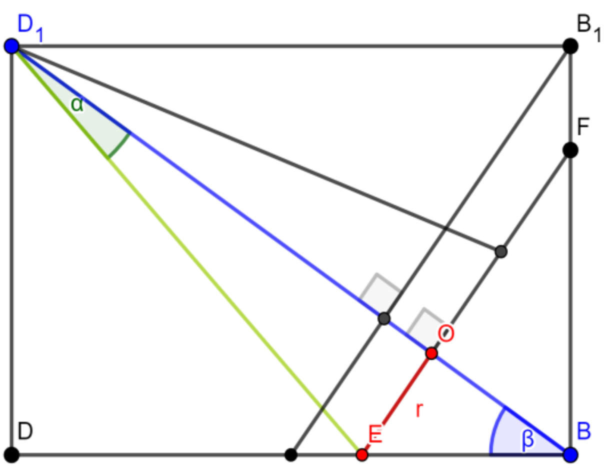


Рис. 12

Ответ: $x = \frac{a\sqrt{3}}{ctg\,\alpha+\sqrt{2}}$

Таким образом, методика компьютерного сопровождения обучения геометрии представляет собой системный метод проектирования, реализации, оценки, коррекции и последующего воспроизведения процесса обучения [94].

Задача 2. Докажите, что куб можно разрезать на три равные пирамиды.

Решение:

1. Наглядный образ геометрического объекта (рис. 13).

2. Словесно-логическое описание геометрического образа и наглядное его представление.

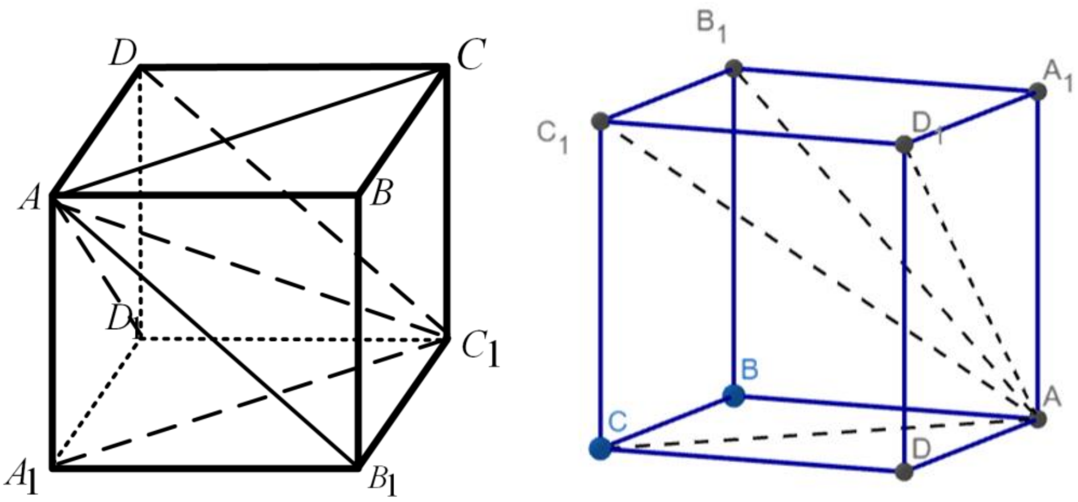


Рис. 13

Анализ и доказательство визуального вывода.

Проведем в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, три плоскости через диагональ AC_1 и соответственно диагонали AB_1, AC и AD_1, граней, исходящих из вершины A. Эти плоскости разбивают куб на три равные между собой четырехугольные пирамиды $AA_1B_1C_1D_1$, ABB_1C_1C, ADD_1C_1C.

3. Динамическое представление, создание образа в GeoGebra, варьирование свойств геометрического объекта, запоминание образа.

Докажем равенство пирамид через равенство объема куба с суммой объемов пирамид.

4. Оперирование образом, изображение чертежа, словесно-логическое объяснение его построения.

Задача представлена по ссылке: https://www.geogebra.org/3d/qvysy9rm

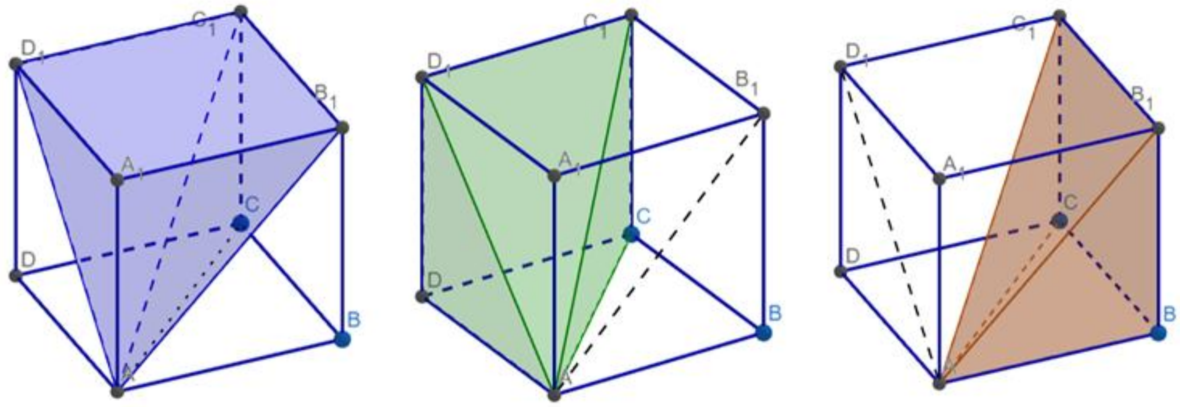


Рис. 14

Закрепление образа через решение задач на построение.

Развитие воображения через решение задач на комбинацию многогранников и круглых тел.

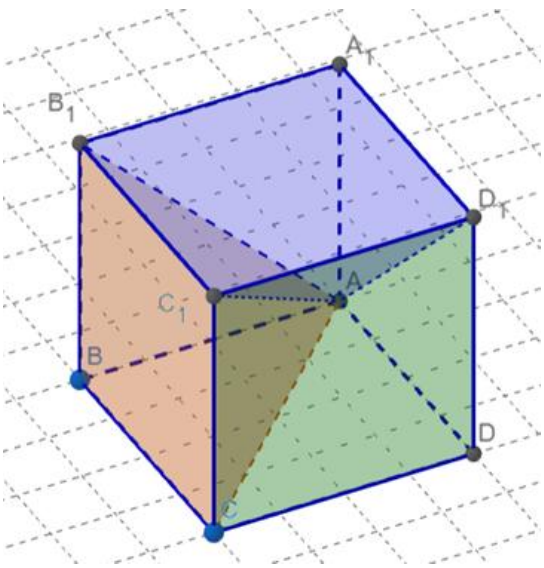


Рис. 15

Пусть ребро куба равно а. Используем следующие формулы:

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{основания}} \cdot h,\ V_{\text{куба}} = a^3,$$

$$V_{AA_1B_1C_1D} = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1B_1C_1D} \cdot h_A,$$

$$V_{ABB_1C_1C} = \frac{1}{3} \cdot S_{BB_1C_1C} \cdot h_A,$$

$$V_{ADD_1C_1C} = \frac{1}{3} \cdot S_{DD_1C_1C} \cdot h_A,$$

$$S_{A_1B_1C_1D} = S_{BB_1C_1C} = S_{DD_1C_1C} = a^2$$

$$h_{AA_1B_1C_1D} = AA_1 = a,\ h_{ABB_1C_1C} = AB = a,\ h_{ADD_1C_1C} = AD = a$$

$$V_{AA_1B_1C_1D} = V_{ABB_1C_1C} = V_{ADD_1C_1C} = \frac{1}{3} \cdot a^3$$

$$V_{AA_1B_1C_1D} + V_{ABB_1C_1C} + V_{ADD_1C_1C} = a^3$$

$V_{AA_1B_1C_1D} + V_{ABB_1C_1C} + V_{ADD_1C_1C} = V_{\text{куба}}$, что и требовалось доказать.

Оперирование геометрическими образами в изменённых условиях задачи, самостоятельное конструирование чертежа в GeoGebra.

Развитие пространственного мышления при решении исследовательских задач по геометрии с использованием инструментов СДМ.

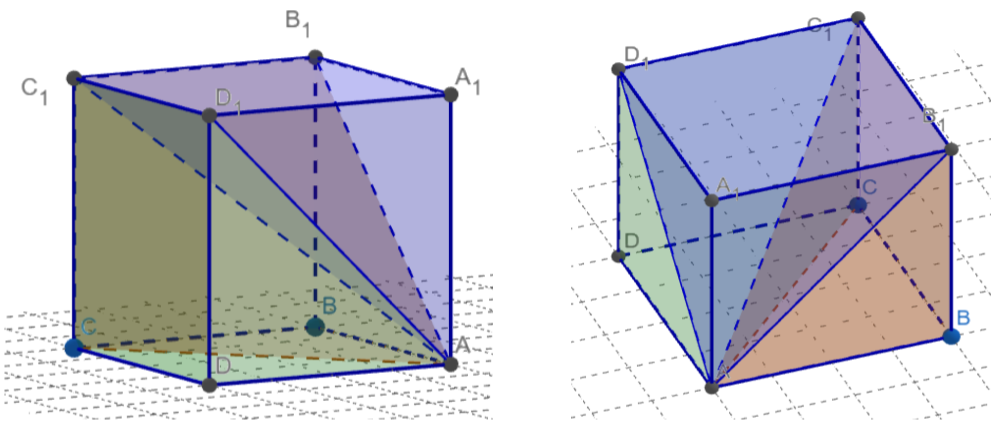


Рис. 16

Задача 3. Во сколько раз объем цилиндра, вписанного в куб, меньше объема цилиндра, описанного около этого же куба?

Представлена по ссылке: https://www.geogebra.org/3d/c5tgxtg4

Решение:

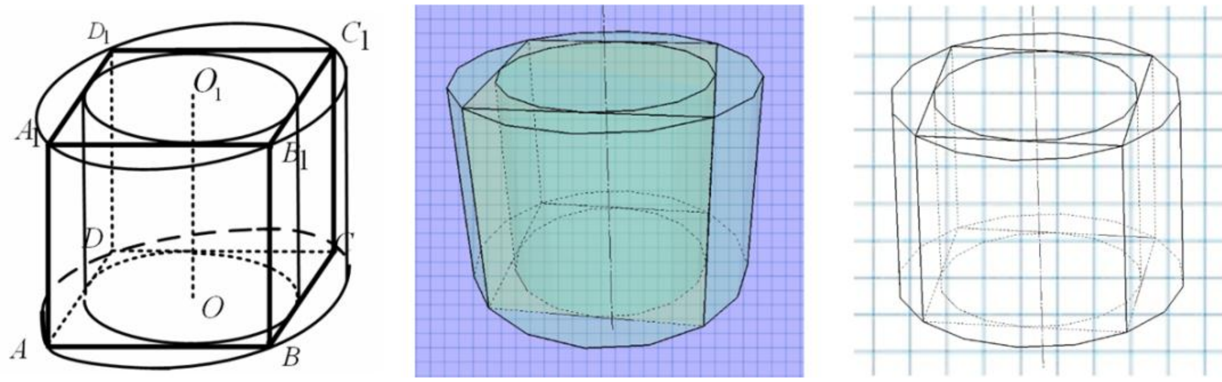


Рис. 17

Используем формулу для нахождения объема цилиндра $V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

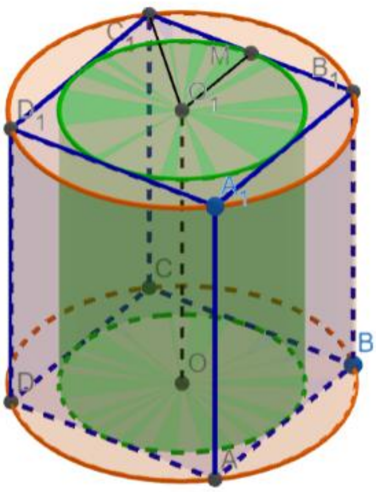


Рис. 18

Пусть ребро куба равно a, тогда высоты вписанного и описанного цилиндров также равны a.

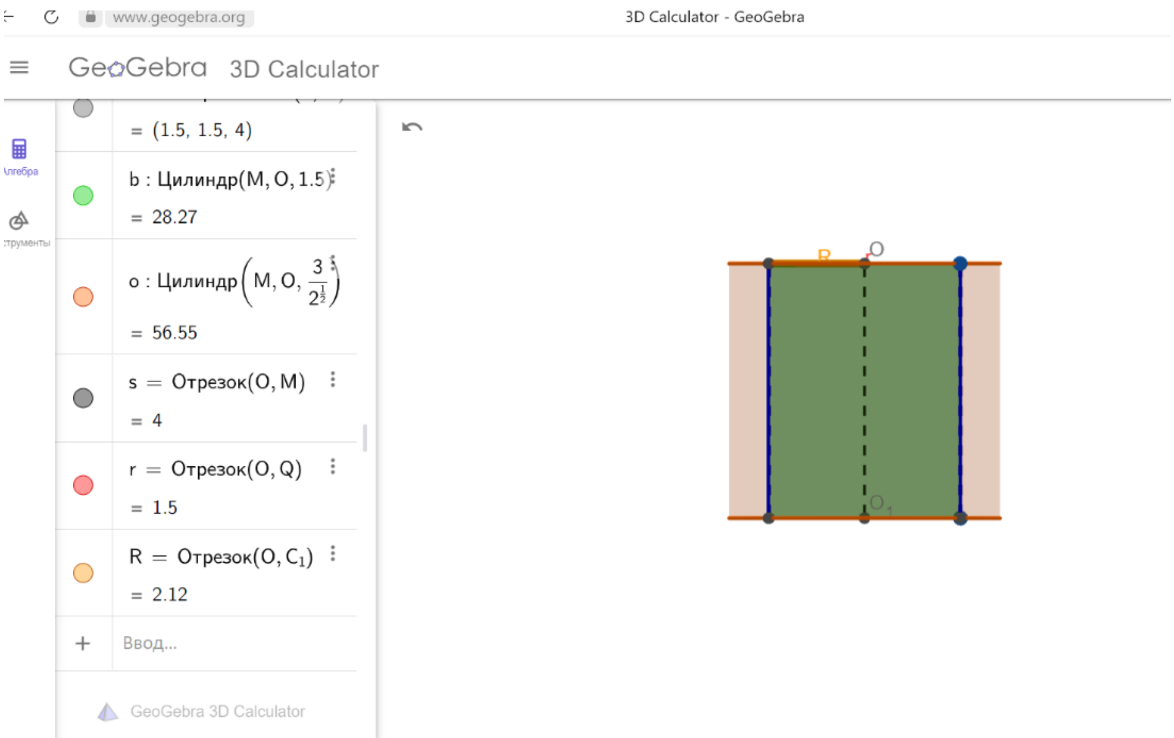


Рис. 19

Рассмотрим проекции куба, вписанного и описанного цилиндров на плоскость основания.

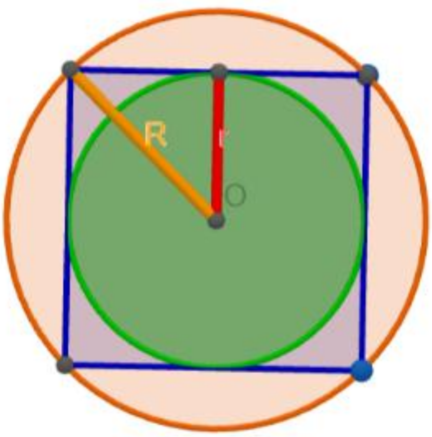


Рис. 20

Радиус r вписанного цилиндра равен половине ребра куба: $r_{\text{вписанного цилиндра}} = \frac{a}{2}$

Радиус R описанного цилиндра равен половине диагонали грани куба: $R_{\text{описанного цилиндра}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Найдем отношение объемов цилиндров:

$$\frac{V_{\text{описанного цилиндра}}}{V_{\text{вписанного цилиндра}}} = \frac{\pi \cdot a \cdot R^2}{\pi \cdot a \cdot r^2} = \frac{\pi \cdot a \cdot (a\sqrt{2})^2 \cdot 4}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot a^2} = \frac{2}{1}$$

Ответ: $\frac{V_{\text{описанного цилиндра}}}{V_{\text{вписанного цилиндра}}} = \frac{2}{1}$

Задача 4. Найти отношение объемов и поверхностей шара и вписанного в него куба с ребром a.

Представлена по ссылке: https://www.geogebra.org/3d/ncazaudj

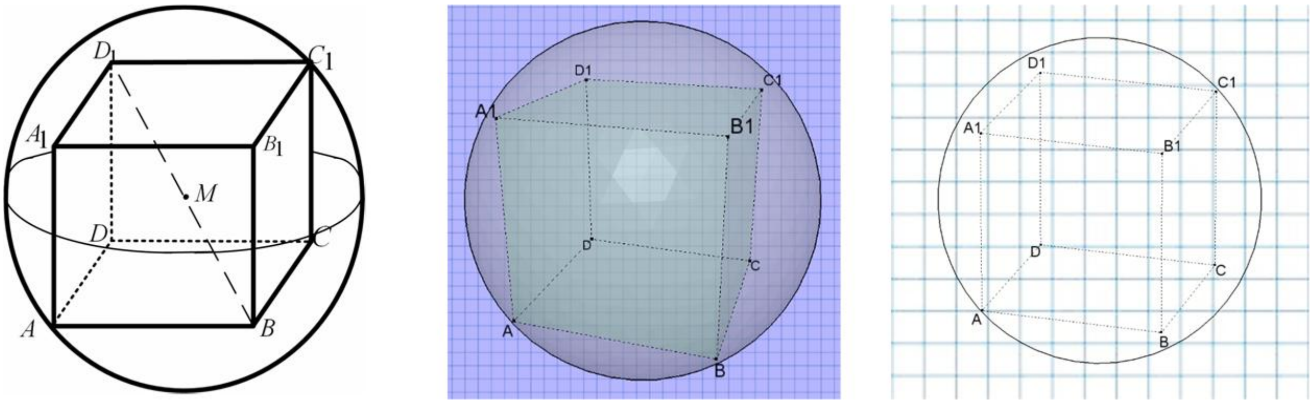


Рис. 21

Анализ решения.

При решении данной задачи используется прием разностороннего рассмотрения элементов изучаемой комбинации.

