Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ярославский государственный педагогический университет
им. К.Д. Ушинского»

На правах рукописи

ПОПОВА Татьяна Спартаковна

МЕТОДИКА УГЛУБЛЕННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ В ПРОЦЕССЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗНАНИЙ

5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания
(математика, математика и механика
(уровень основного общего образования)) (педагогические науки)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Научный руководитель:
доктор педагогических наук,
профессор
Смирнов Евгений Иванович

Ярославль – 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Для исправления ситуации с нехваткой инженерных кадров в России разработана Национальная программа «Цифровая экономика РФ», утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2017г. №1632-р [122], проекты которой направлены на развитие кадрового потенциала страны и предусматривают внедрение информационных технологий во все сферы деятельности, где одними из основных ресурсов являются информация и знания. Реализуется национальный проект «Образование» (утвержден президиумом Совета при Президенте РФ по стратегическому развитию и национальным проектам, протокол от 03.09.2018 №10) [123], направленный в первую очередь на достижение национальной цели Российской Федерации – обеспечение возможности самореализации и развития талантов. Разработана Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы (Указ Президента Российской Федерации от 09.05.2017 № 203) [189].

Стратегия развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года ориентирована на развитие опыта современных достижений науки, деятельностного подхода в обучении. В качестве приоритетной задачи Стратегия обозначает развитие высоконравственной личности, которая обладает необходимыми знаниями и умениями для реализации своего потенциала в условиях современного общества, содействие повышению привлекательности науки для подрастающего поколения, повышения заинтересованности подрастающего поколения в научных познаниях об устройстве мира и общества.

Современная образовательная парадигма определяет, что целью образования является развитие личности учащегося на основе освоения мира в условиях развития информационного общества и универсальных способов его познания. Целостная научная картина мира формируется и логическое мышление учащегося развивается, в том числе, через использование обобщения понятий и их свойств при проведении рассуждений, доказательств и решения задач более высокого уровня сложности.

Согласно теории С.Л. Рубинштейна, мышление – это психический процесс, через которое происходит обобщенное отражение действительности. Он отмечал, что мышление представляет собой деятельность по определенному плану, в результате чего рождается обобщение [163]. Многие исследователи сходятся во мнении о том, что обобщение познавательного материала происходит, поэтапно начиная от практического мышления и достигая научного уровня мышления.

В.В. Давыдов обозначает такие виды обобщения, как теоретическое (осуществляется на основе анализа, синтеза и движения от абстрактного к конкретному), эмпирическое (устанавливает формальные родовидовые зависимости в различных классификациях) и содержательное (преобразующее предметное действие и анализ) [49].

Л.В. Виноградовой, В.А. Далингером, М.И. Зайкиным, Д. Икрамовым, Ю.М. Колягиным, А.Н. Колмогоровым, В.А. Крутецким, Е.И. Саниной, Е.И. Смирновым, Г.И. Саранцевым, В.А. Тестовым, Л.М. Фридманом, В.Д. Шадриковым, И.С. Якиманской и др. исследованы вопросы о сущности обобщения математических знаний.

После проведенного анализа психолого-педагогических концепций можно делать вывод, что способность к обобщению как интеллектуальной операции мышления связано с такой важной закономерностью развития личности как преемственность самостоятельной деятельности. Различные аспекты преемственности в обучении математике между начальной и основной школой обсуждались в работах С.Н. Женетль, Т.Н. Зотова, А.К. Мендыгалыева, Е.В. Смыкалова, школой и вузом (Л.М. Анциферова, А.Г. Батаршев, С.В. Митрохина, Е.А. Тагаева, М.Е. Ткаченко), компонентами содержания обучения (Е.В. Беликова, З.Г. Борчугова, А.М. Пышкало и др.). в научных трудах Ю.М. Колягина, А.А. Столяра и др. отражены различные подходы к обучению математике в основной и старшей школе отражены. В работах И.А. Лурье, А.М. Пышкало, а также диссертациях Р.Н. Москалевой, Н.В. Решетниковой, Е.А. Тагаевой затрагивается проблема преемственности в преподавании математики. Вопросы преемственности самостоятельной деятельности в диссертационных исследованиях Ю.А. Калиновой, К.С. Лебедевой, А.Н. Низовцовой, А.Г. Скрябиной и др. рассматриваются, в основном, с точки зрения овладения обучающимися только способами выполнения самостоятельной работы.

Возрастные особенности обучающихся начальных классов заключаются в востребованности поддержки и послушании старших, любопытстве. В этом возрасте развивается способность к взаимодействию в играх и обучении, преобладает наглядно-образный тип мышления, запоминание носит механический характер, появляется личностная рефлексия. Следует отметить, что наиболее остро проблема преемственности появляется в 6-7 классе. Это возникает по причине того, что возникают важнейшие новообразования во всех сферах психического развития: преобразуются интеллект, личность, социальные отношения. Новообразование появляется в развитии мышления, произвольности поведения, познавательном интересе, ориентации на группу сверстников, рефлексии. Подростковый возраст отличается возможностями повышенной интеллектуальной активности, стремлением к широким обобщениям, проявлением самостоятельности. В.А. Крутецкий отмечает, что в этом возрасте развивается аналитическая деятельность. Подросток интересуется не только конкретными фактами, но и их анализом, стремится найти причину явлений. Повышается осознание им собственных интеллектуальных операций и управление ими. П.И. Подласый пишет, что «мышление подростка становится более систематизированным, последовательным по сравнению с детским периодом. Улучшается способность к абстрактному мышлению. Мышление подростка приобретает новую черту – критичность. Идет интенсивное нравственное и социальное формирование личности, становление личностных характеристик» [137]. К тем предметам и видам знаний, где они лучше узнают себя, у подростка появляется мотивация. У него возникает особое желание познавать новое. У него активизируется самостоятельная деятельность: анализ и оценка своих поступков и процесса действий, и их коррекция, самостоятельное планирование и контроль и т.д.

Таким образом, по нашим наблюдениям и результатам педагогического эксперимента мы пришли к выводу, что к числу наиболее существенных причин, затрудняющих преемственность самостоятельной деятельности, системности и углубления математических знаний у обучающихся, можно отнести отсутствие должной мотивации к математическим методам познания.

Результаты анкетирования показали, что среди опрошенных учащихся многие еще не убеждены в необходимости углубления изучения математики, у 54% учащихся отмечена неустойчивость интереса к углублению математических знаний, наблюдается широкий разброс уровня подготовки и мотивации к самостоятельной деятельности при углубленном изучении математики. У более 53% учащихся возникают проблемы, связанные с вычислительной культурой, с осмысленностью знаний и связей между ними, с представлением о математике за рамками школьного курса. В поисковом эксперименте также показана неготовность (52%) учащихся к самоорганизации и недостаточная сформированность умений и навыков освоения самостоятельной деятельности. У значительной части школьников наблюдается формализм знаний, поверхностность представления о характере математических знаний и деятельности (заучивание правил и формул и неспособность применять их при решении практико-ориентированных задач). Наблюдается недостаточное осознание взаимосвязи между математическими и естественно-научными понятиями в информационно-образовательной среде; неумение формулировать цель учебной задачи на языке математики; недостаточность использования математических знаний, адекватных современным достижениям цифровой и научной среды.

Познавательные интересы подростков характеризуются неопределенностью, изменчивостью и ситуативностью. Подросток может легко без принуждения усваивать учебный материал, но если он не видит жизненного значения усвоенных знаний, то у него исчезает мотивация, он не будет иметь устойчивого интереса к дальнейшему углублению предмета. Поэтому речь идет о том, что именно в подростковом возрасте необходимо прикладывать специальные педагогические усилия для расширения научных и прикладных знаний обучающихся.

Усвоению обучающимися теоретического уровня знаний способствуют прочность и целостность знаний, которые достигаются путем регулярного поэтапного закрепления знаний и действий, имеющихся у обучающегося, а также через углубление учебного материала, их обобщение и систематизацию на протяжении всего процесса обучения. Обобщение математических знаний имеет особое значение в связи с тем, что оно основано на таких действиях как множественное целеполагание, многоступенчатость математических абстракций, практико-ориентируемость и вариативность способов когнитивных действий, самоорганизация мыслительной деятельности, что связано с постнеклассической парадигмой развития образования. Этап подготовки к углубленному изучению математики начинается с 7 класса, в 8-9 классах обучение математике носит характер «ранней профилизации» и нацелено на выявление математических способностей и появление у них устойчивого интереса к предмету, готовность к глубокому пониманию учебного материала (зарубежные исследователи Ж. Адамар, А. Пуанкаре, а также отечественные исследователи Л.М. Анциферова, В.А. Далингер, В.Н. Дружинин, А.Н. Колмогоров, В.А. Крутецкий, М.С. Помелова, О.Г. Ридецкая, С.Л. Рубинштейн, Г.И. Саранцев, Б.М. Теплов, В.Д. Шадриков, И.С. Якиманская и др.).

Углубленное изучение математики на уровне основного общего образования ведется в соответствии с п.4 ст.66 главы 7 Федерального Закона от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации». Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования, утвержденный приказом Министерства просвещения Российской Федерации №287 от 31.05.2021 (далее ФГОС), выделяет требования к предметным результатам с усилением акцента на применение знаний и конкретных умений в условиях обеспечения современной информационно-образовательной средой [205]. В новых стандартах основной школы представлена возможность изучать математику в углубленной форме с седьмого класса. Это обусловлено тем, что современный уровень развития науки и техники требует серьезного уровня математической подготовки для значительно большего числа специалистов, чем ранее.

Между тем, на основе практического опыта и результатов констатирующего этапа эксперимента можно отметить, что углубление учебного материала в школах сводится, в основном, только к расширению содержания предмета. Об этом явлении В.А. Садовничий отмечает: «Принцип «иметь немного понятий, но уметь выявлять между ними как можно глубокие связи» на практике давно сменился на принцип «иметь много понятий, но выявлять неглубокие связи между ними»». Такое обучение он называет «рецептурным», то есть не приводящим к фундаментальности математических знаний [167].

Главным отличием данной стадии развития математического образования в основной школе от всех предыдущих является то, что переход к новому качеству результатов образования не может осуществляться в отсутствии инновационных решений поиска обобщенных конструктов школьных учебных элементов и процедур, в организации учебного процесса с учетом и фундированием опыта самостоятельной деятельности обучающихся. Он требует переосмысления традиционных методов и поиск новых подходов к формированию самостоятельной деятельности в процессе обучения математике в насыщенной информационно-образовательной среде и актуализации обобщающей деятельности на основе освоения уровневого сложного знания.

Степень научной разработанности проблемы. Теоретической основой исследования, рассматривающих проблему обобщения знаний и развития математических способностей являются работы ученых Л.С. Выготского, В.В. Давыдова, В.Н. Дружинина, В.А. Далингера, А.Н. Колмогорова, В.А. Крутецкого, М.С. Помеловой, О.Г. Ридецкой, С.Л. Рубинштейна, Г.И. Саранцева, Б.М. Теплова, В.Д. Шадрикова, И.С. Якиманской и др.

Категориально-понятийной стороне обобщения знаний посвящены работы В.В. Давыдова, П.Я. Гальперина, Н.Ф. Талызиной, В.А. Крутецкого, Б.М. Кедрова, А.В. Усовой и др. Различные аспекты категории обобщения и систематизации, проявляющиеся в процессе освоения школьниками области точных наук рассматриваются в исследованиях таких ученых как Л.А. Венгер, Н.С. Лейтес, О.Ю. Никифорова и др. Вопросы обобщения знаний на разных этапах обучения математике в школе рассматривали Е.Н. Буншафт, Е.Б. Майнагашева, С.Ю. Коровкин, Е.И. Санина, Н.А. Сапожкова и др.

В процессе углубленного изучения математики обучающиеся овладевают новыми подходами к изучению предметов и явлений окружающего мира на основе наглядного моделирования и адаптации современных достижений в науке, раскрывают взаимосвязь школьной математики с современной наукой. Значительное количество исследований посвящены разработке и реализации углубленного обучения математике (Н.Я. Виленкин, О.Б. Епишева, В.М. Монахов, В.А. Смирнов, С.И. Щварцбурд и др.). Особенностям усвоения знаний по математике обучающимися основной школы посвящены работы П.Я. Гальперина, В.А. Гусева, В.В. Давыдова, А.Н. Леонтьева, И.Я. Лернера, М.И. Махмутова, Н.Ф. Талызиной, А.В. Усовой, М.А. Холодной, И.С. Якиманской и др.). Развитие творческих способностей в процессе обучения математике изучались В.А. Гусевым, М. Клякля, В.М. Монаховым, А.Г. Мордковичем, В.С. Сековановым, Е.И. Смирновым, В.Д. Селютиным, М.В. Шабановой и др. Вопросы личностного развития в процессе обучения математике рассматривали Ф.С. Авдеев, В.В. Афанасьев, В.И. Горбачёв, Н.С. Лейтес, В.А. Тестов и др. Возможности развития обобщений в математической деятельности рассматриваются в диссертационных исследованиях И.А. Байгушевой, С.Н. Дворяткиной, А.Н. Колобова, И.В. Кочетовой, И.В. Кузнецовой, А.А. Папышева, А.А. Статуева, С.В. Щербатых и др. В этих работах рассматриваются отдельные вопросы методики и содержания углубленного обучения математике.

Методика обобщения знаний исследовалась в диссертациях Е.Н. Буншафт, Е.И. Саниной, Е.И. Смирнова, В.А. Тестова, Г.Г. Хамова и других. Обобщение знаний с точки зрения его развертывания на разных этапах обучения математике рассматривалось в диссертационных работах И.В. Китаевой, Д.А. Терешина, И.М. Хаджаровой и других.

Наиболее близкие подходы к нашей проблеме отмечаются в диссертационных исследованиях Г.А. Алексаняна, И.Г. Захаровой, А.В. Сафонова, С.В. Митрохиной, С.В. Напалкова, Н.Т. Ням, Е.Н. Трофимец, а также в работах Л.О. Крайновой, С.Н. Фортыгиной, Ф.С-П. Хагундоковой и др. В этих работах исследователи рассматривают разные подходы формирования самостоятельной деятельности обучающихся в информационной образовательной среде. В работах С.А. Бешенкова, Л.Л. Босовой, В.В. Гриншкуна, А.Ю. Уварова, И.В. Роберт и др. затрагиваются дидактические проблемы в условиях информатизации обучения.

Вместе с тем, проблема совершенствования методики обобщения знаний и действий в условиях информационно-образовательной среды с осуществлением преемственности самостоятельной деятельности, остается актуальной. Реализацию развивающих возможностей обобщения математических знаний на основе наглядного моделирования и адаптации современных достижений в обучении математике логично осуществлять не «рецептурно», а с помощью специально созданной модели обобщения в информационно-образовательной среде в направлении преемственности самостоятельной деятельности.

Таким образом, в теории и методике обучения математике нарастает необходимость целостного исследования проблемы преемственности самостоятельной деятельности обучающихся основной школы в процессе обобщения математических знаний. Поэтому потребность в углубленном обучении математике на основе преемственности самостоятельной деятельности в процессе обобщения знаний в условиях внедрения новых информационных технологий породило ряд **противоречий:**

– между требованиями, предъявляемыми к новым образовательным результатам обучающихся в соответствии с ФГОС, и недостаточностью обоснования условий, средств и механизмов формирования и развития преемственности самостоятельной деятельности обучающихся на основе обобщений в процессе обучения в классах с углубленным изучением математики в основной школе;

– между необходимостью обеспечения цифровизации и интерактивного характера углубленного изучения математики на основе обобщений в насыщенной информационно-образовательной среде и недостаточной разработанностью вопросов преемственности процессов цифровизации самостоятельной деятельности обобщения знаний в классах с углубленным обучением математике;

– между широкими возможностями актуализации содержания, условий и этапов обобщения математических знаний в процессе развития самостоятельной деятельности обучающихся в углубленном обучении математике и недостаточной практикой преемственности методов, средств и методики углубленного обучения математике на основе обобщения математических знаний в основной школе.

Таким образом, вопрос преемственности самостоятельной деятельности в процессе обобщения знаний в классах с углубленным изучением математики в условиях информационной образовательной среды обучения недостаточно изучен. Для того чтобы организовать педагогический процесс, соответствующий новым образовательным стандартам, недостаточно переосмыслить и преобразовать его отдельные звенья, необходимо совершенствовать всю методическую систему образования в целом. Требуется исследование вопроса во всех его аспектах. Необходимость разрешения этих противоречий определяет актуальность диссертационного исследования.

Проблема исследования: Какова методика углубленного обучения математике в основной школе на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в процессе обобщения знаний в информационно-образовательной среде?

Объект исследования: процесс углубленного обучения математике в информационно-образовательной среде основной школы.

Предмет исследования: методика углубленного обучения математике на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся основной школы в процессе обобщения знаний.

Цель исследования: разработать методику углубленного обучения математике на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в процессе обобщения знаний в информационно-образовательной среде основной школы.

Гипотеза исследования заключается в предположении, что развитие преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в процессе обобщения знаний будет основой для эффективности методики углубленного обучения математике в основной школе, если:

– основным механизмом активизации самостоятельной деятельности в углубленном обучении математике будет развитие опыта математической деятельности через решение практико-ориентированных задач на основе этапности и наглядного моделирования сущностей базовых математических действий и знаний в специально организованной информационно-образовательной среде;

– будут определены и реализованы условия, уровни, содержание и этапы обобщения математических знаний в классах с углубленным изучением математики, основанные на разработке и изучении иерархических комплексов интерактивных заданий на основе наглядного моделирования и адаптации современных достижений в науке;

– интерактивные методы обучения в процессе цифровизации операциональных и когнитивных схем функционирования образовательной среды при обобщении математических знаний будут применяться на основе диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур.

Объект, предмет, цель и гипотеза исследования определили **задачи** исследования:

1. Раскрыть сущность, структуру и особенности, определить критерии и уровни преемственности самостоятельной деятельности обучающихся основной школы на основе обобщения знаний в классах с углубленным обучением математике.

2. Разработать и реализовать структурно-функциональную модель преемственности самостоятельной деятельности обучающихся на основе обобщения математических знаний.

3. Разработать методику углубленного обучения математике на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся основной школы в процессе обобщения математических знаний.

4. Определить принципы отбора и разработать иерархические комплексы практико-ориентированных задач, обеспечивающих обобщение математических знаний и преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в условиях информационно-образовательной среды.

5. Провести опытно-экспериментальную работу, направленную на выявление эффективности методики углубленного обучения математике в основной школе на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в процессе обобщения знаний.

Методологической и теоретической основой исследования являются:

– системно-деятельностный подход к обучению, выдвигающий основополагающей идеей ведущую роль деятельности в развитии личности (А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарский, Л.С. Выготский, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, А.Н. Леонтьев, С.Л. Рубинштейн, Н.Ф. Талызина, В.Д. Шадриков, Г.П. Щедровицкий, Д.Б. Эльконин, Э.Г. Юдин и др.);

– рефлексивно-деятельностный подход в обучении (К.А. Абульханова-Славская, Б.Г. Ананьев, С.Л. Рубинштейн и др.);

– теоретические основы информатизации образования (С.А. Бешенков, Л.Л. Босова, В.В. Гриншкун, И.В. Роберт, В.М. Монахов, В.С. Секованов, Е.И. Смирнов, Н.И. Пак, В.А. Тестов, А.Ю. Уваров, М.В. Шабанова, С.В. Щербатых и др.).

– методологические основы математики (Ж. Адамар, А.Д. Александров, В.И. Арнольд, Н. Бурбаки, Д. Гильберт, Дж. Пойа, А. Пуанкаре, и др.);

– труды по обобщению знаний и методике обучения математике (И.А. Байгушева, В.П. Беспалько, Е.Н. Буншафт, В.Д. Далингер, В.В. Давыдов, С.Н. Дворяткина, П.Я. Гальперин, И.Д. Икрамов, С.В. Митрохина, С.В. Напалков, Е.И. Санина, Г.И. Саранцев, Е.И. Смирнов, В.Д. Селютин, В.С. Секованов, Н.Ф. Талызина, В.А. Тестов, М.В. Шабанова и др.)

– основные положения теории математических задач (Ю.М. Колягин, А.Г. Мордкович, Л.М. Фридман, А.В. Ястребов и др.);

– универсальные учебные действия у школьников (А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская, М.А. Гончарова и др.);

– исследования в области теории и технологии наглядного моделирования и фундирования опыта личности (В.С. Абатурова, В.В. Афанасьев, Р.М. Зайниев, С.Н. Дворяткина, И.В. Кузнецова, Е.И. Смирнов, В.А. Тестов, Н.Т. Ням, Е.Н. Трофимец, В.Д. Шадриков, С.В. Щербатых и др.);

– труды в области развития самостоятельной деятельности обучающихся (П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, И.Я. Лернер, С.В. Митрохина, С.В. Напалков, П.И. Пидкасистый, Г.И. Саранцев, А.В. Усова, В.Д. Шадриков, Д.Б. Эльконин и др.).

В ходе исследования использовались следующие **методы исследования:**

– *теоретические:* анализ и синтез различных аспектов проблемы преемственности самостоятельной деятельности в процессе обобщения знаний в психолого-педагогической и методической литературе, в историко-научных работах; моделирование и классификация конструктов и концептов обобщения знаний с выявлением сущности и последующего прогнозирования, и конкретизации отдельных ее составляющих, обобщение и анализ педагогического опыта обучения математике с использованием информационных технологий;

– *эмпирические:* опытно-экспериментальная работа, изучение результатов деятельности школьников, документации, беседа, анкетирование, тестирование, диагностические ситуации, педагогическое наблюдение, изучение педагогического опыта преподавателей;

– *методы математической статистики:* обработка данных и наглядное представление результатов.

Опытно-экспериментальной базой исследования стали Майинский лицей и Республиканский лицей-интернат Республики Саха (Якутия). В исследовании приняли участие одна экспериментальная группа и одна контрольная группа, в каждой по 30 человек.

Основные этапы исследования:

Основная цель *первого этапа* исследования (2013-2018 гг.) заключалась в проведении работы по изучению и анализу литературы, в ходе которого установлены степень научной разработанности проблемы исследования, также исследован и проанализирован педагогический опыт углубленного обучения математике в основной школе, проведен поисковый и констатирующий этапы эксперимента, выявлены специфические особенности преемственности самостоятельной деятельности, определены основные положения и научный аппарат исследования. Была определена структура самостоятельной деятельности, разработаны уровни и критерии ее сформированности, определены и реализованы условия, содержание и этапы обобщения математических знаний в классах с углубленным изучением математики.

На втором этапе исследования (2018-2020 гг.) проводилась теоретико-преобразующая работа. С этой целью разработаны концептуальные основы организации учебной деятельности обучающихся основной школы, структурно-функциональная модель и методика углубленного обучения математике на основе преемственности самостоятельной деятельности в процессе обобщения знаний; осуществлялась опытно-экспериментальная деятельность по реализации содержания углубленного обучения математике в условиях формирующего эксперимента и выбора контрольной и экспериментальной групп. Были разработаны и внедрены элективный курс, научно-методические разработки и электронные ресурсы обобщения математических знаний и процедур.

На третьем этапе (2020-2024 гг.) проводилась опытно-экспериментальная работа по внедрению полученных результатов исследования в практику; осуществлялись математические обработки собранных статистических материалов, на их основе осмыслены и обобщены результаты исследования, оформлялись материалы диссертации.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

1. Разработана методика углубленного обучения математике в основной школе на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в

процессе обобщения знаний в условиях информационно- образовательной среды. Переход к новому качеству результатов образования осуществляется на основе инновационных решений:

– фундирования опыта математической деятельности обучающегося при обобщении математических знаний. При этом организация самостоятельной деятельности обучающихся в процессе интерактивного обучения математике на основе обобщений носит ведущий характер и позволяет актуализировать и адаптировать современные достижения в науке к школьной математике. Преемственность самостоятельной деятельности осуществляется на основе этапности и наглядного моделирования сущностей базовых математических действий и знаний в специально организованной информационно-образовательной среде;

– усилении интерактивного подхода к обучению математике в условиях насыщенной и открытой информационно-образовательной среды, обеспечивающий вариативность и обобщенность математической деятельности, диалог культур в повышение уровня самостоятельности в обобщении знаний и процедур;

2. Основным эффектом реализации методики углубленного обучения математике является активизация механизмов самостоятельной деятельности на основе ее преемственности в процессе обобщения математических знаний через обоснованный отбор, проектирование, интерпретацию и вариативность практико-ориентированных уровневых учебных и научно-исследовательских заданий в насыщенной информационно-образовательной среде.

3. Разработаны принципы отбора иерархических комплексов заданий, приемы наглядного моделирования, этапы и формы обобщения математических знаний в условиях преемственности самостоятельной деятельности в углубленном обучении математике в основной школе.

4. Определены педагогические условия, которые обеспечивают преемственность самостоятельной деятельности обучающихся в процессе обобщения математических знаний на основе концепции фундирования опыта личности в цифровой образовательной среде интерактивной математической деятельности.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что:

1. Уточнены сущность и структура преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в условиях информационно-образовательной среды посредством наглядного моделирования и фундирования опыта математической деятельности в процессе обобщения знаний при интерактивном углубленном обучении математике в основной школе.

2. Выявлены три уровня преемственности самостоятельной деятельности обучающихся на основе обобщения математических знаний и действий: репродуктивный, эвристический, творческий. В качестве критериев выделены компоненты: самостоятельная активность (мотивация к самостоятельной деятельности, осведомленность об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности, научное общение); самоорганизация (академическая успешность учащегося, качество обобщенности знаний и процедур); саморегуляция (умение работать в команде – диалог культур, умение адаптироваться и осознании личностных смыслов и предпочтений, самооценка).

3. Разработана и обоснована структурно-функциональная модель обеспечения преемственности самостоятельной деятельности обучающихся при углубленном обучении математике основной школы в насыщенной информационно-образовательной среде на основе обобщения знаний, состоящая из таких компонентов, как целевой, мотивационный, содержательно-технологический (иерархические комплексы заданий, средства и методы, этапы и формы обобщения знаний); обобщающе-преобразующий (характеризует содержание и интерпретацию обобщенных конструктов сложного знания), контрольно-оценочный (определяет уровни и этапы преемственности познавательной самостоятельной деятельности обучающихся и содержит критерии, показатели и методики отслеживания результатов).

Практическая значимость исследования заключается в том, что:

1. Реализован методический контекст в изучении базовых учебных элементов содержания математического образования в основной школе на основе обобщения знаний средствами наглядного моделирования в цифровой образова-

тельной среде. Структурно-функциональная модель обеспечения преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в цифровой образовательной среде на основе обобщения знаний может быть трансформирована в другие предметные области.

2. Учебно-методические комплексы практико-ориентированных и математико-информационных заданий могут быть использованы при углубленном изучении математики в 8-9 классах и как обобщающий курс при подготовке к государственной итоговой аттестации. Теоретические и практические результаты данной работы могут быть использованы при разработке учебных программ в школе.

Достоверность и обоснованность результатов нашего исследования обеспечиваются использованием достижений психолого-педагогической науки и опорой на теоретические положения педагогики и методики обучения математике; комплексным подходом к изучаемой проблеме и совокупности методов, адекватных его целям, задачам, объекту и предмету исследования; правильным выбором исходных методологических позиций; репрезентативностью и валидностью опытно-экспериментальных данных, продолжительностью и вариативностью проведения опытно-экспериментальной работы, а также обменом педагогического опыта и научным сотрудничеством с коллегами-преподавателями из вузов Ельца, Москвы, Якутска, Ярославля и др.

Личный вклад соискателя состоит в анализе и обобщении теоретического материала исследования, проведении всех этапов научного исследования, получении научных результатов и выводов (разработка методики, структурно-функциональной модели, комплексов практико-ориентированных заданий), обработке и интерпретации экспериментальных данных, подготовке публикаций по итогам исследования и выступлениях на конференциях, во внедрении результатов данного исследования в процесс обучения математике.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Материалы диссертации соответствуют специальности 5.8.2. – Теория и методика обучения и воспитания (математика, математика и механика (уровень основного общего образования)) (педагогические науки): п.5. Методические концепции содержания обучения и его проектирования (по областям знаний и уровню образования); п.7. Анализ образовательных данных и математическое моделирование образовательных процессов и систем предметного образования; п. 20. Теоретические основы создания и использования новых образовательных технологий и методических систем обучения и воспитания, обеспечивающих развитие учащихся на разных ступенях образования; п. 23. Теория, методика и практика разработки и использования в обучении и воспитании цифровых образовательных ресурсов (по областям знаний и уровням образования).

На защиту выносятся следующие положения:

1. Разработанные методические основы и теоретические положения углубленного обучения математике в основной школе на основе обобщения знаний и процедур уточняют сущность, структура и особенности, критерии и уровни преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в классах с углубленным изучением математики в основной школе;

2. Разработанные структурно-функциональная модель и методика углубленного обучения математике на основе обобщения знаний и процедур в контексте целеполагания, самоорганизации, самоконтроля и самооценки, активизации математической деятельности обучающихся определяют условия, содержание и механизмы обобщения знаний и процедур в углубленном обучении математике.

3. Процесс обобщения математических знаний и процедур на основе актуализации особенностей и преемственности самостоятельной деятельности обучающихся основной школы в условиях информационно-образовательной среды углубленного обучения математике может быть выделен как отдельный модус процесса, обладающий всеми компонентами **методической системы:**

– цели обобщения, которые заключаются в формировании потребности в самоорганизации и саморазвитии обучающихся, осознании нового уровня знаний на основе имеющихся, постижения сущности математических знаний и действий;

– содержание обобщения знаний и действий, представленное укрупненными блоками и этапами проявления и фундирования сущности учебных элементов интерактивной деятельности;

– педагогические условия и методика обобщения знаний в процессе углубленного обучения математике на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся;

– интерактивные методы обучения математике на основе наглядного моделирования обобщенных конструктов знаний и иерархические комплексы заданий в обобщении математических знаний и действий в информационно-образовательной среде.

4. Принципы отбора математических задач и иерархические комплексы интерактивных практико-ориентированных заданий, обеспечивающих обобщение знаний в основной школе при углубленном изучении математики в условиях информационно-образовательной среды, определяются особенностями и этапами преемственности самостоятельной деятельности обучающихся.

Апробация и внедрение в практику результатов работы.

Основные результаты исследования были представлены:

на Международных научно-практических конференциях:

– «Актуальные проблемы психологии и педагогики в современном мире» (РУДН, Москва, 24-26 апреля 2013 г.);

– «Современные тенденции развития науки и технологий» (Белгород, 30 июля 2016 г.);

– «Подготовка учителя начальных классов: проблемы и перспективы» (Минск, 27 октября 2016 г.);

– «Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки», (г. Арзамас, 25-27 мая 2017 г.);

– «Интерактивные технологии обучения в подготовке педагога в вузе и в системе дополнительного профессионального образования: проблемы и пути решения» (Москва, 16-17 февраля 2017 г.);

– «Развивающий потенциал образовательных Web-технологий», (Арзамас, 16-17 мая 2018 г.);

– «Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования», (Елец, 30 сентября – 3 октября 2022 г.);

а также на научно-методической конференции Международного научно-образовательного форума «Человек, семья, общество: история и перспективы развития» (Красноярск, 11-12 ноября 2016 г.); на Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные проблемы обучения математике, информатике и естественнонаучным дисциплинам в средней и высшей школе», (Благовещенск, 23 марта 2017 г.); на международном симпозиуме по проблемам развития одаренности детей и юношества в образовании «Научное образование / science education» (Якутск, 8-15 июля 2018 г.). Основные результаты исследования также представлялись в виде докладов и обсуждались на научно-методических семинарах и конференциях в городах Арзамас, Москва, Ярославль, Якутск и др. и опубликованы в виде 21 публикации, в том числе в 5 изданиях, рекомендуемых ВАК, монографии, 2 учебных пособия.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы (229 наименований) и приложения. Объем работы составляет 213 страниц.

ГЛАВА 1. ОБОБЩЕНИЕ ЗНАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК ФАКТОР РАЗВИТИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

1.1. Обобщение знаний как общепедагогическая категория: историогенезис, сущность, функции, педагогические условия и виды обобщения математических знаний

Достижение глобальной конкурентоспособности системы общего образования стало одной из приоритетных целей Российской Федерации. Новые образовательные стандарты делают акцент в развитии личности учащегося в действии по формуле: от действия – к мысли. Они нацелены на приобретение учащимися основных навыков для дальнейшего образования, в выработке на основе предметных, метапредметных способов деятельности функциональной грамотности. Учебная деятельность качественно трансформируется под знаком становления субъектности и приобретает черты деятельности по саморазвитию и самообразованию. Развитие самостоятельной деятельности в процессе обучения становится важной задачей образования. Основными направлениями современной парадигмы образования являются:

– установления цели обучения как способности учиться;

– обобщение знаний и процедур в процессе решения жизненных задач и прочного понимания учащимися учения как единого процесса образования и порождения смыслов;

– целенаправленная организация учебной деятельности и планомерное действие по обучению и воспитанию учащихся;

– развитие навыков взаимного сотрудничества с другими участниками учебного процесса в достижении целей обучения;

– формирование культуры непрерывного образования и саморазвития на протяжении всей жизни.

Личностное и социальное развитие учащихся зависит от организации их деятельности и учебных действий. Именно природа потребностей, мотивов и интересов человека, лежащих в основе деятельности, определяет основное направление и содержание этой деятельности каждого индивида. В то же время активная вовлеченность, инициативность в познавательной деятельности, удовлетворённость собой и своим результатом обеспечивают чувство осмысленности, важности происходящего и являются основой для последующего саморазвития и самореализации личности. В отечественной педагогике К.Д. Ушинский выделял идею саморазвития личности, подчеркивая важную роль самостоятельности: «Растущий человек создает и познает себя сам, и следует воспитывать в нем самостоятельность и активность в условиях свободного самовыражения, развивать его способность к самооценке, стимулировать врожденное стремление к совершенству» [204].

Одним из структурных компонентов функциональной грамотности является математическая грамотность – способность математически рассуждать на различных этапах математического моделирования (формулировать, применять и интерпретировать математику) для решения задач в разнообразных контекстах реального мира. Важнейшей задачей обучения математике является предоставление каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе. Одним из базовых положений является тезис о том, что развитие личности обеспечивается через создание качественной образовательной среды с интегрированием современных технологий в процесс обучения математике.