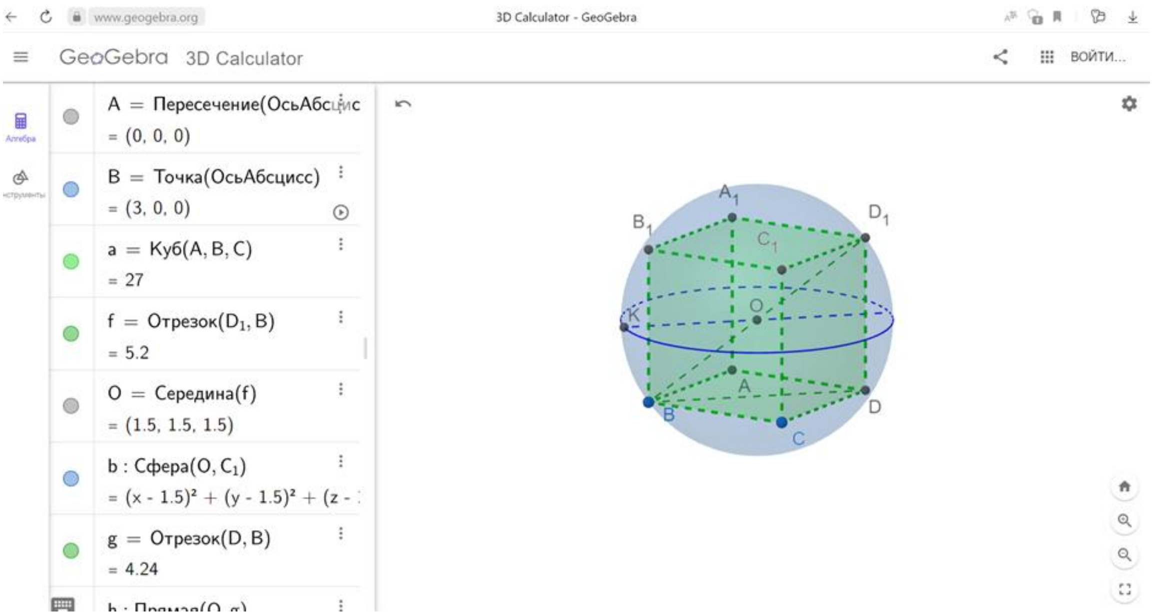


Рис. 22

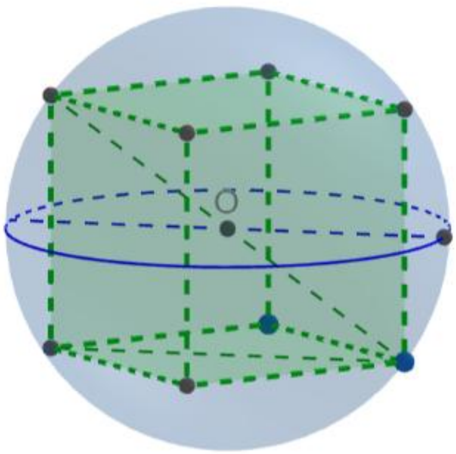


Рис. 23

При нахождении отношения объемов и поверхностей шара и вписанного в него куба, один и тот же отрезок прямой, может рассматриваться и как радиус R сферы, описанной около единичного куба, и как половина диагонали этого куба. То есть в зависимости от решаемого вопроса учащийся вычленяет в этом отрезке разные элементы и их признаки.

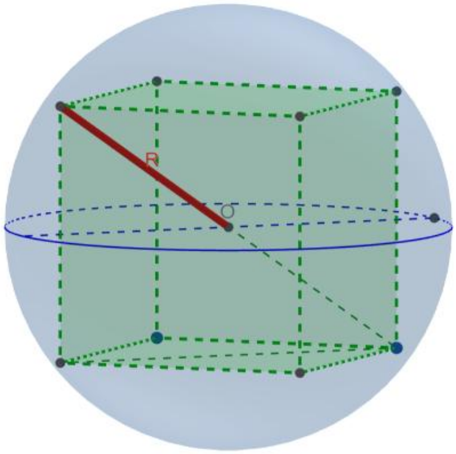


Рис. 24

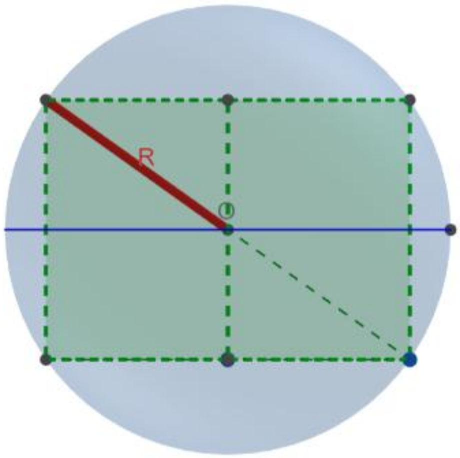


Рис. 25

Используем формулы для нахождения объемов и поверхностей шара и куба:

$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$,

$V_{\text{куба}} = a^3$,

$S_{\text{поверхности шара}} = 4\pi R^2$,

$S_{\text{поверхности куба}} = 6a^2$

Радиус R сферы, описанной около единичного куба, равен половине диагонали этого куба.

D_1B – диагональ куба. Найдем ее по формуле:

$D_1B^2 = BB_1^2 + BC_1^2 + BA_1^2,$

$D_1B^2 = 3a^2 D_1B = \sqrt{3a^2},$

то есть $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Следовательно,

$$\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{куба}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{a^3} = \frac{4\pi a^3\left(\sqrt{a}\right)^3}{a^3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2\pi\left(\sqrt{a}\right)^3}{3}$$

$$\frac{S_{\text{поверхности шара}}}{S_{\text{поверхности куба}}} = \frac{4\pi R^2}{6a^2} = \frac{4\pi \cdot a^2 \cdot 3}{6a^2 \cdot 4} = \frac{\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{куба}}} = \frac{2\pi\left(\sqrt{a}\right)^3}{3}, \frac{S_{\text{поверхности шара}}}{S_{\text{поверхности куба}}} = \frac{\pi}{2}$

Рациональное использование сочетания динамических систем и традиционных подходов при графическом изображении геометрического чертежа к задаче обеспечивает развитие пространственного мышления обучающихся.

К сожалению, использование цифровых инструментов в обучении геометрии в общеобразовательной школе не носит систематический характер. Подготовка будущих учителей в вузе имеет перспективный вектор использования компьютерных технологий в обучении в школе в, целом, и математике, в частности. Да, и сама методическая система обучения геометрии требует обновления, как содержания учебных материалов, так и методов обучения.

Таким образом, разработка структурно-функциональной модели компьютерного сопровождения уроков геометрии по решению задач с использованием GeoGebra является новым направлением в преподавании геометрии в школе и активизирует исследования в направлении применения цифровых инструментов в обучении обучающихся общеобразовательной школы.

2.3. Экспериментальная работа по реализации методики конструирования графических образов геометрических понятий с эффектом развития пространственного мышления обучающихся с использованием систем динамической математики (на примере GeoGebra)

Основной целью опытно-экспериментальной работы являлась проверка гипотезы исследования. Педагогический эксперимент проводился в 2015-2022 гг. в три этапа.

На *первом* констатирующем этапе эксперимента осуществлялся анализ результатов проведения ОГЭ и ЕГЭ и ежегодное тестирование первокурсников направления подготовки бакалавриата «Педагогическое образование», направленность «Математика» в Армавирском государственном педагогическом университете, подтвердил, что у большинства учащихся крайне слабая связь между словесным определением того или иного геометрического понятия и соответствующим графическим образом. Прямым следствием является тот факт, что около 80 % выпускников (средний балл ЕГЭ по математике выше 70) стараются, например, изображение правильной треугольной пирамиды построить с помощью равнобедренных треугольников, что делает чертеж ненаглядным и не читаемым [92].

Исходя из выделенных нами критериев, в экспериментальную диагностику были включены: тест для диагностики уровней развития пространственного мышления.

Дадим краткую характеристику теста. Он включает несколько видов заданий, которые требуют от учащихся в процессе создания образа:

– работы с величиной объектов, их формой (задание 1);

– оперирования образами, приводящего к мысленному видоизменению положения объекта (задание 2);

– оперирования образами, приводящего к мысленному видоизменению структуры объекта (задание 3);

– одновременного изменения пространственного положения и структуры образа (задание 4).

Первый вид заданий был направлен на выявление процесса создания образа, остальные – на определение типов оперирования образом.

Приведем некоторые образцы заданий.

Задание 1. *Выберите из четырех пар кубов те, у которых ломаные линии в каждой паре по форме одинаковы (рис. 26).*

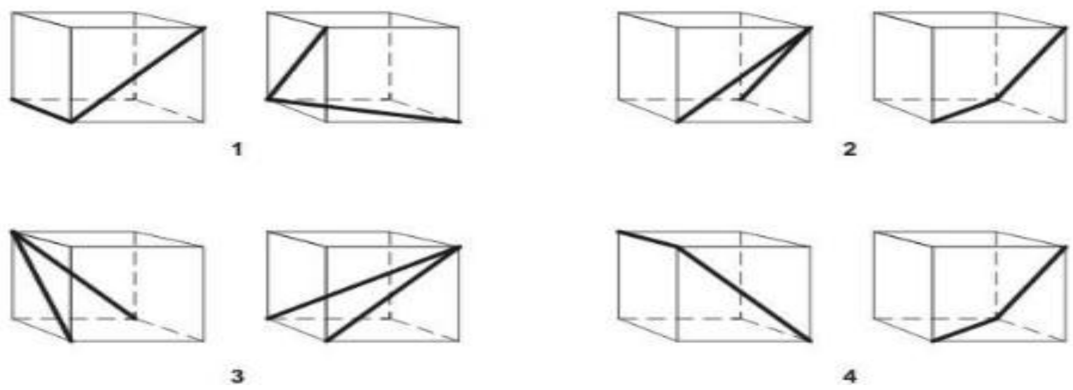


Рис. 26

Задание 2. *На рисунке 27 дано исходное положение геометрической комбинации «куб - тетраэдр», и положение той же комбинации после поворота вокруг заданной оси на 90 градусов. На первой комбинации выделена вершина A_1. Найдите вершину A_1 на втором изображении и отметьте её новое положение.*

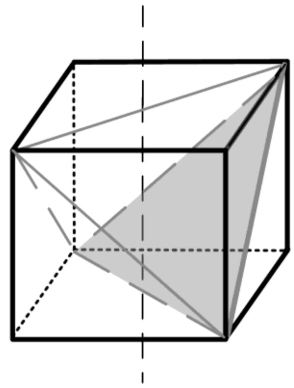


Рис. 27

Предложенное задание основано на теории И.С. Якиманской «Три типа оперирования пространственными образами» и относится к первому типу – «движение». Особенность задач данного типа состоит в том, что они требуют от учащихся умения совершать такие мысленные преобразования и операции, которые видоизменяют лишь пространственное местоположение имеющихся у него в представлении образов. В данном случае здесь одна ситуация преобразуется в другую путем простого перемещения геометрической комбинации «Куб-тэтраэдр» вместе со всеми их элементами: гранями, вершинами, ребрами**.**

Задание 3. *На фигуру Ф посмотрели из положений А и В. На каком из рисунков изображен вид из положения А, а на каком – из положения В (рис. 28)?*

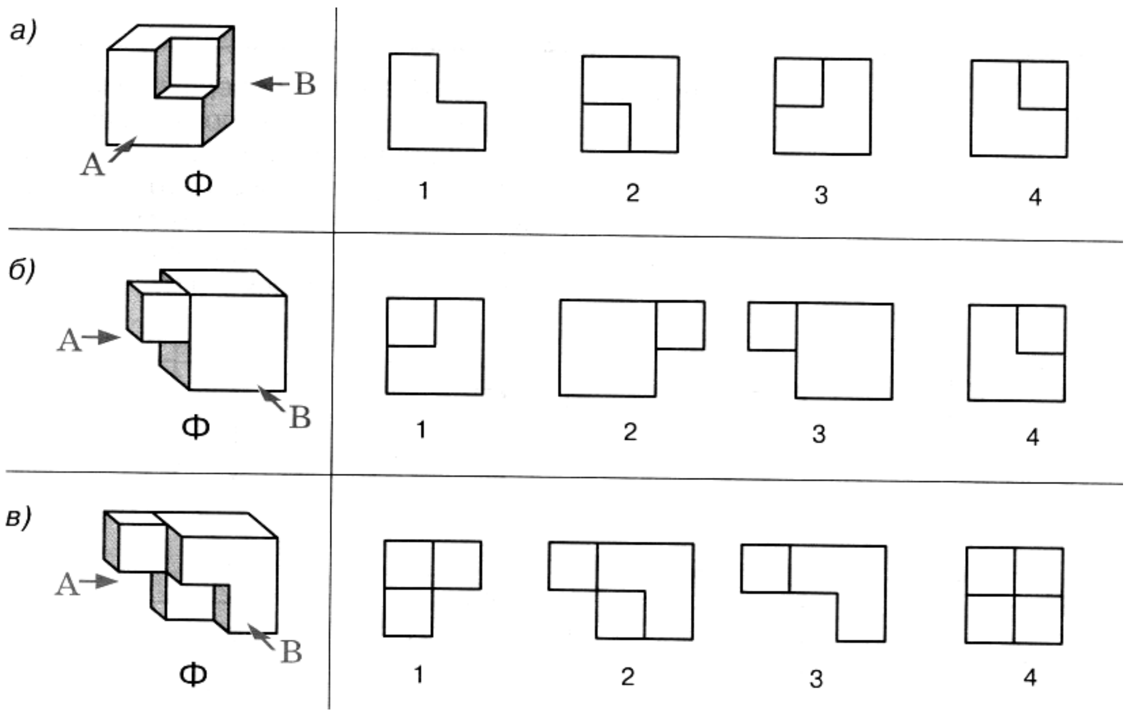


Рис. 28

Предложенное задание можно отнести ко второму типу задач – «реконструкция», в ходе решения которых учащимся необходимо менять структуру имеющегося в представлении образа.

Задание 4. *Два куба совместили клетчатыми гранями и выделенными вершинами (рис. 29). Укажите на фигуре, которая получилась, новое положение серой грани.*

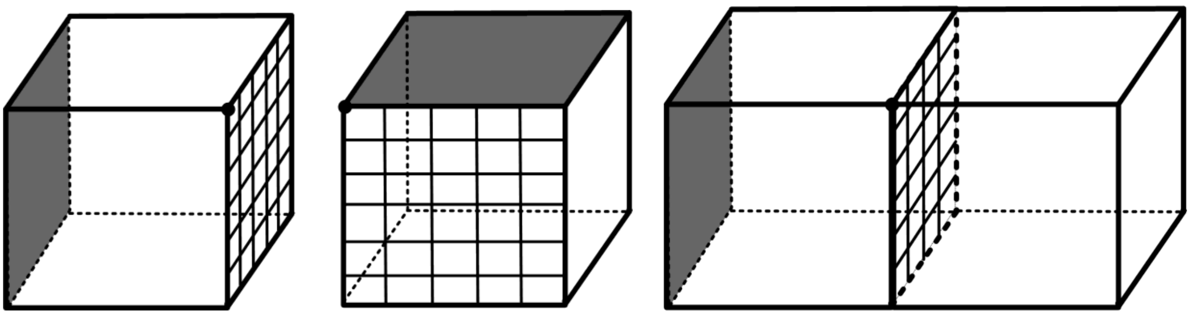


Рис. 29

Данное задание представляет собой пример того, как изменяется пространственное положение двух кубов в ходе мысленного совмещения клетчатых граней и выделенных вершин. А также подвергается изменению структура образа: вместо изначального образа двух кубов получаем образ прямоугольного параллелепипеда на рисунке 30.

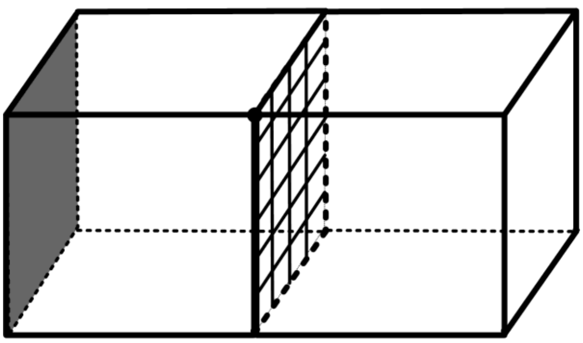


Рис. 30

В итоге первоначальный образ изменился и по местоположению, и по структуре одновременно, что говорит о необходимости применения сложной мыслительной деятельности, характеризующейся третьим типом оперирования пространственными образами.

Новое положение серой грани на получившемся параллелепипеде в ходе преобразований, указано на рисунке 31.

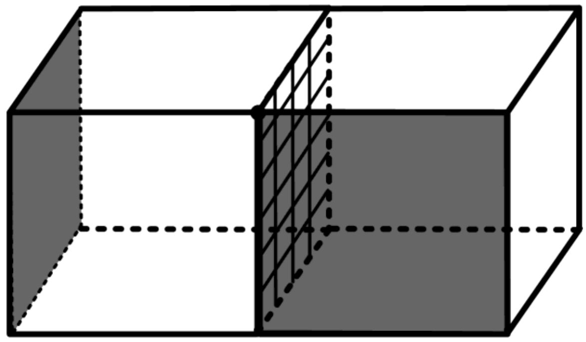


Рис. 31

Анализ результатов тестов учащихся одиннадцатых классов, показал, что в работе с заданиями на определение формы, с заданиями, позволяющими определить первый тип оперирования образами наблюдается положительная динамика. Мыслительные операции второго и третьего типа у старшеклассников ещё не совсем развиты. Количественные результаты теста представлены в таблице 3.

Результаты констатирующего эксперимента и аналитической работы, характеризующие уровень предметной подготовки учащихся по геометрии показали, что несмотря на то, что теоретические и методические основы использования позиционного чертежа в школьной практике давно и основательно разработаны, но и учащиеся, и учителя допускают ошибки в построении чертежей. Причина, на наш взгляд, кроется в утрате интереса к изучению геометрии в школьном курсе математики, в снижении востребованности геометрических знаний на итоговых испытаниях в виде ОГЭ (ГИА) по окончании 9 класса и ЕГЭ после 11-го. Присутствовавший ранее в программе средней школы курс черчения теперь отсутствует, и если этот курс позволял дать теоретические знания, представление о правилах построения проекционного чертежа, подготовить учащихся к построению стереометрических чертежей, то теперь эта работа переложена на курс геометрии. При этом школьные учебники геометрии не претерпели никаких существенных методических изменений в связи с необходимостью учить правилам изображений пространственных фигур на проекционном чертеже в отсутствии какой-либо теоретической базы. В учебнике «Геометрии 10-11» Атанасяна Л.С. в приложении приведен некоторый теоретический материал, посвященный построению проекционного чертежа, но этот материал методически не связан с содержанием учебника и мало полезен. Крайне важным для учителя математики является грамотная методическая организация соответствующей работы на уроке, несмотря на очень жесткий временной график. Как известно, переучивать значительно труднее, чем изначально учить правильному и наглядному построению чертежа. К сожалению, имеет место и определенная неуверенность самих учителей в построении чертежей и организации такой работы на каждом уроке. Выявление причин неудовлетворительного состояния проблемы показало, что основой формирования неправильных графических образов геометрических понятий в стереометрии являются неотработанность вопроса при изучении планиметрии, неудовлетворительная графическая составляющая учебника (см. Приложение 1), и, самое главное, отсутствие внимания к проблеме со стороны учителя. Проанализированы ошибки в формировании графических образов геометрических понятий с целью обратить на них внимание учителя и предупредить дальнейшее накопление неверной информации и ошибок.

На втором этапе – этапе обучающего эксперимента, осуществлялся отбор содержания обучения, выбор форм и методов конструирования графических образов геометрических понятий. Важным моментом данного этапа является интеграция традиционных методов обучения и использование систем динамической математики. Обучение проходило как на уроке, так и внеурочное время, на дополнительных занятиях (факультативных курсах).

Для традиционного обучения была выбрана тема: «Построение сечений многогранников», для более сложной темы «Комбинация многогранников и круглых тел» использовали СДМ, в частности, GeoGebra. Создан банк задач по данным темам, определялась структурно-функциональная модель компьютерной поддержки решения геометрических задач.

На третьем формирующем этапе эксперимента основной целью работы являлась проверка гипотезы исследования. Формирующий эксперимент проводился с 2019-2021 учебных годах в 10-11 классах. В экспериментальной работе участвовали 70 школьников, из них Мостовском районе 37 человек, а в Новокубанском районе 33 человека. Занятия проводились еженедельно в форме обучающих двухчасовых семинаров, на которых также рассматривались задания повышенной сложности по материалам ЕГЭ по математике. На занятиях в Мостовском районе реализовывались методические идеи, разрабатываемые в проводимом исследовании. А в г. Новокубанске обучение решению геометрических задач проводилось без акцента на конструктивной составляющей методов решения геометрических задач. Таким образом, все участники педагогического эксперимента были естественным образом разделены на экспериментальную (37 человек, Мостовской район) и контрольную группу (33 человека, Новокубанский район).

Оценивался уровень математических знаний до проведения формирующего эксперимента. Школьникам было предложено выполнить диагностическую контрольную работу, которая оценивалась по пятибалльной системе. Анализ результатов, полученных при выполнении диагностической работы, показал, что уровень знаний в экспериментальной и контрольной группах находится примерно на одном уровне.

Результаты контроля знаний представлены в таблице 3.

Таблица 3

Результаты контрольной диагностической работы

Оценка	Количество учащихся экспериментальной группы	Количество учащихся контрольной группы
«2»	8	6
«3»	12	11
«4»	11	11
«5»	6	5
Средний балл	3,41	3,45

Оценку правдоподобия полученных результатов проведем с помощью статистических методов. Показатели экспериментальной и контрольной групп сравним по критерию согласия χ^2 с уровнем статистической значимости α = 0,05, принятом при проведении подобных педагогических экспериментов. Эмпирическое значение критерия χ^2 найдем по следующей формуле [12]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathrm{n}_i - \tilde{\mathrm{n}}_i)^2}{\tilde{\mathrm{n}}_i},$$

где i – интервал распределения, n_i – эмпирическая частота (количество учащихся экспериментальной группы, соответствующих i-му интервалу распределения), $\tilde{\mathrm{n}}_i$ – теоретическая частота (количество учащихся контрольной группы, соответствующих i -му интервалу распределения).

Нахождение эмпирического значения критерия χ^2 по результатам начальной диагностической работы представлено в таблице 4.

Таблица 4

Нахождение эмпирического значения критерия χ^2

по результатам начальной диагностической работы

Оценка (i)	Количество учащихся экспериментальной группы (n_i)	Количество учащихся контрольной группы ($\tilde{n}_i$)	$n_i - \tilde{n}_i$	$(n_i - \tilde{n}_i)^2$	$\frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$
«2»	8	6	2	4	0,67
«3»	12	11	1	1	0,09
«4»	11	11	0	0	0
«5»	6	5	1	1	0,2
				χ^2=	0,96

Таким образом, по результатам начальной диагностической работы, проводимой в экспериментальной и контрольной группах, получено эмпирическое значение критерия $\chi^2_{\text{эмп.}}$ = 0,96, что меньше критического значения $\chi^2_{\text{крит.}}$ = 7,815 для уровня значимости α = 0,05 и степени свободы ν=3 (ν=k–1, где k – число интервалов (уровней)). Это свидетельствует о случайном характере обнаруженных различий, следовательно, выборки учащихся экспериментальных и контрольных групп принадлежат одной генеральной совокупности. Для визуального сравнения экспериментального и контрольного классов удобно построить для них совместные диаграммы.

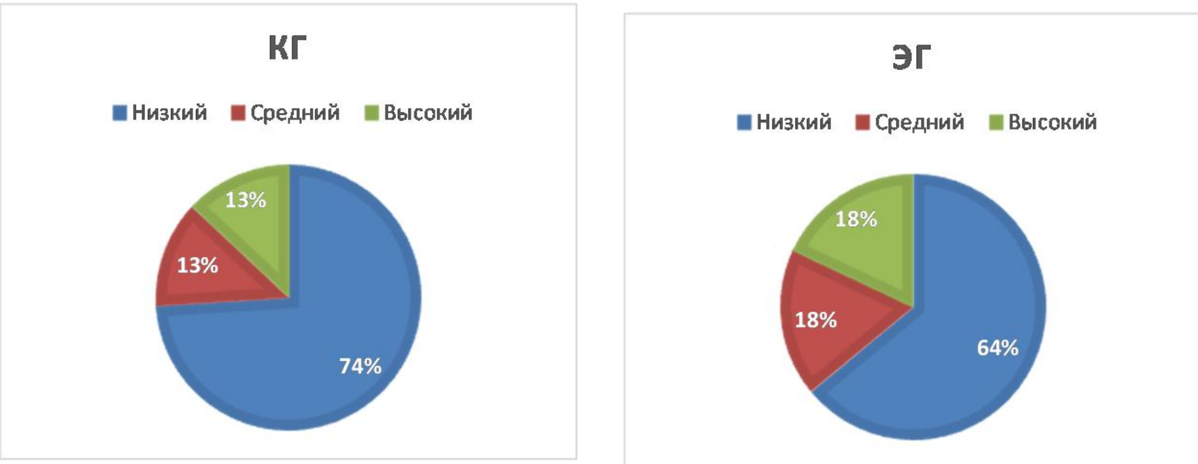


Рис. 32. Диаграммы контрольного и экспериментального классов до начала эксперимента

По результатам таблицы 3 построим парную диаграмму (рис. 32).

Итоги диагностического теста в двух группах (контрольной и экспериментальной) показали следующие уровни развития пространственного мышления: высокий уровень в контрольной группе – 13%, в экспериментальной – 18%; средний уровень в контрольной группе – 13%, в экспериментальной – 13%; низкий уровень знаний в контрольной группе -

На этом этапе эксперимента сравнительный анализ каждой пары контрольной и экспериментальной групп обучающихся показал, что в обеих группах уровень развития пространственного мышления приблизительно одинаков.

На заключительном этапе учащимся было предложено выполнить итоговую контрольную работу с целью выявления динамики изменения качества обучения и уровня развития пространственного мышления обучающихся в экспериментальной и контрольной группах.

Результаты контроля знаний представлены в таблице 5.

Таблица 5

Результаты итоговой диагностической работы

Оценка	Количество учащихся экспериментальной группы	Количество учащихся контрольной группы
«2»	1	5
«3»	8	11
«4»	17	12
«5»	11	5
Средний балл	4,03	3,52

Нахождение эмпирического значения критерия χ^2 по результатам итоговой диагностической работы представлено в таблице 6.

Таблица 6

Нахождение эмпирического значения критерия χ^2

по результатам итоговой диагностической работы

Оценка (i)	Количество учащихся экспериментальной группы (n_i)	Количество учащихся контрольной группы ($\tilde{n}_i$)	$n_i - \tilde{n}_i$	$(n_i - \tilde{n}_i)^2$	$\frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$
«2»	1	5	-4	16	3,2
«3»	8	11	-3	9	0,81
«4»	17	12	5	25	2,08
«5»	11	5	6	36	7,2
				χ^2=	13,29

Полученное по результатам выполнения итоговой диагностической работы эмпирическое значение $\chi^2_{\text{эмп.}}$ = 13,29 больше критического значения $\chi^2_{\text{крит.}}$ = 7,815 для уровня значимости α = 0,05 и степени свободы ν = 3. Более того, для уровня значимости α = 0,05 критическое значение $\chi^2_{\text{крит.}}$ = 11,345, что также меньше наблюдаемого значения статистики. Это свидетельствует о том, что различия в итоговых результатах не могут быть объяснены только случайными причинами, т.е. носят систематический, регулярный характер, а значит, выборки учащихся экспериментальных и контрольных групп принадлежат после формирующего эксперимента разным генеральным совокупностям.

Рис. 33. Диаграммы контрольного и экспериментального классов

после окончания эксперимента

Итак, круглые диаграммы (рис. 33) показали, что уровень пространственного мышления в этих группах имеет существенные различия: высокий уровень в контрольной группе – 25%, в экспериментальной – 47%; средний уровень в контрольной группе – 13%, в экспериментальной – 29%; низкий уровень знаний в контрольной группе – 62%, в экспериментальной – 24%.

Полученные результаты позволяют сделать следующий вывод: развитие пространственного мышления в экспериментальных и контрольных классах после опытной работы различны.

Таким образом, по результатам проведенной экспериментальной работы можно сделать вывод о том, что разработанная методика конструирования графических образов понятий в обучении геометрии в старшей школе с использованием систем динамической математики основанная на выделении конструктивной составляющей является методически эффективной.

Выводы по второй главе

1. Дидактические возможности систем динамической геометрии обеспечивают новый уровень реализации технологий обучения математике средствами наглядного моделирования на основе интерактивной деятельности. Использование комплекта динамических визуальных дидактических материалов в процессе обучения геометрии способствует целостности восприятия и преодолению фрагментарности в формировании графических образов геометрических понятий.

Методика конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики с эффектом развития пространственного мышления обучающихся обеспечивает рациональное использование динамических систем и интерактивности при графическом изображении геометрического чертежа. Наглядное моделирование в конструировании графических образов геометрических понятий проходит следующие этапы:

– восприятие наглядного образа геометрического объекта (рисунок или оригинал объекта);

– словесно-логическое описание геометрического образа и наглядное его представление (изображение и анализ чертежа);

– доказательство адекватности визуального представления (графического образа);

– математическое описание графического образа и изображение его ручным способом, сочетание обучающего и развивающего эффекта посредством визуализации математической модели.

Специфическим результатом обучения геометрии с использованием систем динамической математики является формирование пространственных представлений графических образов и оперировании ими в процессе решения стереометрических задач.

2. Структурно-функциональная модель компьютерного сопровождения обучения геометрии представляет собой системный метод проектирования, реализации, оценки, коррекции и последующего воспроизведения процесса обучения.

Результаты проведения опытно-экспериментальной работы доказали эффективность методики конструирования графических образов понятий в обучении геометрии в старшей школе с использованием систем динамической математики с эффектом развития пространственного мышления обучающихся. В основе конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической математики лежит метод наглядного моделирования содержания понятий, выделенные этапы и их последовательность обеспечивает актуализацию когнитивной деятельности по выявлению и моделированию динамических связей и отношений между отдельными элементами геометрического образа. Организация рефлексивного контроля наглядности моделирования происходит в результате словесно-логического обоснования построения графических образов геометрических понятий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методика конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической геометрии (на примере GeoGebra) на основе метода наглядного моделирования с эффектом развития пространственного мышления в обучении геометрии отвечает принципам постнеклассической образовательной парадигмы, основывается на деятельностном, системном и средовом подходах. Анализ научной литературы по теме исследования позволил уточнить и конкретизировать сущность понятия «графический образ геометрического понятия», выявить содержание понятия, структуру, характеристики и их особенности в цифровой образовательной среде, выработать тактику проектирования методической системы обучения геометрии с использованием СДМ.

С учетом выявленных психологических особенностей пространственного мышления старших подростков разработана структурно-функциональная модель компьютерного сопровождения обучения геометрии с использованием GeoGebra. Создан банк задач по теме: «Комбинация многогранников и круглых тел».

Эффективность разработанной и теоретически обоснованной методики подтверждена экспериментально. Полученные выводы позволяют утверждать, что исходная гипотеза в процессе исследования подтвердилась: в основе конструирования графических образов геометрических понятий с использованием систем динамической геометрии лежит метод наглядного моделирования содержания понятий. Наглядное моделирование в конструировании графических образов геометрических понятий проходит следующие этапы:

– восприятие наглядного образа геометрического объекта (рисунок или оригинал объекта);

– словесно-логическое описание геометрического образа и наглядное его представление (изображение и анализ чертежа);

– доказательство адекватности визуального представления (графического образа),

– математическое описание графического образа и изображение его ручным способом, сочетание обучающего и развивающего эффекта посредством визуализации математической модели.

Рефлексивный контроль наглядности моделирования и словесно-логическое обоснование построения графических образов геометрических понятий обеспечивает рациональное использование динамических систем и интерактивности при графическом изображении геометрического чертежа.

Проведенное исследование показало значимость внедрения его результатов в процесс обучения математике, но не исчерпывает содержания изучаемой проблемы. Дальнейшая работа, на наш взгляд, может проводиться в следующих направлениях: исследование влияния цифровой образовательной среды и её инструментов на качество обучения геометрии в профильных классах средней общеобразовательной школы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар, Ж. Элементарная геометрия. Ч. 2 Стереометрия / Ж. Адамар. – М.: Просвещение, 1959. – 471 с.
2. Александров, А.Д. Геометрия для 10-11 классов: учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 1992. – 464 с.
3. Александров, А.Д. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. сред. шк. / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 1992. – 320 с.
4. Александров, А.Д. Начала стереометрии, 10 проб. учебник / А.Д. Александров. – М.: Просвещение, 1982. – 206 с.
5. Алексеева, К.В. Использование элементов электронного обучения в процессе обучения решению стереометрических задач / К.В. Алексеева // Вестник Северного арктического федерального университета. Серия «Гуманитарные и социальные науки». – 2015. – №2. – С. 131-137.
6. Альванус, Р.С. Разработка и внедрение методики проблемного обучения при изучении геометрического материала в 5-6 классах: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Альванус Руида Салех. – М., 2008. – 218 с.
7. Ананьев, Б.Г. Избранные труды по психологии. Т.2.Развитие и воспитание личности / Б.Г. Ананьев. – СПб.: Изд. Санкт-Петербургского университета, 2004. – 288 с.
8. Аргунов, Б.И. Геометрические построения на плоскости / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. – М.: Учпедгиз, 1957. – 268 с.
9. Арнхейм, Р. Визуальное мышление. Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Р. Арнхейм; под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. − С. 97−107.
10. Арнхейм, Р. Искусство и визуальное восприятие / Р. Арнхейм. – М.: Прогресс, 1974. – С. 385.

11. Атанасян, Л.С. Геометрия 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Л.С. Атанасян и др. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 2019. – 287 с.

12. Атанасян, Л.С. Геометрия: учебн. для 10-11 кл. сред. шк. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 207 с.

13. Атанасян, Л.С. Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Л.С. Киселева, Э.Г. Позняк. – М.: Просвещение, 2013. – 255 с.

14. Атаханов, Р.А. Соотношение общих закономерностей мышления и математического мышления – вопросы психологии / Р.А. Атаханов // Вопросы психологии. – 1995. – № 5. – С. 41.

15. Балк, М.Б. Математика после уроков / М.Б. Балк, Г.Д. Балк: пособие для учителей. – М., 1997. – 462 с.

16. Белоусова, А.Г. Формирование пространственного мышления младших подростков: На примере обучения математике: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Белоусова Алла Генриховна. – Воронеж, 2005. – 215 с.

17. Бескин, Н.М. Общие принципы геометрических построений / Н.М. Бескин, И.Г. Болтянский, Г.Г. Маслова, Н.Ф. Четверухин, И.М. Яглом. // Энциклопедия элементарной математики. Т. 4 Геометрия. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 1963. – С. 159-203.

18. Бадмаева, Н.Ц. Влияние мотивационного фактора на развитие умственных способностей: монография / Методика для диагностики учебной мотивации школьников (методика М.В. Матюхиной в модификации Н.Ц. Бадмаевой). – Улан-Удэ, 2004. – С.149-150.

19. Белякова, Т.Г. Использование интерактивных моделей геометрических объектов как средства развития пространственного мышления школьников на уроках математики в средней школе /

Т.Г. Белякова, Н.Н. Храмова // Актуальные проблемы обучения математике, физике и информатике в школе и вузе: сборник статей V Межрегиональной научно-практической конференции учителей, посвященная 75-летию образования физико-математического факультета ПГУ; под общ. ред. М. А. Родионова. – Пенза: Пензенский государственный университет, 2014. – С. 168-172.

20. Бескин, Н.М. Изображения пространственных фигур (Серия: «Популярные лекции по математике») / Н.М. Бескин. – М.: Наука, 1971. – 80 с.

21. Блонский, П.П. Избранные педагогические произведения; сост. Н.И. Блонская, А.Д. Сергеева. – М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1961. – 696 с.

22. Бобровская, А.В. Наглядная стереометрия / А.В. Бобровская. – Шадринск: ПО «Исеть», 2005. – 160 с.

23. Боженкова, Л.И. Методическая система обучения геометрии, ориентированная на интеллектуальное воспитание учащихся общеобразовательной школы: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Боженкова Людмила Ивановна – М., 2007. – 424 с.

24. Болтянский, В.Г. Элементарная геометрия: книга для учителей / В.Г. Болтянский. – М.: Просвещение, 1985. – 319 с.

25. Варнавская Н.Я. Стандарт геометрической подготовки учащихся 5-6 классов в условиях реализации фузионистского курса геометрии: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Варнавская Нина Яковлевна. – Рязань, 2005. – 213 с.

26. Василенко, А.В. Развитие пространственного мышления учащихся в процессе обучения геометрии: психологический аспект / А.В. Василенко // Преподаватель XXI век. – 2010. – № 2 – С. 37-39.

27. Вейль, Г. Математическое мышление / Г. Вейль; перевод с англ. и нем.; под ред. В.В. Бирюкова и А.Н. Паршина. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

28. Вернер, А.А. Стереометрия: учебное пособие для 7-9 классов общеобразовательной школы / А.А. Вернер, Т.Г. Ходот. – СПб.: Специальная литература, 1996. – 230 с.

29. Верченко, С.Б. Развитие пространственных представлений учащихся при изучении геометрического материала в 4-5 классах средней школы: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Верченко Светлана Брониславовна. – М., 1983. – 214 с.

30. Владимирский, Г.А. Стереоскопические чертежи по геометрии (альбом) / Г.А. Владимирский. – М.: Учпелгиз, 1963. – 176 с.

31. Владимирский, Г.А. Каким должен быть чертеж преподавателя геометрии / Г.А. Владимирский // Математика в школе. – 1998. – №4. – С. 37-39.

32. Владимирский, Г.А. Наглядные изображения в параллельных проекциях: пособие для учителей / Г.А. Владимирский. – М.: Учпедгиз, 1969. – 132 с.

33. Волкова, Ю.А. Интегративный подход к формированию и развитию пространственных представлений у младших школьников: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Волкова Юлия Анатольевна. – Смоленск, 2004. – 218 с.

34. Выготский, Л.С. Педагогическая психология / Л.С. Выготский; под ред. В.В. Давыдова. – М.: Педагогика-Пресс, 1999. – 536 с.

35. Габович, И.Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач: книга для учащихся / И.Г. Габович. – М.: Просвещение, 1996. – 192 с.

36. Гайденко, П.П. Научная рациональность и философский разум. – М.: Прогресс-Традиция, 2003. – 528 с.

37. Гальперин, П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий / П.Я. Гальперин // Исследование

мышления в советской психологии; под ред. Е.В. Щороховой. – М.: Наука, 1966. – С.259-276.