В рамках математического образования обучение рассматривается как процесс становления личности человека посредством овладения им основами математической грамотности, важным аспектом которого является формирование понятийного мышления, способности воспринимать реально-предметное понятие в абстрактных представлениях. В.В. Давыдов связывает уровень усвоения материала с процессом обобщения: «О теоретическом обобщении можно говорить в том случае, когда школьник на основе целенаправленного анализа одного-единственного явления, одного частного случая получает возможность выделить существенные признаки как основу понятия») [49].

О том, что «правильно организованное обучение» является одним из основных источников обеспечения преемственности самостоятельной деятельности, показывает анализ психолого-педагогической литературы. Это есть систематизация знаний, как способ организации самостоятельной деятельности и обобщение, как результат познавательного процесса. Результаты психолого-педагогических исследований Л.С. Выготского, П.Я. Гальперина, В.В. Давыдова, позволяют говорить, что эффективность развития личности измеряется уровнем сформированности мыслительных приемов анализа и синтеза, сравнения, классификации, обобщения и систематизации.

Процесс обобщения и систематизации знаний в традиционной практике обучения часто сводится к классификации предметов по внешним признакам, группировке их в соответствующие типы, классы, виды без установления диалектических связей и взаимосвязей между ними. Между тем, основные законы диалектики и современной науки подтверждают взаимозависимость и обусловленность явлений и объектов действительности. Объекты и явления окружающего нас мира находятся в непрерывных изменениях и развитии, во внутренних связях и взаимосвязях, отражающих их глубинную сущность. Поэтому, помимо классификации объектов и явлений по более или менее постоянным признакам, процесс обобщения и систематизации должен в основном заключаться в отражении систем знаний и их структур, соответствующих системам, которые реально существуют в природе и обществе.

В философии процесс обобщения определяется как процесс «мысленного перехода: 1) от отдельных фактов, событий к отождествлению их в мыслях; 2) от одного понятия, суждения и т.д. к другому более общему понятию и т.д.» [206].

В психологии термин «обобщение» определяется как логическая операция мышления. Обобщение подразумевается, как перенос частного рассуждения в отношении единичного объекта на объекты общего характера или перенесение характерных признаков одной группы явлений и фактов на другие группы.

Таким образом, обобщение мы рассматриваем, как познавательный процесс, заключающийся в мысленном выделении и объединении общих существенных признаков объектов и явлений окружающей нас действительности. В процессе познания происходит осмысление связей и отношений между предметами и явлениями с постепенным углублением в сущность познаваемых явлений через обобщение, которое развивается поэтапно. У Е.И. Саниной этапы обобщения знаний распределены следующим образом:

– первичные обобщения, когда формируется общее представление о предметах и явлениях;

– локальные или понятийные обобщения (происходят по мере усвоения понятий);

– межпонятийные (или поурочные) обобщения, когда определяются общие и существенные признаки и свойства изучаемых предметов, раскрываются между ними связи и отношения. В результате таких обобщений изучаемые предметы упорядочиваются по определенному порядку:

- тематические (систематизируются закономерности и важнейшие законы теорий и научных идей, в результате которого формируется полный цикл убеждений и целостное мировоззрение);

– итоговые обобщения, подразумевающие установление связи и взаимосвязи между системами знаний по научным направлениям. Такое обобщение происходит в результате усвоения целостной системы знаний, целого курса.

Е.И. Санина [170] отмечает, что: «процесс обобщения знаний тесно связан с процессом повторения, так как обобщать можно только тот материал, который уже знаком. Следовательно, развивать способности к обобщению целесообразно именно в процессе повторения материала». Ею выделены следующие функции обобщения: образовательная, воспитательная, развивающая, контролирующая, рефлексивно-оценочная.

Таким образом, когда, как чаще всего в процессе обучения обобщение применяется только как элемент заключительного повторения всего курса, так называемое обобщающее повторение. Нужно отметить, что обобщение знаний, являясь основным элементом обучения, способствует непрерывности освоения знаний на каждом этапе учебного процесса.

В трудах по психологии в основном выделяют три вида обобщения: теоретическое, эмпирическое и содержательное. Процесс теоретического обобщения происходит главным образом как деятельность, основанная на обучении по формированию понятий и общих представлений, которые созданы предыдущим историческим развитием. Такое обобщение происходит путем анализа, синтеза и движения от абстрактного к конкретному и осуществляется диалектическим способом. При этом выделяется сущность явления, которое рассматривается в развитии, взаимосвязи и зависимостях с другими явлениями, в борьбе противоположностей. Путь теоретического обобщения есть восхождение от абстрактного к конкретному.

Эмпирическое обобщение происходит в практической деятельности, устанавливает различные классификации формальных родовидовых зависимостей при помощи слов-названий. Оно исходит из чувственного опыта. Через формирование общих идей, непосредственно вплетенных в практическую деятельность, создаются условия для реализации мышления, чтобы придать чувственному опыту форму абстрактной всеобщности. Различают два вида эмпирических обобщений: индуктивные и дедуктивные. При индуктивных обобщениях идет поиск общего признака между объектами (от частного к общему). В дедуктивных обобщениях общий признак объектов известен заранее, который нужно распознать в предлагаемых объектах (от общего к частному). Изучив литературу, выделим следующую схему приемов учебной деятельности на основе эмпирического обобщения:

1. Мотивация учебной деятельности, определение целей обобщения, правил, закономерностей, составление плана решения поставленных задач;

2. Соотнесение различных вариаций несущественных признаков с определенным существенным через разного рода примеры;

3. Поиск общих точек на конкретных примерах;

4. Формулирование вывода в соответствии с целью.

Содержательное обобщение представляет собой обнаружение определенной закономерности и онтологической взаимосвязи единичных явлений с общим определенным целым. Через осмысленную абстракцию, онтологию и обобщение выясняется закон формирования внутреннего единства этого целого. Формирование содержательных обобщений осуществляется не через наблюдение и сравнение внешних свойств объектов, а на основе преобразующего действия и анализа, которые устанавливают онтологические компоненты и существенные связи целостного объекта. Построенный на основе таких обобщений изучаемый материал соответствует его научному изложению и имеет следующие стадии (по В.В. Давыдову):

1. Введение в ситуацию данной задачи;

2. Раскрытие общих отношений, которые являются основой для решения любой задачи данного вида на основе образца преобразования материала.

3. Фиксация этой взаимосвязи в предметной или знаковой модели, позволяющей изучать его свойства в «чистом виде»;

4. Определение условий и методов решения исходной задачи на основе выявления свойств данной взаимосвязи [49].

Каждый из этих типов обобщения имеет свое место в процессе обучения в зависимости от содержания изучаемого материала, возраста и имеющихся знаний у учащихся. Если объект изучения является несложным, формирование обобщения может идти эмпирическим путем. Если предмет изучения представляет собой более сложный динамический объект, то формирование обобщения идет теоретическим путем через диалектику развития, раскрывая взаимосвязь в явлениях и предметах.

Основная идея системно-деятельностного подхода к проектированию и реализации ФГОС, основанном на теоретических положениях концепции С.Л. Рубинштейна, Л.С. Выготского, А.Н. Леонтьева, Д.Б. Эльконина, В.В. Давыдова, П.Я. Гальперина, заключается в том, что новые знания учащимся в готовом виде не даются. Их «открывают» учащиеся сами в результате различных видов активной деятельности с проявлением самостоятельности, активности, собственного поиска и творчества. В.В. Давыдов, который разрабатывал положения деятельностного подхода к обучению, отмечает, что «конечной целью обучения является формирование способа действий, а механизмом обучения является не передача знаний, а управление учебной деятельностью по овладению знаниями, умениями и навыками». Формирование у обучающихся потребности и способности к активной творческой деятельности по освоению учебного материала является основной задачей совершенствования методологии обучения. Совершенствование заключается в применение методов, позволяющих обучающимся самим искать и осознавать подходящие для них способы решения проблем.

Обобщение знаний в процессе углубленного изучения математики способствует потребности обучающихся стать математически грамотными: увидеть мир через «математические очки», раскладывать окружающие вещи и явления на математические составляющие, помогает понять роль математики, формулировать обоснованные суждения и принимать рациональные решения.

В основной школе углубленное изучение математики ориентировано в целом на проявление интереса к предмету, на формирование умений распознавать в реальных ситуациях и явлениях математические понятия и закономерности, формулировать их на языке математики и создавать математические модели, призвано помочь учащемуся осознать степень своего интереса к предмету, в то время как система углубленного изучения математики в старшей школе рассчитана на учащихся с осознанным выбором предмета с устойчивым познавательным интересом, имеющих для ее изучения уже достаточно развитые способности.

В процессе углубленного изучения математики в обеспечении преемственности самостоятельной деятельности большую роль играют такие «основные функции обобщения знаний, как:

1. Фундаментализация знаний (определение связей, объединяющих элементы в единое целое в пределах темы, раздела, предмета);

2. Трансформация знаний (моделирование математических ситуаций, поиск применения необходимых знаний в новой нестандартной ситуации);

3. Развивающая функция обобщения (постановка цели, чувство ответственности, моделирование ситуации, установление и поиск связей между понятиями, использование различных учебных и коммуникационных средств, планирование, прогнозирование, контроль, коррекция знаний, оценка процесса, алгоритмизация действий);

4. Культурологическая функция (целенаправленное формирование у учащихся широкого понимания роли математики в познании мира, в системе всех научно-практических знаний);

5. Аналитическая функция (сравнение, анализ, синтез, систематизация, классификация, абстрагирование, обобщение, логические рассуждения, доказательство)» [170].

Проведя теоретический анализ научно-педагогической литературы и эмпирическое исследование проблем углубленного обучения математике, мы предположили, что обобщение знаний способствует преемственности самостоятельной деятельности обучающихся, в ходе актуализации следующих педагогических условий:

– *личностно-деятельностных*, которые заключаются в формировании у обучающихся способности к обобщению, самостоятельному получению и восприятию информации, ее анализу и синтезу, выработке умения формулировать, обосновывать и доказывать суждения, способности разбираться в особенностях применения знаний по математике для решения различных научных и прикладных задач, умению отбирать и применять методы математической обработки информации и передавать информацию через языковую, символическую и графическую речь. Насыщение информационно-образовательной среды средствами наглядного моделирования процессов обобщения знаний на основе активности когнитивной самостоятельной деятельности и актуализации личностных процессов понимания повышает качество обучения математике, степень самостоятельности во всех видах учебной деятельности, развиваются навыки самоанализа деятельности, осознание себя и своих качеств, установления социальных связей, организации постоянного взаимодействия с другими участниками учебного процесса.

– *методических:* организация самостоятельной деятельности происходит через управление реализацией деятельностного подхода в обучении. Актуализация фундирования опыта математической деятельности и личностного осмысления процессов обобщения математических знаний и педагогической поддержки становления личности обучающегося происходит за счет преемственности этапов обобщения математических знаний. Преемственность этапов обобщения знаний – одна из важных закономерностей процесса обобщения, когда новый, более высокий этап представляет собой личностное осмысление и педагогическую поддержку предыдущего этапа обобщения. Проходя все ступени обобщения, ученик подвергается анализу различных фактов, отделяет в них существенные связи от несущественных, объединяет их в однородные категории и группы, оперирует понятиями и классифицирует их. Происходит усвоение знаний, специальных способов и правил. Это обеспечивает ученику доступность нового материала, усиливает творчество и самостоятельность в преобразовании мыслей, в умственном экспериментировании; в расширении и углублении имеющихся знаний.

– *организационно-технических*: открытость и насыщенность информационно-образовательной среды процесса обобщения математических знаний на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся влияет на организацию различных видов самостоятельной деятельности. Обучение математике в процессе обобщения знаний строится на организации проектной деятельности, кейс-технологии, технологии веб-квест, мастерской знаний, технологии открытых задач, онлайн-занятия и т.д. на основе наглядного моделирования и адаптации современных достижений в решении задач.

Таким образом, выделенные нами педагогические условия для активизации самостоятельной деятельности обучающихся в процессе обобщения математических знаний, позволяют достичь целостности и прочности знаний, умений и навыков, обеспечивающих развитие интеллектуальных операций и личностных качеств.

1.2. Преемственность самостоятельной деятельности обучающихся в классах с углубленным изучением математики в основной школе в процессе обобщения знаний

Теоретические подходы к выявлению сущности понятия «деятельность» находим в работах М. Дональдсона, Дж. Дьюи, Л.С. Выготского, А.Н. Леонтьева, С.Л. Рубинштейна и др. Дональдсон выделяет в качестве основных условий успешной учебной деятельности осознанность и произвольность, а главной задачей деятельности считает формирование саморефлексии своих действий. Дьюи разработал принципиально новую систему обучения. Он сделал акцент на развитие активной и самостоятельной деятельности учащегося. Основной идеей его дидактической системы заключалась в том, что обучение должно опираться на собственный интерес и потребность учащегося. Одним из условий успешности обучения он считал проблематизацию учебного материала.

Деятельность у различных ученых определяется по-разному. Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, С.Л. Рубинштейн и др. дают следующие определения: 1) Деятельность – это целенаправленное взаимодействие человека с объективным миром; движущей силой деятельности является потребность, которая определяет постановку осознанной цели и действия, соотносимые с целью; 2) Деятельность – это совокупность сознательно спланированных действий для достижения общей цели, которая определяется у человека в результате осознанной им потребности в деятельности.

Формирование самостоятельной деятельности представлено в работах различных ученых через:

– приемы учебной деятельности (Н.А. Менчинская, В.В. Давыдов, Е.Н. Кабанова-Меллер, Д.Б. Эльконин, П.И. Пидкасистый, Н.Г. Дайри, С.В. Митрохина и др.);

– использование обобщенных знаний и методов (И.А. Байгушева, В.В. Давыдов, В.А. Далингер, Н.Ф. Талызина, П.Я. Гальперин, Е.И. Санина, Е.И. Смирнов, В.Д. Шадриков и др.);

– различные подходы к контролю учебной деятельности (Б.Г. Ананьев, В.А. Львовский, Н.Д. Кучугурова, Н.Ф. Талызина, М.В. Шабанова и др.);

– использование дифференцированного подхода (В.А. Гусев, В.А. Далингер, Р.Р. Бикмурзина, И.М. Смирнова, Е.Н. Трофимец и др.);

– введение в содержание обучения комплексов методологических знаний (А.Л. Жохов, С.Н. Дворяткина, А.Н. Леонтьев, И.Я Лернер, П.И. Пидкасистый, А.В. Усова, М.А. Холодная, И.С. Якиманская, М.В. Шабанова и др.);

– использование профессионально-ориентированных задач, которые соотносятся с уровнями функционирования математического образования (Е.Н. Трофимец, С.В. Щербатых, Е.А. Зубова, М.А. Осинцева и др.);

– развитие различных качеств личности в процессе обучения математике (В.В. Афанасьев, В.И. Горбачёв, Н.С. Лейтес, В.А. Тестов, С.Н. Дворяткина и др.;

– этапы фундирования и уровни сформированности опыта самостоятельной деятельности обучающихся (В.А. Далингер, Н.Т. Ням, Е.И. Санина, Е.И. Смирнов, Н.Ф. Талызина и др.).

Анализ психолого-педагогической литературы показал, что развитие самостоятельной деятельности, как производной от выраженности интеллектуальных операций мышления, напрямую зависит от способности к обобщению, способности обучающихся самостоятельно применять предметные знания и базовые навыки для решения повседневных задач, умения комплексно решать проблемы разной степени сложности в ситуациях, выходящих за рамки учебного пространства, в процессе умственного экспериментирования на основе множественного целеполагания и вариативности способов когнитивной деятельности.

В науке понятие «преемственность» рассматривается как сложная комплексная категория, состоящая из разных самостоятельных аспектов: философский, социальный, психологический, педагогический. Философское определение преемственности не может осознаваться отдельно от понятия связи, взаимосвязи, взаимодействия явлений. Э.А. Баллер, Г. Гегель, Г.П. Исаенко, У.А. Раджибов, В.Г. Рубанов и др. определяют преемственность как момент развития, в процессе которого осуществляется связь между старым и новым, новым и старым. Преемственность также рассматривается как необходимое условие становления, функциональное состояние в различных направлениях развития. Преемственность действует как установка на изменение, на новообразование, обеспечивает непрерывное развитие, сохраняя и перенося существенные элементы старого на более совершенную ступень. Таким образом, с философской точки зрения преемственность определяется как поступательное развитие. Такое понимание является основой сущности педагогической преемственности.

В психолого-педагогической науке разработка проблемы преемственности нашла отражение в работах С.Л. Рубинштейна, Л.С. Выготского, А.Н. Леонтьева, Л.И. Божович и др. В их исследованиях преемственность рассматривается как условие психологического развития личности. С.Л. Рубинштейн считал, что «суть преемственности заключается в том, что в развитии личности каждая следующая стадия является внутренним условием для предшествующей ступени, и поэтому все стадии процесса развития между собой тесно связаны» [164]. В теоретических положениях Л.И. Божович подчеркивается, что преемственность предполагает учет и оптимальное использование возрастных возможностей детей.

В исследованиях о проблеме преемственности в психологической науке чаще всего исследуется выявление основ условия развития личности по возрастным периодам, их показатели развития в конце каждого возрастного этапа и оценки его качества. В педагогической науке преемственность в образовательном процессе рассматривается как: внутренняя взаимосвязь, единый путь познания (Я.А. Коменский); предпосылка развития человека (И.Г. Песталоцци); характеристика развивающего обучения (А. Дистерверг); принцип обучения (Я.А. Коменский, К.Д. Ушинский); общепедагогический принцип (А.А. Люблинская, С.М. Годник и др.); общепедагогическая закономерность (В.А. Комелина и др.); дидактическое условие и путь реализации принципа последовательности и системности обучения (Ю.К. Бабанский, Г.Х. Бурангулова, Н.Г. Казанский и др.); фактор совершенствования учебно-воспитательного процесса и повышения его качества (Ю.К. Бабанский); межпредметная связь (Ю.Н. Кулюткин и др.). В исследованиях в большинстве случаев основной характеристикой преемственности выделяется перспективность развития. Из этого следует, что последовательное осуществление преемственности придает любому педагогическому процессу и педагогическим условиям, создаваемым для активизации самостоятельной деятельности, перспективный характер.

Значимость умения организовать самостоятельную деятельность определяется процессом изучения математического материала, так как овладение математическим языком, решение задач требует самостоятельного анализа математических фактов, умение организовать собственную учебно-познавательную деятельность. В процессе овладения математическими знаниями нужно уметь увидеть взаимодействие систем знаний и его динамику по мере возрастания и усложнения изучаемого материала. Самостоятельная деятельность заключает в себе необходимость поэтапного обобщения имеющихся знаний, их нахождение и применение уже известными способами и выявление новых путей добывания знаний через перенос ранее усвоенного на новый материал. Таким образом, преемственность в развитии самостоятельной деятельности обучающихся в классах с углубленным изучением математики в процессе обобщения математических знаний мы рассматриваем как построение единой системы обучения математике, сохраняющей связь и согласованность всех компонентов методической системы, обеспечивающей развитие математических способностей.

В соответствии с целями новых образовательных стандартов по формированию математической грамотности учащихся, в рамках системно-деятельностного подхода (А.Н. Леонтьев, Д.Б. Эльконин, П.Я. Гальперин и др.), стратегию целенаправленной организации учебной деятельности при углубленном изучении математики мы определяем в процессе обобщения знаний и процедур, как одного из основных факторов, влияющих на развитие личности учащегося.

На основе теоретического изучения и анализа исследований нами выделены этапы преемственности самостоятельной деятельности обучающихся для эффективного развития интеллектуальных операций мышления и универсальных учебных действий:

1. *Мотивационный этап*:

– интерес к содержанию и сущности знаний по математике;

– реализация мотивов достижения, наличие образцов обобщения знаний и историогенезис, самоопределение и самоорганизация;

– формирование научного мировоззрения и научной картины мира;

– интерес к освоению обобщенного содержания и сущности математических знаний и процедур.

В основе учебно-познавательных мотивов лежат познавательная потребность и потребность в саморазвитии. Потребность в саморазвитии выражается также в мотиве личностного роста учащегося, его самосовершенствования. На первом этапе углубленного изучения математики у учащихся наблюдается ярко выраженная внутренняя мотивация (любознательность, любопытство, стремление к новым знаниям и к расширению знаний) к обучению. В исследованиях по психологии В.А. Крутецкого и др. отмечается, что одним из главных мотивов учебной деятельности является познавательный интерес, который определяет ее успешность и эффективность. Познавательный интерес начинает формироваться и проявляться в подростковом возрасте и может перейти к серьезному увлечению, определить дальнейший профессиональный выбор. Психологи также подчеркивают частую разбросанность и неустойчивость интересов подростков из-за активной любознательности подростков, их стремления познать больше. Их интерес характеризуется неопределенностью, изменчивостью и ситуативностью. В.А. Крутецкий объясняет это поиском подростка собственной основы жизненной направленности. Подросток таким образом (часто неосознанно) нащупывает свой центральный, стержневой интерес и пробует себя в разных сферах. На этой стадии внутренняя мотивация учащегося формируется на основе привлекательности и интересности обучения. Обобщение пройденного материала обеспечивает актуализацию имеющихся знаний, осознания необходимости новых знаний, так как подросток может легко без принуждения усваивать учебный материал, но если не видит жизненного значения усвоенных знаний, то у него исчезает мотивация, он не будет иметь устойчивого интереса к дальнейшему углублению предмета.

Интересность обучения можно усилить через прикладную направленность и историчность содержания обобщающего материала. «Сделать учебный предмет интересным, – писал А.Н. Леонтьев, – это, значит, сделать действительным или создать вновь определенный мотив, а также создать соответствующие цели школьников» [98].

2. Целевой этап. Учебная цель появляется тогда, когда повторяется пройденный материал, актуализируются знания и обнаруживаются трудные вопросы учебного материала. Осознание нового уровня математических знаний приводит к определению цели. Целевой компонент направляет деятельность для достижения учебного результата. В процессе обобщения материала для углубленного обучения математике внимание уделяется самостоятельному целеполаганию учащегося, когда происходит, с одной стороны, поиск и выявление некоторого инварианта среди многообразия учебного материала, с другой стороны, опознание предметов данного многообразия (С.Л. Рубинштейн). Общая цель учебно-познавательной деятельности учащихся, представляющая собой преемственность самостоятельной деятельности, появляется, когда сходятся в одну общую точку самостоятельное определение цели учащимся и цель, установленная учителем. При обобщении математических знаний и действий актуализируются «проблемные зоны», множественное целеполагание и вариативность подходов, выделяются этапы и обобщенные конструкты проявления сущности, осознается новый уровень математических знаний и когнитивных действий, выявления эмпирических связей и обобщений.

Третий этап – *содержательно-технологический.* Это поисковая и экспериментальная деятельность, работа в малых группах, творческая активность в освоении сложного знания, междисциплинарная интеграция и диалог культур, создание ситуаций для проявления умений моделировать, анализировать, выделять главное, сравнивать, абстрагировать, синтезировать сложное знание в специально организованной среде: иерархические комплексы практико-ориентированных и информационных заданий, этапы фундирования опыта математической деятельности в процессе обобщения знаний и действий, методы и формы работы.

Четвертый этап – *обобщающе-преобразующий,* основывается на наглядном моделировании этапов обобщения знаний и действий, моделировании в графической, словесной или цифровой форме; преобразовании модели отношения для изучения его свойств в «чистом виде»; в прогнозе и планировании результата; понимание и структуризация, фундировании опыта, спирали фундирования. Такие мыслительные операции, как анализ, выделение главного, сравнение, абстрагирование, синтез являются основой обобщения знаний и совершаются через следующие виды математической деятельности:

1. Поисковая – поиск решения неалгоритмических задач, математических закономерностей, методов доказательства утверждений, выполнение проектов и др. Поисковая деятельность развивается в результате понятийных или тематических обобщений. В процессе такой деятельности раскрываются причинно-следственные и другие связи между предметами и явлениями, выявляется их внутренняя сущность. В результате этих обобщений происходит усвоение новых знаний.

2. Творческая – решение сложных нестандартных задач, составление математических задач; математическое моделирование реальных или прикладных ситуаций; художественно-математическое творчество и др. Через творческую деятельность организуются межпонятийные или поурочные обобщения. В процессе данного вида обобщений выявляются общие и существенные признаки между отдельными понятиями, осуществляется переход от частных к общим понятиям, раскрываются связи и отношения между элементами данной системы понятий.

3. Исследовательская – исследование с помощью средств математики абстрактных математических, реальных ситуаций и др. Творческая и исследовательская деятельность происходит на этапах тематических или итоговых обобщений и обеспечивает усвоение целостной системы понятий, из которых состоит целый раздел программы.

К*онтрольно-оценочный* этап в процессе обобщения математических знаний мы разделяем на два уровня. На первом уровне выявляются обобщенные закономерности и связи математических понятий. Обучающиеся анализируют свои ошибки, исправляют и вносят коррективы в своих действиях, тем самым осуществляют самоконтроль и самооценку. На втором уровне данного компонента учащиеся оценивают свои действия, проявляют инициативу и самостоятельность в обучении, умеют осуществлять информационный поиск и использовать знаково-символические средства для создания моделей изучаемых объектов и процессов, осуществляют логические операции сравнения, анализа, обобщения, классификации по родовидовым признакам, устанавливают аналогии, отнесения к известным понятиям, умеют сотрудничать с педагогом и сверстниками при решении учебных проблем, принимают на себя ответственность за результаты своих действий.

Мы полагаем, что соблюдение закономерностей мыслительной деятельности в процессе обобщения и систематизации знаний в проектировании учебной деятельности обучающихся способствуют развитию самостоятельной деятельности.

1.3. Уровни сформированности опыта самостоятельной деятельности обучающихся в освоении математики на основе обобщений, показатели и критерии их оценки

В процессе углубленного обучения математике существуют факторы, способствующие возникновению формализма знаний. Эти факторы делятся на объективные и субъективные. Объективные факторы не зависят от воли и умений учителя и учащегося. Они встречаются при выполнении учащимися сложных видов действий со знаково-символическими средствами, когда математические понятия рассматриваются на высоком уровне абстрагирования.

К этим факторам также можно отнести недостаточную разработанность технологии обучения математике, способов выявления психофизиологических и психофизических особенностей восприятия, памяти и мышления обучающегося. Субъективные факторы возникают в зависимости от воли и умений учащихся и учителя. Это высокая интенсивность информационного потока знаний и недостаточность способов отбора нужной информации; недостаточная развитость математической грамотности; слабая мотивация и неустойчивость интереса учащихся; недостаточное владение педагогами учебно-методическими и технологическими средствами по формированию творческой и самостоятельной активности в процессе обучения математике.

Целостность (в методологии означает высокий уровень сформированности и развития явления, качественную его полноту, совершенство, идеал, когда явление полностью реализует присущие ему функции) процесса обеспечивается фундированием опыта самостоятельной деятельности учащихся в процессе обобщения математических знаний.

Фундирование опыта личности представляет собой процесс создания условий для поэтапного углубления и расширения знаний на основе спиралевидной схемы развертывания и становления преемственности моделирования сущности базовых знаний, умений, навыков когнитивной деятельности обучающихся. Учебные элементы, позволяющие отобрать обобщенные математические знания и действия более высокого уровня становления существенных связей, являются структурообразующим фактором преемственности слоев спирали фундирования. Каждый следующий слой спирали фундирования нацелен на совершенствование и углубление теоретических знаний, практических умений, постановки эксперимента, а также на совершенствование использования исследовательских приемов и методов, развития навыков самостоятельной деятельности обучающихся.

В наиболее общем плане фундирование – это «процесс становления опыта личности, который происходит в опоре на его поэтапное расширение и углубление и становление тех качеств личности учащихся, которые необходимы и достаточны для освоения поэтапного теоретического или эмпирического обобщения школьного предметного содержания в направлении развития мышления» [183]. Для этого Е.И. Смирнов рассматривает интегративные конструкты как целостные интегрирующие механизмы реализации преемственности содержания школьного и вузовского образования. Методологической основой выступает наглядное моделирование, которое определяется Е.И. Смирновым как «процесс формирования адекватного категории диагностично поставленной цели устойчивого результата внутренних действий обучаемого на основе моделирования существенных свойств, отношений, связей и взаимодействий при непосредственном восприятии приемов знаково-символической деятельности с отдельным математическим знанием или упорядоченным набором знаний» [182].

Отличительной особенностью углубленного обучения математике является то, что осуществляется возможность реализации преемственности содержания обучения через прохождение всех этапов обобщения (первичное, понятийное, межпонятийное, тематическое, итоговое, межпредметное). Это создает условия для развертывания целостного понятия об изучаемом материале «на основе интеграции с наукой; освоения содержания учебного материала в единстве теоретического, практического, прикладного, эвристического и деятельностного компонентов; выделения, обоснования и освоения базовых учебных элементов школьного предметного опыта, с последующим теоретическим обобщением и практическим расширением структурных единиц до элементов актуализации современного научного знания, раскрывающих их сущность, целостность, вариативность, приложения, сквозные и трансдисциплинарные связи» [182].

Процесс обобщения как фундирующий модус складывается из отдельных звеньев – комплексов знаний и действий, этапов урока, или уроков, занятий и ситуаций, каждый из которых непрерывно связан со всеми предыдущими в единую цепь – систему, спираль фундирования. Целостность и направленность процесса обобщения обеспечивается взаимодействием между компонентами фундирующего процесса. Таким образом, происходит последовательное (спиральное) обобщение по этапам усвоения знаний (М.А. Холодная**)** следующим образом (рисунок 1.1).

Этап мотивировки к знаниям: создание условий для осознания обучающимися недостаточности их имеющегося опыта, появление у обучающегося интереса к освоению обобщенного содержания и сущности математических знаний и процедур, мотивов достижения, самоопределения и самоорганизации, определение образцов обобщения знаний. Происходит настрой личности на самоопределение и самоорганизацию.

Рисунок 1.1. Спираль фундирования этапов усвоения математических знаний

Этап категоризации: на этом этапе актуализируются знания и процедуры, устанавливаются знания, которые уже есть у учащихся, предусматривается повторение имеющихся знаний и определение познавательных и практических проблем. Введение знаково-символического обозначения нового понятия, ориентация ребенка на выделение отличительных признаков соответствующего понятия происходит через множественное целеполагание. Через решение имеющихся проблем следует переход к новым знаниям и новой ситуации через обзорное представление и самостоятельную постановку вопросов.

Этап обогащения знаний: вводятся теоретические вопросы углубленного изучения, при котором осуществляются поиск и изучение существенных связей между объектами. Проявляется самоактуализация личности в выраженности ценностных и личностных характеристик познавательной деятельности на основе наглядного моделирования объектов и процедур, построения частных задач, решаемых общим способом, использования накопленного опыта при оперировании новым понятием, расширения направлений осмысления его содержания.

Этап переноса знаний: применение нового усваиваемого понятия в различных ситуациях с самостоятельным выстраиванием отдельных аспектов его содержания. Этап позволяет выявлять существенные и несущественные условия, исследовать, творить через решение различных задач, аналитическое и экспериментальное исследование знаний и приемов решения проблемы, выбор содержания этапов выявления сущности, обоснование решения и проблем, практическую деятельность.

Этап свертывания знаний: представление образа понятия в сжатой форме через верификацию данных и знаний, сопоставления результата с условием задачи. Обобщаются знания и способы действий, проводится самоанализ и рефлексивный самоконтроль, появляется новая цель.

Знания человека оцениваются не в его сумме, а по степени структурированности и обобщенности. Создание системы знаний и полного объема навыков, обеспечивающей не только успешную профессиональную деятельность, но и деятельность в нестандартных жизненных ситуациях сегодня является основной задачей образования в контексте новых ФГОС.

Одна из закономерностей процесса обобщения – это преемственность этапов его развития: новый, более высокий этап основывается на предыдущем этапе обобщения. С каждым переходом на следующую ступень обобщения происходит все более глубокий анализ фактов, раскрываются их связи и выделяется существенное. Знания специальных способов, правил, приемов позволяют выйти на высшую ступень обобщения. В этом заключается развивающее значение обобщения.

Проблема развития мышления личности рассматривается во многих психологических исследованиях. Многие исследователи выделяют уровни самостоятельной деятельности обучающегося. В учении И. Гербарта выделяются четыре ступени:

I ступень – введение нового материала («ясность»);

II ступень – установление связи между новым и уже известным («ассоциация»);
III ступень – обобщение и формулировка выводов («система»);
IV ступень – практическое применение знаний («метод»).

В работах Ю.К. Бабанского, И.Я. Лернера, Г.И. Щукиной и др. выделяется роль степени самостоятельности обучающихся при определении уровней учебно-познавательной деятельности (репродуктивный; объяснительно-иллюстративный; проблемный; частично-поисковый; поисковый). Д.Б. Богоявленская выделяет репродуктивный, эвристический и креативный уровни интеллектуальной активности. У В.П. Беспалько уровни самостоятельной деятельности выделяются по степени овладения действиями: узнавание объектов и выполнение действий с ними, репродуктивное действие, продуктивное действие, творческое действие.

У А.В. Усовой выделяются три уровня сформированности познавательных умений у учащихся: низший, средний и высший. Низший уровень – хаотичное, неосознанное выполнение лишь отдельных операций; средний уровень характеризуется как выполнение всех требуемых операций в недостаточно продуманной последовательности и осознанности; высший уровень – осознанное выполнение всех операций в рациональной последовательности [202].

Т.И. Шамова выделяет репродуктивный, частично-поисковый, исследовательский уровни. У Н.А. Половниковой выделяются копирующий, воспроизводящее творческий, конструктивно-творческий уровни развития самостоятельной познавательной деятельности.

Обобщая различные подходы к определению уровней самостоятельной деятельности обучающихся, мы выделяем:

I уровень – репродуктивный (воспроизводящий): деятельность по образцу, по алгоритму и при опосредованном обращении к информационной среде. Это взаимодействие проявляется, в основном, в самостоятельном выполнении задания по составленному учителем плану («натаскивание»). Если задача не подходит по образцу, тогда обучающиеся оказываются в тупике, не могут и не пытаются найти решение задачи, ссылаясь на то, что такие задачи не решались. Это объясняется тем, что устойчивый интерес, критичность и математические способности в этом возрасте еще окончательно не сформированы. На этом уровне актуализация знаний и процедур, мотивация к учебе формируются через информацию, основанную на исторических и математических фактах, образцах деятельности.