38. Гаркавцева, Г.Ю. Геометрическая подготовка учащихся 1-4 классов в курсе «наглядная геометрия»: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Гаркавцева Галина Юрьевна. – М., 2009. – 156 с.

39. Глейзер, Г.Д. Развитие пространственных представлений школьников при изучении геометрии / Г.Д. Глейзер. – М.: Педагогика, 1972. – 423 с.

40. Гольдберг, Я.Е. С чего начинается решение стереометрической задачи: пособие для учителя / Я.Е. Гольдберг. – Киев: Радянська школа, 1990. – 118 с.

41. Грачева, Н.Ю. Формирование творческой деятельности у учащихся 5-6 классов основной школы при решении геометрических задач: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Грачева Наталья Юрьевна. – М., 2002. – 142 с.

42. Гришина, О.А. Система компьютерного сопровождения обучающего курса по стереометрии с применением интерактивных технологий / О.А. Гришина // Ярославский педагогический вестник. – 2014. – № 1. – С. 29-32.

43. Гришина, О.А. Формирование пространственных образов стереометрических комбинаций с использованием новых информационных технологий / О.А. Гришина // Мир науки, культуры, образования. – 2012. – № 6 (37). – С. 146-148.

44. Гурова, Л.Л. Процессы понимания в развитии мышления / Л.Л. Гурова // Вопросы философии. – 1986. – №2. – С. 126-137.

45. Гусев, В.А. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др. – М.: Академия, 2004. – 368 с.

46. Далингер, В.А. Методика формирования пространственных представлений у учащихся при обучении геометрии: учебное пособие / В.А. Далингер. – Омск: Изд-во ОГПИ, 1992. – 96 с.

47. Дворяткина, С.Н. Современное математическое образование в контексте духовно-нравственной культуры: монография / С.Н. Дворяткина, О.А. Саввина, Ю.В. Саввина, Н.В. Черноусова. – Елец, 2022. – 167 с.

48. Дивногорцева, С.Ю. Развитие геометрического видения учащихся при обучении математике в 1-6 классах: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Дивногорцева Светлана Юрьевна. – Арзамас, 1998. – 149 с.

49. Домунян, А.А. Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.11 / Домунян Андрей Александрович. – М., 2012. – 134 с.

50. Дорофеев, Г.В. Чертеж в геометрической задаче / Г.В. Дорофеев, Н. Рогозов // Квант. – 1976. – №6. – С. 49-56.

51. Зак, А.З. Развитие способности действовать «в уме» у школьников I-X классов / А.З. Зак // Вопросы психологии. – 1983. – №1. – С. 43-50.

52. Занков, Л.В. О предмете и методах дидактических исследований / Л.В. Занков. – М.: АПН РСФСР, 1962. – 182 с.

53. Захарова, Е.А. Формирование пространственного воображения посредством моделирования у детей младшего школьного возраста: дис. … канд. пед. наук: 13.00.01 / Захарова Елена Афанасьевна. – Якутск, 2003. – 184 с.

54. Знаменская, Е.В. Формирование пространственных представлений у младших школьников при изучении геометрического материала: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Знаменская Елена Владимировна. – М., 1995. – 201 с.

55. Захарова, И.Г. Формирование информационной образовательной среды высшего учебного заведения: дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.01 / Ирина Гелиевна Захарова. – Тюмень, 2003. – 399 с.

56. Зенгин, А.Р. Основные принципы построения изображений в стереометрии: пособие для учителей / А.Р. Зенгин. – М.: Просвещение, 1962. –156 с.

57. Зепнова, Н.Н. Формирование и развитие пространственного мышления учащихся на элективных курсах по геометрии: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Зепнова Наталья Николаевна. – Омск, 2005. – 170 с.

58. Зинченко, В.П. Продуктивное восприятие / В.П. Зинченко // Вопросы психологии. – 1971. – № 6. – С. 27-42.

59. Знаменская, Е.В. Формирование пространственных представлений у младших школьников при изучении геометрического материала: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Знаменская Елена Владимировна. – М., 1995. – 201 с.

60. Зыкова, В.И. Формирование практических умений на уроках геометрии / В.И. Зыкова. – М.: Просвещение, 1963. – 189 с.

61. Ильина, Т.А. Педагогика: курс лекций: учебное пособие для студентов пединститутов / Т.А. Ильина. – М.: Просвещение, 1963. – 261 с.

62. Кабанова-Меллер, Е.Н. Формирование восприятия пространства и пространственных представлений у детей / Е.Н. Кабанова-Меллер // Вопросы психологии. – 1958. – №3 май-июнь 1958. – С. 161-168.

63. Каплунович, И.Я. Показатели развития пространственного мышления школьников / И.Я. Каплунович // Вопросы психологии. – 1981. –№5. – С. 151-157.

64. Каплунович, И.Я. Развитие структуры пространственного мышления при решении математических задач / И.Я. Каплунович // Вопросы психологии. – 1986. – №2 . – С. 67-71.

65. Каплунович, И.Я. Содержание мыслительных операций в структуре пространственного мышления/ И.Я. Каплунович // Вопросы психологии. – 1987. – №6 ноябрь-декабрь 1987. – С. 115-123.

66. Кириллова, С.В. Научно-педагогические основы пропедевтико-геометрической подготовки учащихся 5-6 классов средней школы: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Кириллова Светлана Владимировна. – Новгород, 2001. – 213 с.

67. Киселев, А.П. Геометрия. Часть вторая: Стереометрия: учебник для 9-10 классов / А.П. Киселев. – М.: Просвещение, 1968. – 103 с.

68. Киселев, А.П. Геометрия: Стереометрия: 10-11 кл.: учебник и задачник / А.П. Киселев, Н.А. Рыбкин. – М.: Дрофа, 1995. – 224 с.

69. Ковалева, Г.И. Методика использования «сквозных» задач при изучении стереометрии / Г.И. Ковалева, Т.И. Бузулина // Сборник трудов IV Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе». – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2020. – С.37-41.

70. Ковалева, Г.И. Графический образ и графическое представление математического понятия / Г.И. Ковалева, Н.Ю. Милованов // Казанский педагогический вестник. – №4 (123). – 2017. – С. 31-37.

71. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я. Саннинский, Г.Л. Луканкин. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

72. Коногорская, С.А. Особенности пространственного мышления и их взаимосвязь с учебной успешностью обучающихся / С.А. Коногорская // Научно-педагогическое обозрение. – 2017. – № 1 (15). – С. 142-149.

73. Кочеткова, И.А. Развитие пространственного мышления школьников при изучении геометрического материала в курсе математики начальных классов: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Кочеткова Ирина Александровна. – М., 1997. – 202 с.

74. Кривцов, О.А. Методы, алгоритмы и программная система трекинга головы человека на видеокадрах, основанные на геометрических

текстурных моделях: дис. … канд. техн. наук: 05.13.11 / Кривцов Олег Александрович. – Томск, 2010. – 202 с.

75. Крутецкий, В.А. Психология: учебник для учащихся пед. училищ / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1980. – 352 с.

76. Кудакова, Н.С. Развитие пространственных представлений учащихся 5-6 классов средней школы с использованием движений: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Кудакова Наталья Сергеевна. – Арзамас, 2000. – 176 с.

77. Курдин, Д.А. Формирование интуитивного компонента геометрической подготовки школьников при обучении математике в 5-6 классах: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Курдин Денис Алексеевич. – Арзамас, 2006. – 147 с.

78. Леонтьев, А.Н. О путях исследования восприятия / А.Н. Леонтьев, под. ред. проф. А.Н. Леонтьева // Восприятие и деятельность. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 320 с.

79. Литвиненко, В.Н. Задачи на развитие пространственных представлений: книга для учителя / В.Н. Литвиненко. – М.: Просвещение, 1991. – 127 с.

80. Литвиненко, В.Н. Геометрия-10: Тетрадь заданий / В.Н. Литвиненко. – М.: Вербум-М, 2002. – 128 с.

81. Лобачевский, Н.И. Полное собрание сочинений / Н.И. Лобачевский // Сочинения по геометрии. Т. 3: Воображаемая геометрия: Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам: Пангеометрия; под общ. ред. В.Ф. Кагана, А.П. Котельникова, В.В. Степанова, Н.Г. Чеботарева, П. А. Широкова; гл. ред. В. Ф. Каган. – М.; Ленинград: Гостехиздат, 1951. – 535 с.

82. Ломов, Б.Ф. Методологические и теоретические проблемы психологии / Б.Ф. Ломов. – М.: Наука, 1984. – 445с.

83. Лоповок, Л.М. Методика отбора упражнений по геометрии и обучения их решению / Л.М. Лоповок. – М.: Просвещение. 1967. – С. 57-199.

84. Луковников, Н.Н. Структурная организация мышления / Н.Н. Луковников // Исследование проблем психологии творчества. – М.: Наука, 1983. – С. 232-246.

85. Майер, В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Майер Валерий Робертович. – Красноярск, 2001. – 350 с.

86. Мамалыга, Р.Ф. Развитие пространственного мышления у студентов педагогического вуза при формировании понятий в курсе геометрии: дис. … канд. пед наук: 13.00.02 / Мамалыга Раиса Федоровна – Екатеринбург, 2005. – 156 с.

87. Максимов, Л.К. Зависимость развития математического мышления школьников от характера обучения / Л.К. Максимов // Вопросы психологии. – 1979. – № 2. – С. 57-65.

88. Марюков, М.Н. Научно-методические основы использования компьютерных технологий при изучении геометрии в школе: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Марюков Михаил Николаевич. – Брянск, 1998. – 244 с.

89. Менчинская, Н.А. Проблемы обучения, воспитания и психического развития ребенка / Н.А. Менчинская. – М.: МПСИ, Воронеж: Модэк, 2004. – 512 с.

90. Метельский, Н.В. Дидактика математики. Общая методика и её проблемы: учебное пособие для вузов / Н.В. Метельский. – Минск: БГУ, 1982. – 256 с.

91. Мозговая, М.А. Характеристика пространственного мышления и особенности его формирования в обучении геометрии в средней школе / М.А. Мозговая // Мир науки, культуры, образования. – 2020. – № 1 (80). – С. 13-15.

92. Мозговая, М.А. Формирование графических образов геометрических понятий как основа развития пространственного мышления при изучении геометрии в средней школе / М.А. Мозговая // Проблемы современного педагогического образования: сборник научных трудов. – Ялта: РИО ГПА, 2018. – Вып. 60. – Ч. 1. – С. 190-193.

93. Мозговая, М.А. Методика использования геометрических образов при решении контекстных математических задач / Я.Д. Батаева, Е.Ю. Лещенко, М.А. Мозговая // Проблемы современного педагогического образования. – 2020. – № 66-3. – С. 15-18.

94. Мозговая, М.А. Технология развития пространственного мышления обучающихся средней школы посредством конструирования геометрических образов с использованием GEOGEBRA / М.А. Мозговая, Е.И. Санина // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – Выпуск №4(28). – Елец, 2022. – С. 17-29.

95. Мозговая, М.А. Учебно-методическое пособие «Оценочные средства контроля знаний учащихся по геометрии. Часть I» / Н.Ю. Спевакова, М.А. Мозговая. – Армавир: НОЦ «Технологии открытого образования», АГПА, 2014. – 31 с.

96. Мозговая, М.А. Аффинные преобразования плоскости: учебно-методическое пособие для студентов педагогических вузов / Н.Ю. Спевакова, М.А. Мозговая, К.В. Доценко. – Армавир: АГПУ НОЦ «Технологии открытого образования», 2017. – 28 с.

97. Мозговая, М.А. Методика формирования графических образов в процессе обучения геометрии в средней школе [Электронный ресурс] / Е.И. Санина, М.А. Мозговая // Геометрия и геометрическое образование: сборник трудов IV международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 80-летию Е.В. Потоскуева), Тольятти, 29 – 30 ноября 2019 года / под общ. ред.

Р.А. Утеевой. − Тольятти: Изд-во ТГУ, 2020. – С. 66-71. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44397613.

98. Мозговая, М.А. Развитие пространственного мышления: историко-методологический аспект [Электронный ресурс] / Е.И. Санина, М.А. Мозговая // Актуальные проблемы современного образования. Организация исследовательской деятельности в научно-образовательных учреждениях: сборник научных трудов VIII международной научно-практической конференции / науч. ред.: Н.В. Аммосова, А.М. Черкасова. – Астрахань: Изд-во ИП Н.В. Забродина, 2021. – С. 78-85 – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46694830.

99. Мозговая, М.А. Алгоритмический подход к решению геометрических задач / М.А. Мозговая // Тенденции и проблемы развития математического образования: научно-практический сборник. Вып. 11; научн. ред. Н.Г. Дендеберя, С.Г. Манвелов. – Армавир: РИО АГПА, 2013. – С. 78-80.

100. Мозговая, М.А. Построение графической модели как основа обучения учащихся решению планиметрических задач / М.А. Мозговая // Современная система педагогического образования: Опыт прошлого – взгляд в будущее: материалы всероссийской научно-практической конференции (г. Армавир, 4 декабря 2013 г.); глав. ред. А.Р. Галустов; науч. ред. Ю.П. Ветров, Е.Р. Кондрупенина. – Армавир: РИО АГПА, 2013. – С. 133-134.

101. Мозговая, М.А. Конструктивная составляющая обучения решению геометрических задач в условиях перехода к ФГОС ООО / Н.Ю. Спевакова, М.А. Мозговая // Армавирская государственная педагогическая академия – региональный центр развития личностного ресурса субъектов образования: Материалы научно-практической конференции (г. Армавир, 14-18 апреля 2014 г.). – Ч. I.; глав. ред. А.Р. Галустов; науч. ред. Ю.П. Ветров, Е.Р. Кондрупенина – Армавир: РИО АГПА, 2014. – 128 с.

102. Мозговая, М.А. Методические особенности преподавания курсов геометрии в средней школе и педагогическом вузе / Н.Ю. Спевакова, М.А. Мозговая // Проектирование как активный метод включения школьников в творческую деятельность в современной системе образования: материалы Всероссийской конференции с международным участием (29-30 апреля 2014 г.); науч. ред. Н.К. Андриенко, М.В. Живогляд; отв. ред. Е.А. Плужникова. – Армавир: РИО АГПА, 2014. – С. 165-167.

103. Мозговая, М.А. К проблеме формирования готовности учителя математики к развитию графических навыков старшеклассников на уроках геометрии / Н.Ю. Спевакова, М.А. Мозговая // Тенденции и проблемы развития математического образования: научно-практический сборник. – Вып. 12; науч. ред. Н.Г. Дендеберя, С.Г. Манвелов. – Армавир: РИО АГПА, 2014. – С. 85-87.

104. Мозговая, М.А. Графическая составляющая обучению учащихся решению геометрических задач при подготовке к ГИА и ЕГЭ / Н.Ю. Спевакова, М.А. Мозговая // Проблемы теории и практики обучения математике: сборник научных работ, представленных на международную научную конференцию «67 Герценовские чтения»; под ред. В.В. Орлова. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2014. – С. 281-282.

105. Мозговая, М.А. О графической составляющей школьного учебника геометрии / Н.Ю. Спевакова, М.А. Мозговая // Тенденции и проблемы развития математического образования: научно-практический сборник. Материалы участников XIII Всероссийской научно-практической конференции по проблемам развития математического образования 2-3 ноября 2015 г. – Вып. 13; научн. ред. Н.Г. Дендеберя, С.Г. Манвелов. – Армавир: РИО АГПУ, 2016. – С. 105-110.

106. Мозговая, М.А. Методическое сопровождение подготовки учащихся средней школы к решению стереометрических задач ЕГЭ / М.А. Мозговая // Армавирский государственный педагогический

университет – региональный центр развития личностного ресурса субъектов образования: материалы научно-практической конференции (г. Армавир, 10-14 апреля 2017 г.); глав. ред. А.Р. Галустов; науч. ред. Ю.П. Ветров, Л.Н. Хлудова. – Армавир: Полипринт, ИП Чайка А.Н., 2017.

107. Мозговая, М.А. Геометрическое конструирование на плоскости как составляющая процесса развития пространственного мышления школьников / М.А. Мозговая // Современный урок: проблемы разработки и реализации: материалы Всероссийской научно-практической конференции (г. Армавир, 6-7 ноября 2019 г.); науч. ред. Е.А. Дьякова. – Армавир: РИО АГПУ, 2019. – С. 193-197.

108. Мозговая, М.А. Формирование навыков создания графических образов геометрических понятий как основа развития наглядного мышления обучающихся / М.А. Мозговая // XV Колмогоровские чтения: сборник статей участников Международной научно-практической конференции, посвященной памяти профессора М.И. Заикина (10-13 сентября 2019 г.); науч. ред. С.В. Миронова; отв. ред. С.В. Напалков; Арзамасский филиал ННГУ; ЯГПУ им. К.Д. Ушинского. – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2019. – С. 250-254.

109. Мозговая, М.А. Формирование исследовательских умений в процессе обучения геометрии в средней школе / Е.И. Санина, М.А. Мозговая // Актуальные проблемы современного образования. Организация исследовательской деятельности в образовательных учреждениях: сборник научных трудов VII Международной научно-практической конференции; науч. ред.: Н.В. Аммосова, А.М. Черкасова. – Астрахань: Изд-во ООО ПКФ «Триада», 2019. – С. 91-98.

110. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А.Я. Блох, Е.С. Канин, Н.Г. Килина [и др.]; сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

111. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика; сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1987. – 318 с.

112. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 1: учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 274 с.

113. Мещеряков, Б.Г. Большой психологический словарь / Б.Г. Мещеряков, В.П. Зинченко. – М.: Прайм-Еврознак, 2003. – 672 с.

114. Назаретский, В.Е. Задачник-практикум по элементарной геометрии / В.Е. Назаретский, Н.Г. Федин. – М.: Просвещение, 1965. – 163 с.

115. Никулина, Н.И. Использование компьютерной среды Лого для пропедевтической подготовки по геометрии школьников 5-6 классов: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Никулина Надежда Ивановна. – Ярославль, 2006. – 211 с.

116. Никитин, Н.Н. Сборник задач по геометрии 6-8 кл. / Н.Н. Никитин, Г. Г. Маслова. – М.: Просвещение, 1971. – 160 с.

117. Оганесян, В.А. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

118. Орлова, Н.Н. Обучение решению задач на комбинации геометрических тел с использованием мультимедийных технологий: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Орлова Наталья Николаевна. – Самара, 2011. – 177 с.

119. Павлова, М.А. Исследовательское обучение математике учащихся основной школы во внеурочное время с использованием систем динамической геометрии: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Павлова Мария Александровна. – Елец, 2017. – 207 с.

120. Педагогический словарь: в 2 т.; глав. редакция И.А. Каиров (глав. ред.) и др. – М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1960. – Т.2. – 766 с.

121. Первушкина, Е.А. Развитие геометрической креативности учащихся 5-6 классов средствами информационных технологий обучения: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Первушкина Елена Александровна. – Арзамас, 2006. – 195 с.

122. Петрич, Л.П. Формирование пространственных представлений у младших школьников на основе организации системного подхода к изучению геометрического материала: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Петрич Лариса Павловна. – Карачаевск, 2004. – 143 с.

123. Пиаже, Ж. Избранные психологические труды место издания / Ж. Пиаже. – М.: Просвещение, 1969. – С. 659.

124. Пидкасистый, П.И. Педагогика: учебное пособие для студентов педагогических вузов / П.И. Пидкасистый. – М.: Педагогическое общество России, 2005. – 608 с.

125. Погорелов, А.В. Геометрия. 10-11 классы: учебник для учащихся общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2012. – 175 с.

126. Подаев, М.В. Развитие мыслительной деятельности младших подростков при обучении геометрии: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Подаев Михаил Валерьевич. – Елец, 2011. – 204 с.

127. Подходова, Н.С. Теоретические основы построения курса геометрии 1-6 классов: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Подходова Наталья Семеновна. – СПб., 1999. – 395 с.

128. Покровская, Т.А. Формирование у младших школьников представлений о геометрических фигурах на основе принципа фузионизма: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Покровская Татьяна Александровна. – М., 2003. – 178 с.

129. Пойа, Д. Математическое открытие / Д. Пойа. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

130. Пойа, Д. Как решать задачу? Пособие для учителей / Д. Пойа. – М.: Учпедгиз, 1961. – 208 с.

131. Прасолов, В.В. Задачи по стереометрии / В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин. – М.: Наука, 1989. – 208 с.

132. Преподавание геометрии в 9-10 классах: сборник статей. – М.: Просвещение, 1980. – 345 с.

133. Расташанская, Т.В. Развитие воображения учащихся 5-6 классов при обучении элементам геометрии: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Расташанская Татьяна Владимировна. – Омск, 2004. – 198 с.

134. Рафикова, Р.С. Интерактивные технологии обучения как средство развития творческих способностей студентов: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Рафикова Римма Салаватовна. – Казань, 2007. – 206 с.

135. Рогановский, Н.М. Методика преподавания геометрии в средней школе / Н.М. Рогановский. – Минск: Высшая школа, 1990. – 210 с.

136. Рогов, Е.И. Общая психология / Е.И. Рогов. – М.: Гуманит. изд. Центр ВЛАДОС, 2002. – 448 с.

137. Рубинштейн, С.Л. О мышлении и путях его исследования / С.Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер, 2002. – 720 с.

138. Рычик, М.В. Психологические аспекты построения учебного материала / М. В. Рычик. – Киев: Вища школа, 1981. – 52 с.

139. Санина, Е.И. Обобщающее повторение начал стереометрии / Е.И. Санина // Математика в школе. – 1993. – №6. – С. 12-14.

140. Санина, Е.И. Развитие пространственного мышления в процессе обучения стереометрии / Е.И. Санина, О.А. Гришина // Вестник РУДН. – 2013. – №4. – С. 99-102.

141. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики: учебное пособие / Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. Крас. Окт., 1999. – 208 с.

142. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2005. – 255 с.

143. Секретарева, Л.С. Формирование геометрических представлений младших школьников на основе поисковой деятельности: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Секретарева Любовь Сергеевна. – Вологда, 2007. – 224 с.

144. Семенов, И.Н. Системный подход к изучению организации продуктивного мышления / И.Н. Семенов // Исследование проблем психологии творчества. – М.: Наука, 1983. – С. 27-61.

145. Семушин, А.Д. Методика обучения геометрическим построениям в курсе стереометрии / А.Д. Семушин. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1952. – 160 с.

146. Семушин, А.Д. Методика обучения решению задач на построение по стереометрии / А.Д. Семушин. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 159 с.

147. Семушин, А.Д. Формирование геометрических понятий и развитие логического мышления учащихся / А.Д. Семушин. – М.: Изд. АПН РСФСР, 1955. – 150 с.

148. Сергеева, Т.Ф. Интеграция математики и информатики в начальном обучении: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Сергеева Татьяна Федоровна. – М., 1995. – 147 с.

149. Скопец, М.И. Геометрия: учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / В.М. Клопский, З.А. Скопец, М.И. Ягодовский; под.ред. З.А. Скопеца. – М.: Просвещение, 1979. – 255 с.

150. Смирнов, Е.И. Методика обучения математике с использованием многоэтапных математико-информационных заданий / Е.И. Смирнов, А.В. Шилов, В.С. Абатурова // Математика и информатика, астрономия и физика, экономика и технология и совершенствование их преподавания: материалы Международной конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2018. – 277 с. – С. 46-52.

151. Смирнова, И.М. Геометрия: 10-11 классы: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый уровень) / И.М. Смирнова. – М.: Мнемозина, 2012. – 223 с.

152. Смирнова, И.М. Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации обучения: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Смирнова Ирина Михайловна. – М., 1995. – 364 с.

153. Старшинова, А.В. Изучение различных видов проекций фигур как средства их изображения учащимися средней школы: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Старшинова Алевтина Викторовна. – М., 2005. – 199 с.

154. Столяр, А.А. Педагогика математики: курс лекций / А.А. Столяр. – Минск: Высшая школа, 1969. – 189 с.

155. Тарасова, О.В. История школьной геометрии с древних времён и до конца XIX века: Основные этапы развития элементарного курса: монография / О.В. Тарасова – Орел.: ОАО «Типография «Труд», 2004. – 452 с.

156. Трайнев, И.В. Конструктивная педагогика: учебное пособие / И.В. Трайнев. – М.: ТЦ Сфера, 2004. – 320 с.

157. Тихомирова, Ю.Е. Условия использования компьютерного сопровождения для развития обобщенных пространственных представлений при изучении геометрии: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Тихомирова Юлия Евгеньевна. – СПб., 2004. – 206 с.

158. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 17 декабря 2010 г. № 1897).

159. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. № 413).

160. Федосеева, З.Р. Формирование пространственных представлений учащихся посредством пропедевтики стереометрических знаний в процессе

обучения планиметрии: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Федосеева Зоя Робертовна. – М, 1998. – 164 с.

161. Фомина, С.В. Становление ценностных ориентаций подростка в учебной деятельности / С.В. Фомина // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – Т. 11. – 2009. – № 4 (3). – С. 652-656.

162. Фридман, Л.М. Как научится решать задачи: пособие для учащихся / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.

163. Фридман, Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Л.М. Фридман. – М.: Просвещение, 1983. – 160с.

164. Фройденталь, Г. Математика как педагогическая задача: книга для учителя. / Г. Фройденталь; под. ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1983. – 192 с.

165. Фрундин, В.Н. Методика взаимосвязанного изучения свойств плоских и пространственных фигур в 5-6 классах основной школы: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Фрундин Владимир Николаевич. – М., 1998. – 233 с.

166. Хакимов, Г.Ф. Формирование и развитие динамических пространственных представлений на уроках черчения в 7 классе: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Хакимов Ганс Фатхыпбаянович. – М., 1982. – 240 с.

167. Черкасов, Р.С. Методика преподавания математики: общая методика / Р.С. Черкасов, В.И. Крупич. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

168. Четверухин, Н.Ф. Изображение фигур в курсе геометрии / Н.Ф. Четверухин. – М.: Учпедгиз, 1958. – 81 с.

169. Четверухин, Н.Ф. Методы геометрических построений / Н.Ф. Четверухин. – М.: Учпедгиз, 1952. – 147 с.

170. Четверухин, Н.Ф. О развитии пространственных представлений и понятий у учащихся в связи с чтением чертежей / Н.Ф. Четверухин // Формирование и развитие пространственных представлений у учащихся. – М.: Просвещение, 1964. – С. 52-60.

171. Четверухин, Н.Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. Ч. II. Метрические задачи / Н.Ф. Четверухин. – М.: Тип. Изд-ва АПН, 1948. – 71 с.

172. Шабанова, М. В. Педагогический эксперимент и обработка его результатов / М.В. Шабанова, Н.Н. Патронова // Методическая разработка для студентов-дипломников и аспирантов математического факультета. – Архангельск: Поморский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 1999. – 75 с.

173. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 10-11 кл.: учебник для общеобразоват. учеб. заведений / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 1999. – 208 с.

174. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 10 кл.: методическое пособие к учебнику И.Ф. Шарыгина «Геометрия 10-11» / И.Ф. Шарыгин, Д.И. Шарыгин – М.: Дрофа, 2002. – 217 с.

175. Шарыгин, И.Ф. Нужна ли школе 21-го века Геометрия? / И.Ф. Шарыгин // Математическое просвещение. – 2004. – № 8. – С. 37-52.

176. Шевченко, В.М. Методика изучения геометрического материала в 5-6 классах, основанная на использовании приемов мыслительной деятельности и закономерностей теории обучения математике: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Шевченко Виктория Михайловна. – М., 2006. – 224 с.

177. Шемякин, Ф.И. О психологии пространственных представлений / Ф.И. Шемякин // Ученые записки НИИ психологии. – Т. 1. – М., 1940. – С. 197-236.

178. Шехирева, Е.И. Роль чертежа при поиске решения стереометрической задачи [Электронный ресурс] / Гос. рег. Эл № ФС 77 - 46214. – ISSN 2225-1618 – Режим доступа: http://www.covenok.ru/koncept/2011/11406.htm.

179. Шилина, Н.В. Адаптивная методическая система формирования элементарных геометрических представлений у младших школьников: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Шилина Наталья Валерьевна. – Омск, 1999. – 205 с.

180. Ширикова, Т.С. Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Ширикова Татьяна Сергеевна. – Архангельск, 2014. – 250 с.

181. Щербакова, В.Ю. Формирование пространственного мышления школьников на уроках черчения: дис. …канд. пед. наук: 13 00 02 / Щербакова Вера Юрьевна. – Курск, 2005. – 215 с.

182. Юдин, Э.Г. Методология науки. Системность. Деятельностью: монография / Э.Г. Юдин. – М.: Эдиториал, 1997. – 444 с.

183. Якиманская, И.С. Основные направления исследований образного мышления / И.С. Якиманская // Вопросы психологии. – 1985. – № 5. – С. 5-16.

184. Якиманская, И.С. Развитие пространственного мышления школьников. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.

185. Якиманская, И.С. Возрастные и индивидуальные особенности образного мышления учащихся / И.С. Якиманская, В.С. Столетова, И.Я. Каплунович; под ред. И. С. Якиманской. – М., 2004. – 221 с.

186. Ястребов, А.В. Исследовательское обучение математике в школе / А.В. Ястребов: монография. – Ярославль: РИО ЯГПУ, 2018. – 158 с.

187. Artyukhina, M.S. Non-Formal Education: Strategic Resource of Improving Quality of Teaching Mathematics at School and University / E.I. Sanina, M.S. Artyukhina, N.G. Dendeberya, I.V. Nasikan // The Social Sciences, 2016. – Volume: 11, Issue: 25 – p. 6112-6115. (DOI: 10.3923/sscience.2016.6112.6115).

188. Mozgovaya, M. The Impact of the Educational Potential of School on Successful Development of the Motivation-value Attitude to the Learning Activities of Students / E. Sanina, S. Mitrohina, N. Brunchukova, M. Mozgovaya, L. Zenkova // UJER-HRPUB – Universal Journal of Educational Research. 2020,

Vol. 8, No. 11 – Режим доступа: http://www.hrpub.org/journals/article_info.php?aid=9892

189. Simon, H.A. Observations on the sciences of science learning / H.A. Simon // Journal of Applied Developmental Psychology. – 2000. – № 21(1). – P.115-121.

190. Atkinson, J.W. A theory of achievement motivation / J.W. Atkinson, N.T. Feather (eds). – N.Y.: Wiley, 1966. – 391 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Графическая составляющая формирования стереометрических понятий в школьных учебниках геометрии

Информация, представляемая учащемуся в учебнике по геометрии, является научно и методически обоснованной. Каждому разделу школьной математики присуща своеобразная, специфическая структура логических рассуждений, образцы которых приведены в виде аксиом, теорем, доказательных утверждений. Все вводимые понятия, конструкции, теоремы сопровождаются в учебнике чертежами, методическая задача которых дать учащемся наглядные образцы построения геометрических чертежей, следовательно, они должны быть действительно образцовыми, т. е. выполненными правильно с точки зрения теории, наглядными, дающими понимание и возможность воспроизведения.

Рассмотрим графическую составляющую наиболее массового учебника «Геометрия» авторской группы Л.С. Атанасяна и других для учащихся 10-11 классов средней общеобразовательной школы. Этот учебник в течение многих лет был и остается наиболее распространенным учебником геометрии в школах страны. Учебник издавался для использования в процессе обучения в старшей школе с 1992 года. В 2006 году он был переиздан с дополнениями, стал двухуровневым (МГУ – школе), издание подготовлено под научным руководством академика А.Н. Тихонова [12; 13].

Многие разделы основного текста учебника присутствуют и в прежней версии учебника, и в новой. Для обсуждения будем использовать издания 2013 года (дополненное) и, для сравнения и анализа ошибочных чертежей, издание 1993 года, послужившее основой для нового издания [12; 13].

На с. 4 речь идет об изображении плоскостей на стереометрическом чертеже: «на рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма или в виде произвольной области» (рис. 1) [13].

В виде параллелограмма изображается часть бесконечной плоскости, вырезанная в виде прямоугольника и затем изображенная по правилам параллельного проектирования.

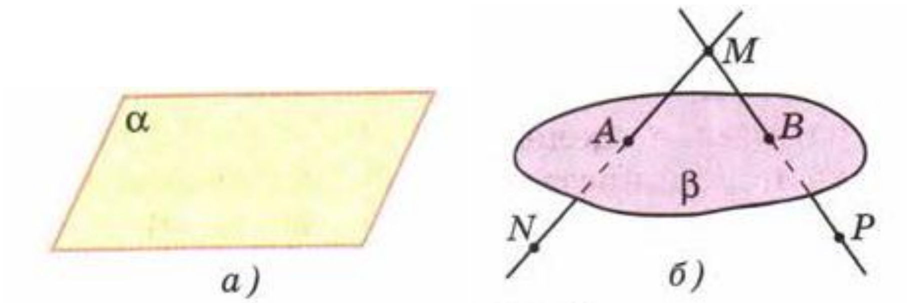
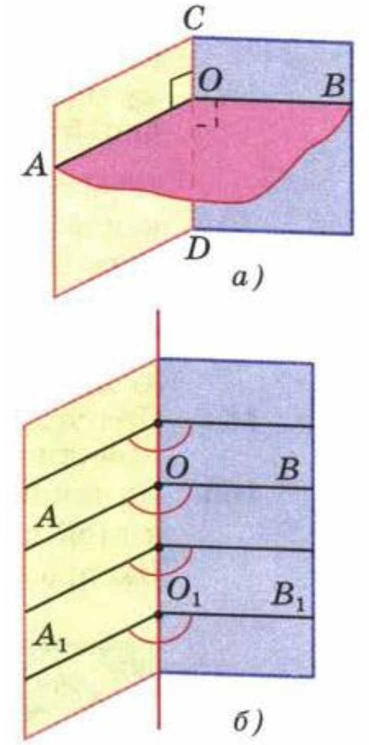


Рис. 1

О том, что эта вырезанная часть плоскости есть именно прямоугольник, косвенно говорят примеры, приведенные в учебнике: поверхность стола или стены (стены классной комнаты и поверхности столов имеют, как правило, форму прямоугольника) и дальнейшее использование изображения плоскости в чертежах. Однако явного указания, что форма изображаемой части плоскости есть прямоугольник, в тексте нет. Не закрепленность и просто не озвученность этого факта проявляется в дальнейшем изучении стереометрии и изображении чертежей. Например, при построении линейного угла двугранного угла чертеж в учебнике выполнен следующим образом (рис. 2 – в учебнике рис. 59).

Здесь, очевидно, понимание формы вырезанных частей полуплоскостей– граней двугранного угла в виде прямоугольника, а не параллелограмма, хотя и тот, и другой изображаются в виде параллелограмма.



Линейный угол двугранного угла

Рис. 59

Рис. 2

Далее в учебнике следуют рисунки, иллюстрирующие возможные виды двугранных углов и соответствующим им линейных углов (рис. 3 – в учебнике с. 48, рис. 60):

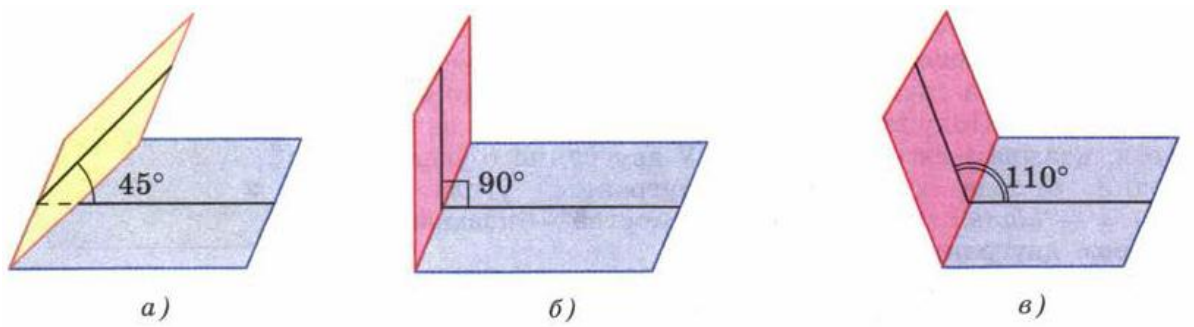
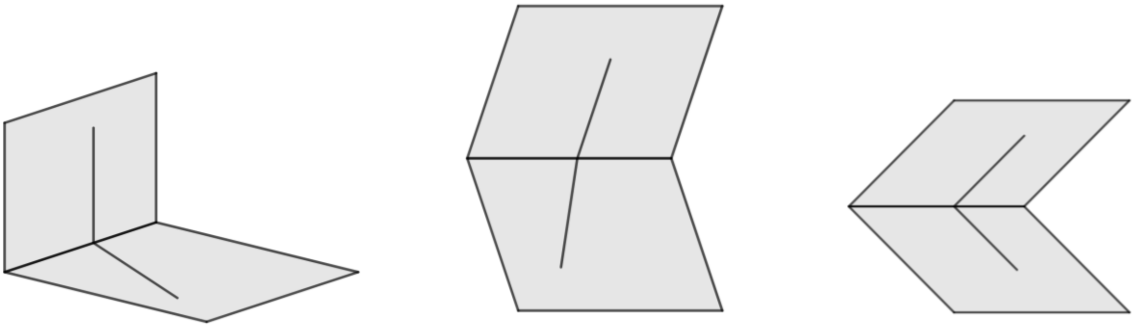


Рис. 60

Рис. 3

Рисунок *60 а)* просто неверен, что недопустимо – ведь это первое знакомство с понятием двугранного угла и приводятся образцы изображений двугранных углов различных видов.

Следствием непонимания учащимся этой конструкции являются следующие изображения линейного угла, соответствующего двугранному углу (рис. 4).



неверно *неверно* *верно*

Рис. 4

В учебнике на рисунках 43, 44 на с. 34 (рис. 5) в плоскости изображены две перпендикулярные прямые a и b и их изображение косвенно подтверждает форму части плоскости в виде прямоугольника: если перпендикулярные прямые параллельны срезам плоскости, то эти срезы также перпендикулярны.