II уровень – эвристический (воспроизводяще творческий): деятельность по самостоятельно выбранному варианту алгоритма, наиболее соответствующему заданию и условиям при активном применении информационных технологий как средства для решения информационных задач в учебной деятельности. На данном уровне обучающийся стремится самостоятельно находить обобщенные способы решения широкого круга задач. Он умеет применять определенный метод решения задачи в разных разделах математики и в смежных учебных предметах, стремится найти свое решение, алгоритм действий. Обучающиеся умеют синтезировать, анализировать, абстрагировать, сравнивать и т.п., то есть обладают широким набором приемов умственных действий. В классах с углубленным обучением математики в основной школе данный уровень встречается чаще всего.

III уровень – творческий: самостоятельное планирование и свободное выполнение деятельности с высокой степенью сформированности информационно-компьютерной компетентности обучающихся. Ученики, достигшие этого уровня, умеют самостоятельно оперировать математическим материалом, способны найти более рациональный путь решения задачи. Обучающиеся, достигшие этого уровня, умеют самостоятельно оперировать математическим материалом, способны найти более рациональный путь решения задачи, умеют обнаруживать недостаточность имеющихся у них знаний и находят нужную форму пополнения знаний. Они владеют навыками самоконтроля, самоорганизации и саморегуляции, способны к самооценке и рефлексии деятельности, систематической активной познавательной самостоятельности. У них развита потребность в постоянном самообразовании.

Для планирования работы по обеспечению преемственности самостоятельной деятельности, нужны критерии и показатели, по которым можно было бы судить об их обеспеченности.

Разными учеными установлены различные критерии сформированности самостоятельной деятельности обучающихся. Самостоятельную деятельность И.Я. Лернер рассматривает как сформированное стремление и умение учащихся познания в процессе творческого поиска способа решения задачи. У Н.А. Половниковой и Т.И. Шамовой самостоятельная деятельность рассматривается с точки зрения личностных качеств учащихся, в зависимости от мотивов деятельности. А.В. Усова выделяет в качестве критериев определения деятельности степень умений выполнения операций, их осознанность, полноту, рациональность и степень сложности.

Соглашаясь с исследованиями Н.Т. Ням [126] отмечаем, что самостоятельная активность, самоорганизация, саморегуляция являются основными критериями определения уровня сформированности самостоятельной деятельности учащихся:

– самостоятельная активность проявляется через ярко выраженную мотивацию к самостоятельной деятельности (познавательный интерес к самостоятельному активному поиску методов решения задачи на основе теоретического осмысления изучаемого материала, интерес к проектной и исследовательской деятельности, целеустремленность, умение обучающегося определять цели и пути их достижения), осведомленность об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности (знание об учебных действиях, активная самостоятельная деятельность, открытость новому, готовность обучаться), научное общение (участие в олимпиадах, в конкурсах, в научно-практических конференциях, публикация статей).

– самоорганизация выражается в осознанном самостоятельном определении учебной цели и самостоятельном планировании работы по ее достижению. Учащиеся целенаправленно ищут и отбирают нужную информацию, с помощью исследовательских и творческих методов находят рациональное решение поставленной задачи, самостоятельно создают новые продукты учебной деятельности. Показателями данного критерия являются академическая успешность учащегося (объем и глубина математических знаний, установление связей математического знания с другими, системность знаний, решение задач различного уровня сложности), качество обобщенности знаний и процедур (гибкость в нахождении нестандартных и рациональных способов решения задач, осознанность выбора способов решений, интерпретация математических знаний в практических ситуациях, применение математических знаний в новых ситуациях);

– саморегуляция выражается в умении работать в команде – диалоге культур (готовность к совместному творчеству, умение взаимодействовать и слушать, передавать информацию, устанавливать и передавать связь между информационной, математической и естественной областями), в умении адаптироваться и осознании личностных смыслов и предпочтений (способность управлять процессом учебной деятельности, стремление довести решение поставленных перед собой задач до итогового результата, устойчивость волевых усилий), самооценке (умение проводить рефлексию деятельности, умение обосновывать свое решение учебной задачи, взаимопомощь и взаимодействие в организации самостоятельной деятельности с другими).

Умение решать задачи и обсуждение спорных вопросов учебного материала, требует от учащихся знания математических фактов и исторического контекста проблемы. Но знание фактов не всегда ведет к успешному решению проблемы, так как чаще всего эти проблемы не имеют известных решений. Для успешного решения проблемы требуется творческий подход, нахождение новых связей и их применение.

Таким образом, самостоятельная деятельность развивается на основе приемов учебной деятельности и от уровня ее сформированности зависит качество усвоения знаний. Каждый обучающийся осваивает приемы учебной деятельности в индивидуальном темпе. Поэтому для учащихся каждого уровня «обучение имеет разные цели: первый уровень (использование обобщенных приемов решения задач в стандартных условиях); второй уровень (перенос обобщенных приемов в незнакомые ситуации и нахождение новых приемов); третий уровень (самостоятельное обобщение и нахождения новых приемов)» [126].

Организация самостоятельной деятельности учащихся состоит из различных форм работы с теоретическим и практическим материалом решения задач. Важным обстоятельством является овладение учащимися универсальными действиями, лежащих в основе математической грамотности, в процессе обобщения математических знаний средствами наглядного моделирования и фундирования опыта математической деятельности. Главной задачей углубленного обучения математике в основной школе на основе обобщения знаний и действий является преемственность самостоятельной деятельности нахождения и применения на практике интерактивных методов освоения обобщающих приемов и действий (таблица 1.1).

Таблица 1.1

Граф согласования уровней развития самостоятельной деятельности и критериев их определения

Критерии	1 уровень	2 уровень	3 уровень
Самостоятельная активность	Стремление к самостоятельному решению поставленной задачи, определние целей и путей достижения с помощью учителя	Стремление к теоретическому осмыслению учебного материала, умение самостоятельно определять цели	Яркий интерес к самостоятельному активному поиску методов решения задачи, понимание личностного смысла математического содержания,
Самоорганизация	Доведение до конца задания, решение задач, осознание деятельности с помощью учителя	Целенаправленный самостоятельный поиск и отбор информации, академическая успешность, научное общение с помощью учителя	Нахождение рационального решения задачи, устойчивые волевые усилия к решению поставленных задач, высокая академическая успешность, обобщенность знаний и процедур, активное научное

Критерии	1 уровень	2 уровень	3 уровень
Саморегуляция	Принимает цель поставленную учителем, решает поставленную задачу, самооценка с помощь учителя.	Поиск методов решения задачи, самостоятельное использование исследовательских методов и в социальном взаимодействии нахождение рационального решения, осознание личностных смыслов, самооценка и взаимопомощь с помощью учителя	Консультативная деятельность учителя носит характер рекомендаций. Учащиеся самостоятельно составляют план достижения цели и действий с помощью новых способов решения задачи, могут провести самооценку

Таким образом, преобразование мыслей, умственное экспериментирование в ходе решения задачи тесно связаны с процессом обобщения, когда закрепление, углубление, обобщение и систематизация предметных знаний учащихся последовательно ведет к активизации мыслительной деятельности. Так происходит самообучение, самостоятельное расширение и углубление имеющихся знаний.

Выводы по главе 1

1. В процессе обобщения математических знаний происходит овладение основными конструктами теории изученного материала. Обобщение как основной элемент обучения, способствует преемственности знаний и самостоятельной деятельности на каждой ступени учебного процесса. Обобщение мы рассматриваем как познавательный процесс и результат, заключающийся в мысленном выделении и актуализации общих существенных математических связей в содержании понятий и теорем. В процессе обобщения происходит осмысление связей и отношений между предметами и явлениями с постепенным углублением в сущность познаваемых явлений через обобщение, которое развивается поэтапно.

Возможности обобщения знаний в углубленном обучении математике в основной школе предоставляют необходимые условия для развития самостоятельной деятельности и потребности в постоянном самообразовании. Нами выделены функции обобщения математических знаний (фундаментализация знаний, трансформация знаний, развивающая функция, культурологическая, аналитическая функция) и принципы обобщения знаний, которые служат основой для проектирования преемственности самостоятельной познавательной деятельности обучающихся. Выделены и характеризованы основные результаты обучения математике в виде универсальных учебных действий, основанных на принципах обобщения знаний и действий обучающихся. Выявлены педагогические условия обобщения математических знаний и действий, обеспечивающие преемственность самостоятельной деятельности в личностном, методическом, организационно-технологическом аспектах. Установлено, что обобщение знаний способствует преемственности формирования самостоятельной деятельности обучающихся, так как способности к обобщению обеспечивают самостоятельное получение новых знаний, отбор и их систематизацию для решения научных и прикладных задач. Актуализация фундирования опыта самостоятельной деятельности происходит в результате преемственности этапов обобщения математических знаний. Преемственность этапов обобщения знаний и действий в самостоятельной деятельности – одно из условий процесса обобщения, когда новый, более высокий этап представляет собой интеграцию самостоятельного личностного осмысления обобщенных конструктов и педагогическую поддержку осмысления связей и содержания предыдущего этапа обобщения. Открытость и насыщенность информационно-образовательной среды процесса обобщения математических знаний на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся влияет на эффективность и качество организации и реализации различных видов самостоятельной деятельности в углубленном обучении математике.

2. Преемственность самостоятельной деятельности обучающихся в классах с углубленным изучением математики в основной школе определяет и обеспечивает единство содержательных связей и процессуальной когнитивной деятельности обучающегося в освоении этапов становления обобщенных конструктов на более качественном уровне их взаимосвязи и интерпретации в контексте новых знаний, операций, форм, методов и учебных действий. Целостность процесса обеспечивается фундированием опыта математической деятельности обучающихся в процессе обобщения математических знаний через прохождение всех этапов

обобщения (первичное, понятийное, межпонятийное, тематическое, итоговое), ведущих к формированию обобщения (теоретического или эмпирического). При фундировании знаний и действий происходит также последовательное (спиральное) обобщение по этапам усвоения знаний (мотивировка, категоризация знаний, обогащение знаний, перенос знаний, свертывание знаний). Самостоятельная деятельность обучающихся включает различные формы работы как с теоретическим материалом, так и в процессе решения задач. При этом важным обстоятельством является овладение обучающимися универсальными учебными действиями в контексте интерактивной деятельности на основе обобщения математических знаний средствами наглядного моделирования и фундирования опыта математической деятельности.

3. Выделены три уровня сформированности самостоятельной деятельности учащихся в процессе обобщения знаний (репродуктивный, эвристический, творческий). Рассмотрены следующие компоненты учебно-познавательной самостоятельной деятельности в процессе обобщения математических знаний: мотивационный, целевой, содержательно-технологический, обобщающе-преобразующий, контрольно-оценочный. Для планирования работы по обеспечению преемственности самостоятельной деятельности, определены критерии, по которым можно было бы судить об их обеспеченности: самостоятельная активность, самоорганизация, саморегуляция. Главной задачей углубленного обучения математике в основной школе на основе обобщения математических знаний является отыскание и применение на практике интерактивных методов освоения обобщающих приемов и действий. Особенностями такого подхода являются развитие внутренней мотивации (любознательность, любопытство, стремление к новым знаниям и к расширению знаний), целеполагания (выделяются наиболее трудные вопросы теории, осознается новый уровень математических знаний, появляется учебная цель), поисковой, творческой, исследовательской и экспериментальной деятельности через фундирование опыта личности как методологической основы преемственности самостоятельной деятельности обучающихся.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА УГЛУБЛЕННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ В ПРОЦЕССЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗНАНИЙ

2.1. Интерактивные технологии в обобщении знаний при углубленном изучении математики в условиях информационной образовательной среды

Информационные возможности общества открывают новые пути для совершенствования методов и содержания обучения, для обеспечения преемственности самостоятельной деятельности.

Как отмечает О.Б. Епишева, «для организации педагогического процесса, отвечающего новой парадигме образования, недостаточно переосмысления и преобразования отдельных его звеньев; необходимо совершенствование всей методической системы обучения в целом» [61].

Имеется немало исследований, посвященных формированию и развитию способностей мышления в различные периоды детства и связи этого процесса с обучением, которая схематично может быть выражена следующим образом:

– обучение и развитие – независимые, но сопряженные процессы;

– правильно организованное обучение ведет за собой психическое и умственное развитие;

– новый этап в психофизиологическом развитии позволяет переходить к следующим этапам в обучении.

Таким образом, в современных условиях насыщенной информационной среды школа в широком смысле слова не просто транслирует информацию, а учит обобщенным способам самостоятельной деятельности. В условиях цифровой образовательной среды в организации учебного процесса широко применяются разнообразные информационные технологии (Г.К. Селевко):

1. Как «проникающая» технология (применение обучающих компьютерных программ по различным темам, разделам для отдельных дидактических задач);

2. Как основная, определяющая, наиболее значимая из используемых в данной технологии частей;

3. Как монотехнология (все обучение и управление учебным процессом, опираются на применение цифровых ресурсов).

Они применяются в обучении математике в соответствии с требованиями принципов обучения, на которых основывается концепция обобщения и систематизации знаний учащихся:

1) *мультимедийное предъявление* материала (*принцип наглядности, прочности*);

2) *навигация* обучения в соответствии с учебными и социальными возможностями учащихся *(принцип индивидуализации и дифференциации);*

3) *производительность* обучения (*принцип проблемности*);

4) *интерактивность обучения (принцип доступности, сознательности и самостоятельности)*;

5) *коммуникативность* обучения (*принцип преемственности, развития).*

Свободный доступ к различным информационным ресурсам, дистанционность, мобильность, возможность моделирования образовательных процессов способны обеспечить эффективность обучения каждого школьника. В современных условиях информационные технологии образования тесно связаны с процессом обучения математике. Важно отметить, что их применение будет наиболее эффективным, если применять их не только в качестве инструмента доступности передачи знаний, а в качестве средства познания. Мы понимаем информационно-образовательную среду (ИОС) как совокупность субъектов образовательного процесса (учителя, обучающиеся), методических компонентов (содержание обучения, учебные и методические пособия) и средовых информационных ресурсов (средства обучения и коммуникации, совокупность технических и программных средств хранения, обработки, передачи информации) учебной деятельности, обеспечивающих эффективную реализацию современных образовательных технологий, ориентированных на развитие личности.

Информационно-образовательная среда трансформируется в цифровую образовательную среду (ЦОС) за счёт ее технологического совершенствования, внедрения более качественного и скоростного интернета и реализации цифровой трансформации системы образования.

Основы обучения в цифровой образовательной среде разрабатывали С.А. Бешенков, Л.Л. Босова, А.Ю. Уваров, И.В. Роберт, М.А. Шутикова и др. В современной цифровой образовательной среде интерактивные технологии обучения обладают многими дидактическими свойствами (различные виды представления учебной информации, способы передачи и хранения информации, дифференциация и интеграция обучения). Средства обучения представлены различными программными продуктами (интерактивные учебные и лабораторные материалы, динамические и презентационные возможности наглядной демонстрации учебного материала, дистанционные формы обучения, сетевые сервисы) и техническим оборудованием. Организацию учебного процесса можно проводить в форме веб-занятий, сетевых онлайн-сервисов, телеконференций и т.д. Учитель принимает непосредственное участие в учебном процессе, который может предполагать двустороннее общение в режиме онлайн, выступает в качестве навигатора учебной деятельности, может дифференцировать процесс обучения и имеет возможность обеспечить объективность контроля и оценки деятельности учащихся.

Новые цифровые технологии стремительно совершенствуются, в соответствии с чем требуется менять и подходы к педагогическим технологиям. Необходимо продумать применение средств обучения к изучаемому материалу с учетом целесообразности их применения средства.

Применение интерактивных методов, форм и средств обучения в курсе математики на разных ступенях образования исследовали М.С. Артюхина, И.В. Китаева, Л.А. Линевич, С.В. Напалков, М.А Павлова, В.И. Рыжик, А.И. Рыжков, Е.И. Санина, М.В. Шабанова, Т.С. Ширикова, А.В. Ястребов и др.

Одной из эффективных форм организации интерактивного обучения является *кейс-метод*. Весомый вклад в создание и внедрение этого метода внесли Г.А. Брянский, О.В. Козлова, Ю.Д. Красовский, В.Я. Платов и др. Главной целью кейс-метода является развитие способности разработать проблему и найти ее решение, научиться работать с информацией. При всем этом упор делается не на получение готовых знаний, а на их выработку, на сотрудничество учащихся и учителя. Информация в виде кейса, в основу которой кладутся реальные события и факты из жизни, представляется учащимся в произвольной форме и может содержать избыточную информацию, проблема может быть точно не сформулирована.

В научно-методической литературе выделяют разные типов кейсов: практический, обучающий, исследовательский. Каждый кейс несет в себе обучающую функцию, только степень выраженности этой функции варьируется в различных видах кейсов.

Практический кейс содержит практико-ориентированные задания из жизненной ситуации, для решения которых применяются математические знания. Обучающий кейс состоит из математико-информационных заданий из математических ситуаций по определенной теме или разделу. Исследовательский кейс предполагает создание математической модели с интерпретацией и исследованием определенной проблемы (см. приложение 1).

Одной из образовательных технологий, органический синтезирующей сильные стороны современных информационных возможностей в совершенствовании процесса обобщения знаний и придающей выполнению учебных заданий дополнительные стимулы и смыслы, является технология *образовательных Web-квестов* (см. приложение 2). Данная технология позволяет целостный учебный материал рассмотреть в тесной связи с теорией и ее прикладным содержанием и построена на информационном контенте, имеющего особую структуру. На данный момент возможности технологии веб-квеста в большей степени отражены в исследованиях (Е.И. Багузина, О.В. Волкова, С.Ф. Катержиной, С.В. Напалкова, Е.М. Шульгина и др.). С.В. Напалков выделяет пять основных компонентов веб-квеста: теория, приложения, проблемы, архивы и ошибки [120]. Теоретический компонент представляет собой комплект заданий углубленного содержания, решая которые, учащиеся получают целостное представление о месте и учебно-познавательной роли данных задач в изучаемой теории. Приложения включают задания, с помощью которых учащиеся расширяют свои представления о практических применениях изученного в математике. Проблемы – это такие задания исследовательского характера, в которых встречаются неизвестные факты по изученной теме, архивы содержат исторические сведения и задания, расширяющие знания по истории математики, упорядочивающие их хронологические или сюжетные представления. Компонент «ошибки» состоит из заданий, которые содержат информацию о курьёзных случаях, распространённых или единичных математических ошибках по данной теме, а также задания по их анализу и отысканию возможных путей предупреждения. Особенности поисково-познавательных заданий во многом руководствуются основными положениями деятельностного подхода. В процессе работы по данной технологии формируются способность к обобщению, анализ, умение разбираться в информационном потоке и находить полезную информацию, ставить учебные цели и находить пути её достижения; способность применять знания о современных достижениях науки в мире в учебной деятельности, знания о разных математических методах обработки информации и исследования.

Работа организуется в виде *проектной деятельности* в малых группах с ролевым распределением. Проекты оформляются в виде презентаций, творческих и исследовательских работ, рефератов и т.п. Приведем пример заданий по теме «Красота простых чисел» тематического образовательного web-квеста «Число и наука о нем», целью которого является расширение знаний о числах, оценивание достижения предыдущих поколений в развитии математики как науки, обобщение и систематизации научных знаний о числах:

1. Что такое Решето Эратосфена? В чем заключается проблема и как она возникла?

2. Составьте по алгоритму Эратосфена решето для чисел от 1001 до 1120. Найдите первое простое число на этом интервале.

3. Исследуйте особенность распределения простых чисел на Скатерти Улама.

Одной из новых образовательных технологий, усиливающей эффект развития творческого мышления, является *технология открытых задач* (А.А. Гин), основанной на теории решения изобретательских задач (ТРИЗ) (Г.С. Альтшуллер), урок состоит из мотивационного, содержательного блоков и резюме. Мотивационный блок состоит из серии интересных фактов с «эффектом чуда», способные вызвать удивление и нацеленные на пробуждение поисковой активности учащихся. Содержательный блок содержит задания логического и творческого характера, способные вызвать абстрактное представление, живое восприятие материала учащихся и требующее речевую, математическую и техническую грамотности. Резюме обеспечивает интерактивность процесса и во взаимодействии предусматривает оценку урока самими учащимися.

В отличие от традиционных задач, типичных для школьного учебника математики, в открытых задачах в условии имеется неопределенность данных, подразумеваются разные варианты ответов. В таких задачах появляется возможность применения стандартных знаний в нестандартных ситуациях. Чтобы решить открытые задачи, от учащегося требуется умение классифицировать, обобщать и проводить аналогии, прогнозировать результат, генерировать идеи. Открытые задачи могут быть включены на любом из этапов обобщения знаний. Примеры открытых задач:

– Можно ли получить в ответе натуральное число, вставив между дробями $\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$ знаки арифметических действий? Какие натуральные числа возможно получить?

– К математическим символам, которые мы сейчас используем, человечество пришло в течение долгого времени. Что могут означать символы для обозначения цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0?

– Может ли пятизначное число равняться произведению его цифр?

– Найдите такие трехзначные числа, которые делятся на 6, но не делятся на 9.

– Можно ли при какой-либо перестановке цифр числа 23456789 получить число, которое представимо в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

Организация учебного процесса в интерактивном формате приводит к тому, что обучающиеся активно вовлекаются в процесс познания. У каждого учащегося появляется возможность понимания и рефлексии по поводу того, что он знает и думает. В совместной деятельности, в общении между учащимися происходит обмен имеющимися знаниями, новыми идеями, способами деятельности.

Такие дидактические свойства средств интерактивных технологий, как возможность отображения и передачи информации в текстовом, звуковом, графическом и любом другом цифровом формате, моделирование реальных или виртуальных процессов и явлений, возможность поиска интересующей информации, ведение интерактивного общения при обработке и транслировании информации усиливают прикладную направленность и интересность содержания учебного материала, привлекательность обучения. «Сделать учебный предмет интересным, – писал А.Н. Леонтьев, – это, значит, сделать действительным или создать вновь определенный мотив, а также создать соответствующие цели школьников» [98].

Способность обучающихся самостоятельно определять учебные цели, оценивать свои действия, осуществлять информационный поиск, осуществлять логические операции сравнения, анализа, обобщения, классификации по родовидовым признакам, устанавливать аналогии, отнесения к известным понятиям, уметь сотрудничать с педагогом и сверстниками развивается через такие дидактические свойства интерактивных технологий обучения, как возможность осуществлять обратную связь, взаимодействие в диалоге, организация индивидуализации и разноуровневой дифференциации обучения, конструирование своей индивидуальной траектории изучения учебного материала, консультации и др.

2.2. Принципы отбора содержания углубленного обучения математике на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в процессе обобщения знаний

В соответствии с современными тенденциями в образовании, новыми государственными стандартами мы выделили основные идеи развития самостоятельной познавательной деятельности, опираясь на которые определена стратегия отбора и структурирования учебного материала на основе обобщения знаний для углубленного обучения математике.

Одна из идей заключается в том, что каждое из фундаментальных понятий (число, уравнение, неравенство, фигура, преобразование, отношение и т. д.) в курсе обучения математике рассматриваются в непрерывном развитии. Содержательно-методическая линия по принципу преемственности выстраивается так, что в курсе обучения усвоение знаний, развитие определенных умений и навыков ведет к формированию более сложных знаний, умений и навыков (большой подвижности мыслительных процессов; тенденции к ясности, простоте, рациональности, экономичности, изяществу решения, математической памяти, способности к пространственным представлениям). Следующая идея заключается в том, что использование основных понятий одной линии в другой, реализация внутрипредметных связей по содержательной линии, реализация связей с другими предметами обеспечит возможность гибкого оперирования этими знаниями в межпредметной связи, свободного переключения от одной умственной операции к другой, стремления мыслить свернутыми умозаключениями, широкого овладения школьниками различными универсальными действиями математической грамотности.

Основными компонентами математического мышления являются содержательный анализ, планирование и рефлексия. Л.М. Фридман отмечает: «Математическое мышление – это предельно абстрактное, теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения» [209]. Развитое теоретическое мышление выражается в сформированности общих приёмов мышления, которые отличаются универсальностью и содержательным интерпретациям математических фактов в других сферах деятельности.

Обучающийся подросткового возраста не только овладевает новыми способами действий. Он отличается стремлением иметь собственный замысел и план действий, к утверждению своего собственного «Я». На своем уровне делает анализ ситуации, выдвигает гипотезу и получает свой собственный вывод. Учитывая такие возрастные особенности, углубленное обучение математике должно быть организовано так, чтобы у обучающихся была возможность выбора приоритетных для него видов и способов учебной деятельности по усвоению учебного материала. Как отмечают многие психологи, возможность выбора действий мотивирует подростка к активной самостоятельной деятельности, к активному общению, которые, как ведущие мотивы деятельности подростка приобретают осмысленность и целенаправленность, в направлении саморазвития, самореализации и самоопределения.

Достижение целей изучения математики в классах с углублённым изучением математики в основной школе требует несколько иного построения курса обучения и организации учебного процесса в отличие от общеобразовательного. Ведущей идеей является обучение деятельности по приобретению математических знаний, способам рассуждений, применяемым в математике. Мы выделяем три особенности углубленного обучения математике:

1. Формально-логический подход в обучении, который позволяет вскрывать устойчивые связи между элементами рассматриваемого процесса или явления и обеспечивает формирование научного мировоззрения, представления о формально-логическом построении системы математических знаний, идеях и методах математики, развитие логического и абстрактного мышления, способность к обобщению.

2. Расширенный теоретический материал и задания сложного уровня для обеспечения высокого уровня интеграции школьных математических знаний и современных достижений в математике. Материал может быть построен в виде

отдельных дополнительных глав и параграфов, соответствующих темам, которые не изучаются в общеобразовательных классах, так и в виде расширенного изложения теоретического материала и включения дополнительных заданий повышенного уровня сложности к тем темам, которыми совпадают с программой для общеобразовательных классов.

3. Развитие навыков исследовательской деятельности, которое обеспечивает формирование умения моделировать реальные ситуации, исследовать построенную модель, интерпретировать полученный результат. Развиваются такие специфические умения в процессе изучения математического материала, как умение формулировать, записывать в различных формах, математических моделях одно и то же утверждение, устанавливать аналогию методов решений задач; обнаруживать их структурные сходства; разбивать задачу на подзадачи (выделять логические составляющие математической задачи), умение находить различные варианты решения задач, доказательства теорем, умение делать обобщающие заключения, выводы. А.А. Столяр выделяет, что создание «педагогических ситуаций, стимулирующих самостоятельные открытия учащимися математических фактов, их доказательств, решений задач» поможет достичь развивающего эффекта обучения математике [188].

4. Процесс формирования фундаментальных понятий в одной дидактической единице происходит по «расширяющейся спирали» становления и интерпретации сущности с постепенным расширением и включением новых смыслов и понятий. Такими иерархически выстроенными дидактическими единицами могут быть комплексы задач с теоретическим, практическим и прикладным компонентами, которые можно понимать как реализацию идеи фундирования опыта личности. Усвоение новых понятий на основе обобщения, интерпретация новой информации являются одним из необходимых условий обогащения личностного опыта учащегося, на основе которого происходит формирование функциональной грамотности обучающихся. А.Р. Лурия отмечает, что с каждым новым понятием у человека связано определенное смысловое поле. У каждого человека имеется свое представление о данном понятии и опыт, связанный с этим понятием. Поэтому,

важно на этапе усвоения новых понятий связывать его с имеющимися у ученика знаниями и имеющимся опытом об этом понятии из жизни, делая акцент на его использование в качестве опорной информации. Это позволит обучающимся усвоить знания более прочно и создать условия для понимания новой информации. Отсюда вытекает еще одно условие достижения личностного опыта обучающихся: включение исторического контекста, как части культурного контекста математики, в деятельность обучающихся. Исторический контекст математического материала отражает смысл создания фундаментальных понятий и методов математики и способствует переосмыслению собственного представления, получению новой информации у обучающихся. Исторические ситуации объясняют происхождение и историогенезис математических идей, способствуют возникновению математических вопросов и сомнений у обучающихся, тем самым, мотивируют их к самостоятельной деятельности. В заданиях такого типа раскрываются исторические моменты из жизни ученых, старинные задачи, в которых отражаются быт и культура старых времен, история возникновения и развития того или иного математического понятия и метода.

В разработанном нами в web-квесте «Приемы быстрого вычисления», который выступает как первый этап фундирования понятия числа в курсе обобщения знаний, исторический контекст раскрывает идею расширения числовых множеств и подготовить основу для углубленного изучения чисел. Задания данного квеста уровне имеют и более широкий культурный контекст, в частности художественный, как, например, в задании: «Изучите картину Богдана Бельского «Устный счет» и решите задачу». Это, несомненно, усилит воспитательный потенциал математики как учебного предмета.

Еще одним условием достижения личностного опыта учащегося при углубленном изучении математики является использование генетического подхода. Такой подход основывается на рассмотрение изученных фактов с новой точки зрения, в новых контекстах. Широко используются задачи, которые требуют минимальной помощи учителя. Такая учебная ситуация может быть организована с помощью технологии «Кейс-стади», где задается проблемная ситуация. Чтобы решить проблему, ученик приходит к самостоятельной формулировке цели, выбирает план решения, разбив задачу на мелкие подзадачи. Такие действия позволяют ученику выявить границы своих знаний, ставить следующие учебные задачи, планировать действия и добиваться результатов.

Следующим условием развития является организация такого разного рода взаимодействий между участниками учебного процесса, как диалог культур. Ученик, в процессе углубленного изучения математики оказывается в содержательном взаимодействии (исторические периоды развития математики, внутрипредметные и межпредметные связи, математическая культура в окружающем мире), в диалоге с другими участниками образовательного процесса (совместное творчество и исследование в решении прикладных и профессионально-ориентированных задач с учителями, с учениками и в социальных сообществах), в информационном диалоге (работа с различными источниками информации, поиск информации, моделирование, конструирование новых объектов). Определяющими характеристиками этого направления являются его направленность на формирование целостной системы знаний и мировоззрения, на порождение новых для учащегося смыслов и ценностей, новых средств и способов деятельности. Это позволяет решить проблему фрагментарности математических знаний и избежать ошибки, которые часто допускают учащиеся.

Для того чтобы понять, какие качества требуются для развития способностей к более глубокому изучению математики, исследователями анализировались математические действия: процесс решения задач, способы доказательств логических рассуждений, особенности математической памяти. Этот анализ привел к выводу, что среди наиболее важных компонентов математической деятельности выделяются такие специальные учебные умения, как умение обобщать математический материал, пространственное представление, отвлеченное мышление. Эти действия характеризуются образованием обобщенных ассоциаций и включением их в связи более высокого порядка. Изучая процесс формирования обобщенных действий, Л.С. Выготский выделяет три основные ступени обобщения:

1) синкреты-первая (начальная) ступень. Это обобщения по случайному яркому признаку предметов;

2) комплексы-вторая ступень в развитии обобщений на основе объективных связей между предметами;

3) понятие-третья ступень развития обобщения, в основе которых лежат общие «иерархические» признаки».

Обобщение третьего порядка-понятия, характерно для старшей ступени углубленного обучения математике, которое отличается сформированностью общих приёмов мышления, умением переноса усвоенных знаний и способов деятельности в другие сферы жизнедеятельности. Проявление теоретического типа мышления (в соответствии с концепцией В.В. Давыдова) на математическом содержании в контексте развития самостоятельной деятельности определяется через развитие таких видов математической деятельности, как составление и выбор нужного или оптимального метода для решения поставленной задачи; математическое оценивание результатов вычислений; осознанное употребление и использование математических понятий, общение, основанное на математическим языке, познание и описание окружающего мира с помощью математического моделирования, умение ставить исследовательские проблемы и т.д.

Выделенные условия определяют принципы отбора и реализации содержания курса обобщения знаний, соответствующие общим целям образования и конкретизирующие механизм отбора содержания обучения.

По мнению психологов В.В. Давыдова и методистов-математиков Д. Пойа, Л.М. Фридмана, Г.И. Саранцева, Т.А. Ивановой, формировать способность разрешения проблем помогают специальным образом подобранные задачи. Проблема принципов и методов отбора математических задач на общетеоретическом уровне исследовалась в работах В.С. Леднева, И.А. Рейнгарда и др., применительно к математике в педагогическом вузе в работах Н.Я. Виленкина, А.Г. Мордковича, В.А. Гусева, М.И. Шабунина, Е.И. Смирнова, Н.Л. Стефановой, В.А. Тестова, Г.Г. Хамова, и др. Мы определили принципы к отбору содержания углубленного обучения математике на основе обобщения с эффектом преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в условиях информационно-образовательной среды:

Принцип вариативности, обеспечивающий возможность выбора учащимся доступных для него видов и способов обобщения деятельности, работу с различными изложениями понятий, способы изучения учебного материала различных уровней сложности, возможность применения различных интерактивных форм обучения. Задачи, которые мы включаем в содержание курса обобщения знаний, отражают выбор рациональности, гибкости и нестандартности идей, «изящество» решения, возможность увидеть многие пути решения, возможность получения «побочных» продуктов. Необычные и неожиданные факты математики, проявляющиеся в живой природе, искусстве и культуре, способствуют развитию эстетического чувства красоты.

Принцип генерализации описания процесса освоения сущности понятий и действий от изучения первоначальных проявлений и примеров к их обобщениям. В условии задачи содержатся компоненты междисциплинарного взаимодействия дисциплин, которые укрепляют взаимосвязи теории и практики, усиливают прикладное значение содержания теоретического материала. Задачи с эффектом «неожиданности», аналогии, исторический материал, задачи с поучительным элементом, задачи, раскрывающие красоту математики, в процессе решения которых проявляются межпредметные связи, вызывают у обучающихся повышенный интерес, повышают их творческую активность.

Принцип «расширяющейся спирали» (постепенное расширение и фундирование учебного материала с обогащением и поэтапным включением в содержание новых смыслов и интерпретаций изучаемого понятия). Наиболее трудные вопросы теории вокруг себя собирают основные понятия, законы и методы, отражающие их взаимосвязь. Это повышает доступность предлагаемого учебного материала, сосредотачивает внимание обучающихся в углублении одного направления. Такой концентрированный подход в обучении курса способствует наибольшей эффективности и качества обучения.