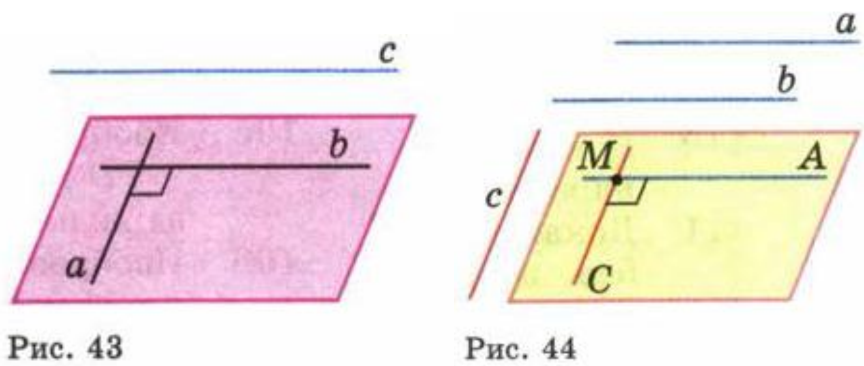
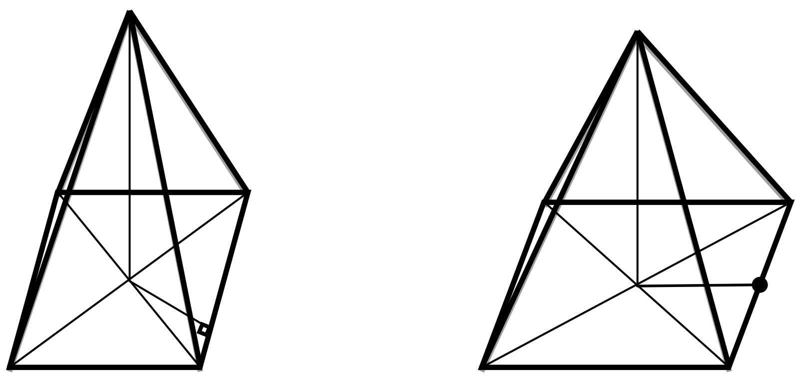


Рис. 5

Разумеется, для задания плоскости в пространстве может быть использовано много различных способов задания плоскости и её изображения: в виде треугольника, парой пересекающихся прямых, парой параллельных прямых и т. п., может это быть и параллелограмм. Но такое разнообразие при начальном знакомстве с проекционным чертежом для большинства учащихся трудно для восприятия и изображений. На этой стадии нужна относительная простота и ясность, что поддерживает развитие пространственного воображения учащегося с обращением к его жизненному опыту. Поскольку учебник не вносит ясность в этот вопрос, то дело остается за учителем: повторит ли он вместе с учащимися эту ситуацию достаточное количество раз для понимания и закрепления или тоже умолчит и остановится на формальном воспроизведении чертежа.

Далее ошибка повторяется при изображении многогранников. Одно из требований проекционного чертежа – это сохранение параллельности изображаемых прямых, это требование в чертежах учащихся и некоторых учителей нарушается и искажает восприятие стереометрической конструкции. Например, при решении задачи, в которой необходимо в правильной четырехугольной пирамиде построить перпендикуляр, проведенный из центра основания на сторону основания (рис. 6).



неверно *верно*

Рис. 6

При определении тетраэдра на с. 24-25 в учебнике приведены два рисунка 34 и 35 в качестве образца изображения тетраэдра общего вида (рис. 7).

Термин «тетраэдр» в школьной практике многими учащимися воспринимается в смысле «правильный тетраэдр», чему содействует изображение на рисунке 35, с. 25 в учебнике (рис. 7) и, в первую очередь, закрепляется для изображения тетраэдра. Это изображение соответствует требованиям проекционного чертежа, но не является наглядным. Так как оно представлено в учебнике в виде образца изображения, то оно и закрепляется в сознании учащегося и позже преодолеть сложившийся стереотип, непригодный для решения стереометрических задач, весьма непросто.

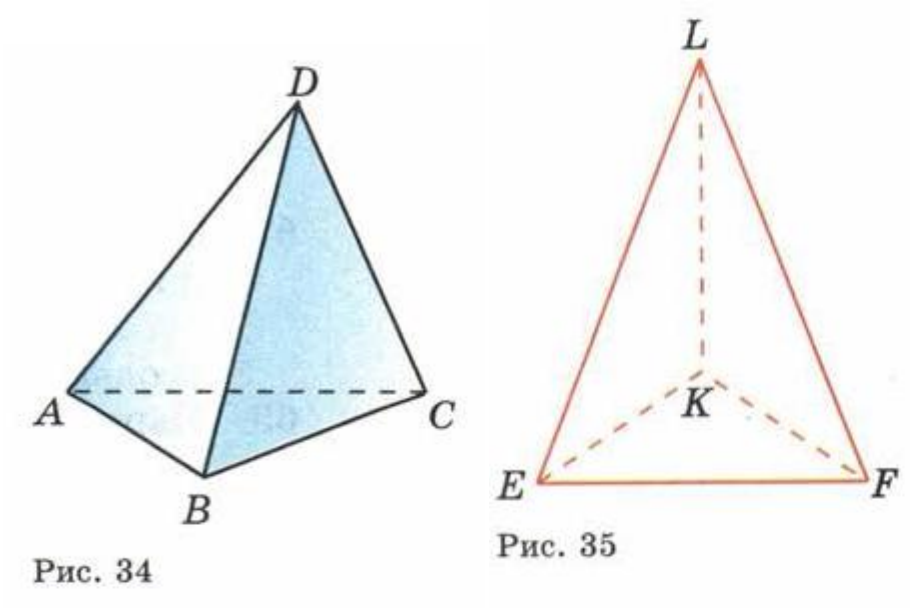
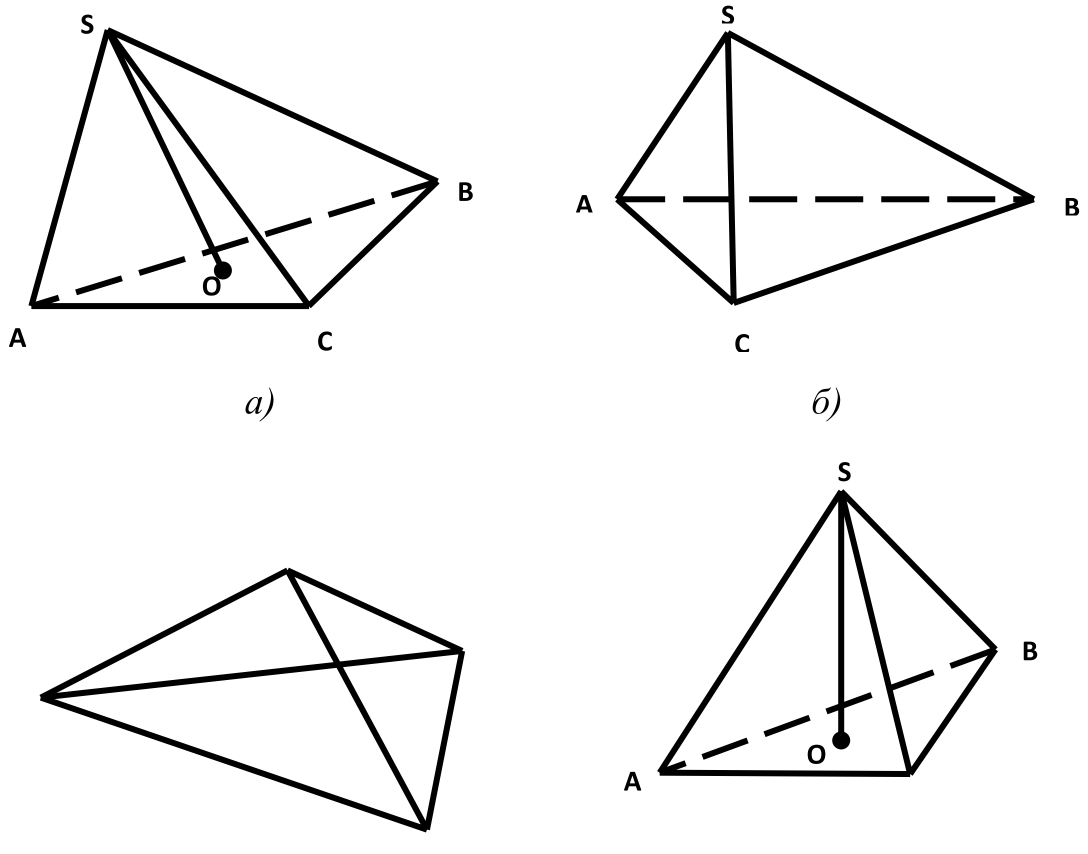


Рис. 7

Здесь решающую роль играет стремление изображать «красивый» чертеж, т. е. в сформированном учителем понимании учащихся это чаще всего максимально симметричный чертеж.

Отметим, что в методической литературе подробно обсуждены возможные варианты изображения треугольной пирамиды с точки зрения правильности и наглядности, приведены примеры изображений правильных, но не наглядных. Действительно, построение изображения любой треугольной пирамиды основано на теореме Польке-Шварца и для такого изображения достаточно построить любой четырехугольник с диагоналями при условии, что никакие три вершины не лежат на одной прямой. С этой точки зрения каждое из приведенных на рисунке изображений треугольной пирамиды является правильным, но не каждое является наглядным и может эффективно использоваться в решении задач (рис. 8. а), б), в), г)).



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 8

На рисунке 8 а) высота пирамиды изображена не вертикальным отрезком, и это приводит к тому, что прообраз представляется наклонной пирамидой. На изображении 8 б) изображение высоты скрывается за изображением бокового ребра, что также не наглядно. На изображении 8 в) отсутствует оговоренное изображение невидимых линий (штриховых или более тонко прочерченных, чем видимые линии). Этот чертеж может восприниматься как вид пирамиды сверху, что делает чертеж не наглядным и затрудняет восприятие. Чертеж 8 г) может восприняться учащимся как изображение правильного тетраэдра, т. к. ребра *AC, BC* и *SC* на чертеже выглядят как равные по длине отрезки.

Эти примеры рассмотрены на с. 34 в методическом пособии А.Д. Семушина как примеры *неудачных и неудобных* в решении задач чертежей и они же, как видим, предложены в учебнике Геометрии 10-11 как *образцы выполнения изображений* на рисунках 34, 35, 240. Опыт показывает, что именно такие методически неправильно выбранные изображения и присутствуют в решениях стереометрических задач многих старшеклассников и абитуриентов, которые далее на таком чертеже не в состоянии решить соответствующую задачу [147, с. 34].

Рассмотрим примеры изображения пирамид, приведенные в «Приложении». Изображение пространственных фигур» в учебнике. Эти изображения сопровождаются следующим текстом: «Можно доказать, что фигура, состоящая из сторон и диагоналей любого (выпуклого или невыпуклого) четырехугольника, является изображением тетраэдра при соответствующем выборе плоскости изображений и направления проектирования» (в учебнике - рис. 240 а), б), в)) (рис. 9). Как видим, в качестве примеров изображений приведены чертежи, которые являются правильными, но не являются наглядными. Изображения а) и в) практически идентичны, не считая обозначения вершин. Изображение б) опять использует равнобедренные треугольники. В задачах, как правило, присутствует высота пирамиды. О её изображении в тексте нет ни слова. Эти изображения иллюстрируют теорему Польке-Шварца, но не приближают учащегося к пониманию и правильному и наглядному построению чертежа [13, с. 224].

Таким образом, именно не рекомендованные методистами изображения по причине их не наглядности и приведены в учебнике в качестве образца.

Особое внимание следует уделить изображению правильных треугольных, четырехугольных и шестиугольных пирамид, приведенных в учебном пособии. Такие пирамиды часто встречаются в условиях задач в материалах ЕГЭ и их изображения содержат многие типичные ошибки.

К понятию пирамиды авторы учебника обращаются дважды: при изучении темы «Тетраэдр и параллелепипед» и при изучении темы «Пирамида». В первом случае приведены общие сведения о тетраэдре, во втором случае рассмотрены необходимые понятия, связанные с n-угольной пирамидой и правильной пирамидой.

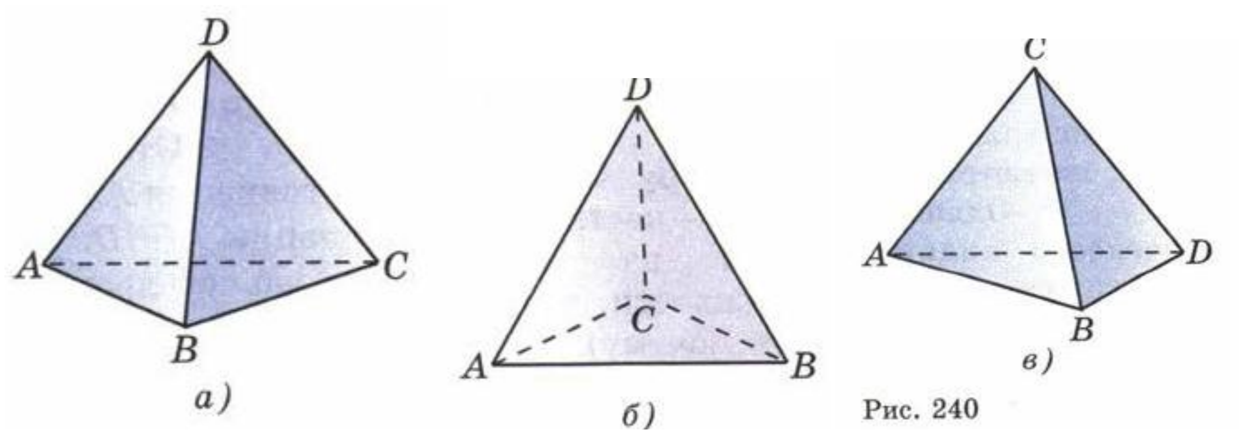


Рис. 9

В качестве образцов изображений приведены чертежи четырехугольных и шестиугольных пирамид. Изображение правильной треугольной пирамиды, выполненное по правилам построения проекционного чертежа, и пригодное для решения задач вообще в учебнике вообще отсутствует. Для комментирования приведем эти изображения в учебнике на рисунках 81 (рис. 10).

Изображения на рисунке 10 (рисунок 81 учебника) дают пример чертежа пирамиды на этапе обсуждения понятия пирамиды в общем виде, тем не менее, приведены изображения, очень похожие на изображения правильных пирамид, но так не названные. Таким образом, на этапе формирования понятия, происходит *подмена* графических образов представления пирамиды общего вида графическим образом правильной пирамиды.

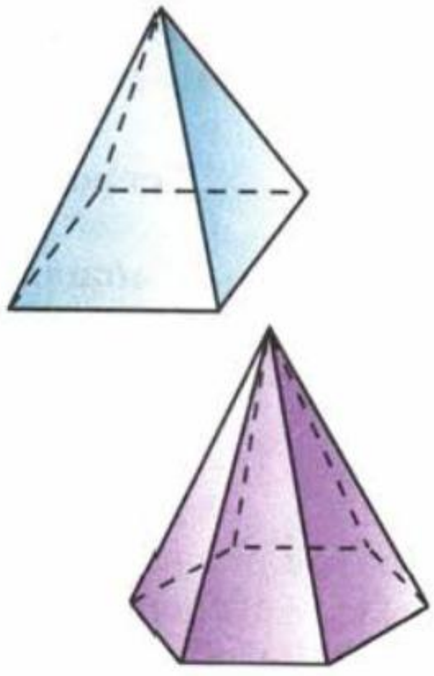


Рис. 81

Рис. 10

Многократные обращения к учебнику закрепляют эту подмену, что далее приводит к неправильному переводу текста задачи в графическое изображение.

Разумеется, определение правильной пирамиды в тексте приведено, и далее, следуя этому определению, учащийся должен выполнять построения, но во всем учебном пособии отсутствует описания этих построений и образцы их выполнения. За исключением изображения самого простого случая – изображения правильной четырехугольной пирамиды и в другом контексте. Отсылка к «Приложению 1. Изображение пространственных фигур» без активного участия учителя мало эффективна. На рисунке 11 (в учебнике рисунок 242) приведено изображение правильной четырехугольной пирамиды без явного обоснования построения, а лишь как пример возможного изображения пирамиды [13].

Приведем этот фрагмент полностью.

«Пирамида. Изображение основания пирамиды строят по описанным в п. 3 правилам, а за изображение вершины можно принять любую точку, не принадлежащую сторонам изображения основания. На рисунке 242 дано изображение правильной пирамиды $S_0A_0B_0C_0D_0$, основанием которой служит квадрат $A_0B_0C_0D_0$. Изображением основания является параллелограмм *ABCD*» [13, с. 225].

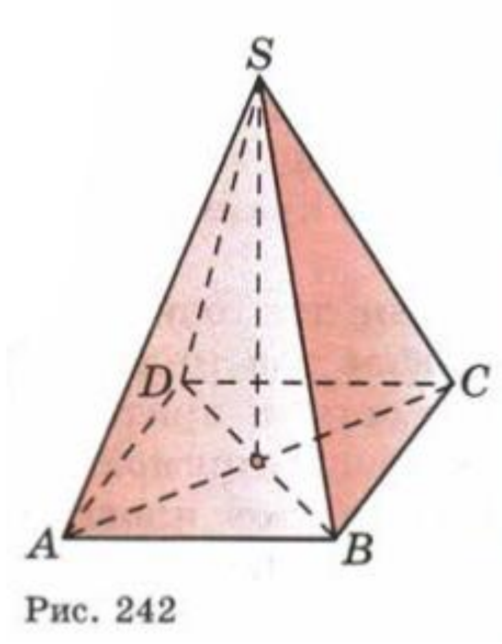


Рис. 11

Как видим, даже единственный приведенный в учебнике образец построения изображения правильной пирамиды не содержит пояснений и обоснования последовательности построения. Слова текста «за изображение вершины можно принять любую точку, не принадлежащую сторонам изображения основания» и вовсе вводят в заблуждение и приводят к неправильному, ненаглядному, непригодному для решения задач чертежу. Ученик, действуя в описанном выше порядке, строит неправильный чертеж. (Рис. 1.12.)

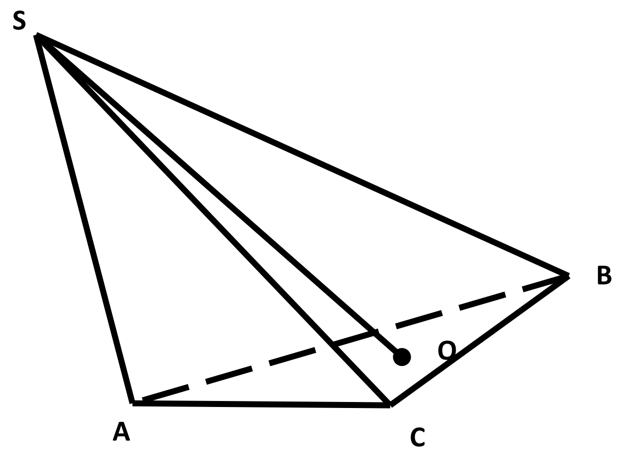


Рис. 12

Опыт показывает, что нередко учителя математики сами не слишком уверенно себя чувствуют при выполнении чертежей в курсе геометрии. Наличие образца выполнения правильного изображения в основном тексте учебника просто необходимо, но оно отсутствует. Таким образом, в сознании учащегося закладывается основа для непонимания, неуверенности, неправильного исполнении чертежа и, в итоге, невозможности решать задачу.

Особо выделим рисунок 82 в учебнике (рис. 13), приведенный, как пример изображения n-угольной правильной пирамиды. Однако для таких изображений с конкретно неопределенным числом n существует известный прием выделения части чертежа с участием нескольких сторон, часто не более трех. На приведенном рисунке изображена конкретно шестиугольная правильная пирамида и тогда этот чертеж просто неверен, так как стороны шестиугольника, параллельные радиусу OA_1 должны ему не только параллельны, но и равны, что очевидно не выполняется на чертеже.

Большинство учителей и учащихся не обращают на это внимания. Информация и образцы изображений, приведенные в учебнике для массового обучения, и не могут быть выполнены неправильно и небрежно. Этот чертеж явно неверен, хотя на учебник получены положительные заключения Российской академии наук и Российской академии образования [13, с. 70].

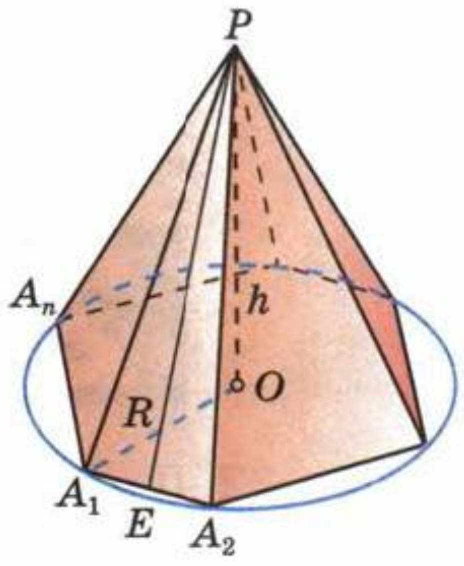


Рис. 82

Рис. 13

В учебнике геометрии имеется три изображения правильной шестиугольной пирамиды, причем ни в одном случае изображение не названо как изображение правильной шестиугольной пирамиды.

На рисунке 81 (рис. 14) на стр. 69 рисунок приведен в качестве иллюстрации к определению понятия *n*-угольная пирамида. Это изображение правильное, в удобном ракурсе, наглядно, но оно иллюстрирует другое понятие, не правильную шестиугольную пирамиду, а пирамиду общего вида. На чертеже отсутствует изображение высоты, что важно для определения вида пирамиды.

На рисунке 82 (рис. 14) изображение правильной *n*-угольной (шестиугольной) пирамиды построено неправильно и прокомментировано выше.

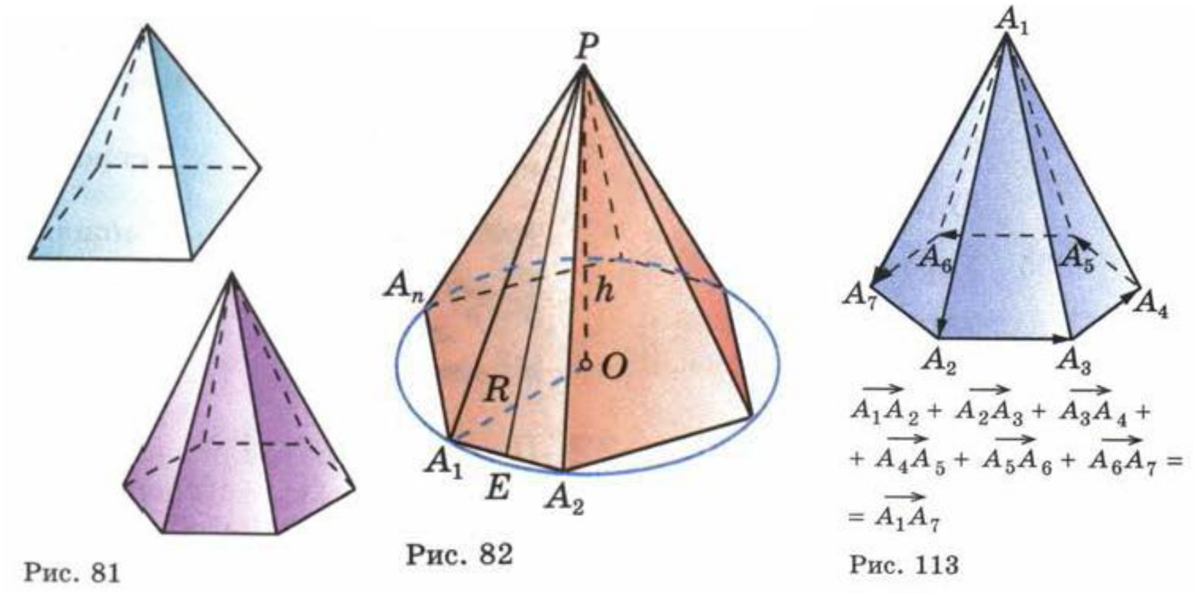


Рис. 14

Рисунок 113 приведен как пример применения сложения векторов по правилу многоугольника в пространстве (рис. 14). В тексте на стр. 89 сказано:

> Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные точки, то
>
> $$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$
>
> Это правило проиллюстрировано на рисунке 113 для $n = 7$. Отметим, что если точки A_1 и A_n, т. е. начало первого вектора и конец последнего, совпадают, то сумма векторов равна нулевому вектору.

Общее методическое правило: если речь идет об общем случае обсуждаемой конструкции – в данном примере о произвольных точках пространства – то и иллюстрация должна соответствовать этому требованию.

Здесь из 7 выбранных в пространстве точек 6 оказались в одной плоскости, а вся конструкция изображена как правильная шестиугольная пирамида. Кстати, именно такое изображение часто строят школьники при решении задач – оно не является наглядным, неудобно для дополнительных построений и решения задач. Остается неясным, из каких соображений выбор 7 *произвольных* точек в пространстве выполнен таким исключительным способом. Таким образом, и здесь изображение правильной шестиугольной пирамиды не может быть использовано как образец чертежа.

Изображению цилиндра, конуса, сферы в школьной практике последних лет уделялось крайне мало внимания. Объясняется это содержанием материалов ЕГЭ по математике: в стереометрической задаче с развернутым ответом отсутствовали конструкции, связанные с телами вращения. Как следствие, крайне невнимательное отношение к соответствующим чертежам. В течение 13 лет именно неверные чертежи служили для учащихся образцами изображений, т. к. присутствовали в предназначенном для массового использования в общеобразовательной средней школе учебнике (речь идет об изданиях учебника Геометрия 10-11 авторов Атанасян Л.С. и др. с 1992 г. по 2005 г., с. 137-138) [13].

При этом ни в основном тексте, ни в Приложении 1 «Изображение пространственных фигур», изображение сферы не комментируется, отсутствуют понятия полюсов сферы, экваториального сечения и зависимости их положений в изображении. Текст этих разделов без изменений перешел в переиздание с дополнениями, предназначенное для двухуровневого образования – базового и профильного, а чертежи подверглись исправлению. Теперь изображение верно, т. к. при изображении экваториального сечения сферы в виде эллипса полюсы сферы не могут оставаться на очерковой образующей сферы. При изображении конуса, вписанного в сферу так, что его вершина расположена в северном полюсе сферы, изображение окружности основания конуса в виде эллипса не может оставить изображение вершины конуса на очерковой образующей сферы, такое изображение вершины делает высоту конуса не перпендикулярной его основанию, что легко демонстрируется на моделях (рис 15, 16, 17).

Именно по этому учебнику учились, не замечая ошибок, многие нынешние учителя математики. С сожалением следует отметить, что многие учителя не видят разницы в приведенных изображениях. Однако отметим как положительный факт, что чертежи хотя бы исправлены в учебнике.

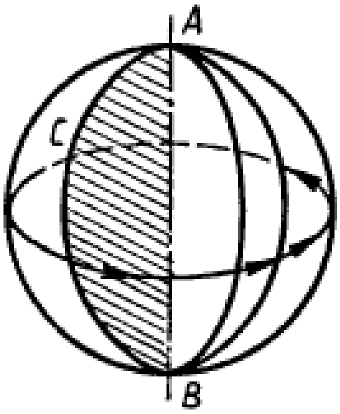
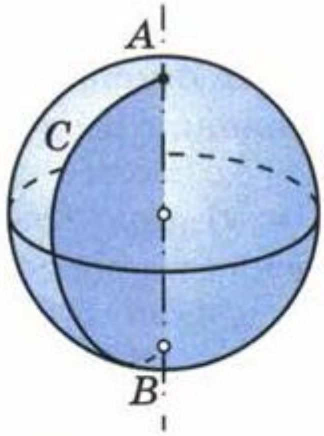
Чертежи, приведенные в учебнике Геометрия 10-11 издания с 1992 г. по 2005 г.	Чертежи, приведенные в учебнике Геометрия 10-11 издания с 2006 по 2015
Глава VI, § 3 «Сфера», Определение сферы и основные понятия	
 Рис. 151. Сфера получена вращением полуокружности ACB вокруг диаметра AB.	 Сфера получена вращением полуокружности ACB вокруг диаметра AB Рис. 158

Рис. 15

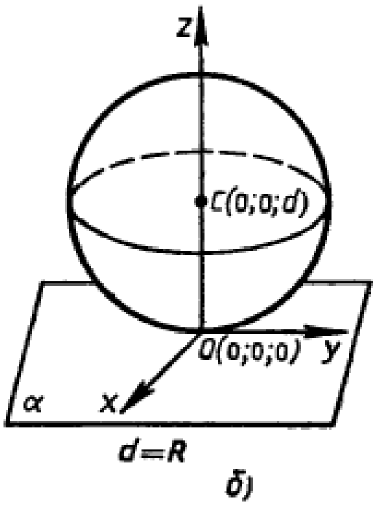
<table>
<tr><td>Чертежи, приведенные в учебнике
Геометрия 10-11
издания с 1992 г. по 2005 г.</td><td>Чертежи, приведенные в учебнике
Геометрия 10-11
издания с 2006 г. по 2015 г.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Глава VI, § 3 «Сфера», Взаимное расположение сферы и плоскости</td></tr>
<tr><td>

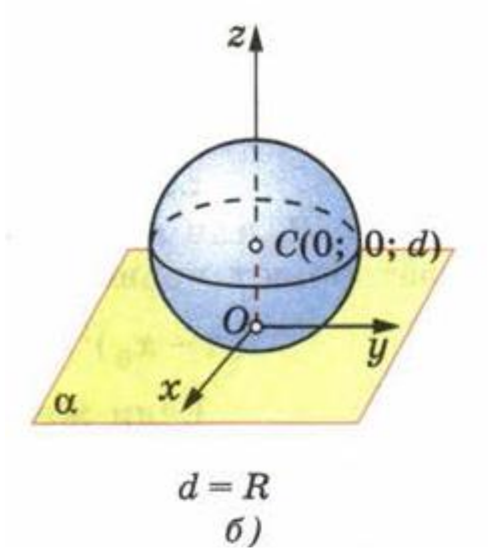
Рис. 153.</td><td>

Рис. 160</td></tr>
</table>

Рис. 16

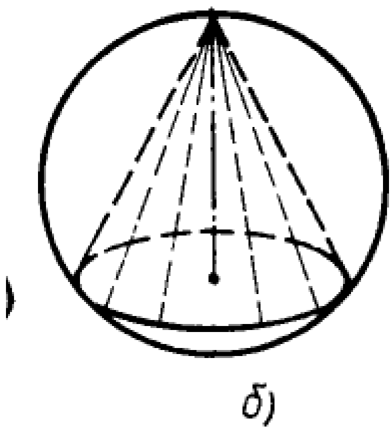
<table>
<tr><td>Чертежи, приведенные в учебнике
Геометрия 10-11
издания с 1992 г. по 2005 г.</td><td>Чертежи, приведенные в учебнике
Геометрия 10-11
издания с 2006 г. по 2015 г.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Глава VI , § 3 «Сфера», Чертеж к задаче о конусе, вписанном в сферу</td></tr>
<tr><td>

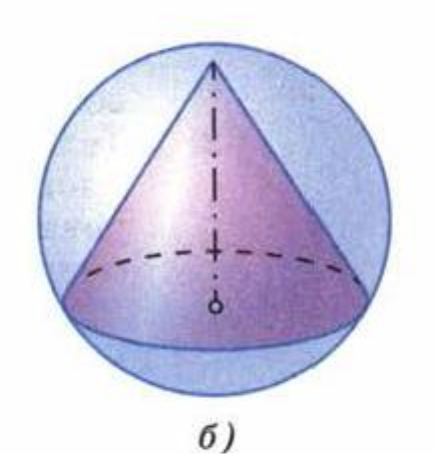
Рис. 158.</td><td>

Рис. 173</td></tr>
</table>

Рис. 17

Учебник «Геометрия 7-11», а с 2012 года «Геометрия 10-11» Погорелова А.В. также переиздан в двухуровневом варианте, используется в школьном учебном процессе более продолжительное время, чем учебник Атанасяна Л.С., но менее распространен по ряду причин.

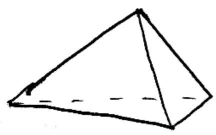
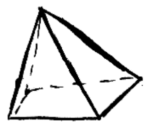
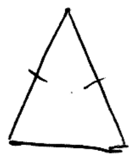
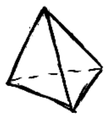
Изображение плоскости в этом учебнике в виде параллелограмма также не мотивировано. Однако тот факт, что вырезанная часть плоскости имеет форму прямоугольника косвенно работает во многих приведенных в учебнике чертежах (с. 27-29, с. 32-33 и т. д.). В основном тексте в п. 13 «Изображение пространственных фигур на плоскости» приведены основные принципы и свойства проекционного чертежа, достаточные для построения изображений стереометрических объектов. Приведено в виде задачи изображение медиан треугольника, что в дальнейшем, при изображении правильной треугольной пирамиды станет важным моментом построений [125, с. 37]. В п. 48 «Построение пирамиды и её плоских сечений» описывается построение произвольной пирамиды, а также построение сечений пирамиды плоскость. В тексте не акцентируется различие между понятиями секущей плоскости и сечения многогранника плоскость. Сечения строятся методом следов, что позволяет не различать построения сечений для призм и пирамид. Это позволяет избежать рассуждений о том, что в случае призм применяется параллельное проектирование, а в случае пирамид – центральное [125, с. 76].

Приведенное на с. 79 определение правильной пирамиды иллюстрируется полным построением с наглядным построением высот правильных треугольной, четырехугольной и пятиугольной пирамид. Изображение правильной шестиугольной пирамиды в учебнике отсутствует.

В учебнике «Геометрия: Стереометрия: 10-11» А.П. Киселева в явном виде приведено объяснение, почему плоскость чаще всего изображается в виде параллелограмма или другой фигуры, форма которой однозначно определяет задание плоскости. Все чертежи в учебнике выполнены в полном соответствии с требованиями, предъявляемыми к изображениям, ошибки отсутствуют [68, с. 4].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Образцы заданий, на основе которых выполнялся анализ сформированности графических образов геометрических понятий у старшеклассников и студентов-первокурсников.

Треугольник 	Трапеция 
Тетраэдр 	Правильный треугольник 
Четырехугольная правильная пирамида 	Равнобедренный треугольник 
Правильный тетраэдр 	Правильная треугольная пирамида 

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Тест-опросник

Прочитайте каждое высказывание и выразите свое отношение к изучению стереометрии, проставив напротив номера высказывания свой ответ, используя для этого следующие обозначения:

верно – (+ +);

пожалуй, верно – (+);

пожалуй, неверно – (–);

неверно – (– –).

Помните, что качество наших рекомендаций будет зависеть от искренности и точности Ваших ответов.

1. Изучение стереометрии дает мне возможность узнать много важного для себя, проявить свои способности.

2. Стереометрия мне интересена, и я хочу знать по данному предмету как можно больше.

3. В изучении стереометрии мне достаточно тех знаний, которые я получаю на занятиях.

4. Учебные задания по стереометрии мне неинтересны, я их выполняю, потому что этого требует учитель (преподаватель).

5. Трудности, возникающие при изучении стереометрии, делают её для меня еще более увлекательной.

6. При изучении стереометрии кроме учебников и рекомендованной литературы самостоятельно читаю дополнительную литературу.

7. Считаю, что трудные теоретические вопросы по стереометрии можно было бы не изучать.

8. Если что-то не получается по стереометрии, стараюсь разобраться и дойти до сути.

9. На занятиях по стереометрии у меня часто бывает такое состояние, когда «совсем не хочется учиться».

10. Активно работаю и выполняю задания только под контролем учителя (преподавателя).

11. Материал, изучаемый по стереометрии, с интересом обсуждаю в свободное время (на перемене, дома) со своими одноклассниками (друзьями).

12. Стараюсь самостоятельно выполнять задания по стереометрии, не люблю, когда мне подсказывают и помогают.

13. По возможности стараюсь списать у товарищей или прошу кого-то выполнить задание за меня.

14. Считаю, что все знания по стереометрии являются ценными и по возможности нужно знать по данному предмету как можно больше.

15. Оценка по этому предмету для меня важнее, чем знания.

16. Если я плохо подготовлен к уроку, то особо не расстраиваюсь и не переживаю.

17. Мои интересы и увлечения в свободное время связаны с данным предметом.

18. Данный предмет дается мне с трудом, и мне приходится заставлять себя выполнять учебные задания.

19. Если по болезни (или другим причинам) я пропускаю уроки стереометрии, то меня это огорчает.

20. Если бы было можно, то я исключил бы данный предмет из расписания (учебного плана).

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Обработка результатов опросника

Подсчет показателей опросника производится в соответствии с ключом, где «Да» означает положительные ответы (верно; пожалуй, верно), а «Нет» – отрицательные (пожалуй, неверно; неверно).

Ключ

Да	1, 2, 5, 6, 8, 11, 12, 14, 17, 19
Нет	3, 4, 7, 9, 10, 13, 15, 16, 18, 20

За каждое совпадение с ключом начисляется один балл. Чем выше суммарный балл, тем выше показатель внутренней мотивации изучения предмета. При низких суммарных баллах доминирует внешняя мотивация изучения предмета.