Принцип рефлексивного контроля, выражающий анализ обобщенных конструктов содержания специальных заданий и поиск путей решения проблемных ситуаций. Уровень сложности математической задачи должен соответствовать уровню развития обучающихся. В процессе решения таких задач применяются различные знания на основе обобщающего раскрытия их сущности в ходе интерактивной коммуникации и творческого раскрытия личностного потенциала. Задачи подобраны на основе доступности изучаемого материала, подводят к рассуждению и обсуждению с другими участниками процесса решения, вызывает исследовательский интерес. Реализация данных принципов осуществляется на основе процесса фундирования опыта математической деятельности. Динамику их использования на этапах обобщения знаний мы видим в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Динамика использования принципов отбора содержания углубленного обучения математике на этапах обобщения на основе процесса фундирования математической деятельности

Этапы обобщения	Принципы отбора содержания обучения	Условия процесса фундирования
Первичное	принцип генерализации	вскрытие историко-генетических оснований значимости базовых учебных элементов, определение их содержания с использованием информационно-коммуникативных технологий
Понятийное	принцип генерализации, рефлексивного контроля	выделение, обоснование и освоение базовых предметных знаний с их последующим практическим расширением до элементов актуализации современного научного знания
Межпонятийное	принцип генерализации, рефлексивного контроля, расширяющейся спирали	реализация исследовательского и проектного подхода, освоение научного знания с использованием информационно-коммуникативных технологий, проектирование взаимопереходов знаково-символической деятельности
Тематическое	принцип вариативности, генерализации, рефлексивного контроля, расширяющейся спирали	развертывание целостной системы знаний на основе интеграции науки с предметными знаниями, творческое освоение предметной деятельности с использованием информационно-коммуникативных технологий
Итоговое	принцип вариативности, генерализации, расширяющейся спирали, рефлексивного контроля	интеграция содержания, приемов и методов усвоения математических знаний и научного материала, системная интеграция знаний с использованием информационно-коммуникативных технологий

2.3. Модель углубленного обучения математике на основе обобщений, направленная на преемственность самостоятельной деятельности обучающихся

В условиях цифровой образовательной среды у каждого обучающегося созданы условия для различных форм обучения: формальное (управляемое) обучение (урок, семинар, факультатив, практикум, экскурсия и т.д.), неформальное (неуправляемое) обучение (курсы, тренинги, сетевые и дистанционные виды обучения), информальное обучение (общение в кругу семьи, друзей, в сетевых сообществах).

В современных условиях общедоступности широкого поля информации и знаний классические методы обучения дополняются различными видами неформального обучения (различные непрерывно совершенствующиеся компьютерные технологии, программы обучения или курсы самообразования, дистанционные консультации и т.д.), суть которого заключается в том, что цель, содержание и приемы обучения выбирает сам ученик. Как отмечают исследователи, повышение интереса к неформальному обучению наблюдается в старших классах. Следовательно, навыки неформального образования (интерактивность, коммуникативность, рефлексивность) развиваются через преемственность самостоятельной деятельности и являются ключевыми.

Таким образом, результатами обучения являются универсальные учебные действия:

– Личностные: понимание роли математики в познании мира, интеллектуальная честность, объективность и независимость мышления, целеустремленность и настойчивость.

– Регулятивные: саморефлексия (умение адекватно оценивать возможности, анализировать и самостоятельно определять свои действия), саморегуляция (представление о своих возможностях достижения цели, готовность к преодолению трудностей), самоорганизация (способность к целеполаганию, планированию, контроль и самооценка учебных действий).

– Познавательные: самостоятельное выделение и формулирование цели, применение методов информационного поиска, овладение учащимися математическим языком, выбор рационального способа решения задачи, составление математической модели ситуации.

– Коммуникативные: умение точно и сжато выражать мысли, добывать нужную информацию и применять в различных ситуациях, умение слушать и вступать в диалог.

Предлагаемая нами структурно-функциональная модель углубленного обучения математике на основе обобщений, направленная на преемственность самостоятельной деятельности обучающихся, нацелена на развитие личности.

Необходимость построения модели объясняется следующими факторами:

1. Преобладание формальных знаний над освоением содержательной сущности понятий, вычислительных умений, действий и содержания метапредметных и прикладных компетенций, формируемых на основе самоорганизации, наблюдается у многих обучающихся;

2. Организация учебного процесса переориентируется в сторону личностно-деятельностного подхода, когда необходимо учитывать личностные предпочтения и самореализации обучающихся в контексте концепции фундирования опыта личности и наглядного моделирования математических объектов и процедур;

3. Расширились возможности использования ресурсов насыщенной информационно-образовательной среды в обеспечении преемственности самостоятельной деятельности при углубленном обучении математике и развитии навыков универсальной учебной деятельности.

Нами представлена методика углубленного обучения математике на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся основной школы в процессе обобщения знаний, которая преследует актуализацию следующих модусов обучения математике:

1. Фундирование основных понятий, ведущих идей содержательной линии школьной математики; историогенезис понятий, этапов их развития, теоретических и практических приложений как методологическая основа преемственности

самостоятельной деятельности обучающихся.

2. Обобщение, углубление и расширение знаний и актуализация преемственности самостоятельной деятельности обучающихся по основным этапам развертывания содержательных линий школьной математики в процессе освоения существенных связей базовых понятий средствами наглядного моделирования. В среднем школьном возрасте метод наглядного моделирования относится не только к иллюстрациям математических понятий. На более высоком уровне математической деятельности, наглядное моделирование представлено в знаково-символической деятельности.

3. Насыщение информационно-образовательной среды процессами и средствами интеграции математической и информационной деятельности на основе интерпретации и обобщения ранее изученного материала, допускаемой программой с целью его углубления и получения новых знаний.

Наглядно структурно-функциональная модель углубленного обучения математике на основе обобщений, направленная на преемственность самостоятельной деятельности обучающихся, представлена на рисунке 2.1.

Модель структурируется развертыванием в формировании преемственности самостоятельной деятельности целевого, содержательного, организационно-деятельностного и результативно-оценочного блоков.

Целевой блок модели. Цель обучения – преемственность самостоятельной деятельности обучающихся на основе обобщения знаний по углубленному обучению математике: раскрытие потенциала предмета математики в формировании научного мировоззрения, потребности в саморазвитии, осознании нового уровня знаний на основе имеющихся. Для достижения поставленной цели, нам следует решить следующие задачи:

1. Обеспечение углубленными и прочными знаниями учащихся, и умениями применять их в решении различных проблем;
2. Обучение обобщённым способам мыслительной деятельности;
3. Установка к непрерывному образованию в условиях информационно-образоватбельной среды.

4. Обеспечение углубленными и прочными знаниями учащихся, умениями применять их в решении различных проблем;

5. Обучение обобщённым способам мыслительной деятельности;

6. Установка к непрерывному образованию в условиях информационно-образовательной среды.

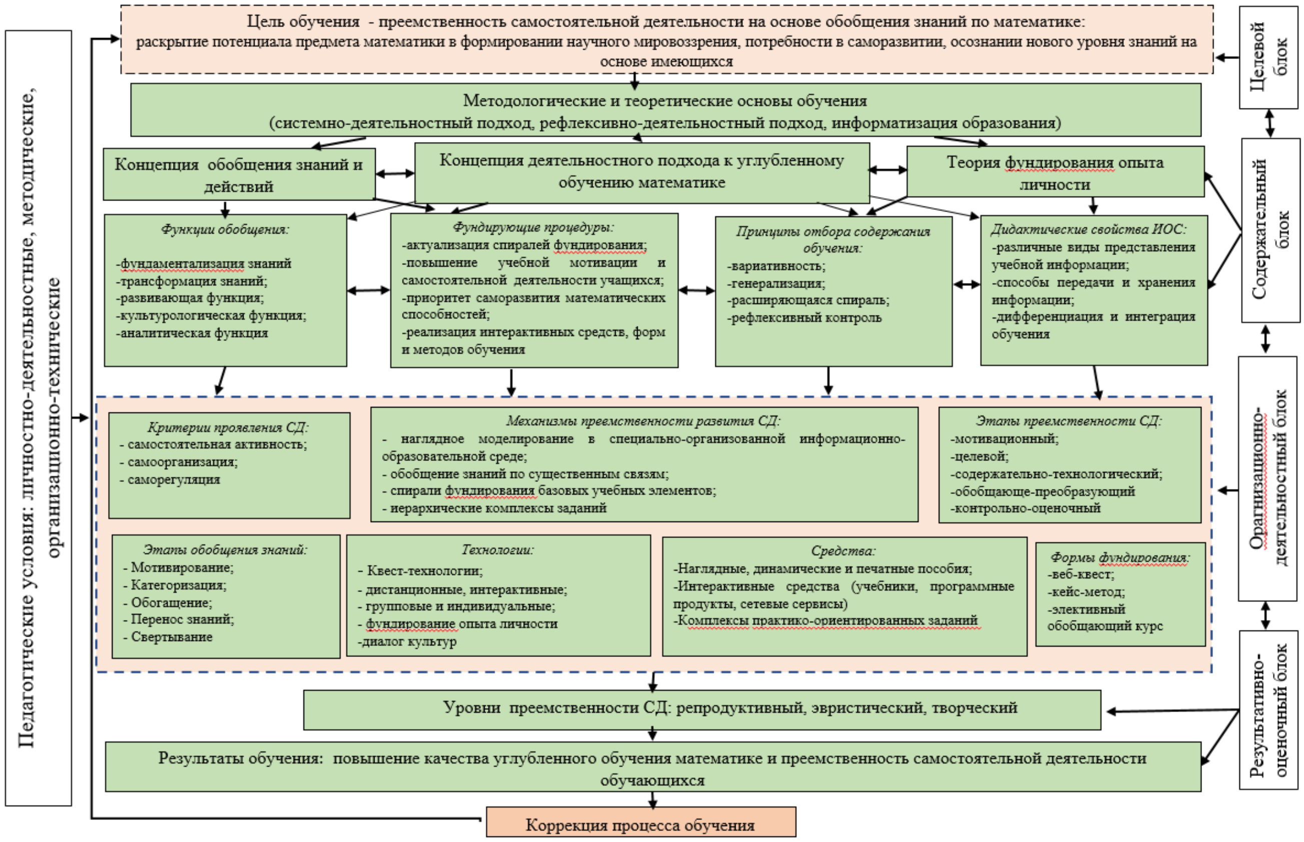


Рисунок 2.1. Структурно-функциональная модель углубленного обучения математике на основе обобщений, направленная на преемственность самостоятельной деятельности обучающихся

В содержательном блоке модели представлены методологические и теоретические основы углубленного обучения математике, способствующие преемственности самостоятельной деятельности в процессе обобщения знаний. Решение поставленных задач основывается на концепции обобщения знаний и действий, концепции деятельностного подхода к углубленному обучению математике, теории фундирования опыта личности. Реализация и взаимодействие данных концепций основываются на функциях обобщения; на фундирующих процедурах актуализации спиралей фундирования, повышения учебной мотивации и самостоятельной деятельности учащихся, приоритета саморазвития математических способностей, реализации интерактивных средств, форм и методов обучения; принципах отбора содержания обучения (вариативность, генерализация, принципы расширяющейся спирали и рефлексивного контроля): дидактических свойствах информационно-образовательной среды (различные виды представления учебной информации, способы передачи и хранения информации, дифференциации и интеграции обучения).

В организационно-деятельностном блоке представлены этапы преемственности самостоятельной деятельности (мотивационный, целевой, содержательно-технологический, обобщающе-преобразующий, контрольно-оценочный); фундирующие этапы усвоения знаний (мотивирование, категоризация, обогащение, перенос знаний, свертывание знаний); формы фундирования (веб-квест, кейс-метод, элективный обобщающий курс); средства обучения (наглядные, динамические и печатные пособия, интерактивные учебники, программные продукты, сетевые сервисы, комплексы практико-ориентированных заданий); технологии обучения (квест-технологии, дистанционные технологии, групповые и индивидуальные, интерактивные технологии, фундирование опыта математической деятельности, диалог математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур); механизмы развития самостоятельной деятельности (наглядное моделирование в специально-организованной информационно-образовательной среде, обобщение знаний по существенным связям, спирали фундирования базовых учебных элементов, иерархические комплексы заданий) и критерии проявления преемственности самостоятельной деятельности (самостоятельная активность, самоорганизация, саморегуляция), направленные на повышение качества углубленного обучения математике.

Результативно-оценочный блок выявляет уровни преемственности самостоятельной деятельности (репродуктивный, эвристический, творческий). Результатом обучения по данной модели является повышение качества углубленного обучения математике и преемственность самостоятельной деятельности обучающихся.

Развитие самостоятельной деятельности происходит в зависимости от психолого-педагогических особенностей возрастного развития обучающихся. В 5-7 классе у учащегося происходит возникновение и развитие самосознания – новой внутренней позиции обучающегося и внутренней переориентации подростка с правил и ограничений, связанных с моралью послушания, на нормы поведения взрослых. Осуществляется переход от учебных действий под руководством учителя, от способности только осуществлять принятие заданной педагогом осмысленной цели к самостоятельному познавательному поиску. В 8-9 классе у подростка появляется стремление к общению и совместной деятельности со сверстниками; обострённая восприимчивость к усвоению норм, ценностей и способов поведения, выработку принципов, моральное развитие личности; рост информационных перегрузок и изменение характера и способа общения и социальных взаимодействий; объёмы и способы получения информации. Формирование в этот период научного типа мышления через обучение математической деятельности, овладение им коммуникативными средствами и способами организации кооперации и сотрудничества через различные формы организации учебной деятельности, развитие способности проектирования собственной учебной деятельности через освоение математических знаний являются важным аспектом развития личности учащихся.

В соответствии с Федеральным Государственным Образовательным стандартом общего образования можем обозначить содержательно-прикладные (овладение математическим материалом, необходимым в жизнедеятельности и для предпрофессионального определения, формирование представлений об идеях и методах математики как способов познания окружающего мира) и общекультурные (формирование представления о роли математики в развитии цивилизации, развитие посредством математики определенного стиля мышления, воспитание личности в процессе математической деятельности) составляющие математического обучения в основной школе. Углублённое обучение математике в основной школе ставит целью формирование у учащихся осознанного подхода и устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие математических способностей, обеспечение уровня подготовки учащихся по математике, необходимого для дальнейшего выбора и успешного освоения профессии, требующей высокого уровня математических знаний.

Выводы по главе 2

1. Информационные возможности общества открывают новые пути для совершенствования методов и содержания обучения, для обеспечения преемственности самостоятельной деятельности. Наиболее востребованными являются кейс-технологии, веб-квест-технологии, проектные технологии и др. В процессе выполнения заданий проявляются способности учащихся самостоятельно определять учебные цели, оценивать свои действия, осуществлять информационный поиск, осуществлять логические операции сравнения, анализа, обобщения, классификации по родовидовым признакам, устанавливать аналогии, отнесения к известным понятиям, уметь сотрудничать с педагогом и сверстниками развивается через такие дидактические свойства интерактивных технологий обучения как возможность осуществлять обратную связь, взаимодействие в диалоге, организация индивидуализации и разноуровневой дифференциации обучения, конструирование своей индивидуальной траектории изучения учебного материала, консультации и др.

Реализации обучения в курсе обобщения знаний и действий соответствует принципам системно-деятельностного подхода. Такие дидактические свойства цифровой образовательной среды, как возможность отображения и передачи информации в текстовом, звуковом и графическом, анимационном формате, моделирование реальных или виртуальных процессов и явлений, интерпретация информации об изучаемых или исследуемых объектах в виде электронных таблиц, динамических графиков, возможность поиска интересующей информации, ведение интерактивного общения при обработке и транслировании информации усиливают прикладную направленность и интересность содержания учебного материала.

2. Процесс формирования фундаментальных понятий в одной дидактической единице происходит по «расширяющейся спирали» с постепенным расширением и включением новых смыслов и понятий: постепенно углубляя и обогащая, и включая в систему их новые смыслы и интерпретации. Такими иерархически выстроенными дидактическими единицами могут быть комплексы задач с теоретическим, практическим и прикладным компонентами, которые можно понимать как реализацию идеи фундирования опыта личности. Усвоение новых понятий, вписывание новой информации, включение исторического контекста, как части культурного контекста математики, использование генетического подхода с рассмотрением изученных фактов с новой точки зрения, в новых контекстах, организация взаимодействий разного рода между участниками учебного процесса, как диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур являются необходимыми условиями обогащения личностного опыта учащегося, на основе которого происходит развитие личностного опыта учащихся. Выделенные условия определяют принципы отбора и реализации содержания курса обобщения знаний, соответствующие общим целям образования и конкретизирующие механизм отбора содержания обучения: принципы вариативности, генерализации, «расширяющейся спирали», рефлексивного контроля.

3. Нами представлена модель углубленного обучения математике на основе обобщений, направленная на преемственность самостоятельной деятельности обучающихся. При разработке модели основой послужили концепция обобщения знаний и действий, концепция деятельностного подхода к углубленному обучению математике, теория фундирования опыта личности с помощью наглядного моделирования сущностей базовых математических действий и знаний в специально организованной информационно-образовательной среде. Модель состоит из целевого, содержательного, организационно-деятельностного и результативно-оценочного блоков. Целевой блок реализует осознание цели обучения учащимися и необходимости преемственности опыта самостоятельной деятельности. Содер-

жательный блок выступает как основа формирования преемственности самостоятельной деятельности в обобщении знаний при углубленном обучении математике, предоставляет его теоретическое обеспечение. Организационно-деятельностный блок характеризует деятельность обучающегося в процессе обучения, основанного на формах, этапах обобщения и фундирования, методах и средствах обучения. Результативно-оценочный блок обеспечивает диагностическую оценку по сформированности преемственности самостоятельной деятельности, направлен на оценку и анализ результатов применения разработанной модели.

ГЛАВА 3. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ УГЛУБЛЕННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ В ПРОЦЕССЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗНАНИЙ

3.1. Методика обобщения знаний в классах с углубленным обучением математике в основной школе, обеспечивающая преемственность в развитии самостоятельной деятельности обучающихся основной школы

Адаптации современных достижений к математическому содержанию школьного образования как механизмов и основы для создания переходов на более высокие ступени развития универсальных учебных действий и интеллектуальных операций обучающихся в ходе исследовательской деятельности и диалога культур проявляется в историогенезисе, практико-ориентируемости, экспериментальности и прикладных методах, интеграции знаний, поиске устойчивых кластеров эмпирических обобщений и приложений. Это может быть реализовано через разные формы организации учебной деятельности (очные и видео-лекции, конференции, лабораторные и проектные занятия, компьютерные разработки, деловые игры и т.д.). На примере обобщения понятия числа в основной школе это могут быть тематические конструкты о переходе от десятичной записи к обыкновенной дроби, теория простых чисел, алгебраические и трансцендентные числа, диаграммы Венна, проблема Гольдбаха и т.п. Методологической основой современной образовательной парадигмы являются теория учебной деятельности (Л.С. Выготский, В.В. Давыдов, А.Н. Леонтьев и др.), системный (И.В. Блауберг, Э.Г. Юдин и др.) и синергетический (С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, Е.И. Смирнов и др.) подходы, которые определяют основные направления его развития. Прежде всего, открытость образовательной среды, вариативность способов получения образования, свобода выбора технологий обучения и инструментов цифровой среды обуславливают ведущую цель современного образования –

всестороннее и гармоничное развитие личности обучающегося. Интенсивное развитие интернет-технологий, развитие цифровых инструментов и средств обучения, определяют направление личностного развития через интерактивное обучение, особенно, в процессе обобщения знаний. В новой образовательной парадигме имеют место субъект-субъектные отношения, которые влияют на развитие активной позиции обучающихся в самостоятельном поиске информации, её анализе, преобразовании и применении в новых и нестандартных учебных ситуациях.

Однако, главным отличием данной стадии развития математического образования в основной школе от всех предыдущих является то, что переход к новому качеству результатов образования не может осуществляться стихийно в отсутствие инновационных решений. Он требует переосмысления традиционных методов и поиск новых подходов к формированию самостоятельной познавательной деятельности в процессе обучения математике в насыщенной информационно-образовательной среде и актуализации обобщающей деятельности на основе освоения уровневого сложного знания, именно, в подростковом возрасте так, как этот возраст отличается повышенной интеллектуальной активностью.

В этой связи создание методики обобщения знаний в классах с углубленным обучением математике обусловлена необходимостью поиска новых форм и методов обучения математике, направленного на развитие самостоятельной познавательной деятельности обучающихся основной школы.

Цель методики: повысить уровень самостоятельности обучающихся основной школы в обучении математике через пересмотр содержания, способов обобщения и изменение методики обучения математике.

Развитие математических способностей очень часто связывают с умением обобщать и оперированием обобщёнными знаниями. С.Л. Рубинштейн показал, что «мышление внутренне связано с обобщениями: оно совершается в них и ведет к обобщениям более высокого порядка. Поэтому правомерно утверждение о том, что разные уровни мышления определяются этапами обобщения познавательного материала» [163]. Обобщение знаний необходимо и для формирования, научного мировоззрения обучающихся. Часто и неправомерно, процессу обобщения знаний отводят место при повторении знаний и рассматривают как этап контроля знаний в процессе обучения математике в школе. Отметим также, что в данном возрастном периоде становление личности подростка связано с его стремлением к самостоятельности. С одной стороны, обобщение знаний положительно влияет на развитие математической деятельности, а с другой стороны, является фактором развития личностных качеств обучающегося таких, как самоорганизация, самооценка, саморефлексия, самообразование. Началом такого развития является формирование самостоятельной деятельности обучающегося.

Анализ педагогических и психологических концепций В.В. Давыдова, В.А. Крутецкого, С.Л. Рубинштейна и др. показал, что со способностью к обобщению как интеллектуальной операции мышления, развитие которой связано с умственным экспериментированием на основе множественного целеполагания и вариативности способов когнитивной деятельности, связано стремление обучающихся среднего школьного возраста к самостоятельному расширению и углублению имеющихся знаний через решение практико-ориентированных задач.

Формирование у обучающихся самостоятельной деятельности происходит через:

– обобщение полученных знаний и восприятие новой информации, ее анализ, выработку новых способов работы с математическими объектами;

– применение знания о современной естественнонаучной картине мира в познавательной деятельности;

– применение методов математической обработки в экспериментальном исследовании;

– умение самостоятельно работать с информацией в цифровой образовательной среде.

Рассматривая математику как определенную культуру, прежде всего, связанную с человеческой деятельностью, в частности, познавательной, мы исходим из того, что в математической науке деятельность по получению нового знания и результат этой деятельности выступают как равноправные компоненты. В.А. Крутецкий отмечает, что «глубокое самостоятельное и творческие изучение математики является предпосылкой развития способностей к творческой математической деятельности: самостоятельной постановке проблем и нахождению путей и методов их решения, имеющих новое и общественно-значимое содержание» [90].

Накопленные на сегодня знания позволяют утверждать, что уровень интеллекта определяется совершенством, прежде всего степенью структурированности и обобщенности, модели мира человека и степенью обработанности операций на этой модели. Иными словами, знания человека – это не сумма, а система. Создание такой системы и отработка на ее базе когнитивных операций, обеспечивающих успешную деятельность в нестандартных ситуациях - основная задача образования. С.Л. Рубинштейн рассматривает развитие умений учащихся проводить обобщение в виде ступенчатого процесса:

– на первой ступени обобщающей деятельности учащихся значению слов соответствует синкретический образ;

– вторую ступень в раскрытии значения слов образуют общие представления, определяемые совокупностью общих признаков;

– третьей ступенью являются понятия, в которых определяющие признаки связаны системой отношений.

Для перехода на высшую ступень обобщения необходимо подвергнуть глубокому анализу разные факты выделить в них существенное, объединить их в однородные категории и группы. Успех в процессе обобщения зависит от многих причин, и, в частности от знания специальных способов, правил, приемов. Одна из закономерностей процесса обобщения – это преемственность этапов его развития: новый, более высокий этап основывается на предыдущем этапе обобщения. В этом заключается развивающее значение обобщения.

Стандарты нового поколения проектируют развитие теоретического мышления обучающихся через формирование метапредметных результатов обучения. Вкладывая в содержание метапредметных результатов, прежде всего, сформированную способность использования универсальных учебных действий (регулятивных, познавательных, коммуникативных) в учебной, познавательной и социальной практике.

В процессе обучения математике ещё в начальной школе у обучающихся формируется умение учиться, на базе которого, согласно принципу преемственности, будет строиться их дальнейшее математическое образование. Для характеристики понятия преемственности в рамках математического образования обучение необходимо рассматривать как процесс становления личности человека посредством овладения им основами математической деятельности, где важной стороной является формирование понятийного мышления, способности подняться с реально-предметного уровня на уровень абстрактных понятий. Это происходит в процессе обобщения знаний (восприятие, осмысление, обобщение, формирование понятий, усвоение более сложной системы знаний, овладение основными теориями изученного материала). В.В. Давыдов связывает уровень усвоения материала с процессом обобщения: «О теоретическом обобщении можно говорить в том случае, когда школьник на основе целенаправленного анализа одного-единственного явления, одного частного случая получает возможность выделить существенные признаки как основу понятия» [49].

Методика обобщения математических знаний включает следующие конструкты: первичное обобщение; понятийное; межпонятийное; тематическое; итоговое обобщение. В таблице 3.1 показана связь обобщения с этапами фундирования опыта математической деятельности обучающихся.

На этапе перехода от основной школы к старшей ступени образования обобщение и систематизация математических знаний, особенно основных содержательно-методических линий школьного курса «Математика», становятся обязательным компонентом обучения и способствуют реализации принципов преемственности обучения.

Рассмотрим особенности обобщения такого стержневого математического понятия как понятие числа у обучающихся основной школы. Проблеме формирования понятия числа посвящены многие исследования (В.В. Давыдов, Н.Б. Истомина, М.И. Моро, Г.И. Минская, А.М. Пышкало, Д.Б. Эльконин и др.), в которых подчеркивается тенденция рассмотрения понятия числа как отношение величин к числу как к абстрактному средству измерения. Однако, как показывает практика, при переходе от начальной ступени обучения понятия числа к основной, когда начинается расширение понятия числа, обучающиеся часто испытывают затруднения. Как на одну из причин данной проблемы указывает Г.И. Минская, в начальном курсе абстракция числа понимается как прямое отвлечение некоторого непосредственного свойства совокупности. А.Н. Колмогоров непосредственно говорит о недостатках введения понятия о действительном числе: «Что общепринятая система с педагогической стороны дефектна, видно хотя бы из тех трудностей, которые затем возникают при усвоении учащимися независимости смысла геометрических и физических формул от выбора единиц измерения и понятия “размерности” геометрических и физических формул» [83].

Таблица 3.1

Соотношение методики обобщения математических знаний
с этапами фундирования опыта математической деятельности

Ком стру	Содержание	Этапы фундирования опыта математической деятельности
Первичное	Восприятие и осознание учебного материала: Повторение пройденного материала (понятие разряда и класса, правила и свойства арифметических действий с числами) и постановка вопросов, подготавливающих к пониманию о необходимости введения новых чисел	Мотивировка – создание условий для осознания учащимися недостаточности их прошлого математического опыта
Понятийное	Усвоение нового понятия (понятие множества натуральных чисел)	Категоризация – введение знаково-символического обозначения нового понятия, ориентация ребенка на выделение отличительных признаков соответствующего понятия
Межпонятийное	Определение общих признаков и свойств между понятиями, объединение усвоенных понятий в системы: (свойства арифметических действий на множестве натуральных чисел)	Обогащение – накопление и дифференциация опыта оперирования вводимым понятием, расширение возможных ракурсов осмысления его содержания

Тематическое	Усвоение целой системы или цикла понятий, изучаемых в течение длительного времени: обобщение понятия натурального числа, применение свойств сложения и умножения, делимости при вычислениях и решении задач	Категоризация и обогащение
Итоговое	Установление связей и отношений между системами знаний, усвоенных в процессе овладения целым курсом. (Решение задач на множестве натуральных чисел), обобщающее повторение, межпредметное установление связей (связь между числовыми выражениями и их геометрической моделью и т.д.)	Перенос – применение усваиваемого понятия в разных ситуациях, в том числе и в условиях самостоятельного выстраивания отдельных аспектов его содержания. Свертывание – представление образа понятия в сжатой форме

В теории чисел школьники встречаются с абстрактными понятиями – множество чисел, число e, число π, тригонометрические величины и др. При обобщении этих понятий учащиеся учатся выделять существенные признаки явлений и объектов, отбрасывать несущественные, формируется представление, как возникает идеализация в науке, как происходит абстрагирование.

Рассмотрим серию задач:

1. В классе 25 учеников, из них 10 занимаются в математическом кружке, 8 – в биологическом, 9 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов занимается математикой? Сколько ребят занимается только в математическом кружке? Сколько ребят посещает только один какой-нибудь кружок?

2. В этом классе, где учатся 25 человек, все они либо играют на гитаре, либо разводят собак, либо занимаются спортом. Многие успевают заниматься и тем, и другим. Больше всего спортсменов – собаководов – 15, пятеро из них еще и на гитаре играют. Чемпион по бегу на гитаре не играет и собак не разводит, а два его друга – собаковода спортом не занимаются, зато гитаристы превосходные. Среди гитаристов есть семеро, которые не спортивны и собак не разводят. 1) Сколько в классе гитаристов? 2) Сколько человек занимаются спортом? 3) Сколько собаководов не увлекаются ни спортом, ни музыкой?

Обобщение понятия числа происходит в результате перехода от понятия множества, универсального множества к подмножеству, элементы множества, действия с множествами: объединение, пересечение, дополнение множеств. Универсальным методом решения в данном случае является метод наглядного моделирования и использование кругов Эйлера как метапредметного способа решения математических задач. В результате обобщающей деятельности обучающихся происходит переход от отдельных понятий, что соответствует синкретическому образу или представлении о понятиях к раскрытию значения понятий и образуют общие представления, определяемые совокупностью общих признаков. Следующей ступенью обобщения являются понятия, в которых определяющие признаки связаны системой отношений**.** Решение цепочки заданий:

1. Упростите выражение: $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$*$\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;
2. Докажите, что числа $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$являются взаимно обратными;
3. Упростите выражение, представив подкоренное выражение в виде полного квадрата:$\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;
4. Упростите выражение: $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

позволяет привести в систему и выделить общие признаки понятия «иррациональные числа», раскрыть его значение в абстрактной алгебраической форме.

Более высокой ступенью обобщения является межпредметная интеграция, характеризующая такой уровень развития целостной системы, на котором формируются многочисленные стабильные связи между отдельными элементами. Пример такого обобщения можно рассмотреть при решении следующей задачи:

Клетчатый квадрат 18*18 разрезали на 18 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных сложили квадрат 10*10. Найдите размеры отложенного прямоугольника. Ответ: 14*16. Решение: площадь отложенного прямоугольника 18*18-10*10=224. Разложим на простые множители: $224=2^5*7$. Значит, длина одной из сторон отложенного прямоугольника кратна 7. Она не больше 18, значит равна 7 или 14. Но если равна 7, то другая сторона равна 32, что больше 18. Значит, приведенный ответ единственный.

Овладение теоретическим мышлением в процессе обучения, предполагает, во-первых, развертывание учебного материала в соответствии с особенностями теоретического обобщения (изучение происхождения исходных абстракций, последующее движение мысли от абстрактного к конкретному и т.д.), во-вторых, усвоение этого материала основывается в первую очередь на овладении общим способом ориентации в некотором классе задач, а затем на решении тех или иных конкретно-практических задач (В.В. Давыдов).

Упорядоченная логика расширения понятия числа в процессе обобщения и систематизации знаний, опирающаяся на такие общие методы познания, как анализ и синтез, индукция и дедукция, способствуют развитию логического мышления школьников. Наличие научных обобщений способствует формированию метапредметных результатов обучения, особенность которого состоит в умении выделить главное, отражаемое в абстракциях, и извлекать из последних конкретные выводы, переходя от общего к частному.

Моделируемый процесс можно раскрыть на примере методики обобщения понятия числа в основной школе. Первый этап освоения дидактической спирали фундирования понятия числа представляется в виде веб-квеста. Он включает следующие компоненты:

– коммуникативный (взаимодействие учащихся с учителем и другими участниками информационной образовательной среды, осознание правил и нормы взаимодействия со взрослыми и сверстниками);

– интерактивный (приобретение учащимися опыта работы с различными источниками информации и информационными ресурсами в индивидуальной и коллективной работе, осуществление информационного поиска в проектной и исследовательской деятельности);

– рефлексивный (развитие у учащихся навыков правильно оценивать и регулировать свою деятельность, направленную на познание окружающей действительности; анализировать различные ситуации и действия, самостоятельно принимать решения, оценивать степень значимости источника, планировать и проектировать свою деятельность, оценивать результаты*);*

– организационно-методический (применение различных форм и методов организации обучения, учебных материалов, инструментов цифровой образовательной среды).

Данный веб-квест состоит из комплекса задач обобщающего характера с прикладным и практико-ориентированным содержанием (исторические факты, основные правила и законы вычислений, занимательная математика, творческие и исследовательские задания на базе web-технологий), а также проектных заданий на применение информационно-коммуникационных технологий (приложение 1).

Целью веб-квеста являются совершенствование целостного представления о числах, вычислительных действий; формирование качеств математического мышления, овладения математическим языком; углубление знаний и расширение мировоззренческих представлений учащихся о числах и вычислениях; обобщение и систематизация знаний о вычислительных приемах, необходимых для дальнейшего обучения; применение информационно-коммуникативных средств; понимание роли математики как фундаментальной науки, являющейся неотъемлемой составляющей науки, общечеловеческой культуры.

Приведем пример одного задания из 1 блока «По страницам книги Г.Н. Попова. Исторические задачи по элементарной математике»:

Задания «Вавилон»:

1. Изучите (повторите из курса информатики) системы счисления и проверьте таблицу Гильпрехта, Сенкере.

2. Изучите понятие «среднее гармоническое» и примените к таблице Гинкса.

3. Земельная мера вавилонян. Решите задачу №6 и примерно выразите земельные меры вавилонян в современную единицу измерения.

Обучающиеся распределяют роли и в соответствии с выбранными ролями, выполняют задания, обмениваясь материалами для достижения общей цели. Список использованных группой информационных ресурсов должен быть в обязательном порядке указан при презентации выполненного задания. В оценке результатов принимают участие как учителя, так и обучающиеся (приложение 1).

Квест обеспечивает тематическое повторение основных математических понятий 7-8 класса (рисунок 3.1).

Рисунок 3.1. Граф согласования содержания веб-квеста с элементами математического аппарата

Индивидуальный темп работы позволяет оценить результаты самостоятельной деятельности обучающегося. В конце курса обучающиеся размещают разработанные материалы на портале школы, сайта, проходят онлайн-тестирование. Диалог в учебном процессе поддерживается обращением обучающегося к интерактивным средствам обучения (веб-ресурсы, онлайн-общение, цифровое оформление изученного материала), возможностью задания вопроса учителю или одноклассникам и создает условия для межличностного взаимодействия обучающихся. Организация самостоятельной деятельности обучающихся с применением веб-технологии помогает в достижении учебных и развивающих целей обучения. Дидактические материалы, созданные обучающимися, можно многократно использовать и дополнять, корректировать при ее использовании с различными группами учащихся. Следующий этап дидактической спирали фундирования понятия числа-кейс-метод: метод анализа проблемных ситуаций на основе реальных событий и жизненных фактов, встречающихся в повседневной деятельности людей. Этап включает комплекс кейс-заданий практического, обучающего и исследовательского типа. Пример занятия с решением практического кейса:

Цель занятия: развитие математических и информационных навыков.

Задачи:

– применение математических знаний в реальных условиях;

– развитие умения ориентироваться в современной банковской системе;

– развитие коммуникативных навыков, умения работать в группе.

Оборудование: компьютер, мультимедийное оборудование (проектор, экран или электронная доска), планшеты, раздаточные материалы.

Ход занятия:

1. Изучить диаграмму и выявить самые популярные банковские услуги.

2. Кейс-задача: «Вашим родственникам, молодой семье досталась в наследство машина. Но в связи с отсутствием гаража, они решили продать и выгодно «сохранить» деньги от продажи. Посоветуйте им, как это сделать, если машина продана за 800 тыс. рублей.

3. Задача обсуждается в группах. Им предлагается ответить на следующие вопросы:

− Какие банки (или их филиалы) расположены в вашем районе?
− Какой вклад и в каком банке Вы посоветуете выбрать?
− Как его оформить?
− Сколько денег будет через три года?

Чтобы найти ответы на вопросы, группы используют планшеты, таблицы и графики. Через определенное время каждая команда демонстрирует свое решение.

4. Рефлексия.

− Какой вклад выгоден и почему: срочный или вклад до востребования?
− Какой вклад вы бы выбрали: с капитализацией процентов или без капитализации?
− Как Вы считаете, воспользовавшись данной услугой банка, в действительности накопили ли деньги?

Результаты выполненных проектов должны быть конкретными, готовыми к использованию. Обучающиеся представляют результаты во время защиты проектов. С помощью кейс-метода учащиеся применяют имеющиеся теоретические знания в практической ситуации. Данный метод способствует интерактивности и самостоятельности учебной деятельности. В процессе работы с кейсами формируются аналитические навыки; (анализ, классификация, выделение существенных и несущественных связей), практические навыки (применение теоретических знаний и методов), творческие навыки (нахождение рациональных путей решения, выбор оптимального варианта решения из многих, гибкость мысли), цифровые навыки (поиск информации, критическое восприятие информации, использование мультимедийного контента и функционала цифровых устройств).

Завершает дидактическую спираль фундирования базового понятия числа элективный курс «Числа и вычисления», состоящий из комплекса задач по основным темам теории чисел. Согласно программе обучения математики, у школьников старших классов должны быть сформированы вычислительные умения и навыки, когда учащиеся с достаточной беглостью умеют выполнять математические действия, производить тождественные преобразования различных числовых выражений на разных числовых множествах, применять законы математических действий и свойства чисел при вычислениях. Уже в 7-8 классе наряду с навыками выполнения устных и письменных вычислений рассматриваются приёмы работы с таблицами, графиками. Это значит, что обучающиеся 7-8 классов должны овладеть определённым уровнем вычислительной культуры, дальнейшее развитие которой будет вестись в направлении формирования более сложных умений, расширению и углублению теоретико-числовых представлений, интерпретации данных в знаково-символической и цифровой модели.

Однако, практика показывает, что даже у обучающихся с достаточным уровнем математической подготовки выявляются проблемы, связанные с вычислительной культурой. Чаще всего эта проблема заключается в способности выбирать и осуществлять рациональный путь решения задачи, также рационально записывать то или иное решение. Одной из главных причин такой проблемы можно назвать разрозненные, фрагментарные, не связанные общими идеями знания.

Курс построен на основных принципах отбора задач, ориентированных на усвоение содержания элективного курса: принцип связи теории с практикой, принцип преемственности, принцип полноты, принцип контрастности, обучение эвристическим приемам, принцип формирования исследовательских умений (приложение 3). В содержании элективного курса можно выделить системообразующую стержень, которым является комплексный подход к вычислительным действиям в отличие от учебников, в которых закрепление знаний относится к конкретной одной теме (Таблица 3.2).

Таблица 3.2.

Примерное тематическое планирование курса с формируемыми приемами вычисления

№	Название темы	Всего часов	Виды задания	Формируемый вычислительный прием
1	Множества чисел. Диаграммы Эйлера-Венна	1	Операции над множествами.	Применение диаграммы Эйлера-Венна при решении задач
2	Законы сложения и умножения чисел	1	Нахождение значений числовых выражений, содержащих целые, обыкновенные, десятичные дроби	Применение законов сложения и умножения для рационального вычисления
3	Свойства дроби	1	Нахождение значений числовых и алгебраических выражений	Применение свойств дроби
4	Формулы сокращенного умножения	1	Нахождение значения числовых выражений	Применение формул сокращенного умножения для рационального вычисления
5	Приемы быстрого вычисления	1	Нахождение значений числовых выражений	Применение приемов быстрого вычисления при нахождении значений выражений
6	Сравнение действительных чисел	1	Решение числовых неравенств, сравнение чисел.	Применение свойств числовых неравенств при сравнении действительных чисел

7	Определение и свойства делимости чисел. Теорема о делении с остатком.	1	Доказательство делимости выражений на числа.	Применение теории делимости к доказательству
8	Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида	1	Нахождение НОД выражений, содержащих переменные и выражений, содержащих степени	Применение Алгоритма Евклида при нахождении НОД
9	Разложение на множители выражений вида $x^a - y^a$ и $x^{2a+1} + y^{2a+1}$	1	Доказательство кратности выражений вида $x^a - y^a$ и $x^{2a+1} + y^{2a+1}$ на числа	Применение формулы разложения на множители при доказательстве
10	Признаки делимости	1	Нахождение неизвестных цифр числа	Применение признаков делимости при нахождении цифр
11	Метод математической индукции	1	Доказательство тождеств или делимости выражений на числа	Применение метода математической индукции при доказательстве тождеств.
12	Действия с корнями.	1	Нахождение значений выражений, содержащих корни	Применение приемов извлечения числа из квадратного корня.
13	Степень с рациональным показателем и его свойства	1	Нахождение значений выражений, содержащих степени с рациональным показателем	Применение свойств степени с рациональным показателем при вычислениях
14	Итоговое повторение	2	Комплект заданий, включающих все виды задач	Применение различных приемов вычислений при выполнении заданий

Предполагаемые результаты изучения курса: предлагаемый курс должен помочь учащимся в усвоении и закреплении основных вычислительных навыков и в развитии математических способностей.

Иерархический комплекс задач представлен по уровням сложности этапов обобщения видовых проявлений сущности базового конструкта по основным тематическим модулям на основе наглядного моделирования сущностей базовых математических действий и знаний в специально организованной информационно-образовательной среде. Курс обеспечивает диалог математической (исторические периоды развития математики, внутрипредметные и межпредметные связи, математическая культура в окружающем мире), информационной (работа с различными источниками информации, поиск информации, моделирование, конструирование новых объектов), естественнонаучной и гуманитарной культур (совместные творчество и исследования в решении прикладных и профессионально-ориентированных задач с учителями, с учениками и в социальных сообществах). Таким образом, глобальное фундирование базового понятия в ходе углубленного обучения математики разворачивается через интерактивные методы обучения, где начальным звеном является школьный учебный элемент, а конечным – теоретическое обобщение и расширение практического опыта формирования и развития самостоятельности (таблица 3.3).

Пример использования комплекса практико-ориентированных и математико-информационных заданий «Элементы теории чисел» представлен на таблице 3.4. Обучающиеся должны выполнить задания, которые ориентированы на отработку вычислительных, репродуктивных и исследовательских навыков. В процессе работы обучающимся нужно воспользоваться интернет-ресурсами, доступными им средствами ИКТ, например, MS Excel, Power Point. Курс «Элементы теории чисел» как необходимый этап полного цикла учебно-познавательной деятельности учащихся 8-9 классов по усвоению знаний о числах, предлагается в виде фундирующих модулей этапов обобщения в течение учебного года.

Таблица 3.3

Оснащение иерархических комплексов задач на обобщение

(на примере числовой линии)

	Тематика	Содержание	Часы	Информационные технологии	Формы	Этапы обобщения
1	Историогенезис и интерпретация знаний и методов («История чисел»)	Ролевые задания, проекты и эссе в малых группах, применение и прикладные эффекты имеющихся знаний, интерпретация и решение новых задач (7 ролевых заданий на	8	Веб-ресурсы, презентации, педагогические программные продукты	Исследовательская и проектная работа, веб-квесты, игровая и внеурочная деятельность	Мотивирование и категоризация знаний, актуализация, повторение и интерпретация основных понятий

		законы арифметики)				
2	Содержательно-технологический кейс («Числа в жизни»)	5 практических кейсов на построение и исследование модельных ситуаций, в основу которых кладутся практико-ориентированные и прикладные процессы	6	Веб-ресурсы, образовательные порталы, презентации, педагогические программные продукты	Исследовательская и практическая работа, внеурочная деятельность	Обогащение и перенос, свертывание знаний
3	Элективный курс «Числа и вычисления»	Развертывание и фундирование содержания и обобщения учебных элементов (13 Тематических лекций по 10 заданий)	20	Веб-ресурсы, образовательные порталы, графический редактор GeoGebra	Исследовательская, практическая работа в малых группах	Углубление и расширение знаний, построение обобщенных конструктов

Таблица 3.4

Комплекс практико-ориентированных и математико-информационных заданий «Элементы теории чисел»

Тема	Задание 1 Репродуктивный уровень	Задание 2 Эвристический уровень	Задание 3 Творческий уровень
Простые и составные числа	Что такое простые и составные числа? Алгоритм Евклида	1. Представив двузначное число в виде 10a+b, дайте математическое обоснование правил их умножения на 11, 5, 25. 2. Охарактеризуйте число 127. 3. Разложите на простые множители числа 1176, 5400	Найти все такие натуральные числа p, что p и 5p + 1 – простые. Известно, что $p > 3$ и p – простое число. Как вы думаете, будет ли хотя бы одно из чисел p + 1 и p – 1 делиться на 4? 5? Исследуйте, подготовьте презентацию
Малая теорема Ферма	О чем говорит Малая теорема Ферма? История нахождения ее доказательства	1.Делится ли число 2^{12} на 12? 2. Доказать, что $7^{120} - 1$ делится на 143	Изучите применение теоремы Ферма в системе шифрования. Рассмотрите пример шифрования букв A и B. Существует ли такое натуральное n, что число 1999n оканчивается

			на цифры 987654321? Исследуйте, подготовьте презентацию.
Бесконечность множества простых чисел	Изучите доказательство теоремы «Простых чисел в натуральном ряду бесконечно много» по Евклиду	Доказать, что множество простых чисел вида 4k − 1 бесконечно	Докажите теорему о бесконечности множества простых чисел, используя факт взаимной простоты чисел Ферма: ($(2^{2^n}+1, 2^{2^m}+1) = 1$, если (n, m) = 1
Решето Эратосфена	Что такое Решето Эратосфена? В чем заключается проблема и как она возникла?	Составьте по алгоритму Эратосфена решето для чисел от 1001 до 1120. Найдите первое простое число на этом интервале	Исследуйте особенность распределения простых чисел на Скатерти Улама. Подготовьте наглядную картинку на презентации
Простые числа-близнецы	С чего началось изучение чисел-близнецов? Что это за числа?	Найдите все пары двузначных чисел-близнецов	Составьте программу вычисления для нахождения чисел-близнецов до 100
Совершенные и дружественные числа	Изучите историю и определение совершенных и дружественных чисел	Приведите примеры совершенных и дружественных чисел. Попробуйте проверить, что числа 220 и 284 дружественные	Арабский математик IX в. Сабит ибн Корра написал «Книгу о нахождении дружественных чисел легким способом». Его способ похож на описанное в «Началах» Евклида правило нахождения совершенных чисел. А именно, если числа $p = 3 \cdot 2^{n-1}$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ и $r = p + q + pq$ простые, то числа $M = 2^n pq$ и $N = 2^n r$ дружественные. Приведите доказательство
Число Фибоначчи	Изучите историю чисел Фибоначчи. Что такое последовательность Фибоначчи?		Числа Фибоначчи и гармония природы: золотое сечение (проектная работа)
Основная теорема арифметики	Изучите основную теорему арифметики и представьте *в* канонической форме натуральное число 5929.	1. Представив двузначное число в виде 10a+b, дайте математическое обоснование правил их умножения на 11, 5, 25. 2. Докажите, что число 127 – простое	Докажите, что для того, чтобы нечетное натуральное число n было простым, необходимо и достаточно, чтобы представление n в виде $x^2 - z^2$ было единственным.

			Проект «Применение основной теоремы арифметики» (презентация)
Обыкновенные дроби	Чем отличались системы дробей Древнего Египта, Вавилона, Греции и Рима? От какого слова происходит слово «дробь»? Перечислите свойства дроби	1. Вычислите: $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\frac{1}{11\cdot14}+\frac{1}{14\cdot}$ 2. Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{35}{66}$; $\frac{28}{165}$; $\frac{25}{231}$ получаются натуральные числа. Известно, что a, b, c, d – попарно различные положительные двузначные числа. а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{23}$. б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 12 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?	Составьте электронный сборник из 10 старинных задачи на дроби (Китай, Египет, Рим, Русь). Оформите решение.
Проценты	Что означает знак %? Объясните понятие процента на своем примере из жизни	В свежих абрикосах 90% влаги, а в кураге только 5%. Сколько килограммов абрикосов нужно, чтобы получить 20 килограммов кураги? Число увеличили на 10%, потом ещё на 10%. На сколько процентов увеличили число за два раза?	Решите кейс «Финансовая грамотность» (приложение 2)
Рациональные и иррациональные числа	Что такое несоизмеримые отрезки? Изучите историю возникновения иррациональных чисел	Упростить выражение: $\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{80}$ Выполните действия: а) $\sqrt{32-10\sqrt{7}}\cdot(\sqrt{7}+5)$; б) $(9-\sqrt{83})\cdot\sqrt{18\sqrt{83}+164}$	Что такое золотая спираль (Спираль Фибоначчи)? Попробуйте построить данную спираль с помощью программы Geogebra
Диофантовы уравнения	1. Что такое Диофантовы уравнения? 2. Сформулируйте в виде задачи	1. Решите в целых числах: а) (x–2)(xy+4)=1; б) $3xy-6x^2=y-2x+4$; в) x+y=xy;	1. Для перевозки большого количества контейнеров по 170 кг и по 190 кг выделены трехтонные машины.

	стихотворение-загадку с надгробия Диофанта. 3. Перечислите основные способы решения Диофантовых уравнений, приведите примеры	2.Найти все целые решения уравнений: а) 17x + 27y = 1. б) 144x + 233y = 8	Можно ли ими загружать машины полностью? Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, или в 14 раз больше, или в 14 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 4321. а) Может ли последовательность иметь два члена? б) Может ли последовательность иметь три члена? в) Какое наибольшее число членов может иметь последовательность?
Последовательности Рачинского	Что такое последовательности Рачинского? Изучите историю возникновения такой последовательности	Решите задачу на картине Богданова-Бельского «Устный счет», предложенную ученикам	Имеются ли n+1 последовательных чисел, сумма квадратов которых равна сумме квадратов следующих n чисел?
Дроби и десятичные представления	Правила перевода целых чисел в десятичную систему счисления. Что такое позиционная и непозиционная система счисления? Какие позиционные системы счисления существуют?	1. Найдите наибольшее шестизначное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме двух предыдущих цифр. 2. Докажите, что дроби 1000/2001 и 1001/2001 имеют равную длину периодов. 3. Переведите число 105,4 из восьмеричной системы в десятичную	1. В десятичной записи числа 1/7 зачеркнули 2013-ю цифру после запятой (а другие цифры не меняли). Как изменилось число: увеличилось или уменьшилось? 2. Изучите схему Горнера и с ее помощью переведите $0.1101_2 \rightarrow X_{10}$ 3. С помощью последовательного целочисленного деления десятичного числа на основании этой системы, переведите $181_{10} \rightarrow X_8$.
Биномиальные коэффициенты,	Что такое Бином Ньютона? Кто открыл биномиальные коэффициенты?	1. С помощью биномиальных коэффициентов решите задачу: на пруду плавают 5 уток. Сколькими способами можно выбрать 2 из них,	1. Доказать, что при любом натуральном n число $(4^n + 15n - 1)$ делится на 9

	Что такое треугольник Паскаля? Чему равна сумма биномиальных коэффициентов?	чтобы покормить? 2. Проставим знаки плюс и минус в 99-й строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом – минус, между вторым и третьим – плюс, между третьим и четвёртым – минус, потом опять плюс, и так далее. Найдите значение полученного выражения. 3. Найдите два средних члена разложения $(a^3+ab)^{21}$	2. Почему равенства $11^2 = 121$ и $11^3 = 1331$ похожи на строчки треугольника Паскаля? Чему равно 11^4? 3. Какова сумма соседних биномиальных коэффициентов? 4. Сколько можно организовать подмножеств у множества из n элементов? 5. Какова вероятность встретить 5 орлов при подбрасывании 10 раз монеты?
Факториал	Что такое факториал? Приведите примеры	1. Вычислить: $\frac{5!*3!}{7!}$ 2. Сократить дробь: $\frac{100!}{99!}$ 3. 6 карточек пронумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Карточки наугад выкладываем в ряд. Сколько при этом можно получить различных шестизначных чисел?	1. На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырёх написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными? Количество перестановок множества из n элементов обозначается P_n. Докажите равенство $P_n = n!$ 2. Экспериментально проверить значение суммы $2+1/2!+1/3!+\ldots+1/n!$ для $n = 100, 1000, 10000$. Есть ли закономерности в полученных значениях? 3. Существует ли функция так, чтобы $f(n+1) = n!$? Рассмотрите

			ее свойства и построение графика
Построения с помощью циркуля и линейки	1. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам. 2. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними	1. Построить треугольник по высоте, одной из боковых сторон и разности углов при основании. 2. Опустить из данной точки A вне прямой *l* перпендикуляр на эту прямую, проведя не более трёх линий? (Третьей линией должен быть перпендикуляр.) 3. Даны отрезки a и b. Построить отрезок $\sqrt{a^2+b^2}$ 4. Построить правильный пятиугольник с помощью циркуля и линейки. Реализовать построение на GeoGebra	1. Дан угол, равный 19°. Разделите его на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки. 2. Дан отрезок длины $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Можно ли построить циркулем и линейкой (на которой нет делений) отрезок длины 1? 3. Даны прямая и точка вне неё. Как с помощью циркуля и линейки построить прямую, параллельную данной прямой и проходящую через данную точку, проведя при этом возможно меньшее число линий (окружностей и прямых), так что последняя проведённая линия – это искомая прямая? Какого числа линий Вам удалось добиться? 4. Какой правильный n-угольник (n>5) можно построить с помощью циркуля и линейки? Реализовать построение на GeoGebra
Формулы Кардано и Феррари	История формул Кардано и Феррари. Вывод формул	1. Решите уравнение с помощью Формулы Кардано: $x^3+4x^2+6x+3=0$; $x^3+15x+124$ 2. Решите уравнение по методу Феррари: $x^4+4x^3-4x^2-20x-5=0$ $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$ 3. Существует ли формула для корней уравнения 4-й степени?	1. Исследуйте и подготовьте презентацию об истории задачи о нахождении сторон прямоугольного участка с площадью 40 и периметром 20. 2. Вывести уравнение многочлена с корнями в точках 1,2,3,4. 3. Может ли график многочлена 3-й степени не пересекать ось абсцисс? Проиллюстрировать в среде GeoGebra

Иррациональность числа π	Что такое число π? Какова история и методы его вычисления	Изучите вопрос о трансцендентности или иррациональности числа π	Проведите эксперимент по вычислению приближенного значения отношения длины окружности к диаметру. Ответы запишите в виде таблицы на презентации. Используйте компьютерное моделирование
Тернарная проблема Гольдбаха	В чем заключается проблема Гольдбаха (бинарная и тернарная)? Изучите историю ее доказательств и неудач	1. Есть 30 гирек, которые весят 1 г, 2 г, 3 г, …, 30 г. Можно ли разложить их: 1) на две кучки одинакового веса; 2) на три кучки одинакового веса? 2. 1) Можно ли заполнить таблицу 3×3 натуральными числами так, чтобы сумма чисел в каждой строке была четным числом, а в каждом столбце – нечетным? 2) А таблицу 4×4?	Исследуйте и оформите реферат «Современные подходы к решению проблемы Гольдбаха»
Цепные дроби	Что такое цепные дроби? Свойства цепных дробей	1. Решить уравнение в целых положительных числах: $x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{10}{7}$ 2. Докажите, что $\frac{1}{2+\frac{1}{3+\dots\frac{1}{1991}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots\frac{1}{2+\dots\frac{1}{1991}}}}=1$	Исследуйте понятие рекурсивного способа построения объектов, «Геометрическая цепная дробь»
Фракталы	Что такое фракталы? История их возникновения	Попробуйте построить, изобразить фракталы «Роза», «Пентаграмма»	В редакторе Photoshop проведите эксперименты построения фрактальных фигур. Оформите презентацию по итогам экспериментов

Покажем обобщение знаний по геометрии за курс основной школы. Обобщение геометрических знаний происходит в процессе усвоения отдельных понятий, их графических образов, применения фактов геометрии и математических утверждений (теорем и аксиом) в решении задач повышенной сложности (в новой учебной ситуации).

В целях развития самостоятельной деятельности обучающихся основной школы нами разработан курс обобщения знаний «Дополнительно о геометрии».

Структура курса представлена на основе теоретической модели процесса обобщения и систематизации знаний:

– восприятие, осмысление, формирование, обобщение понятий;

– усвоение более сложной системы знаний;

– углубление теоретического материала;

– овладение новыми знаниями и практическими умениями.

Задачи курса:

1) Обеспечить высокий уровень математических знаний, понимание математических понятий, суждений, теорем;

2) Развивать способность решать задачи творческого и исследовательского характера и находить оригинальные решения задач;

3) Сформировать математическое мышление и владение математическим языком, воспитать устойчивый интерес к математике, развить математические способности, мышление и интуицию;

4) Способствовать применению прикладных математических знаний в смежных науках и в реальной жизни.

Курс состоит из пяти модулей по основным темам планиметрии. Каждый модуль содержит теоретический, практический и прикладной компоненты. Например, в теоретическом компоненте модуля «О треугольнике» предлагаются теоремы Менелая, Чевы и их обратные теоремы, исторические факты о древнегреческой математике. В практическом компоненте даны задачи на применение данных теорем, в прикладном компоненте предлагаются исследовательские задачи. Рассматриваются неожиданные, нестандартные подходы к решению задач, развивается представление об истории математики, о том, что данный материал является только частью огромного геометрического материала. Приведем пример обобщающего урока из модуля «Площадь» (таблица 3.5).

Пример урока обобщения и систематизации знаний по геометрии имеет определённую практическую ценность, так как показывает все этапы обобщения и раскрывает развитие математической деятельности в тесной связи с самостоятельным поиском новых знаний и применения их в нестандартной учебной ситуации.

Таблица 3.5

Пример урока обобщения и систематизации знаний по теме «Площадь»

Этапы обобщения	Цель обучения	Этапы урока	Учебные действия
Первичное	Готовность к самостоятельному поиску новых знаний	Предложение решить задачу: Два ромба ABCB и AMHK, имеющие общую вершину A, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в 30°. Известно, что углы при вершине A обоих ромбов равны 60°, площадь пересечения ромбов равна $5\sqrt{3}$, а площадь их объединения равна $23\sqrt{3}$. Найти площадь каждого из ромбов	Определяют трудность задачи. Делают вывод: нужно получить соответствующую «картинку», обнаруживается, что задача имеет многовариантный подход
Понятийное	Формирование исследовательской деятельности, установление связей между изученными материалами. исследовательская деятельность	Постановка вопросов: как взаимно расположены прямые AM и AB? А где расположена вершина H на луче AB?	Исследование вопроса. Какие Возможные варианты расположения прямых существуют?
Межпонятийное	Обеспечение закрепления в памяти детей знаний и способов действий, которые им необходимы для углубления материала	Исследуют и определяют три различные ситуации 1случай: AH≤AB 2случай: AB<AH<3AB 3 случай: AH>3AB	Исследование вопроса. Возможны три случая. В парах, группах, индивидуально обсуждают и разбирают варианты решения
Тематическое	Обеспечение переноса обобщенных знаний в видоизмененное условие	Для каждого случая находят решение задачи	Поиск решений задачи, самостоятельная работа в группах
Итоговое	Проверка овладения основными теориями	Оценка работы, проверка правильности решения, коррекция	Сравнение способов решения, нахождение рациональных способов решения задачи

Регулярное последовательное закрепление, углубление, обобщение и систематизация математических знаний на протяжении всего процесса обучения в основной школе создают основу для формирования и развития самостоятельной познавательной деятельности обучающихся, поскольку сам процесс обобщения имеет черты творческой самостоятельной математической деятельности (свернутость структуры, стремление к рационализации решения и др.). Процесс их формирования, позволяет добиваться более высокого уровня сформированности, как самих обобщенных приемов, так и математической деятельности, в целом.

Полученные результаты исследования позволяют сделать вывод о том, что обобщение знаний в процессе обучения математике в основной школе, создает условия для активизации самостоятельной деятельности обучающихся, развивает математические способности, формирует целостную систему знаний, что повышает качество математического образования в основной школе.

Одна из особенностей процесса обобщения математических знаний – это преемственность этапов развития самостоятельной деятельности: более высокий уровень овладения умениями саморегуляции, самоорганизации, самооценки, саморефлексии происходит на фундаменте предыдущего действия и ведёт к новообразованию умений самостоятельной деятельности в новых условиях. Как всякая сложная система, самостоятельная деятельность может в критический момент вносить изменения в последовательность действий, самоорганизовываться в соответствии с потребностями личности обучающегося. Это усиливает творческую составляющую и самостоятельность в углублении и расширении имеющихся знаний.

Таким образом, обобщение знаний в обучении математике в основной школе является условием развития самостоятельной деятельности обучающихся. В процессе обобщения повышается степень самостоятельности во всех видах деятельности (планирование, прогнозирование, контроль, коррекция знаний, оценка процесса, алгоритмизация действий). Апробация методики обобщения математических знаний на примере курса геометрии и экспериментальная проверка убедительно доказывают влияние обобщения знаний на уровень развития самостоятельной деятельности обучающихся. Пример обобщающего урока по геометрии может быть использован в практике работы учителя математики в основной школе.

Результаты данного исследования находят своё применение в теории и методике обучения математике в решении проблемы преемственности и развития самостоятельной деятельности обучающихся в процессе обобщения математических знаний.

3.2. Организация и проведение опытно-экспериментальной работы

В первых двух главах мы рассмотрели теоретические аспекты проблемы исследования и составили структурно-функциональную модель углубленного обучения математике обучающихся 8-9 классов, направленную на обеспечение преемственности самостоятельной деятельности в процессе обобщения знаний.

В ходе опытно-экспериментальной работы мы проводили проверку данных предположений с участием обучающихся Майинского лицея и Республиканского лицея-интерната Республики Саха (Якутия). Были организованы экспериментальная (ЭГ) и контрольная (КГ) группы в каждой по 30 человек. Занятия с контрольной группой проводились по обычной методике, а в экспериментальной группе – по разработанной методике углубленного обучения математике на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся 9-х классов основной школы в процессе обобщения математических знаний.

Основная цель первого этапа исследования (2013-2018 гг.) заключалась в проведении работы по изучению и анализу литературы, в ходе которого установлены степень научной разработанности проблемы исследования, также исследован и проанализирован педагогический опыт углубленного обучения математике в основной школе, проведен поисковый и констатирующий этапы эксперимента, выявлены специфические особенности преемственности самостоятельной деятельности, определены основные положения и научный аппарат исследования. Была определена структура самостоятельной деятельности, разработаны уровни и критерии ее сформированности, определены и реализованы условия, содержание и этапы обобщения математических знаний в классах с углубленным изучением математики.

Нами выделены *критерии сформированности* самостоятельной деятельности обучающихся по ее компонентам: критериальную базу самостоятельной деятельности (СД) обучающихся в нашем исследовании составляют *три группы критериев*:

– самостоятельная активность (мотивация к самостоятельной деятельности, осведомленность об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности, научное общение);

– самоорганизация (академическая успешность, качество обобщенности знаний и процедур,);

– саморегуляция (умение работать в команде – диалог культур; умение адаптироваться и осознании личностных смыслов и предпочтений, самооценка).

При разработке показателей мы опирались на исследования С.В. Митрохиной и И.Я. Лернера (таблица 3.6).

Таблица 3.6

Система критериев и показателей оценки сформированности самостоятельной деятельности

Компоненты	Критерии	Показатели
Самостоятельная активность	Мотивация к самостоятельной деятельности	Познавательный интерес, интерес к проектной и исследовательской деятельности целеустремленность, умение обучающегося определять цели и пути их достижения
	Осведомленность об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности	Знание об учебных действиях, открытость новому, готовность обучаться
	Научное общение	Участие в олимпиадах, в конкурсах, в научно-практических конференциях, публикация статей
Самоорганизация	Академическая успешность	Полнота (объем и глубина математических знаний, осознание и установление связей математического знания с другими). Системность (решение задач различного уровня сложности)

Компоненты	Критерии	Показатели
	Качество обобщенности знаний и процедур	Гибкость (нахождение нестандартных и рациональных способов решения задач). Осознанность (интерпретация математических знаний в практических ситуациях). Оперативность (применение математических знаний в новых ситуациях)
Саморегуляция	Умение работать в команде – диалог культур	Готовность к совместному творчеству, умение взаимодействовать и слушать, передавать информацию, устанавливать и передавать связь между информационной, математической и естественной областями
	Умение адаптироваться и осознание личностных смыслов и предпочтений	Способность управлять процессом учебной деятельности, стремление довести решение поставленных перед собой задач до итогового результата самостоятельно, высокая устойчивость волевых усилий
	Самооценка	Умение обосновывать свое решение, умение проводить рефлексию деятельности, способность принимать решение

Оценка на каждом этапе эксперимента представлены в таблице 3.7

Таблица 3.7

Система оценки всей составляющей сформированности самостоятельной деятельности

Компонент	Критерии	Максимум баллов
Самостоятельная активность	Мотивация к самостоятельной деятельности	30
	осведомленность об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности	30
	Научное общение	30
Самоорганизация	Академическая успешность	30
	Качество обобщенности знаний и процедур	30
Саморегуляция	Умение работать в команде – диалог культур	30
	Умение адаптироваться и осознание личностных смыслов и предпочтений	30
	Самооценка	30

В первой главе нами выделены три уровня самостоятельной деятельности обучающихся: I уровень – репродуктивный (воспроизводящий); II уровень – эвристический (воспроизводяще-творческий); III уровень – творческий. Каждый из уровней самостоятельной деятельности определяется следующим количеством баллов:

– I уровень – до 80 баллов;

– II уровень– 81-160 баллов;

– III уровень– 161-240 баллов.

В ходе констатирующего этапа эксперимента было установлено, что в процессе изучения курса математики эпизодическое использование информационных технологий и обобщения знаний в обучении недостаточно обеспечивает условия, которые способствуют обеспечению преемственности самостоятельной деятельности обучающихся основной школы. В содержании учебного материала и в организации учебной деятельности учащихся при обобщении знаний с использованием средств ИКТ, можно использовать новые возможности, которые активизируют мыслительную деятельность, дополняют методическую составляющую в обучении и позволяют развивать самостоятельную деятельность обучающихся.

На втором этапе исследования (2018-2020 гг.) проводилась теоретико-преобразующая работа. С этой целью разработаны концептуальные основы организации учебной деятельности обучающихся основной школы, структурно-функциональная модель и методика углубленного обучения математике на основе преемственности самостоятельной деятельности в процессе обобщения знаний; осуществлялась опытно-экспериментальная деятельность по реализации содержания углубленного обучения математике в условиях формирующего эксперимента и выбора контрольной и экспериментальной групп. Были разработаны и внедрены элективный курс, научно-методические разработки и электронные ресурсы обобщения математических знаний и процедур.

На третьем этапе (2020-2024 гг.) осуществлялась опытно-экспериментальная работа по внедрению полученных результатов исследования в практику; уточнялись, анализировались и обобщались результаты проведенного исследования, были сделаны соответствующие выводы и анализ математико-статистическими методами результатов эксперимента, оформлялись материалы диссертации.

В ходе эксперимента мы проводили анкетирование педагогов для определения исходной позиции исследования, получения базовых данных для постановки формирующего эксперимента. В эксперименте участвовало 58 учителей, работающих в разных общеобразовательных учреждениях Республики Саха.

В ходе анкетирования учителям математики были предложены следующие вопросы.

1. Как вы считаете, необходимо ли включать в процесс углубленного обучения математике самостоятельную деятельность школьников?
2. Применяете ли вы интерактивные технологии обучения в обучении и какие?
3. Какие функции выполняет обобщение знаний в формировании самостоятельной деятельности? (формирование мировоззрения, повторение, углубление знаний и другое).
4. Какие формы обучения при обобщении знаний вы используете?
5. Какие преимущества или недостатки обобщения знаний вы бы отметили при формировании самостоятельной деятельности?

Подавляющее большинство учителей (92%) согласны со мнением о том, что самостоятельная деятельность обязательно должна включаться в процессе углубленного обучения математике так как такая организация деятельности способствует развитию личностных качеств учащихся. На 2 вопрос многие (71%) ответили, что используют проблемный метод (49), 11(19%) используют технологию кейс-стади, веб-квест используют всего 3 (5%) учителя, объясняя это тем, что не владеют методикой данного обучения и хотели бы научиться. На 3 вопрос учителя ответили, что функцией обобщения является формирование мировоззрения (47%), повторение (34%), углубление (62%), 1 указал другие функции как обеспечение обучающимся возможности ставить учебные цели. На 4 вопрос были указаны следующие формы обучения: 86% учителей указали проведение обобщения в коллективной форме, 67% учителей – индивидуальную, 63% учителя – дистанционную.