Анализ результатов

Полученный в процессе обработки ответов испытуемого результат расшифровывается следующим образом:

0–5 баллов – низкий уровень мотивации изучения стереометрии;

6–14 баллов – средний уровень изучения стереометрии;

15–20 баллов – высокий уровень изучения стереометрии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

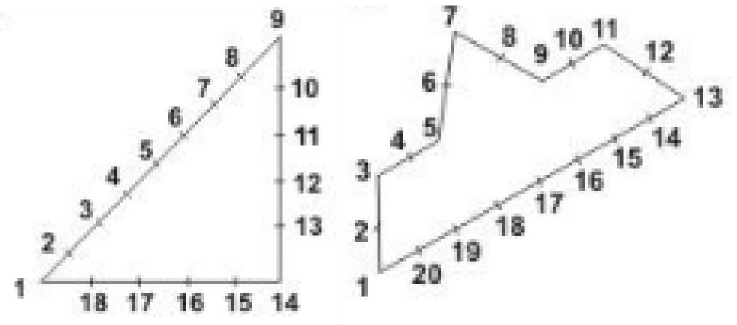
ТПМ

ФИО____

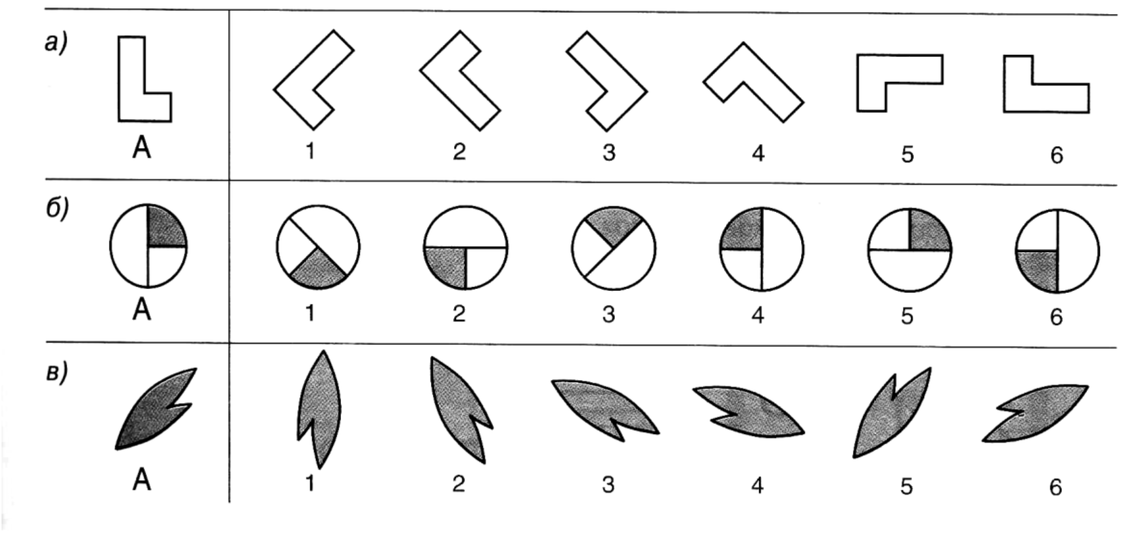
Класс__________________

Время, выделенное на прохождение теста - 40 минут.

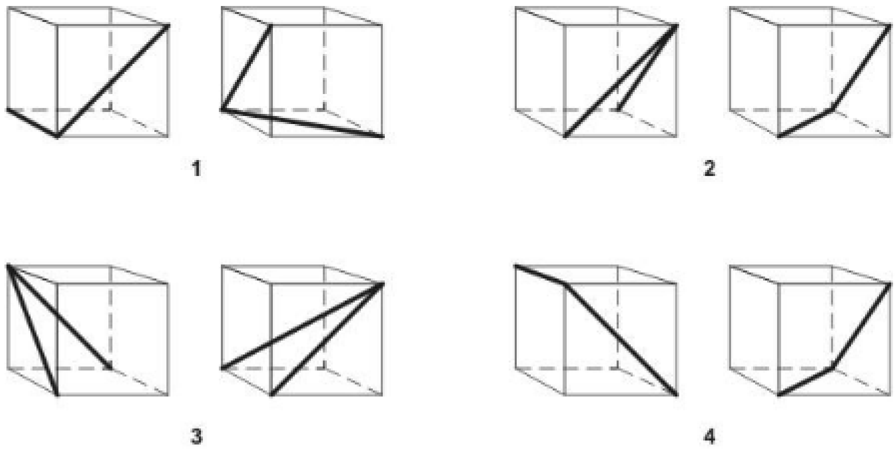
Задание 1. *Каждую фигуру разделить прямой линией на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.*



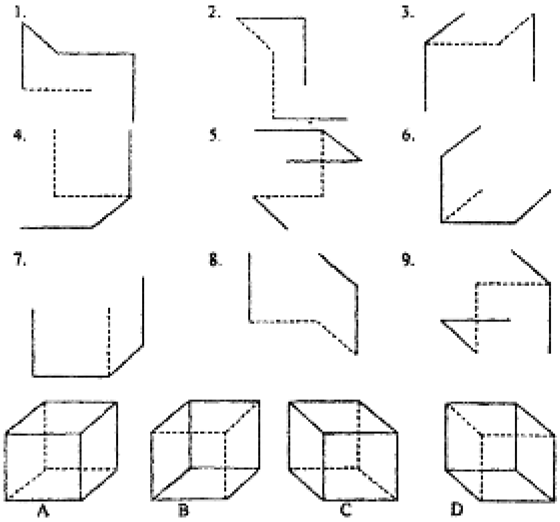
Задание 2. *Какие из данных фигур можно совместить с фигурой А, передвигая в плоскости листа?*



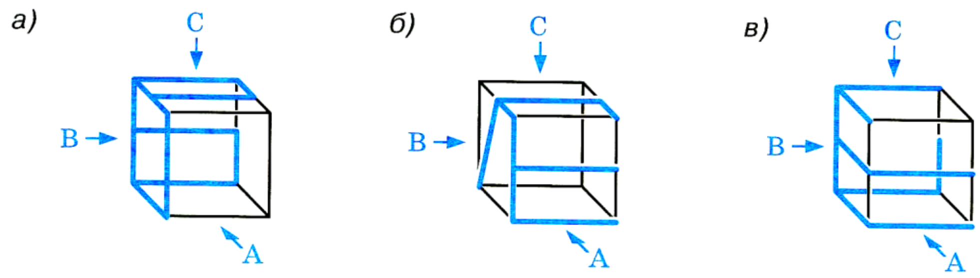
Задание 3. *Выберите из четырех пар кубов те, у которых ломаные линии в каждой паре по форме одинаковы.*



Задание 4. *По части чертежа куба мысленно представить весь куб. Какому из изображений (A, B, C, D) соответствует каждый чертеж?*

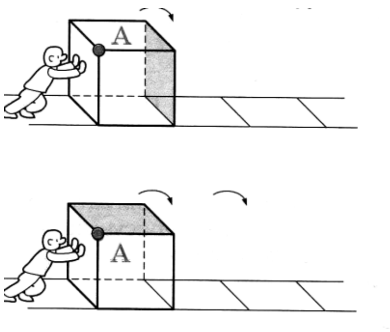


Задание 5. *Рассматривая каркас куба сначала спереди (вид А), затем слева (вид В) и, наконец, сверху (вид С), прочитайте слово, образованное голубыми линиями.*

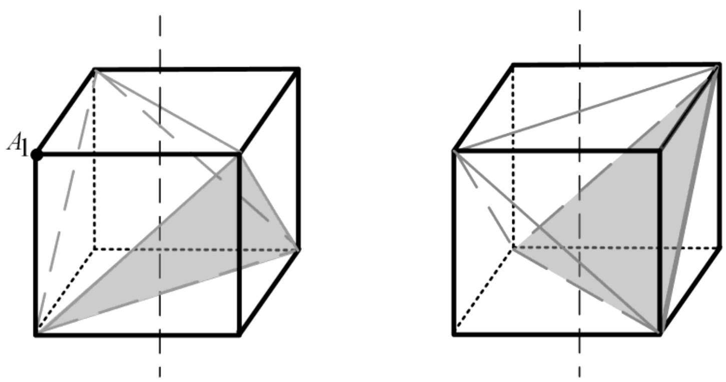


Задание 6. *А) Куб перевернули без проскальзывания так, что он встал на окрашенную грань. Отметьте новое положение точки А.*

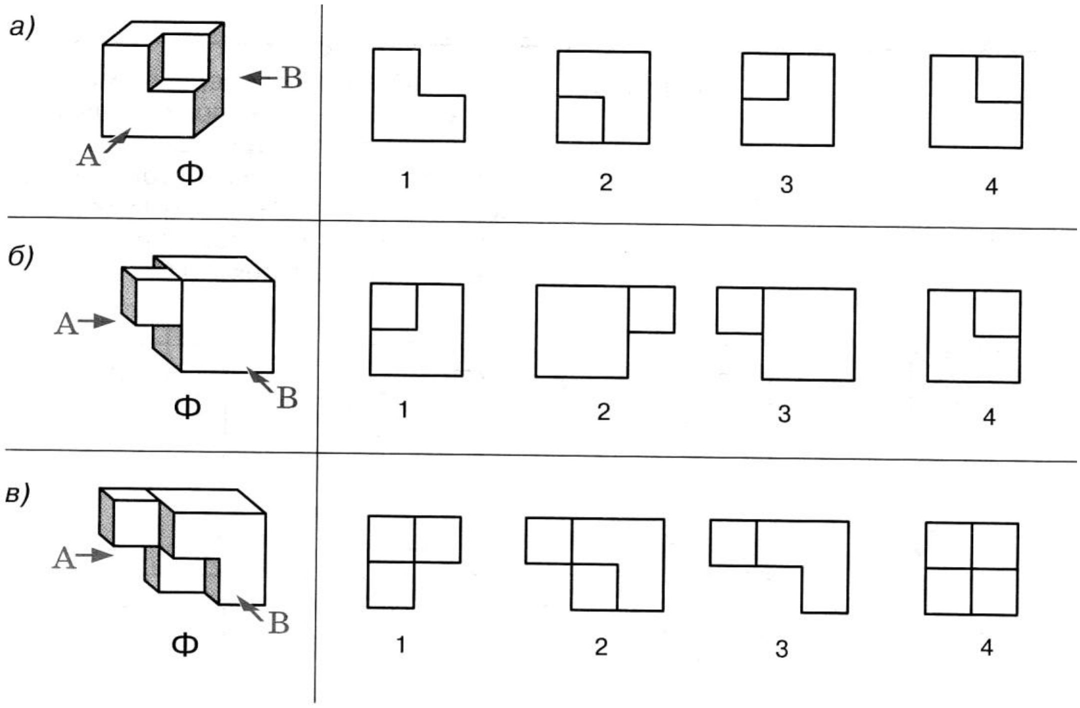
Б) Куб дважды перевернули без проскальзывания так, что он встал на окрашенную грань. Отметьте новое положение точки А.



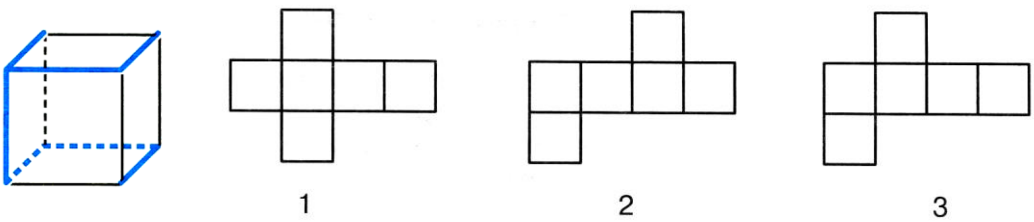
Задание 7. *На первом рисунке дано исходное положение геометрической комбинации «куб - тетраэдр», на втором рисунке - положение той же комбинации после поворота вокруг заданной оси на 90º. На первой комбинации выделена вершина A_1. Найдите вершину A_1 на втором изображении и отметьте её новое положение.*



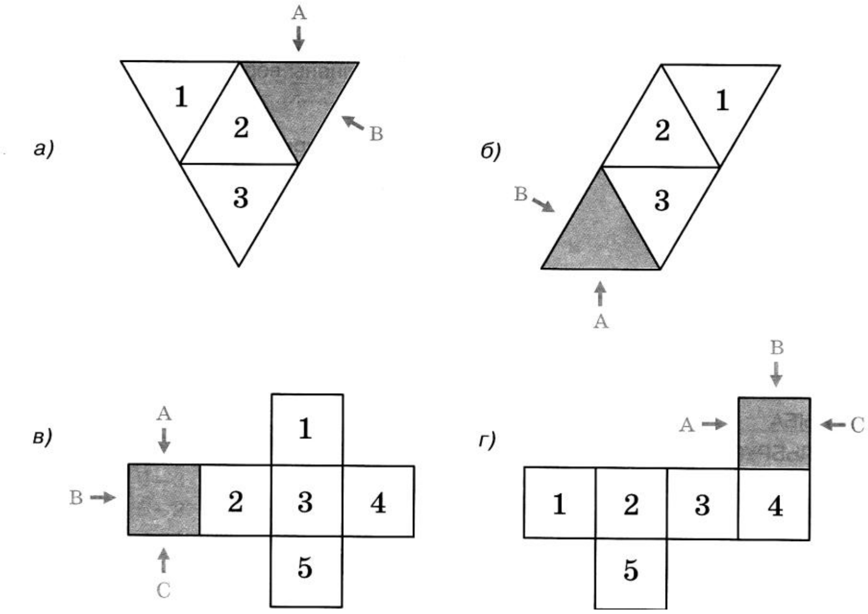
Задание 8. *На фигуру Ф посмотрели из положений из положений А и В. На каком из рисунков изображен вид из положения А, а на каком – из положения В?*



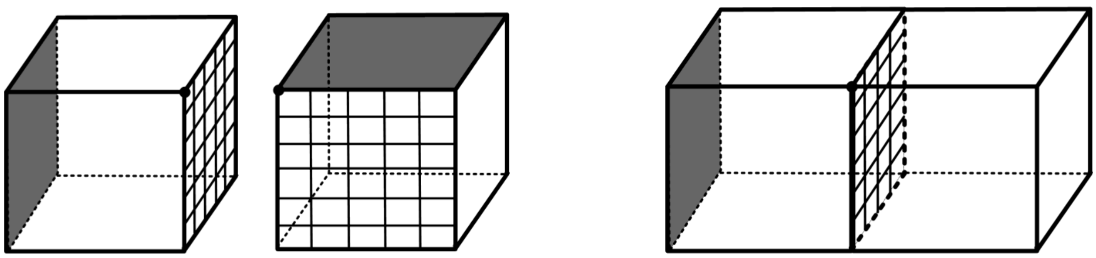
Задание 9. *Куб разрезали по ребрам, выделенным голубыми линиями, и развернули. Найдите получившуюся развертку*



Задание 10. *Развертка приклеена к столу окрашенной гранью. Мысленно сверните её. Представьте, что вы смотрите на многогранник со стороны, указанной одной из стрелок. Какую грань вы видите?*



Задание 11. *Два куба совместили клетчатыми гранями и выделенными вершинами. Укажите на фигуре, которая получилась, новое положение серой грани.*



Задание 12. *Найдите среди пронумерованных кубиков 137, 138, 139….156, которые соответствуют кубикам-образцам а, б, в, г, д.*


а


б


в

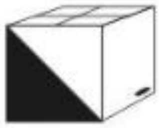

г


д


137


138

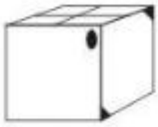

139


140


141


142

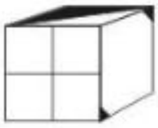

143

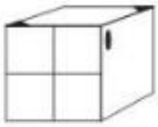

144


145


146


147

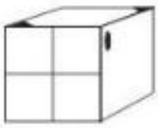

148


149

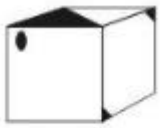

150


151


152


153


154

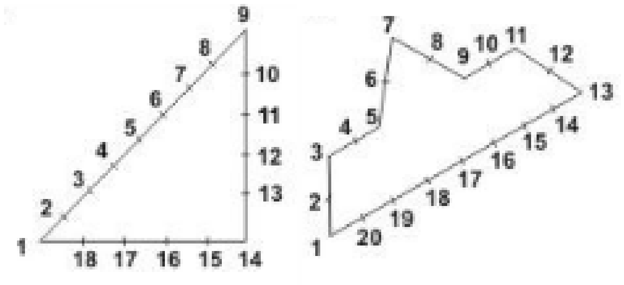

155


156

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Ключ к тесту ТПМ

1.



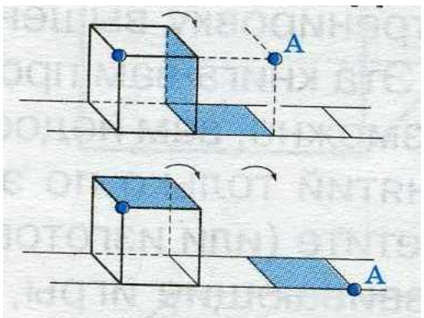
2. а) 1,4,6; б) 1,6; в) 1,3,6;

3. 2

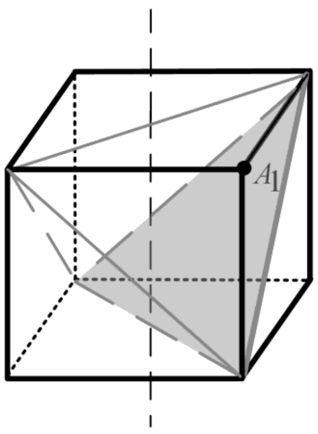
4. A-4,6; B-3,7; C -1,5,8; D-2,9;

5. а) БОР; б) ЕЛЬ; в) БЕС;

6.



7.

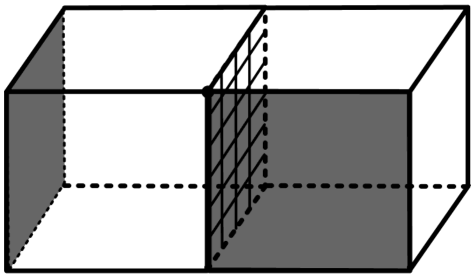


8. а) A-4, B-3, б) A-4, B-3; в) A-4, B-2.

9. 2

10. а) A-1, B-3; б) A-3, B-2; в) A-1, B-4, C-5; г) A-3, B-2, C-1,

11.



12.

а	б	в	г	д
140	137	139	138	144
142	143	145	141	149
147	148	151	146	153
154	152	155	150	158

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Результаты измерений уровня мотивации

№	ФИО	Совпадения																				
		1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***	***18***	***19***	***20***	***Итого***
1	Ольга А.	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	**8**
2	Наталья А.	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	**13**
3	Кристина К.	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	**12**
4	Никита В.	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	**9**
5	Валерия Г.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	**11**
6	Владимир Г.	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	**18**
7	Павел Д.	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	**12**
8	Антон Д.	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	**8**
9	Катерина Д.	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	**5**
10	Петр Д.	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	**13**
11	Денис К.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	**17**
12	Виктория К.	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	**5**
13	Анна К.	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	**16**
14	Александр К.	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	**14**
15	Анна М.	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	**7**
16	Юлия М.	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	**8**
17	Дмитрий М.	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	**7**
18	Ника М.	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	**10**
19	Диана М.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	**16**
20	Дмитрий М.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	**6**
21	Глеб М.	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	**9**

22	Даниил М.	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	**8**
23	Георгий П.	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	**7**
24	Ольга П.	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	**14**
25	Максим С.	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	**15**
26	Алина С.	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**14**
27	Надежда С.	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	**8**
28	Карина С.	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	**9**
29	Евгения С.	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	**11**
30	Сергей Ф.	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	**7**
31	Архип Ч.	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	**9**
32	Анна Ч.	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	**9**
33	Дарья Ч.	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	**14**
34	Альбина Ш.	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	**15**
35	Никита С.	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	**9**
36	Николай М.	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	**13**
37	Арсен М.	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	**10**