Анкетирование учителей показало, что большинство учителей используют обобщение как углубление знаний (70%). Подавляющее большинство (68%) из опрошенных учителей не использует в учебном процессе другие формы обобщения знаний, кроме групповой и индивидуальной.

В целом, учителя отмечают, что использование технологии обобщения необходимо, но времени, методической литературы и указаний как можно реализовать процесс обобщения, недостаточно, а разработка материала – это очень трудоемкий процесс. Но при умелом использовании это позволит организовать единую интерактивную предметную обучающую среду обучения – как результат развития СД. 75% учителей не назвали преимущества и недостатки обобщения по причине непонимания, какую роль имеет обобщение в преемственности СД. Таким образом, проблема разработки методики углубленного обучения математике на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся в процессе обобщения знаний является актуальной и требует решения.

3.3. Анализ результатов опытно-экспериментальной работы

Для проверки гипотезы в начале и конце эксперимента мы использовали непараметрический *U*-критерий Манна-Уитни с определением эмпирической величины $U_{эмп}$. Гипотезы *U*-критерия Манна-Уитни:

$$U_{кр.} = \begin{cases} 338 & (p \le 0{,}05), \\ 292 & (p \le 0{,}01). \end{cases}$$

H_0: Уровень выраженности распределения признака в экспериментальной группе статистически значимо не отличается от уровня распределения в контрольной группе (рис. 3.2)

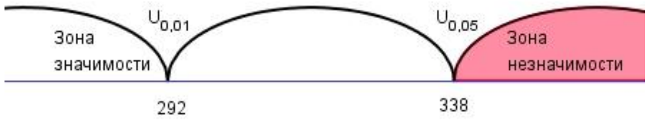


Рис. 3.2

H_1: Уровень выраженности распределения признака в экспериментальной группе статистически значимо отличается от уровня распределения признака в контрольной группе (рис.3.3).

Если $U_{эмп} > U_{кр}$, подтверждается гипотеза H_0, если $U_{эмп} < U_{кр}$, подтверждается гипотеза H_1.

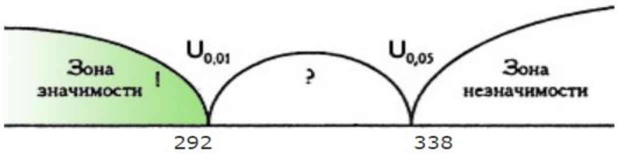


Рис. 3.3

1. Мотивация к самостоятельной деятельности. Для выяснения степени осознания потребности в развитии самостоятельной деятельности учащихся и перспективы ее применения в дальнейшей учебной работе, мы использовали анкету (исследования С.В. Митрохиной). Анкета включала 10 мотивов, в которой каждый мотив нужно было оценить по третьей – бальной шкале: 3 баллы соответствовали максимальной значимости для обучающегося, а 1 балл - минимальной. После подсчета полученного балла на каждый вопрос определяется сумма значений баллов ответов всех участников.

Таблица 3.8

Мотивация к самостоятельной деятельности в начале эксперимента

Эксп. группа			Контр. Группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	Ранг	№	баллы	Ранг	№	баллы	Ранг	№	баллы	Ранг
1	27	49	1	13	1	16	21	11	16	28	55,5
2	20	6,5	2	20	6,5	17	22	16.5	17	26	42,5
3	28	55,5	3	29	58	18	24	29	18	27	49
4	25	37	4	25	37	19	30	59,5	19	28	55,5
5	27	49	5	20	6,5	20	27	49	20	21	11
6	26	42,5	6	22	16.5	21	24	29	21	23	22

Эксп. группа			Контр. Группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	Ранг	№	баллы	Ранг	№	баллы	Ранг	№	баллы	Ранг
7	24	29	7	17	2	22	28	55,5	22	21	11
8	25	37	8	23	22	23	25	37	23	27	49
9	24	29	9	27	49	24	23	22	24	26	42,5
10	20	6,5	10	24	29	25	21	11	25	22	16,5
11	21	11	11	23	22	26	18	3,5	26	22	16,5
12	22	16,5	12	30	59,5	27	18	3,5	27	23	22
13	26	42,5	13	27	49	28	27	49	28	27	49
14	22	16,5	14	25	37	29	24	29	29	25	37
15	24	29	15	24	29	30	25	37	30	24	29
Сумма рангов эксп. группы: 898						Сумма рангов контр. группы: 932					

По *U*-критерию Манна-Уитни определяем эмпирическую величину *U*: $U_{эмп} = 433$: $U_{эмп} > U_{кр}$. Гипотеза H_0 подтверждается. В начале эксперимента мотивация самостоятельной деятельности в контрольной группе значимо не отличается от мотивации самостоятельной деятельности в экспериментальной группе.

2. *Осведомленность обучающихся об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности.*

Для исследования осведомленности обучающихся об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности, мы использовали анкету: «Какие из перечисленных учебных действий вы знаете и используете в процессе самостоятельной деятельности?

Оценка проводилась таким образом: если участники анкеты называли все 6 или 7 учебных действий они получали 5 баллов, за 4 или 5 действий получали 4 балла, если называли 3 действия, они получали 3 балла, за 2 действия -2 балла, 1 действие – 1 балл.

Полученные результаты по итогам анкетирования (таблица 3.9).

Таблица 3.9

Осведомленность об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности в начале эксперимента

Знания об учебных действиях: планирование; целеполагание; составление плана и последовательности действий; прогнозирование; контроль; коррекция; оценка	6-7 учебных действий	4-5 учебных действия	3 учебных действия	2 учебных действий	1 учебное действие
Результаты ЭГ (количество и %)	4 (13, 3%)	5 (16, 7%)	8 (26,7%)	12 (40%)	1 (3,3%)
Результаты КГ (количество и %)	4 (13, 3%)	6 (20%)	7 (23,3%)	11 (36,7 %)	2 (6,7%)
Баллы	5	4	3	2	1

Результаты, представленные в данной таблице, показывают, что осведомленность обучающихся об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности выражена средне: 30% участников из экспериментальной группы и 33,3% участников из контрольной группы были отнесены к высокому уровню, что показывает, что они знают и используют перечисленные учебные действия в самостоятельной деятельности. Большинство участников (66,7% из ЭГ и 60% из КГ) относятся к среднему уровню, т.е. каждый обучающийся этого уровня частично знают об учебных действиях самостоятельной деятельности и мало их используют. К низкому уровню (3,3% из ЭГ и 6,7% из КГ) отнесены обучающиеся, которые знают и используют не более одного учебного действия.

Уровень научного общения обучающихся определялся по методу фронтальной экспресс-диагностики А.М. Марковой, который заключался в заполнении оценочного листа по шкале учителем на основании наблюдения за обучающимися (таблица 3.10)

Таблица 3.10

Оценочный лист для диагностики уровня научного общения обучающихся

Научное общение		
Проявляет инициативу к участию в олимпиадах, в конкурсах, в научно-практических конференциях, публикация статей	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Инициативу не проявляет
Готов к самостоятельному самообучению и подготовке к олимпиадам, конкурсам, научно-практическим конференциям, публикация статей	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Не имеет интереса к участию в олимпиадах, в конкурсах, в научно-практических конференциях, публикация статей
Имеет высокие результаты по итогам участия в олимпиадах, в конкурсах, в научно-практических конференциях	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Не имеет результатов

Результат оценивался по 30-балльной шкале (таблица 3.11).

По U-критерию Манна-Уитни определяем эмпирическую величину U: $U_{эмп} = 426{,}5$: $U_{эмп} > U_{кр}$. Гипотеза H_0 подтверждается. В начале эксперимента уровень научного общения обучающихся контрольной группы значимо не отличается от уровня обучающихся экспериментальной группы. Результаты, представленные в данной таблице, показывают, что уровень научного общения на констатирующем этапе выражен средне: 20% участников из экспериментальной группы и 20% участников из контрольной группы были отнесены к высокому уровню. Большинство участников (80% из ЭГ и 80% из КГ) относятся к среднему уровню.

Таблица 3.11

Уровень научного общения на констатирующем этапе

Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг
1	12	2	1	12	2	16	21	51	16	21	51
2	13	5,5	2	12	2	17	22	56	17	14	10
3	13	5,5	3	13	5,5	18	22	56	18	21	51
4	14	10	4	13	5,5	19	14	10	19	20	47

5	15	13,5	5	14	10	20	16	17,5	20	19	40,5
6	16	17,5	6	14	10	21	18	31	21	15	13,5
7	17	23,5	7	17	23,5	22	17	23,5	22	17	23,5
8	16	17,5	8	17	23,5	23	19	40,5	23	18	31
9	18	31	9	18	31	24	20	47	24	16	17,5
10	18	31	10	19	40,5	25	18	31	25	21	51
11	19	40,5	11	19	40,5	26	19	40,5	26	18	31
12	19	40,5	12	20	47	27	19	40,5	27	19	40,5
13	18	31	13	16	17,5	28	16	17,5	28	22	56
14	19	40,5	14	17	23,5	29	22	56	29	22	56
15	21	51	15	18	31	30	24	60	30	23	59
Сумма рангов эксп. группы:					938,5	Сумма рангов контр. группы:					891,5

3. *Академическая успешность*. Результаты данного этапа (табл. 3.12) показывают, что учащиеся класса с углубленным изучением математики характерно владеют полнотой знаний, решают задачи различного уровня сложности. Большинство из участников нуждаются в помощи в систематизации знаний, установлении связей между математическими фактами.

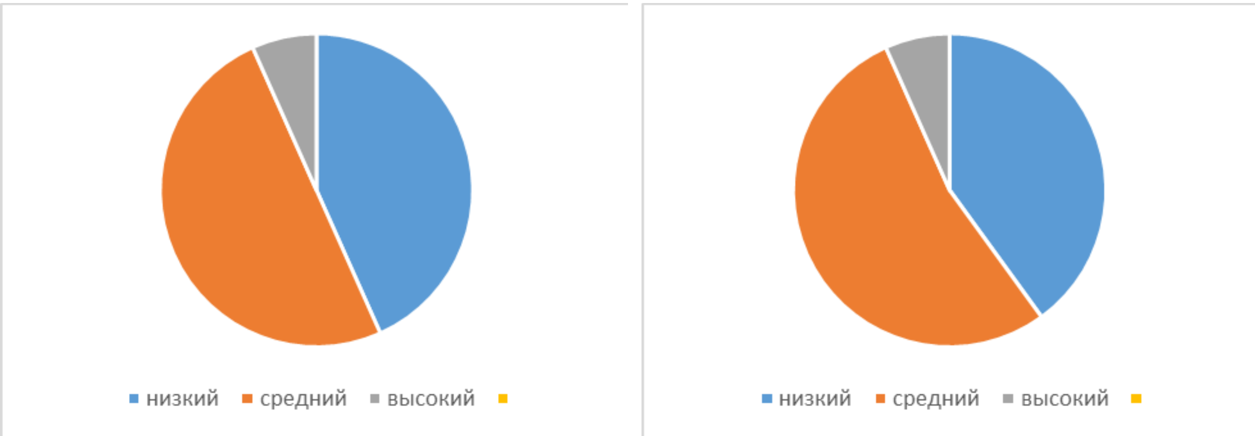
По алгоритму U-критерий Манна-Уитни определяем эмпирическую величину U: $U_{эмп} = 434$: $U_{эмп} > U_{кр}$. Итак, полученное значение $U_{эмп}$ находится в зоне незначимости – следовательно, уровень академической успешности обучающихся контрольной группы отличается незначимо от уровня академической успешности обучающихся экспериментальной группы. Результаты констатирующего этапа эксперимента в виде круглой гистограммы представлены на рисунке 3.4.

Таблица 3.12

Академическая успешность обучающихся на констатирующем этапе

Самостоятельная работа № 1											
Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг
1	10	21,5	1	8	7	16	18	45,5	16	15	35,5
2	9	14	2	10	21,5	17	18	45,5	17	14	31,5
3	10	21,5	3	9	14	18	20	54,5	18	17	41

4	8	7	4	8	7	19	14	31,5	19	20	54,5
5	9	14	5	7	2	20	16	38	20	12	27
6	7	2	6	10	21,5	21	18	45,5	21	15	35,5
7	8	7	7	8	7	22	17	41	22	17	41
8	9	14	8	9	14	23	19	50,5	23	18	45,5
9	10	21,5	9	10	21,5	24	20	54,5	24	16	38
10	10	21,5	10	9	14	25	18	45,5	25	20	54,5
11	9	14	11	8	7	26	19	50,5	26	18	45,5
12	8	7	12	10	21,5	27	19	50,5	27	19	50,5
13	7	2	13	14	31,5	28	16	38	28	14	31,5
14	11	26	14	13	28	29	25	57	29	28	58,5
15	14	31,5	15	14	31,5	30	28	58,5	30	30	60
Сумма рангов эксп. группы:					931	Сумма рангов контр. группы:					899



(a) эксп. группа (b) контр. группа

Рис. 3.4. Круглые гистограммы на констатирующем этапе

По итогам констатирующего эксперимента (таблица 3.13) можно делать вывод, что уровень академической успешности в группах приблизительно одинаков: высокий уровень в обоих группах – 6,7%; средний уровень в контрольной группе -53,3%, в экспериментальной – 50%; низкий уровень в контрольной группе – 40%, в экспериментальной – 43,3%.

Таблица 3.13

Уровень академической успешности

уровни / группы	1 уровень	2 уровень	3 уровень
Экспериментальная группа	43,3% (13)	50% (15)	6,7 % (2)
Контрольная группа	40% (12)	53,3% (16)	6,7% (2)

4. *Качество обобщенности знаний и процедур*. Результаты данного этапа выводились по итогам письменных диагностических работ и устных испытаний для оценки уровня усвоения учебного материала, объема знаний, умений и навыков, способностей самостоятельного их использования, решения практико-ориентированных и мотивационно – прикладных задач. Мы выделили три уровня: низкий уровень характеризуется 1 - 10 баллами, учащийся в незначительной степени усвоил знания и умеет их применять и самостоятельно не умеет их использовать; средний уровень характеризуется 11 - 20 баллами; высокий уровень характеризуется 21 - 30 баллами. Констатирующий этап показывает, что многие участники нуждаются в помощи при выполнении заданий на воспроизведение знаний в новой ситуации, нахождении нестандартных и рациональных способов решения задач в интерпретация математических знаний в практических ситуациях.

По алгоритму *U*-критерий Манна-Уитни определяем эмпирическую величину *U*: $U_{эмп} = 439{,}5$: $U_{эмп} > U_{кр}$. Полученное значение $U_{эмп}$ находится в зоне незначимости – следовательно, уровень качества обобщенности знаний и процедур в контрольной группе отличается незначимо от уровня качества обобщенности знаний и процедур в экспериментальной группе.

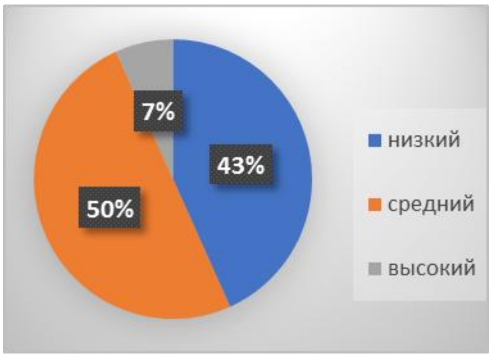
Таблица 3.14

Качество обобщенности знаний и процедур обучающихся на констатирующем этапе

Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг
1	18	45,5	1	15	35,5	16	10	20,5	16	8	6,5

2	18	45,5	2	14	31	17	9	13	17	10	20,5
3	20	54,5	3	17	41	18	10	20,5	18	9	13
4	14	31	4	20	54,5	19	8	6,5	19	8	6,5
5	16	38	5	12	26	20	9	13	20	7	2
6	18	45,5	6	15	35,5	21	7	2	21	10	20,5
7	17	41	7	17	41	22	8	6,5	22	8	6,5
8	19	50,5	8	18	45,5	23	9	13	23	9	13
9	20	54,5	9	16	38	24	10	20,5	24	10	20,5
10	18	45,5	10	20	54,5	25	10	20,5	25	9	13
11	19	50,5	11	18	45,5	26	9	13	26	11	25
12	19	50,5	12	19	50,5	27	8	6,5	27	10	20,5
13	16	38	13	14	31	28	7	2	28	14	31
14	25	57	14	28	58,5	29	14	31	29	13	27
15	28	58,5	15	30	60	30	14	31	30	14	31
Сумма рангов эксп. группы:					925,5	Сумма рангов контр. группы:					904,5

Результаты в виде круглой гистограммы констатирующего этапа эксперимента представлены на рис. 3.5.



(a) экспериментальная группа

(b) контрольная группа

Рис. 3.5. Круглые гистограммы на констатирующем этапе

По итогам констатирующего эксперимента (таблица 3.15) можно делать вывод, что уровень качества обобщенности знаний и процедур в группах приблизительно одинаков: высокий уровень в обоих группах – 7%; средний уровень в контрольной группе (КГ) – 57%, в экспериментальной (ЭГ) – 50%; низкий уровень в контрольной группе – 36%, в экспериментальной – 43%.

Таблица 3.15

Уровень качества обобщенности знаний и процедур

уровни / группы	1 уровень	2 уровень	3 уровень
Экспериментальная группа	43% (13)	50% (15)	7 % (2)
Контрольная группа	36% (11)	57% (17)	7% (2)

5. *Умение работать в команде, умения адаптироваться и осознания личностных смыслов и предпочтений, самооценки* обучающихся также определялись по методу фронтальной экспресс-диагностики А.М. Марковой, который заключался в заполнении оценочного листа по шкале учителем на основании наблюдения за обучающимися (таблица 3.16). Результат оценивался по 30-балльной шкале. Мы выделили три уровня сформированности данных умений: низкий уровень характеризуется 1 - 10 баллами, учащийся в незначительной степени владеет умениями работы в команде; средний уровень характеризуется 11 - 20 баллами, он частично владеет умениями; высокий уровень характеризуется 21 - 30 баллами.

Таблица 3.16

Оценочный лист для диагностики уровней умения работать в команде, умения адаптироваться и осознание личностных смыслов и предпочтений, самооценки обучающихся

Умение работать в команде		
Готов к совместному творчеству, имеет высокий интерес к взаимодействию	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Не проявляет интерес к взаимодействию
Умеет взаимодействовать и слушать других, передавать информацию	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Не умеет взаимодействовать, передавать информацию без помощи учителя
Устанавливать и передавать связь между информационной, математической и естественной областями	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Не может устанавливать связь без помощи учителя
Умение адаптироваться и осознание личностных смыслов и предпочтений		
Способен управлять процессом учебной деятельности	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Не умеет управлять процессом учебной деятельности

Активно стремится довести решение поставленных перед собой задач до итогового результата самостоятельно	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Не доводит до конца решение без помощи учителя
Высокая устойчивость волевых усилий	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Не проявляет волевые усилия
Самооценка		
Умеет обосновывать свое решение	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Не умеет обосновывать решение задачи,
Способен принимать решение самостоятельно, проводить рефлексию деятельности	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Не умеет принимать решение рефлексию деятельности проводит с помощью учителя,
Умеет оценить свою работу	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	Свою работу оценивает приблизительно

Результат оценивался по 30-балльной шкале (таблица 3.17).

Таблица 3.17

Уровни умения работать в команде, умения адаптироваться и осознания личностных смыслов и предпочтений, самооценки обучающихся на констатирующем этапе

Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг
1	13	1,5	1	14	5,5	16	21	48,5	16	21	48,5
2	14	5,5	2	13	1,5	17	21	48,5	17	18	22
3	14	5,5	3	14	5,5	18	22	56	18	21	48,5
4	15	10	4	14	5,5	19	18	22	19	20	39,5
5	15	10	5	15	10	20	18	22	20	20	39,5
6	17	15	6	14	5,5	21	19	31,5	21	17	15
7	18	22	7	17	15	22	16	16	22	18	22
8	17	15	8	18	22	23	21	48,5	23	19	31,5
9	19	31,5	9	19	31,5	24	21	48,5	24	17	15
10	18	22	10	19	31,5	25	19	31,5	25	21	48,5
11	19	31,5	11	20	39,5	26	21	48,5	26	19	31,5
12	19	31,5	12	20	39,5	26	21	48,5	27	21	48,5
13	20	39,5	13	18	22	28	18	22	28	22	56
14	20	39,5	14	21	48,5	29	23	58,5	29	22	56
15	21	48,5	15	19	31,5	30	24	60	30	23	58,5
Сумма рангов эксп. группы:					935	Сумма рангов контр. группы:					895

По алгоритму *U*-критерий Манна-Уитни определяем эмпирическую величину *U*: $U_{эмп} = 430$: $U_{эмп} > U_{кр}$. Полученное значение $U_{эмп}$ находится в зоне незначимости – следовательно, уровни умения работать в команде, умения адаптироваться и осознание личностных смыслов и предпочтений, самооценки обучающихся на констатирующем этапе в контрольной группе отличается незначимо от уровней в экспериментальной группе.

6. По результатам работы по критериям и показателям оценки сформированности самостоятельной деятельности на констатирующем этапе мы получили следующий итог, отраженный в таблице 3.18.

Таблица 3.18

Уровень развития самостоятельной деятельности обучающихся основной школы в начале эксперимента

Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг
1	104	3,5	1	102	1,5	16	132	28	16	156	32
2	112	22,5	2	111	18,5	17	152	30	17	154	31
3	106	6,5	3	110	13,5	18	160	35	18	171	45,5
4	108	9	4	110	13,5	19	168	41	19	163	37,5
5	111	18,5	5	110	13,5	20	166	39	20	176	54,5
6	105	5	6	102	1,5	21	158	33	21	169	42,5
7	107	8	7	112	22,5	22	174	51,5	22	162	36
8	111	18,5	8	111	18,5	23	163	37,5	23	174	51,5
9	110	13,5	9	122	27	24	172	47,5	24	169	42,5
10	110	13,5	10	104	3,5	25	176	54,5	25	170	44
11	112	22,5	11	109	10	26	172	47,5	26	173	49,5
12	112	22,5	12	110	13,5	27	171	45,5	27	176	54,5
13	106	6,5	13	167	40	28	176	54,5	28	173	49,5
14	115	25	14	159	34	29	194	58	29	197	59
15	120	26	15	146	29	30	198	60	30	181	57
Сумма рангов эксп. группы: 883,5						Сумма рангов контр. группы: 946,5					

По алгоритму *U*-критерий Манна-Уитни определяем эмпирическую величину *U*: $U_{эмп} = 418{,}5$: $U_{эмп} > U_{кр}$. Следовательно, на начало исследования уровень развития самостоятельной деятельности обучающихся в контрольных группах значимо не отличается от уровня развития самостоятельной деятельности в экспериментальных группах. Результаты констатирующего среза свидетельствуют о том, что исходные данные в экспериментальных и контрольных группах соизмеримы.

II. В целевую функцию формирующего этапа обучения входила экспериментальная проверка эффективности выдвинутой гипотезы, а именно: реализация методики обеспечения преемственности самостоятельной деятельности обучающихся на основе обобщения математических знаний в интерактивной среде; определение характера и степени влияния процесса обобщения знаний на усвоение системы знаний по математике и на развитие самостоятельной деятельности учащихся основной школы. В процессе формирующего этапа произошли положительные изменения по всем компонентам.

В результате целенаправленной работы были отмечены положительные результаты в развитии отдельных компонентов.

1. Изменилась *мотивация в овладении самостоятельной деятельностью*. (таблица 3.19).

Таблица 3.19

Мотивация самостоятельной деятельности в конце эксперимента

Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	Ранг	№	баллы	Ранг	№	баллы	Ранг	№	баллы	Ранг
1	26	41,5	1	24	31	16	30	59,5	16	23	26
2	30	59.5	2	22	20	17	26	41,5	17	22	20
3	25	36.5	3	21	11,5	18	29	55,5	18	21	11,5
4	25	36,5	4	21	11.5	19	20	6	19	24	31
5	28	49,5	5	24	31	20	24	31	20	29	55,5
6	22	20	6	23	26	21	21	11,5	21	28	49,5
7	28	49,5	7	19	4	22	27	45,5	22	22	20
8	24	31	8	22	20	23	26	41,5	23	23	26
9	28	49,5	9	22	20	24	25	36,5	24	24	31
10	28	49,5	10	18	2,5	25	26	41,5	25	21	11,5
11	25	36,5	11	20	6	26	26	41,5	26	22	20
12	22	20	12	28	49,5	27	26	41,5	27	21	11,5
13	18	2,5	13	29	55,5	28	21	11,5	28	29	55,5
14	24	31	14	22	20	29	29	55,5	29	20	6
15	27	45,5	15	21	11,5	30	17	1	30	29	55,5
Сумма рангов эксп. группы: 1079,5						Сумма рангов контр. группы: 750,5					

В соответствии с алгоритмом U-критерий Манна-Уитни, определяем эмпирическую величину U: $U_{эмп} = 285{,}5$: $U_{эмп} < U_{кр}$. Полученное эмпирическое значение $U_{эмп}$ находится в зоне значимости – следовательно, уровень мотивации самостоятельной деятельности в контрольных группах обучающихся достоверно ниже, чем уровень мотивации самостоятельной деятельности в экспериментальных группах.

2. *Осведомленность учащихся об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности* в конце эксперимента показана в следующей таблице 3.20.

Таблица 3.20

Осведомленность учащихся об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности в конце эксперимента

Знания об учебных действиях	Знают и используют									
планирование; целеполагание; составление плана и последовательности действий; прогнозирование; контроль; коррекция; оценка	6-7 учебных действий (%)		4-5 учебных действий		3 учебных действия		2 учебных действий		1 учебное действие	
	Начало эксперимента	Конец эксперимента	Начало эксперимента	Конец эксперимента	Начало эксперимента	Конец эксперимента	Начало эксперимента	Конец эксперимента	Начало эксперимента	Конец эксперимента
Экспериментальная группа	4 (13, 3%)	9 (30%)	5 (16, 7%)	10 (33.3 %)	8 (26,7 %)	6 (20%)	12 (40%)	5 (16,7 %)	1 (3, 3%)	0
Контрольная группа	4 (13, 3%)	4 (13, 3%)	6 (20%)	7 (23,3 %)	7 (23,3 %)	9 (30%)	11 (36,7 %)	8 (26,7 %)	2 (6,7%)	2 (6,7%)

Результаты, представленные в таблице, показывают, что в результате эксперимента осведомленность учащихся экспериментальной группы об обеспечении преемственности самостоятельной деятельности повысилась: 63,3% респондентов были отнесены к высокому уровню (на начало эксперимента 30%), что показывает: 63,3% учащихся экспериментальной группы знают и используют перечисленные учебные действия в самостоятельной познавательной деятельности. 36,7% (на начало эксперимента 66,7%) по степени владения знаниями и учебными действиями по освоению навыков самостоятельности познавательной деятельности отнесены к среднему уровню, т.е. каждый учащийся этого уровня частично знают об учебных действиях самостоятельной деятельности и мало их используют. К низкому уровню (0%) отнесены обучающиеся (на начало эксперимента 3%).

3. *Уровень научного общения* обучающихся в конце эксперимента показан в таблице 3.21)

Таблица 3.21

Уровень научного общения обучающихся в конце эксперимента

Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг
1	16	6	1	13	2,5	16	25	55,5	16	21	53
2	17	9,5	2	14	2,5	17	26	57,5	17	19	11,5
3	17	9,5	3	15	6,5	18	26	57,5	18	18	15
4	18	15	4	16	6,5	19	18	15	19	21	34,5
5	19	21	5	14	11,5	20	20	27,5	20	23	48
6	20	27,5	6	17	11,5	21	22	40,5	21	16	6
7	21	34,5	7	18	15	22	21	34,5	22	18	15
8	22	40,5	8	18	15	23	23	48	23	18	15
9	22	40,5	9	19	21	24	24	53,5	24	19	21
10	22	40,5	10	20	43	25	22	40,5	25	21	34,5
11	23	48	11	20	43	26	23	48	26	21	34,5
12	23	48	12	20	49,5	27	23	48	27	20	27,5
13	22	40,5	13	17	19,5	28	20	27,5	28	23	48
14	23	48	14	20	26	29	29	60	29	23	48
15	25	55,5	15	19	21	30	28	59	30	24	53,5
Сумма рангов эксп. группы:					1157	Сумма рангов контр. группы:					673

По алгоритму *U*-критерий Манна-Уитни определяем эмпирическую величину $U_{эмп} = 208$: $U_{эмп} < U_{кр}$. Полученное эмпирическое значение $U_{эмп}$ находится в зоне значимости. Результаты, представленные в таблице, показывают, что в результате эксперимента уровни научного обобщения, умения адаптироваться и осознание личностных смыслов и предпочтений, самооценки обучающихся повысились: 70% учащихся экспериментальной группы были отнесены к высокому уровню (в начале эксперимента 23%) в то время, как в контрольной группе 27 % учащихся были отнесены к высокому уровню (в начале эксперимента 20%).

5. *Академическая успешность.* Полученные результаты представлены в таблице 3.22.

Таблица 3.22

Академическая успешность учащихся в конце эксперимента

Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг
1	10	13	1	10	13	16	20	45	16	17	26
2	9	8	2	8	3	17	17	26	17	15	20
3	8	3	3	8	3	18	18	31	18	16	23
4	9	8	4	9	8	19	19	37,5	19	15	20
5	10	13	5	10	13	20	20	45	20	20	45
6	18	31	6	8	3	21	20	45	21	19	37,5
7	16	23	7	9	8	22	19	37,5	22	20	45
8	18	31	8	8	3	23	28	55	23	18	31
9	19	37,5	9	10	13	24	27	53	24	20	45
10	20	45	10	9	8	25	29	57	25	18	31
11	20	45	11	18	31	26	27	53	26	19	37,5
12	19	37,5	12	11	16	27	26	51	27	20	45
13	18	31	13	12	17	28	29	57	28	23	50
14	17	26	14	13	18	29	30	59,5	29	27	53
15	16	23	15	15	20	30	30	59,5	30	29	57
Сумма рангов эксп. группы:					1087	Сумма рангов контр. группы:					743

По алгоритму U-критерий Манна-Уитни определяем эмпирическую величину $U_{эмп} = 278$: $U_{эмп} < U_{кр}$. Полученное эмпирическое значение $U_{эмп}$ находится в зоне значимости – следовательно, уровень академической успешности в контрольных группах обучающихся достоверно ниже, чем уровень академической успешности в экспериментальных группах. Сравнительные данные в начале и конце эксперимента даны в таблице 3.23 и в виде диаграммы на рисунке 3.6.

Таблица 3.23

уровни / группы	1 уровень		2 уровень		3 уровень	
	Начало эксперимента	Конец эксперимента	Начало эксперимента	Конец эксперимента	Начало эксперимента	Конец эксперимента
ЭГ	43,3%(13)	16,6(5)	50%(15)	56,7%(17)	6,7%(2)	26,7%(8)
КГ	40%(12)	33,3(10)	53,3%(16)	60%(18)	6,7%(2)	10%(3)

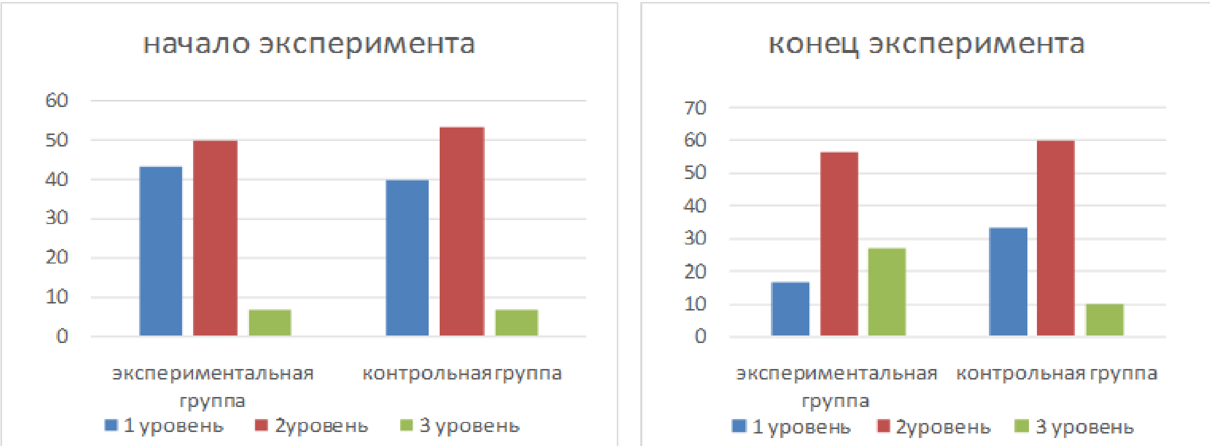


Рис. 3.6. Уровневая статистика академической успешности

6. *Качество обобщенности и процедур*. Полученные результаты в конце эксперимента представлены в таблице 3.24.

Таблица 3.24

Качество обобщенности и процедур в конце эксперимента

Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг
1	20	44	1	18	30,5	16	10	11,5	16	10	11,5
2	17	26	2	16	23	17	11	15,5	17	8	2,5
3	18	30,5	3	15	19,5	18	8	2,5	18	8	2,5
4	19	37	4	16	23	19	9	6,5	19	9	6,5
5	20	44	5	20	44	20	10	11,5	20	10	11,5
6	20	44	6	19	37	21	18	30,5	21	8	2,5
7	19	37	7	20	44	22	16	23	22	9	6,5
8	28	56	8	18	30,5	23	18	30,5	23	9	6,5
9	27	53,5	9	20	44	24	19	37	24	10	11,5
10	29	58,5	10	18	30,5	25	20	44	25	10	11,5
11	27	53,5	11	19	37	26	20	44	26	18	30,5
12	26	51,5	12	20	44	27	21	49	27	11	15,5
13	30	60	13	23	50	28	18	30,5	28	12	17

14	28	56	14	26	51,5	29	15	19,5	29	14	18
15	29	58,5	15	28	56	30	16	23	30	16	23
Сумма рангов эксп. группы:					1088,5	Сумма рангов контр. группы:					741,5

По алгоритму U-критерий Манна-Уитни определяем эмпирическую величину U: $U_{эмп} = 276{,}5$: $U_{эмп} < U_{кр}$. Полученное эмпирическое значение $U_{эмп}$ находится в зоне значимости – следовательно, уровень качества обобщенности знаний и процедур в контрольных группах обучающихся достоверно ниже, чем в экспериментальных группах. Сравнительные данные качества обобщенности знаний и процедур в начале и конце эксперимента даны в таблице 3.25 и в виде диаграммы на рисунке 3.7.

Таблица 3.25

Сравнительные данные качества обобщенности знаний и процедур в начале и конце эксперимента

уровни / группы	1 уровень		2 уровень		3 уровень	
	Начало эксперимента	Конец эксперимента	Начало эксперимента	Конец эксперимента	Начало эксперимента	Конец эксперимента
ЭГ	43%(13)	13,3 (4)	50%(15)	56,7%(17)	7%(2)	30%(9)
КГ	36,3%(12)	33,3(10)	56,7%(16)	56,7%(17)	7%(2)	10%(3)

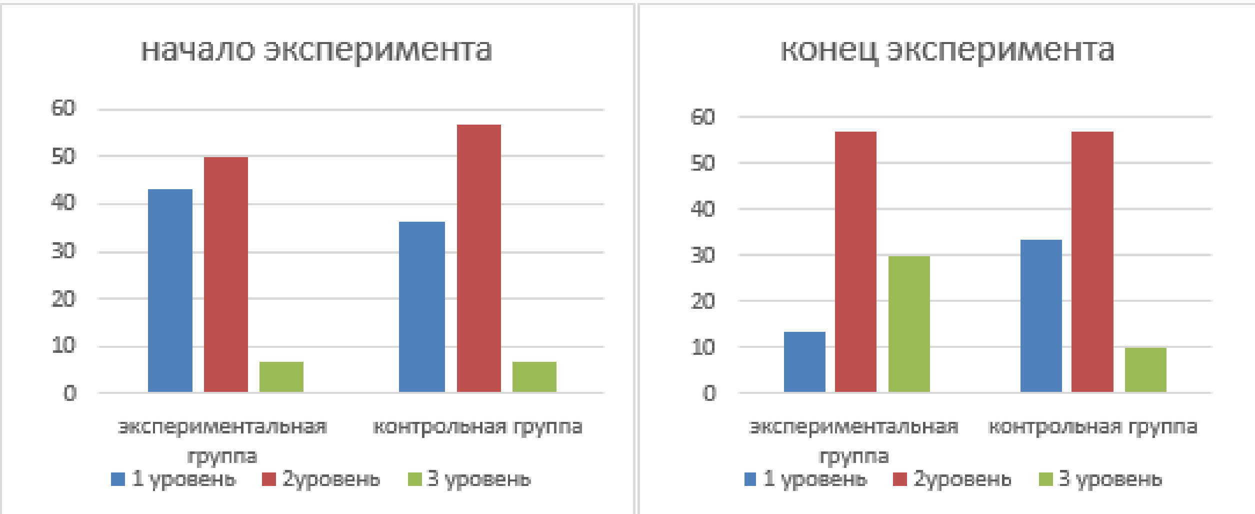


Рис. 3.7. Уровневая статистика качества обобщенности знаний и процедур

7. *Умение работать в команде,* умения *адаптироваться и осознание личностных смыслов и предпочтений, самооценки обучающихся*. Полученные результаты в конце эксперимента представлены в таблице 3.26.

Таблица 3.26

Умение работать в команде, умения адаптироваться и осознание личностных смыслов и предпочтений, самооценки обучающихся

Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг
1	21	44	1	15	16,5	16	12	8	16	12	8
2	16	18,5	2	17	21	17	14	13,5	17	11	3,5
3	17	21	3	16	18,5	18	10	1,5	18	12	8
4	18	25,5	4	18	25,5	19	12	8	19	14	13,5
5	20	39	5	21	44	20	12	8	20	12	8
6	19	33	6	18	25,5	21	19	33	21	10	1,5
7	21	44	7	19	33	22	17	21	22	11	3,5
8	26	53	8	19	33	23	19	33	23	12	8
9	28	58,5	9	21	44	24	20	39	24	15	16,5
10	27	55,5	10	19	33	25	21	44	25	14	13,5
11	25	51,5	11	18	25,5	26	22	48,5	26	19	33
12	27	55,5	12	21	44	27	24	50	27	14	13,5
13	29	60	13	22	48,5	28	19	33	28	18	25,5
14	27	55,5	14	25	51,5	29	18	25,5	29	19	33
15	28	58,5	15	27	55,5	30	20	39	30	21	44
Сумма рангов эксп. группы: 1078						Сумма рангов контр. группы: 752					

По алгоритму *U*-критерий Манна-Уитни определяем эмпирическую величину *U*: $U_{эмп} = 287$: $U_{эмп} < U_{кр}$. Полученное эмпирическое значение $U_{эмп}$ находится в зоне значимости – следовательно, уровень качества обобщенности знаний и процедур в контрольных группах обучающихся достоверно ниже, чем в экспериментальных группах.

8. Организация учебной деятельности на основе фундирования опыта личности в процессе обобщения знаний и действий позитивно отразилось на развитии личностно-адаптационной и содержательной составляющих самостоятельной

деятельности учащихся. Произошедшие в уровне развития изменения представлены в таблице 3.27.

Таблица 3.27

Уровень развития самостоятельной деятельности обучающихся в конце эксперимента

Эксп. группа			Контр. группа			Эксп. группа			Контр. группа		
№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг	№	баллы	ранг
1	134	10	1	132	8	16	211	35,5	16	211	35,5
2	137	13.5	2	135	11	17	221	48	17	202	31
3	132	8	3	137	13.5	18	226	53	18	218	44
4	136	12	4	112	1	19	217	41	19	219	46
5	142	15	5	125	5	20	221	48	20	192	25.5
6	178	21	6	122	2.5	21	238	56	21	162	17
7	216	39	7	122	2.5	22	221	48	22	218	44
8	218	44	8	127	6	23	230	55	23	169	19.5
9	217	41	9	132	8	24	225	52	24	200	29
10	169	19.5	10	123	4	25	222	50	25	182	22
11	188	24	11	211	35,5	26	203	32	26	165	18
12	157	16	12	195	27	27	201	30	27	192	25.5
13	228	54	13	217	41	28	215	38	28	250	58,5
14	211	35,5	14	206	33	29	250	58,5	29	240	57
15	198	28	15	185	23	30	295	60	30	224	51
Сумма рангов эксп. группы: 1085,5						Сумма рангов контр. группы: 744,5					

По алгоритму U-критерия Манна-Уитни определяем эмпирическую величину U: $U_{эмп} = 279{,}5$: $U_{эмп} < U_{кр}$. Следовательно, уровень развития самостоятельной деятельности обучающихся в контрольных группах достоверно ниже уровня развития самостоятельной деятельности обучающихся в экспериментальной группе.

Анализируя полученные экспериментальные данные, мы видим, что состояние самостоятельной деятельности до проведения эксперимента в экспериментальной и контрольной группах статистически однородно (критерий Манна-Уитни, $p > 0{,}05$), большая часть обучающихся экспериментальной группы показала наличие среднего уровня развития самостоятельной деятельности. По завершении формирующего эксперимента наблюдались отрицание H_0-гипотезы и значимые различия в оценке уровня самостоятельной деятельности обучающихся экспериментальной и контрольной групп (критерий Манна-Уитни, $p < 0{,}05$). Данные представлены в таблице 3.28 и рисунках 3.8 и 3.9.

Таблица 3.28

Изменение уровня самостоятельной деятельности в экспериментальных и контрольных группах

Уровень самостоятельной познавательной деятельности	Экспериментальная группа		Контрольная группа	
	В начале эксперимента (чел.) (1)	В конце эксперимента (чел.) (2)	В начале эксперимента (чел.) (3)	В конце эксперимента (чел.) (4)
Высокий	2	11	2	3
Средний	15	15	16	17
Низкий	13	4	12	10

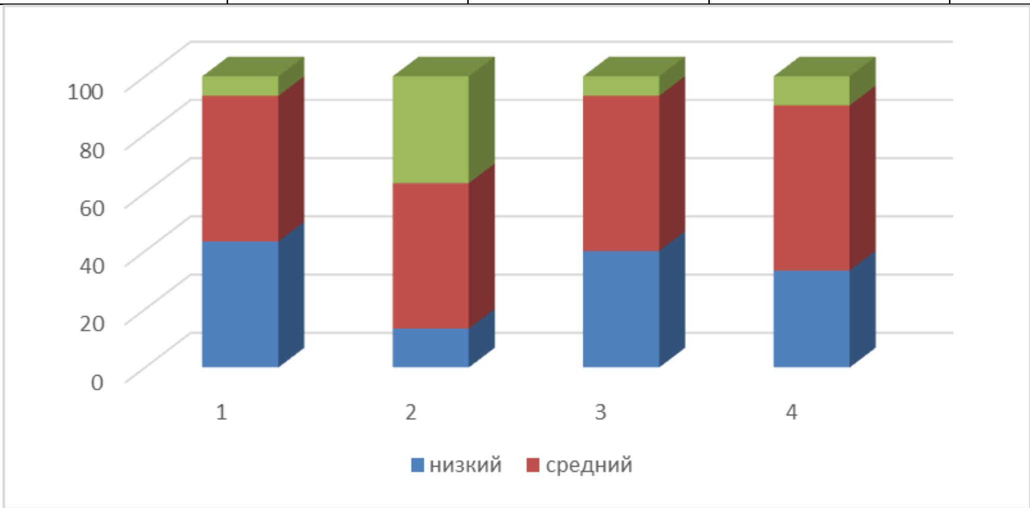


Рис. 3.8. Уровневая статистика развития самостоятельной деятельности

Рис. 3.9. Уровневая статистика (в процентах) развития самостоятельной деятельности обучающихся в конце формирующего эксперимента

По результатам формирующего эксперимента в экспериментальной группе обнаруживаются позитивные качественные изменения по развитию умений самостоятельной деятельности учащихся основной школы. Данная диаграмма показывает, что в экспериментальной группе количество учащихся, которые вышли на высший уровень, выросло на 9 чел., а в контрольной группе на 1 чел. Эти результаты позволяют нам сделать вывод о том, что выделенные нами условия, обеспечивающие преемственность самостоятельной деятельности обучающихся в процессе обобщения математических знаний на основе концепции фундирования опыта личности в цифровой образовательной среде интерактивной математической деятельности, стимулируют развитие самостоятельной деятельности обучающихся основной школы.

Средний показатель (СП) уровня самостоятельной деятельности определялся по формуле:

$$\text{СП} = \frac{x + 2y + 3z}{x + y + z},$$

где x, y, z – количество учащихся, которые находятся на низком, среднем и высоком уровнях соответственно.

Мы проверяли коэффициент эффективности (КЭ) предлагаемой методики, который вычислялся по следующей формуле:

$$\text{КЭ} = \frac{\text{СП (эксп. группы)}}{\text{СП (контр. группы)}}.$$

Полученные результаты о средних показателях и коэффициентах эффективности представлены в таблице 3.29.

Таблица 3.29

Группы	Исходный срез		Формирующий срез	
	СП	КЭ	СП	КЭ
Эксп.	1,63	0,98	2,23	1,26
Контр.	1,67		1,77	

Таким образом, данный критерий оценки результатов эксперимента позволяет дополнительно увидеть эффективность процесса развития самостоятельной деятельности обучающихся на основе этапности и преемственности в углубленном освоении базовых математических действий и структур в специально организованной информационно-образовательной среде.

Качественная оценка результатов педагогического эксперимента позволяет сделать вывод об эффективности разработанной методики. Апробация методики обучения математике в 9 классах показала, что её использование укладывается во времени, отведенном на обучение, а также данная методика способствует положительной динамике овладения различными видами УУД. Таким образом, полученные результаты проведенного педагогического эксперимента свидетельствуют о том, что гипотеза исследования подтверждена. Полученные результаты педагогического эксперимента позволили нам сделать вывод о том, что основным механизмом актуализации, преемственности уровней самостоятельной деятельности в углубленном обучении математике является формирование опыта обобщения знаний в практико-ориентированной деятельности на основе этапности и преемственности наглядного моделирования знаний и процедур освоения базовых математических действий и структур в специально организованной информационно-образовательной среде. Для личностного развития и преемственности самостоятельной деятельности обучающихся основной школы в процессе обобщения знаний необходимо использовать интерактивные методы углубленного обучения математике и адекватные уровневые комплексы практико-ориентированных заданий в информационно-образовательной среде. При организации обучения математике нужно актуализировать уровни проявления самостоятельной деятельности в процессе обобщения знаний по этапам их усвоения на основе диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур и повышения учебной мотивации к освоению математических методов познания. При этом основным механизмом развития теоретического мышления в углубленном обучении математике может являться фундирование опыта самостоятельной деятельности на основе наглядного моделирования обобщающих знаний и процедур и актуализация интерактивных методов освоения обобщающих действий.

Выводы по главе 3

1. Наблюдения за деятельностью учащихся и полученные результаты их успеваемости на начало и конец формирующего этапа эксперимента показали, что курс обобщения знаний математике, ориентированный на формирование самостоятельной деятельности, позволяет повысить эффективность углубленного обучения математике: помогает учащимся самостоятельно осуществлять деятельность учения и способствует успешному усвоению математических знаний и умений. При этом у обучающихся развиваются необходимые навыки самостоятельной работы, ученики успешно осуществляют самоконтроль, понимают значимость выполняемой работы, ставят перед собой цели, планируют и анализируют свою деятельность.

2. Положительные отзывы на предлагаемый методический подход были получены не только от учителей математики, но и от учителей других предметов, которые отмечали, что обучающиеся данных экспериментальных групп стали более самостоятельны при осуществлении учебной деятельности.

3. Полученные результаты педагогического эксперимента позволили нам сделать вывод о том, основным механизмом активизации самостоятельной деятельности в углубленном обучении математике является формирование опыта практико-ориентированной деятельности на основе этапности и преемственности освоения базовых математических действий и структур в специально организованной информационно-образовательной среде. Для личностного развития и развития основной школы в процессе обобщения знаний необходимо использовать интерактивные методы обучения в информационно-образовательной среде на основе преемственности самостоятельной деятельности обучающихся. При организации обучения математике нужно актуализировать уровни проявления самостоятельной деятельности в процессе обобщения знаний по этапам их усвоения на ос-

нове диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур и повышения учебной мотивации к освоению математических методов познания. Основным механизмом развития теоретического и эмпирического мышления в углубленном обучении математике является фундирование опыта самостоятельной деятельности на основе операциональности и дидактических свойств интерактивных методов освоения обобщающих действий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении обобщены результаты исследования. Разработанные в данном исследовании теоретические и методические положения, а также результаты опытно-экспериментальной работы позволили сформулировать основные положения преемственности самостоятельной деятельности обучающихся при углубленном обучении математике в основной школе в процессе обобщения математических знаний:

– развитие личности и преемственность самостоятельной деятельности обучающихся происходит более успешно в контексте единства и взаимодействия фундаментальности в обучении математике (приоритет изучения обобщенных математических структур и сущностей математических знаний и деятельности), интерактивности (активное взаимодействие обучающихся в овладении математическими знаниями и обобщенными способами осмысления их доступности в насыщенной информационно-образовательной среде);

– компонентный состав и степень преемственности самостоятельной деятельности определяются и развертываются на основе поэтапного обобщения знаний в направлении наглядного моделирования математических знаний и деятельности, диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур, фундирования опыта самостоятельной деятельности обучающихся на основе вариативности содержания обучения и адаптации современных достижений науки к школьной математике;

– целенаправленное, продуктивное взаимодействие субъекта с дидактическими и коммуникативными возможностями обобщения математических знаний средствами наглядного моделирования в процессе решения практико-ориентированных задач и математико-информационных заданий как фундирующих конструктов освоения сущностей математических знаний способствует преемственности самостоятельной деятельности, развитию личностных качеств и способов учебной деятельности.

Развитию самостоятельной деятельности способствует опыт практико-ориентированной деятельности на основе этапности и преемственности освоения базовых математических действий и структур в специально организованной информационно-образовательной среде.

Проведенное исследование показывает значимость внедрения его результатов в процесс обучения в основной школе, но не исчерпывает содержания изучаемой проблемы. Дальнейшее исследование проблемы может проводиться в следующих направлениях: разработка и внедрение индивидуальных образовательных траекторий не только в рамках образовательного стандарта учебной деятельности, но и в направлении дополнительного образования, базирующегося на личной инициативе обучающихся и направленного на развитие индивидуальной самостоятельной деятельности по овладению знаниями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абатурова, В.С. Формирование познавательной самостоятельности учащихся старших классов средствами математического моделирования / В. С. Абатурова // Ярославский педагогический вестник. – 2013. – № 1. – Том II. (Психолого-педагогические науки). – С.108-116.
2. Абульханова-Славская, К.А. Проблема личности в психологии / К.А. Абульханова-Славская // Психологическая наука в России XX столетия: проблемы теории и истории / под ред. А.В. Брушлинского. – М.: Институт психологии РАН, 1997. – С. 270-374.
3. Автоматический расчет U-критерия Манна-Уитни. – Режим доступа: https://www.psychol-ok.ru/statistics/mann-whitney (дата обращения: 14.02.2023).
4. Адамар, Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж. Адамар. – М.: МЦНМО, 2001. – 128 с.
5. Александров, А.Д. Педагогические статьи разных лет / А.Д. Александров. – СПб: СМИО Пресс, 2016. – 216 с.
6. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебное пособие для общеобразовательных организаций: / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.// под редакцией А.Н. Колмогорова. 26-е изд. –М.: Просвещение, 2018. – 383 с.
7. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями: учебно-методическое пособие / [Н.Д. Золотарева и др.]; под ред. М.В. Федотова. – 6-е изд., электрон. – М.: Лаборатория знаний, 2021. – 549 с.
8. Алексанян, Г.А. Формирование самостоятельной деятельности студентов СПО в обучении математике с использованием облачных технологий: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Алексанян Георгий Ашотович. – Елец, 2014. – 150 с.
9. Алексеева, Е.Е. Методические особенности формирования математической грамотности учащихся как составляющей функциональной грамотности / Е.Е. Алексеева // Мир науки, культуры, образования. – 2020. № 4 (83). – С. 214-218.

10. Альтшуллер, Г. Найти идею: Введение в ТРИЗ – теорию решения изобретательских задач / Г. Альтшуллер. – 5-е изд. – М., 2012. – 410 с.

11. Ананьев, Б.Г. Личность, субъект деятельности, индивидуальность / Б.Г. Ананьев. – М.: Директ-Медиа Паблишинг, 2008. –134 с.

1. Анфицерова, Л.М. Преемственность как фактор развития математических способностей старшеклассников в системе «школа - вуз»: диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук / Анфицерова Лариса Михайловна. – Оренбургский государственный университет. – Оренбург, 2014. – 228 с.

2. Арнольд, И.В. Принципы отбора и составления арифметических задач / И.В. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2008. – 45 с.

3. Артюхина, М.С. Интерактивные средства обучения: теория и практика применения: монография / М.С. Артюхина. – Барнаул: ИГ «Си-пресс», 2014. – 168 с.

4. Арюткина, С.В. Использование окрестностей обобщенных математических задач в информационном контенте тематического образовательного Web-квеста[Ntrcn] / С.В. Арюткина, С.В. Напалков // Научное обозрение. Педагогические науки. – 2015. – № 1. – С. 56-57.

5. Асмолов, А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пос. для учителя / А.Г. Асмолов, и др.; под ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2011. – 159 с.

6. Афанасьев, В.В. Теория вероятностей в вопросах и задачах / Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского / [Электронные ресурсы] /http://cito-web.yspu.org/link1/metod/theory/node21.html.

7. Бабанский, Ю.К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе / Ю.К. Бабанский. – М.: Просвещение, 2003. – 541 с.

8. Баврин, И.И. Сельский учитель С.А. Рачинский и его задачи для умственного счета / И.И. Баврин // Математика в школе. – 2016. – №2. – С. 62-66.

9. Багузина, Е.И. Веб-квест технология как дидактическое средство формирования иноязычной коммуникативной компетенции (на примере студентов неязыкового вуза): дис. ... канд. пед. наук: –М., 2011. – 238 с.

10. Байгушева, И.А. Методическая система математической подготовки экономистов в вузе на основе формирования обобщенных методов решения типовых профессиональных задач: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Байгушева Инна Анатольевна. – Астрахань, 2015. – 422 с.
11. Баллер, Э.А. Преемственность в развитии культуры. – М.: Наука, 1969. – 294 с.
12. Батаршев, А.В. Педагогическая система преемственности обучения в общеобразовательной и профессиональной школе / А.В. Батаршев. – СПб.: Изд-во ин-та профтехобразования РАО, 1996. – 90с.
13. Беликова, Е.В. Теория и методика воспитания. Конспект лекций / Е.В. Беликова, О.И. Битаева, Л.В. Елисеева. – М.: ЭКСМО, 2008. – 160 с.
14. Беспалько, В.П. Основы теории педагогических систем: проблемы и методы психолого-педагогического обеспечения техн. обучающих систем / В.П. Беспалько. – Воронеж: Изд-во Воронежского университета, 1977. – 304 с.
15. Бешенков, С.А. Информационно-когнитивные технологии как инструмент формирования знаний в условиях информационного общества глобальных коммуникаций / С.А. Бешенков, Э.В. Миндзаева // Модернизация педагогического образования в контексте глобальной образовательной повестки. – Нижний Новгород: Мининский университет, 2015. – С. 134-137.
16. Бикмурзина, Р.Р. Дифференцированный подход к формированию познавательной самостоятельности студентов младших курсов вузов в процессе обучения математике: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Бикмурзина Равиля Рашитовна. – Саранск, 1996. – 18 с.
17. Блауберг, И.В., Юдин Э.Г. Становление и сущность системного подхода. – М.: Наука, 1973. – 270 с.
18. Богоявленский, Д.П. Психология усвоения знаний в школе / Д.Н. Богоявленский, Н.А. Менчинская; Акад. пед. наук РСФСР. Ин-т психологии. – Москва: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1959. – 347 с.
19. Божович, Л.И. Проблемы формирования личности / Л.И. Божович. – М.: Ин-т практической психологии; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1995. – 352 с.
20. Большой толковый словарь русского языка. – СПб., 2004. – 963 с.

21. Борчугова, З.Г. О решении задач в начальном курсе математики. Преемственность процесса обучения в школе / З.Г. Борчугова, И.П. Кузьмина. – Ленинград, 1969. – 260 с. – С. 156-172.
22. Босова, Л.Л. Вопросы организации учебного процесса с использованием электронных образовательных ресурсов нового поколения / Л.Л. Босова, А.Ю. Босова //Открытое и дистанционное образование. – 2012. –№ 4 (48). – С. 72-89.
23. Брунер, Дж. Психология познания. За пределами непосредственной информации / Дж. Брунер; пер. с англ. – М.: Прогресс, 1977. – 413 с.
24. Буншафт, Е.Н. Обобщение геометрических знаний у учащихся начальной школы в контексте технологического подхода к обучению: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Буншафт Елена Николаевна. – М., 2005. – 189 с.
25. Бурангулова, Г.Х. Преемственность в овладении предложением как единицей речи детьми в системе «ДОУ-Начальная школа».: дис. …канд. пед. наук: 13.00.02/ Бурангулова Гульнур Хайрулловна. – Чебоксары, 2001. – 215 с.
26. Буфеев, С.В. Коллекция задач по арифметика целых чисел. Задания С: ЕГЭ: учебное пособие / С.В. Буфеев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 344 с.
27. Буфеев, С.В. Задачи целочисленной арифметики / С.В. Буфеев // Математика в школе. – 2014. – №3. – С.17-23.
28. Быкова, Т.П. Овладение навыком смыслового чтения как метапредметный результат обучения математике / Т.П. Быкова // Начальная школа. – 2012. – №8. – С. 37-40.
29. Ваграменко, Я.А. О развитии информационных образовательных ресурсов / Я.А. Ваграменко // Материалы Международной научно-практической конференции «Информатизация образования – 2014». – Волгоград: Изд-во ВГСПУ «Перемена», 2014. – С. 4-8.
30. Валеев, И.И. Функциональная математическая грамотность как основа формирования и развития математической компетенции / И.И. Валеев // Бизнес. Образование. Право. – 2020. – № 4 (53). – С. 353-360.

31. Васильева, М.В. Методические особенности обучения элементам математического анализа учащихся профильной школы: дис. … канд. пед. наук:13.00.02 / Васильева Марина Викторовна. – М., 2004. – 215 с.

32. Вендина, А.А. Формирование финансовой культуры школьников посредством уроков математики / А.А. Вендина, В.В. Малиатаки //Теоретические и методологические проблемы современного образования: материалы XIX Международной научно-практической конференции 26-27 декабря 2014 г. – М.: Изд-во «Институт стратегических исследований», 2014. – С. 31.

33. Венгер, Л.А. Педагогика способностей / Л.А. Венгер. – М.: Знание,1973. – 117 с.

34. Виленкин, Н.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. 18-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2014. – 312 с.

35. Виноградова, Л.В. Развитие мышления учащихся при обучении математике / Л.В. Виноградова. – Петрозаводск: Карелия, 1989. – 163 с.

36. Волкова, О.В. Подготовка будущего специалиста к межкультурной коммуникации с использованием технологии веб-квестов: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Волкова Ольга Владимировна. –Белгород, 2010. – 217 с.

37. Выготский, Л.С. Мышление и речь / Л.С. Выготский. – М.: Лабиринт, 1996. – 415 с.

38. Выготский, Л.С. Психология развития человека / Л.С. Выготский. – М.: Изд-во Смысл; Изд-во Эксмо, 2006. – 136 с.

39. Галицкий, М.Л. Сборник задач по алгебре / М.Л. Галицкий, А.М. Голдьман, Л.И. Звавич. – 23-е изд. – М.: Просвещение, 2019. – 301 с.

40. Галкин, Е.В. Задачи с целыми числами. 7-11 классы / Е.В. Галкин. – М.: Просвещение, 2012. – 269 с.

41. Гальперин, П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий / П.Я. Гальперин // Исследования мышления в советской

психологии; отв. ред. Е. В. Шорохова. – М.: Наука, 1966. – С. 236-278.
42. Гегель, Г. Наука логики / Г. Гегель. – СПб.: Наука, 1997. – 800 с.
43. Гин, А.А. Исследовательские и изобретательские задачи на уроках в общеобразовательной школе / А.А. Гин // Основные тенденции развития дидактики: инновационный потенциал дидактического знания: сб. науч. тр. международной научно-практической конференции; под ред. И.М. Осмоловской, И. В. Шалыгиной. – Ярославль: ФГНУ «Институт теории и истории педагогики» Российской академии образования, 2012. – С. 129-133.
44. Годник, С.М. Процесс преемственности высшей и средней школы / С.М. Годник. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1981. – 208 с.
45. Гончарова, М.А. Развитие у детей математических представлений воображения и мышления / М.А. Гончарова. – М.: Антал, 2014. – 146 с.
46. Горбачев, В.И. Предметные компетенции общего математического образования в категории субъектного развития: монография / В.И. Горбачев. – М.: ИНФРА-М, 2020. – 403 с.
47. Гриншкун, В.В. Современная цифровая образовательная среда: ресурсы, средства, сервисы / В.В. Гриншкун, Г.А. Краснова. – М.: Общество с ограниченной ответственностью «Проспект», 2021. – 216 с.
48. Гусев, В.А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы: Учебное пособие / Гусев В.А., – 3-е изд., (эл.) – Москва: Лаборатория знаний, 2017. – 456 с.: ISBN 978-5-00101-490-4
49. Давыдов, В.В. Виды обобщения в обучении / В.В. Давыдов. – М.: Педагогика, 1972. – 424 с.
50. Давыдов, В.В. Проблемы развивающего обучения / В.В. Давыдов. – М.: Директ-Медиа, 2008. – 613 с.
51. Дайри, Н. Г. Основное усвоить на уроке / Н.Г. Дайри. – М.: Просвещение, 1987. – 192 с.
52. Далингер, В.А. Методика обучения началам математического анализа: учебник и практикум для вузов / В.А. Далингер. – Москва: Юрайт, 2022. – 162 с.
53. Дворяткина, С.Н. Теория и практика: Монография / С.Н. Дворяткина. – 1. –

Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2017. – 271 с. – ISBN 978-5-16-006337-9: Б. ц. – Текст: непосредственный.

54. Деятельностный подход в образовании: коллективная монография. Книга 3 / [Е.А. Бугрименко и др.]. – М.: Некоммерческое партнерство содействия научной и творческой интеллигенции в интеграции мировой культуры «Авторский Клуб», 2020. – 232 с.

55. Дистервег, А. Избранные педагогические сочинения. – М.: Учпедгиз, 1956. – 364 с.

56. Долгоруков, А. М. Case stady как способ понимания / А.М. Долгоруков // Практическое руководство для тьютора системы Открытого образования на основе дистанционных технологий. М.: Центр интенсивных технологий образования, 2002. С. 21-44.

57. Дональдсон, М. Мыслительная деятельность детей: пер. с англ. / М. Дональдсон; под ред. В.И. Лубовского. – М.: Педагогика, 1985. – 192 с.

58. Дружинин, В.Н. Психология общих способностей / В.Н. Дружинин. – 3-е изд. – СПб.: Питер, 2007 – 368 с.

59. Дьюи, Д. Психология и педагогика мышления / Д. Дьюи; пер. с англ. Н.М. Никольской. – М.: Совершенство, 1997. – 208 с.

60. Дударева, Н.А. Методические аспекты использования метода «Case study» при обучении математике в средней школе / Н.А. Дударева, Т.А. Унегова // Педагогическое образование в России. – 2014. – №8. – С. 242-246.

61. Епишева, О.Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: кн. для учителя / О.Б. Епишева. – М.: Просвещение, 2003. – 223 с.

62. Женетль С.Н. Информационно-категориальный подход к обучению математике в 5 классе в условиях реализации принципа преемственности: автореф. дисс ... канд. пед. наук: 13.00.02 /.Женетль Саида Нурдиновна. – Майкоп, 2012. – 24 с.

63. Жохов, А.Л. Формирование начал научного мировоззрения школьников при обучении математике: учебное пособие / А.Л. Жохов. – Ярославль: Изд-во Ярославского гос. пед. ун-та им. К.Д. Ушинского, 2011. – 211 с.

64. Зайкин, М.И. Об общей структуре и содержательной специфике тематического образовательного WEB-квеста по математике/ М.И. Зайкин, С.В. Напалков // Научное обозрение. Педагогические науки. – 2014. –№1. – С. 123-123.
65. Зайниев, Р.М. Преемственность в математическом образовании: теоретический аспект: монография / Р.М. Зайниев. – Набережные Челны: Изд-во ФГБОУ ВПО «НИСПТР», 2014. – 187 с.
66. Захарова, И.Г. Информационно-образовательная среда и психолого-педагогические исследования // Информатизация образования: теория и практика. Сборник материалов международной научно-практической конференции / под общей редакцией М.П. Лапчика. Омск. 2017. – С. 35-39 [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp? id=30758443
67. Зотова, Т.Н. Дидактические условия преемственности образовательного процесса в ДОУ и начальной школе: дис. …канд. пед. наук: 13.00.01 / Зотова Татьяна Николаевна. –Барнаул, 2004. – 199 с.
68. Зубова, Е.А. Формирование творческой активности будущих инженеров в процессе обучения математике на основе исследования и решения профессионально-ориентированных задач: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Зубова Елена Александровна. – Ярославль, 2009. – 189 с.
69. Иванова, Е.О. Теория обучения в информационном обществе / Е.О. Иванова, И.М. Осмоловская – М.: Просвещение, 2011. – 190 с.
70. Изучение чисел по учебникам серии «МГУ – школе» / М.К. Потапов, А.В. Шевкин, Т.М. Вуколова // Математика в школе. – 2013. – №1. – С.30-36.
71. Икрамов, Дж. Развитие математической культуры школьников (языковой аспект) / Дж. Икрамов. – М.: Педагогика, 1977.
72. Исаенко, Г.П. Роль исторической преемственности в развитии науки / Г.П. Исаенко. – М.: Знание, 1969. – 24 с.
73. Истомина, Н.Б. Задачи: нестандартные подходы к решению. Учебное пособие для начальной школы. 4 класс. Серия: Готовимся к Всероссийской

проверочной работе по математике/ Н.Б. Истомина, Т.Б. Смолеусова, Н.Б. Тихонова. – Смоленск: Ассоциация XXI век. – 2014. – 48 с.

74. Кабанова-Меллер, Е.Н. Роль обобщения в переносе знаний / Е.Н. Кабанова-Меллер // Вопросы психологии. – 1972. – №2. – С. 55-66.

75. Казанский, Н.Г. Дидактика (начальные классы) / Н.Г. Казанский, Т.С. Назарова. – М.: Просвещение, 1978. – 224 с.

76. Калинова, Ю.А. Система геометрических задач дивергентного типа как средство обучения учащихся основной школы анализу информации: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Калинова Юлия Александровна. –Санкт-Петербург, 2019. – 196 с.

77. Канин, Е.С. Математические способности учащихся и их развитие / Е.С. Канин // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. – 2013. – №2-1. – С. 152-158.

78. Катержина С.Ф. Развитие познавательной самостоятельности студентов технического вуза при обучении математике с использованием Web-технологий: дис. ... канд. пед. наук. – Ярославль, 2010 – 174 с

79. Кедров, Б.М. О творчестве в науке и технике / Б.М. Кедров. – М.: Молодая гвардия, 1987. – 192 с.

80. Китаева, И.В. Формирование стохастической компетенции учащихся при изучении математики с использованием интерактивных методов и средств обучения: дисс … канд. пед. наук: 13.00.02 / Китаева Ирина Вячеславовна. – Елец, 2017. – 169 с.

81. Клешнина, И.И. Аппаратная составляющая интерактивных технологий образовательного назначения / И.И. Клешнина, М.С. Артюхина, О.И. Артюхин // Вестник Казанского государственного технологического университета. – 2014. – №8. – С. 308-314.

82. Клякля, М. Формирование творческой математической деятельности учащихся в классах с углубленным изучением математики в школах Польши: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Клякля Мачей. – М., 2003. – 285 с.

83. Колмогоров, А.Н. Понятие числа и величины / А.Н. Колмогоров // Историко-математические исследования. – 1990. – Вып. 32-33. – С. 474-484.

84. Колобов, А.Н. Спецкурсы и кружки в школе / А.Н. Колобов // Научный альманах. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2016. – № 7. – С. 247-251.

85. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учебное пособие / [Ю.М. Колягин и др.; отв. редакторы: Ю.М. Колягин, Н.И. Мерлина]. Чебоксары: Изд-во Чувашского унта, 2009. – 731 с.

86. Комелина В.А. Профессиональная подготовка специалиста в вузе: компетентностный подход: монография / В.А. Комелина, Д.А. Крылов. – Йошкар-Ола: ООО «Стринг», 2009. – 176 с.

87. Коменский, Я.А. Избранные педагогические сочинения: в 2-х т. / Я.А. Коменский. – М.: Педагогика, 1982. – Т.2. – 348 с.

88. Концепция развития школьного математического образования. Утв. распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р // Народное образование Якутии. – 2016. – №1(97). – С.136-140.

89. Крайнова, Л.О. Педагогическое сопровождение становления познавательной самостоятельности учащегося: дис. … канд. пед. наук: 13.00.01 / Крайнова Людмила Оскаровна. – Оренбург, 2014. – 238 с.

90. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 431 с

91. Кузнецова, И.В. Развитие методической компетентности будущего учителя математики в процессе обучения математическим структурам в сетевых сообществах: автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02 / Кузнецова Ирина Викторовна. – Архангельск, 2015. – 42 с.

92. Кулюткин, Ю.Н. Психология обучения взрослых Текст. / Ю.Н. Кулюткин. – М.: Просвещение, 1985. – 128 с.

93. Курдюмов, С.П. Синергетика теория самоорганизации: идеи, методы, перспективы / С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий. – М.: Знание, 1983. – 64 с.

94. Кучугурова, Н.Д. Интенсивный курс методики преподавания математики: учебное пособие / Н.Д. Кучугурова. – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2001. – 231 с.

95. Леднев, В.С. Научное образование: развитие способностей к научному творчеству / В.С. Леднев; Издание второе исправленное М.: МГАУ, 2002. – 120 с.

96. Лейтес Н.С. Возрастная одарѐнность и индивидуальные различия: избранные психологические труды / Н.С. Лейтес. – Воронеж: МОДЭК; Москва: МПСИ, 2003. – 464 с.

97. Лернер, И.Я. Критерии уровней познавательной самостоятельности учащихся / И.Я. Лернер // Новые исследования в педагогических науках. – М.: Педагогика, 1971. – №4. – С. 34-39.

98. Леонтьев, А.Н. Деятельность. Сознание. Личность / А.Н. Леонтьев. – М.: Политиздат, 1975. – 304 с.

99. Лукьянова, М.И. Психолого-педагогические показатели деятельности школы: критерии и диагностика / М.И. Лукьянова, Н.В. Калинина. – М.: Сфера, 2004. – С. 32-35.

100. Лурия, А,Р. Основы нейропсихологии / А.Р. Лурия. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1973. – 374 с.

101. Лурье, И.А. Преемственность при изучении измерений в курсе математики // Преемственность в обучении математике: Сб. статей. –М.: Просвещение, 1978. – С. 41-51.

102. Лысенко, Ф.Ф. Алгебра. 7-8 классы. Тренажер. Тематические тесты и итоговые работы / Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов на Дону: Легион, 2013. – 96 с.

103. Львовский, В.А. Проблемно-задачный подход к обучению в школе и вузе / В.А. Львовский, С.П. Санина // UniverCity: Города и Университеты / под ред. С.Н. Вачковой. – М.: Экон-Информ, 2018. – С. 89-100.

104. Люблинская, А.А. О преемственности учебной работы в школе / А.А. Люблинская. – Текст: непосредственный // Преемственность в процессе

обучения: ученые записки Ленинградского педагогического института. – 1969. – Т. 372. – С. 5-32.

105. Майнагашева, Е.Б. Современные педагогические технологии: учебно-методический комплекс по дисциплине: учебное пособие / Е.Б. Майнагашева. – Абакан: ФГБОУ ВПО «Хакасский гос. ун-т им. Н. Ф. Катанова», 2012. – 79 с.

106. Матюшкин, А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А.М. Матюшкин. – М.: Директ-Медиа, 2014. – 274 с.

107. Мендыгалиева, А.К. Теория и практика решения проблемы преемственности в начальной и основной школе // Научно-исследовательские публикации. – 2014. – № 8 (12). – С. 106-110.

108. Менчинская, Н.А. Проблемы обучения, воспитания и психического развития ребенка / Н.А. Менчинская. – М.: МПСИ; Воронеж: Модэк, 2004. – 512 с.

109. Методика обучения математике: учебник для вузов / Н.С. Подходова [и др.]; под редакцией Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой. – Москва: Издательство Юрайт, 2023. – 566 с.

110. Минская, Г.И. Формирование понятия числа на основе изучения отношения величин // Вестник – 2000. –№ 7– С. 25-37.

111. Митрохина, С.В. Развитие самостоятельной деятельности обучающихся при изучении математики в системе «общеобразовательная школа-вуз»: автореф. дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Митрохина Светлана Васильевна. – Орел, 2009. – 43 с.

112. Мироненко, О.В. Использование современных информационных технологий в образовательном процессе / О.В. Мироненко // Молодой ученый. – 2015. – №13. – С. 664-668.

113. Михалкина Е.В. Организация проектной деятельности: учеб. пособие / Е.В. Михалкина, А.Ю. Никитаева, Н.А. Косолапова; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального ун-та, 2016. – 146 с.

114. Монахов, В.М. Концепция создания и внедрения новой информационной технологии обучения / В.М. Монахов // Проектирование новых информационных технологий обучения. – М., 1991. – С.4-30.
115. Мордкович, А.Г., Семенов, П.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Мнемозина, 2020. – 457 с.
116. Моро, М.И. О роли математики для школьников // Школа, 2003. – №2. – С. 3.
117. Москалева, Р.Н. Реализация принципа преемственности в обучении учащихся начальной и основной ступеней школы с углубленным изучением математики: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Москалева Рания Нургаяновна. – Магнитогорск, 2007. – 211 с.
118. Муштавинская, И.В. Новая дидактика современного урока в условиях введения ФГОС ООО: методическое пособие / И.В. Муштавинская, О.Н. Крылова. – Санкт-Петербург, 2019. – 142 с.
119. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: учебное пособие / под ред. Е.И. Смирнова. – Ярославль, 2010. – 498 с.
120. Напалков, С.В. Поисково-познавательные задания тематического образовательного Web-квеста по математике как средство формирования ключевых компетенций учащихся / С.В. Напалков // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 8-2. – С. 469-474.
121. Напалков, С.В. Web-технологии как педагогические формы приобщения школьников к творчеству в процессе обучения математике / С.В. Напалков, Н.В. Гусева // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6. – С. 768-775.
122. Национальная программа «Цифровая экономика Российской Федерации», утверждена распоряжением Правительства РФ от 28.07.2017 № 1632-р.
123. Национальный проект «Образование»: утвержден президиумом Совета при Президенте РФ по стратегическому развитию и национальным проектам,

протокол от 03.09.2018 №10. – URL:http://government.ru/info/35566/ (дата обращения: 19.10.2020). – Текст: электронный.

124. Низовцова, А.Н. Личностный и когнитивный компоненты способности к творчеству в области математики: автореф. дис. ... канд. психол. наук: 19.00.01 / Низовцова Анна Николаевна. – Москва, 2019. – 23 с.

125. Никифорова, О.Ю. Самоконтроль, как необходимая часть процесса обучения / О.Ю. Никифорова, С.Ф. Кузнецов, О.А. Мусорина // Проблемы преподавания математики, физики, химии и информатики в ВУЗе и средней школе: материалы VI региональной научно-методической конференции / Воронежский государственный университет инженерных технологий. – Воронеж: ВГУИТ, 2020. – С. 71-73.

126. Ням, Н.Т. Наглядное моделирование как средство развития познавательной самостоятельности студентов-гуманитариев при изучении математики / Н.Т. Ням, Е.И. Смирнов // Ярославский педагогический вестник. Том II (Психолого-педагогические науки). – № 3. – 2014. – С. 90-97.

127. Обучение математике с использованием возможностей GeoGebra: монография / Т.С. Ширикова, М.В. Шабанова, О.Л. Безумова и др. – М.: Издательство Перо, 2013. – 128 с.

128. Осинцева, М.А. Организация исследовательской деятельности будущих инженеров при обучении математике с использованием информационно-коммуникационных технологий: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Осинцева Марина Александровна. – Ярославль, 2009. – 24 с.

129. Павлова, М.А. Исследовательское обучение математике учащихся основной школы во внеурочное время с использованием систем динамической геометрии: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Павлова Мария Александровна. – Елец, 2017. – 207 с.

130. Пак, Н.И. О концепции информационного подхода в обучении / Н.И. Пак // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. – 2011. – С. 91-97.

131. Панова, Л.А. Анализ учебных ресурсов по теме «Отношение делимости» / Л.А. Панова, В.Ф. Пуркина // Информация и образование: границы коммуникаций. – 2013. – №5(13). – С. 128-130.

132. Папышев, А.А. Теоретико-методологические основы обучения учащихся решению математических задач в контексте деятельностного подхода: автореф. дис. д-ра пед. наук: 13.00.02 / Папышев Алпыс Абдешович. – Саранск, 2012. – 45 с.

133. Песталоцци, И.Г. Избранные педагогические произведения: В 3-х т. / Под ред. М.Ф. Шабаевой. Т.3. – М.: Изд-во «Просвещение», 1965. – 635 с.

134. Пиаже, Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления / Ж. Пиаже // Преподавание математики; пер. с франц. – М.: Учпедгиз, 1960. – 164 с.

135. Пидкасистый, П.И. Проблема самообразования в педагогической теории / П.И. Пидкасистый // Развитие у школьников стремления к самообразованию: сб. статей; под ред. Б.Ф. Райского и др. – Волгоград, 1974. – 190 с.

136. Поварушкина, Н.В. Практикоориентированное обучение на уроках математики в условиях реализации программы профильной школы [Электронный ресурс] / Н.В. Поварушкина. – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/501094

137. Подласый, И.П. Педагогика: учебник для вузов / И.П. Подласый. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2023. – 575 с.

138. Пойа, Дж. Математическое открытие. – М: Наука,1976. – 448 с.

139. Половникова, Н.А. Система воспитания познавательных сил школьников: учеб. пособие. – Казань: КГПИ, 1975. – 101 с.

140. Помелова, М.С. Построение индивидуально-ориентированного обучения средствами интерактивных технологий // Мир науки, культуры, образования. — 2013. – № 2(39). – С. 125-127. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18955520 (дата обращения: 28.02.2021).

141. Попова, Т.С. Обобщение и систематизация знаний учащихся в информационно-образовательной среде / Т.С. Попова // Мир науки, культуры, образования. – 2013. – №2 (39). – С. 111-112.
142. Попова, Т.С. Функции обобщения и систематизации знании в процессе формирования универсальных учебных действий учащихся при углубленном изучении математики / Т.С. Попова // Современные тенденции развития науки и технологий: сборник научных трудов участников XVI Международной научно-практической конференции. – Белгород, 2016. – С.103-105.
143. Попова, Т.С. Развитие универсальных учебных действий на основе систематизации и обобщения знаний учащихся в средней школе / Т.С. Попова // Актуальные проблемы психологии и педагогики в современном мире: сборник научных трудов участников международной конференции. – М.: РУДН, 2013. – С. 342-349.
144. Попова, Т.С. Формирование метапредметных результатов обучения в процессе обобщения понятия числа / Т.С. Попова // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты. – Красноярск: Изд-во Красноярского гос. пед. ун-та им. В.П. Астафьева, 2016. – С. 148-155.
145. Попова, Т.С. Обобщение знаний в процессе обучения математике как условие личностного развития учащихся / Т.С. Попова // Успехи современной науки. – 2017. – № 4. – С. 103-106.
146. Попова, Т.С. Воспитание мотивационно-ценностного отношения к изучению математики учащихся основной школы / Т.С. Попова, Е.И. Санина, Л.А. Зенкова // Проблемы современного педагогического образования: Сборник научных трудов. – Ялта: РИО ГПА, 2020. – Вып. 65. – Ч.2. – С. 210-212.
147. Попова, Т.С. Обобщение знаний по математике как фактор развития самостоятельной познавательной деятельности обучающихся в основной школе / Т.С. Попова // Мир науки, культуры, образования. – 2022. – №1 (92). – С. 191-194.

148. Попова, Т.С. Модель формирования самостоятельной деятельности школьников при углубленном обучении математике в цифровой образовательной среде / Т.С. Попова, Е.И. Смирнов // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2022. – №2(26) – С. 57-68.

149. Попова, Т.С. WEB-квест при обучении математике в условиях цифровой образовательной среды / Т.С. Попова // Известия Чеченского государственного педагогического университета. Гуманитарные и общественные науки. –2020. –№4(32). – С.155-159.

150. Попова, Т.С. Организация самостоятельной деятельности учащихся в цифровой образовательной среде / Т.С. Попова // Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации обучения: сборник тезисов и докладов международной научной конференции. – Елец, Елецкий гос. университет им. И.А. Бунина. –2022. – С. 81-85.

151. Попов, Г.Н. Сборник исторических задач по элементарной математике / Г.Н. Попов. – М.: Книга по Требованию, 2014. – 216 с.

152. Программа «Цифровая экономика в Российской Федерации»: утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации о т 28 июля 2017 г. №163 2-р. – URL:http://ac.gov.ru/files/content/14091/1632-r-pdf.pdf (дата обращения: 19.10.2020). – Текст: электронный.

153. Пуркина, В.Ф. О преемственности в изучении комбинаторно-вероятностных, статистических понятий и методов / В.Ф. Пуркина, Е.А. Раенко // Мир науки, культуры, образования. – 2013. – №2(39) – С.112-114

154. Пыщкало, А.М. Методические аспекты проблемы преемственности в обучении математике: Сб. статей / Сост. А.М.Пышкало. – М.: Просвещение, 1978. – с. 3-12.

155. Раджибов, У.А. Динамика естественнонаучного знания: системно-методический анализ / У.А. Раджибов. – М.: Наука, 1982. – 336 с.

156. Решетникова, Н.В. Преемственность реализации прикладной направленности обучения математике в основной и старшей школе: дисс. …канд .пед. наук: 13.00.02 / Решетникова Наталья Валерьевна. – Омск, 2009. –224 с.

157. Ридецкая, О.Г. Психология одарённости: учебно-практическое пособие / О.Г. Ридецкая. – М.: Изд. центр ЕАОИ, 2010. – 374 с.

158. Репкина, Г.В. Оценка уровня сформированности учебной деятельности / Г.В. Репкина, Е.В. Заика. – Томск: Пеленг, 1993. – 61 с.

159. Роберт, И.В. Теория и методика информатизации образования : психолого-педагогический и технологический аспекты / И.В. Роберт. –М: бином. Лаб. Знаний, 2014. –398 с.

160. Рожкова, Д.А. Математические задачи как средство формирования проектно-конструктивных умений старших школьников / Д.А. Рожкова // На путях к новой школе. – СПб., 2015. – №4. – С. 44-46.

161. Рослова, Л.О. Функциональная математическая грамотность: что под этим понимать и как формировать / Л.О. Рослова // Педагогика. – 2018. –№10. – С. 48-55.

162. Рубанов, В.Г. Понятие «преемственность» и его социальное измерение // Известия Томского политехнического университета. –2013. –Т. 323. – № 6. – С. 102-110.

163. Рубинштейн, С.Л. О мышлении и путях его исследования / С.Л. Рубинштейн. – М.,1958. – 147 с.

164. Рубинштейн, С.Л. Основы общей психологии / С.Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер, 2002. – 720 с.

165. Рыжик, В.И. Компьютер. Смена парадигмы? [Электронный ресурсы] / http://ifets.ieee.org/russian/depository/v13_i3/html/4r.htm/.

166. Рыжков, А.И. Технология разработки интерактивных средств обучения и методика их использования в курсе геометрии педвузов: дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / Рыжков Андрей Игоревич. –.Новосибирск, 2006. –198 с.

167. Садовничий, В.А. О математике и ее преподавании / В.А. Садовничий. – М.: МГУ, 2010. – 24 с.

168. Савельева, М.Г. Педагогические кейсы: конструирование и использование в процессе обучения и оценки компетенций студентов: Учебно-методическое пособие / М.Г. Савельева. – Ижевск.: УдГУ, 2013. – 94с.

169. Санина, Е.И. Методические основы обобщения и систематизации учащихся в процессе обучения математике в средней школе: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Санина Елена Ивановна. – М., 2003. – 373 с.
170. Санина, Е.И. Продуктивный способ обобщения знаний по математике / Е.И. Санина, Т.С. Попова // Технологии продуктивного обучения математике: традиции и инновации. – Арзамас, 2016. – С. 41-44.
171. Санина, Е.И. Интерактивные методы и средства обучения математике в средней школе / Е.И. Санина, Т.С. Попова // Ярославский педагогический вестник. – 2016. – №5. – С. 95-99.
172. Сапожкова, Н.А. Формирование готовности учителей математики к развитию системного мышления в вузе / Н.А. Сапожкова // Известия воронежского государственного педагогического университета. – 2018. – № 3. – С. 50-53.
173. Саранцев, Г.И. Современное методическое мышление как ключевая компетенция педагога // Педагогика. –2014. – №3.
174. Методика обучения математике в средней школе: учебное пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ин-тов / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
175. Секованов, В.С. Использование информационных и коммуникационных технологий в процессе обучения фрактальной геометрии / В.С. Секованов, В.С. Скрябин // Информатизация образования – 2008: Материалы международной научно-методической конференции. – Славянск-на-Кубани: Издательский центр СГПИ, 2008. – С. 392-396.
176. Селевко, Г.К. Энциклопедия образовательных технологий / Г.К. Селевко. – М.: НИИ школьных технологий, 2006. – 816 с.
177. Селютин, В.Д. Варьирование математической задачи как средство овладения теорией вероятностей / В.Д. Селютин, Н.Н. Яремко // Образование и общество. – 2021. – № 2 (127). –С. 55-61.
178. Семенов, А.В. Математика. Основной государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: учебное пособие / [А.В. Семенов и др.]; под. ред. И.В. Ященко; МЦНМО. – М: Издательство «Интеллект-Центр», 2021. – 296 с.

179. Скрябина, А.Г. Педагогические условия развития познавательной самостоятельности обучающихся классов гуманитарного профиля: автореф. дисс … канд. пед. наук: 13.00.01/ Скрябина Алевтина Гавриловна. – Якутск, 2019. – 22 с.

180. Смирнов, В.А. Геометрические задачи на развитие критического мышления / В.А. Смирнов, И.М. Смирнова. – М.: МЦНМО, 2021. – 96 с.

181. Смирнов, Е.И. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: учеб. пособие / Е.И. Смирнов, В.В. Богун, В.Н. Осташков; под. ред. Е.И. Смирнова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – 454 с.

182. Смирнов, Е.И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога: монография / Е.И. Смирнов. – Ярославль, 2012. – 646 с.

183. Смыкалова Е.В. Задачи с развивающими функциями как средство обеспечения преемственности в обучении математике между начальной и основной школой: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Смыкалова Елена Владимировна. –Санкт-Петербург, 2004. –16 с.

184. Сойер, У.У. Прелюдия к математике / У.У. Сойер. – М: Просвещение, 1972. – 303 с.

185. Статуев, А.А. Реализация углубленного обучения математике в сельской школе с использованием информационно-коммуникационных технологий: автореф. дисс. …канд. пед. наук:13.00.02 / Статуев Алексей Анатольевич. – Н. Новгород, 2006. – 20 с.

186. Стефанова, Н.Л. Проблема развития исследовательских умений учащихся с позиции метаметодического подхода // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. 2002. – Вып. 3. Т. 2. – С. 167-175.

187. Столяр, А.А. Роль математики в гуманизации образования / А.А. Столяр // Математика в школе. – 1990. – № 6. – С. 5-7.

188. Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы: Указ Президента Российской Федерации от 09.05.2017 № 203. – URL: http://sudact.ru/law/ukaz-prezidenta-rf-ot-09052017-n-

203/strategiiarazvitiia-informatsionnogo-obshchestva-v (дата обращения: 19.10.2020). – Текст: электронный.

189. Сунгурова, Н.Л. Психологическая готовность к обучению с использованием информационно-коммуникационных технологий / Н.Л. Сунгурова, Т.В. Смирнова // Вестник государственного управления. – М., 2009. – №18. – с. 117-121.

190. Тагаева, Е.А. Преемственность в обучении математике и началам математического анализа в системе «школа – вуз» / Е.А. Тагаева. – Текст: непосредственный // Гуманитарные науки и образование. – 2015. – № 4. – С. 91-95.

191. Талызина, Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н.Ф. Талызина. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 12 с.

192. Тараник, В.И. Самостоятельная познавательная деятельность учащихся и ее развитие средствами практических работ по геометрии: учебно-методическое пособие / В.И. Тараник; под науч. ред. В.А. Далингер. – Омск: ООО «Сфера», 2009. – 188 с.

193. Теплов, Б.М. Проблемы индивидуальных различий / Б.М. Теплов. – М.: Наука, 1961. – С. 9-20.

194. Терешин, Д.А. Методическая система обучения геометрии в классах физико-математического профиля на основе задачного подхода: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Терешин Дмитрий Александрович. – МПГУ. Москва, 2014. — 190 с.

195. Тестов, В.А. Математическое образование в условиях сетевого пространства / В.А. Тестов // Образование и наука. – 2013. – №2. – С. 111-120.

196. Ткачук, П. Н. О методике обучения решению практико-ориентированных задач по математике в общеобразовательной школе // «Студенческие дни науки в ТГУ – 2021»: научно-практическая конференция (Тольятти, 5–30 126 апреля 2021 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С. Х. Петерайтис. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2021. – С. 524-527.

197. Трофимец, Е.Н. Современная цифровая образовательная среда в процессе

изучения математических дисциплин / Е.Н. Трофимец // Наука. Исследования. Практика: сб. избр. ст. по материалам междунар. науч. конф. – СПб: ГНИИ «Нацразвитие», 2019. – С. 48-49.

198. Тумашева, О.В. Формирование метапредметных умений при обучении математике: проблемы и пути решения / О.В. Тумашева // Математика в школе. – 2016. – №4. – С.35-38.
199. Уваров, А.Ю. Цифровая трансформация и сценарии развития общего образования / А.Ю. Уваров. – М.: НИУ ВШЭ, 2020. –108 с.
200. Универсальные компетентности и новая грамотность: чему учить сегодня для успеха завтра / [И.Д. Фрумин, М.С. Добрякова, К.А. Баранников и др.] // Предварительные выводы международного доклада о тенденциях трансформации школьного образования. – М.: НИУ ВШЭ, 2018. – 28 с.
201. Усова, А.В. Психолого-дидактические основы формирования у учащихся научных понятий / А.В. Усова. – Челябинск: ЧГПИ, 1986. – 84 с.
202. Устинова, Т.Б. Кейс-технологии как условие активизации самостоятельной работы студентов колледжа [Электронный ресурс] / Т.Б. Устинова. – Режим доступа: festival.1september.ru/articles/512028/
203. Ушинский, К.Д. Человек как предмет воспитания: опыт пед. антропологии / К.Д. Ушинский. – М.: Фаир-Пресс, 2004. – 574 с.
204. Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (с изменениями и дополнениями): электронный. – Текст: электронный // Система ГАРАНТ. – URL: http://base.garant.ru/70291362/#ixzz3bjN0IY4w (дата обращения: 20.12.2020).
205. Философский энциклопедический словарь [Текст] / гл. ред. Л. Ф. Ильичев и др. – Москва: Сов. энциклопедия, 1983. – 839 с.
206. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли: пособие для учителя; под ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2010. – 159 с.
207. Фортыгина, С.Н. Информационно-образовательная среда как средство формирования проектировочной компетенции у будущих учителей начальных

классов: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.08 / Фортыгина Светлана Николаевна. – Челябинск, 2016. – 24 с.

208. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: учебное пособие / Л.М. Фридман. – М.: Либроком, 2009. – 248 с.
209. Формирование функциональной грамотности обучающихся: методическое пособие / сост. Л.Н. Храмова, О.Б. Лобанова, А.В. Фирер, Н.В. и др. – Красноярск: «Литера-принт», 2021. – 130 с.
210. Хаджарова, И.М. Комплексный подход к обучению математике в основной школе как фактор формирования системности знаний учащихся : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Хаджарова Индира Магомедовна. – Махачкала, 2015. – 157 с.
211. Хагундокова, Ф.С-П. Управляемая самостоятельная работа в системе математической подготовки будущих менеджеров: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Хагундокова Фатима Сталь-Пилотовна. – Елец, 2014. – 167 с.
212. Хамов, Г.Г. Методика конструирования арифметических задач при изучении теоретико-числовых тем / Г.Г. Хамов, Л.Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник. Научный журнал. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2016. – № 3. – С. 84-87.
213. Холодная, М.А. Психология интеллекта: Парадоксы исследования / М.А. Холодная. – Томск: ТГУ, 1997. – 392 с.
214. Шабанова, М.В. Обучение доказательству с использованием интерактивной геометрической среды / М.В. Шабанова, Т.С. Ширикова // Ярославский педагогический вестник. – Том II. (Психолого-педагогические науки). – 2012. – № 3. – С. 86-92.
215. Шабанова, М.В. Компьютерный эксперимент в системе методов работы с теоремой / М.В. Шабанова, Т.С. Ширикова // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 2. – С. 1-13.
216. Шадриков, В.Д. Деятельность и способности / В.Д. Шадриков. – М.: Изд-во корпорации «Логос», 1994. – 320 с.

217. Шамова, Т.И. Активизация учения школьников: пособие / Т.И. Шамова. – М.: Знание, 1979.

218. Шаповалов, А.В. Вертикальная математика для всех. Готовимся к задаче С: ЕГЭ с 6 класса / А.В. Шаповалов, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2014. – 128 с.

219. Шварцбурд, С.И. О развитии интересов, склонностей и способностей к математике / С.И. Шварцбурд // Математика в школе. – 1964. – №6. – С. 32-37.

220. Ширикова, Т.С. Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ширикова Татьяна Сергеевна. – Архангельск, 2014. – 250 с.

221. Щедровицкий, Г.П. Мышление. Понимание. Рефлексия / Г.П. Щедровицкий. – М., 2005. – 800 с.

222. Щербатых, С.В. Информационные технологии как средство гармонизации преподавания математических и специальных дисциплин / С.В. Щербатых, О.А. Саввина, И.Н. Гридчина // Педагогическая информатика. – 2009. – № 1. – С. 61-66.

223. Щербатых, С.В. Методическая система обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы: дис... д-ра пед. наук. – М., 2011. – 438 с.

224. Щукина, Г.И. Педагогические проблемы формирования познавательных интересов учащихся: сборник научных трудов / Г.И. Щукина. – М.: Педагогика, 1988. – 208 с.

225. Эльконин, Д.Б. Избранные педагогические труды. Проблемы возрастной и педагогической психологии / Д.Б. Эльконин. – М.: Межд. пед. академия, 1999. – 224 с.

226. Эрдниев, П.М. Обучение математике в школе. Укрупнение дидактических единиц: книга для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М.: Столетие, 1996. – 320 с.

227. Якиманская, И.С. Технология личностно-ориентированного образования / И.С. Якиманская. – М.: Сентябрь, 2000. –175 с.

228. Ястребов, А.В. Исследовательское обучение математике в школе /

А.В. Ястребов. – М.: МЦНМО, 2022. – 176 с.

229. Popova, T.S. Features of studying mathematics in-depth in basic schools / T.S. Popova / Sgem international multidisciplinary scientific conference on social sciences and arts. – Albena Co., Bulgaria, 2018. – p.317-323.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Кейс-задачи

1. Практический кейс «Поездка»

Семья Борисовых из четырех человек, где один – школьник, другой – студент, планируют поехать на выходные на лыжную базу в г. Алдан из г. Якутска. Семья должна определиться, как они доберутся до места отдыха: на поезде или на машине. Билет на автобусе до железнодорожного вокзала стоит 350 р. для взрослых и 250 р. для школьников. Билет на поезде до Алдана стоит 1800 р. для взрослых, действует скидка для школьников 50% и 30% для студентов. Автомобиль расходует 11 л на 100 км. Расстояние от Якутска до Алдана по трассе составляет 532 км, стоимость топлива 54 р. за литр.

Кейс-задание:

1. Сколько топлива нужно для поездки на машине?
2. Сколько будет стоить поездка на поезде для 5 студентов?
3. Рассчитайте разность между расходами семьи на дорогу по двум вариантам.

2. Обучающий кейс

Три числа, принадлежащие интервалам (0;2), (2;3), (3;5) являются членами арифметической прогрессии. Какие значения может принимать величина $\sqrt{a^2+d^2}$, если число a принадлежит промежутку (0;2) и d – разность прогрессии?

Кейс-задание:

1. Координатную плоскость с какими параметрами нужно взять, чтобы отобразить данное множество чисел?
2. Что представляет собой множество точек на координатной плоскости, удовлетворяющих условию $0 < a < 2;\ 2 < a + d < 3,\ 3 < a + 2d < 5$?
3. Как геометрически изобразить величину $\sqrt{a^2+d^2}$?

3. Исследовательский кейс «Семейная экономика»

Семья Борисовых состоит из мамы, папы, сына – школьника и дочери – студентки 2 курса. Дочь обучается на очном отделении университета и в соответствии с договором стоимость обучения в год составляет 125 000 рублей. В условиях распространения коронавирусной инфекции семья задумалась о приобретении дачного участка в пригородных районах г. Якутска, причем условие наличия газового снабжения для них является принципиальным. У семьи есть сбережения в размере 950 000 рублей. Изучив рынок недвижимости, они нашли два подходящих участка в поселках Хатассы и Марха. Настоящая стоимость газифицированного участка в п. Хатассы составляет 700 000 рублей. Семье Борисовых больше понравился участок в поселке Марха стоимостью 850 000 рублей. У семьи сейчас есть необходимая сумма. Газификация участка ожидается в течение 2 лет, стоимость 180 000 рублей. Доходы семьи в месяц до вычета НДФЛ составляют: Мама – 60 000 рублей. Папа – 75 000 рублей. Расходы семьи: коммунальные платежи – 5 500 рублей; интернет, мобильная связь и телевидение – 3000 рублей; спорт – 5 000 рублей; питание – 35 000 рублей; расходы на содержание автомобиля – 15 000 рублей; расходы на сына – 5 000 рублей; на дочь-студентку – 10000; развлечения – 2500 рублей; покупка одежды – 10 000 рублей; расходы на досуг – 10 000 рублей; расходы на собаку – 3000 рублей.

Вопросы для решения кейса:

Вопрос 1. Какой вариант покупки дачного участка Вы бы посоветовали семье?

Дополнительные условия: 1. Возможность сокращения расходов. 2. Возможность накопления денежных средств.

Вопрос 2. Как семья Борисовых может увеличить свои доходы?

Дополнительные условия: 1. Возврат налогового вычета. 2. Возможность дополнительного заработка.

Приложение 2

Web-квест «Магия вычислений»

Образовательный веб-квест «Магия вычислений», состоящий из трех блоков, предлагается для учащихся 9 классов на этапе итогового и межпредметного обобщения знаний. Каждый блок квеста может быть использован как отдельное задание или как один веб-квест. Web-квест содержит комплекс занимательных, исторических, прикладных и практико-ориентированных задач.

Цели веб-квеста:

− Совершенствование целостного представления о числах, вычислительных действиях.

− Формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности.

− Углубление знаний и расширение мировоззренческих представлений учащихся о числах и вычислениях.

− Обобщение и систематизация знаний о вычислительных приемах, необходимых для дальнейшего обучения.

Задачи веб-квеста:

− Обобщение знаний об основных вычислительных приемах посредством знакомства их с различными источниками информации;

− Совершенствование вычислительных навыков и нахождение рациональных способов вычисления.

После завершения проекта учащиеся смогут:

Предметные результаты:

− Уметь проводить математически грамотные числовые преобразования.

− Уметь использовать рациональные приемы вычисления при решении задач.

Метапредметные результаты:

− регулировать собственную деятельность, направленную на познание окружающей действительности;

− иметь навыки использования средств ИКТ для сопровождения интеллектуальной деятельности, уметь анализировать различные ситуации, выделять главное;

– осуществлять информационный поиск, оценивать степень значимости источника;
– осознавать правила и нормы взаимодействия со взрослыми и сверстниками;
– проводить анализ найденной информации, делать выводы на основе совокупности отдельных фактов;
– владеть математическим стилем мышления и математическим языком;
– уметь планировать и проектировать свою деятельность, оценивать результаты;
– понимать роль математики как фундаментальной науки, являющейся неотъемлемой составляющей науки, общечеловеческой культуры.

Цель: Повышение интереса к изучению математики, расширение и углубление знаний.

Главное задание: все участники выбирают роли и выполняют определенные задания с помощью интернет-ресурсов. По итогам работы составляют итоговый отчет в виде презентации. Работы оцениваются по критериям, указанным в таблице 1.

1 блок «По страницам книги Г.Н. Попова «Исторические задачи по элементарной математике»:

Роли: «Вавилон», «Египет», «Греция».

Задания «Вавилон»:

1. Изучите (повторите из курса информатики) системы счисления и проверьте таблицу Гильпрехта, Сенкере.
2. Изучите понятие «среднее гармоническое» и примените к таблице Гинкса.
3. Земельная мера вавилонян. Решите задачу №6 и примерно выразите земельные меры вавилонян в современную единицу измерения.

Задания «Египет»:

1. Изучите историю математики Египта. Какие единицы измерения использовали в древнем Египте?
2. Как вычисляли в Древнем Египте площадь равнобокой трапеции? Найдите погрешность такого вычисления в %.
3. Что такое «кантьем»? Решите задачу из папируса Райнда.

Задание «Греция»

1. Найдите историю о Диофанте Александрийском. Решите эпиграмму-задачу из Палатинской антологии.
2. Решите задачи из трактата «Арифметика».
3. Решите задачу Никомаха и обоснуйте правило.

2 блок «Задачи Рачинского»:

Роли: «История С.А. Рачинского», «1001 задача», «Последовательности Рачинского».

Задание «История С.А. Рачинского»:

1. Изучите биографию С.А. Рачинского.
2. В чем заключалась основная идея школы Рачинского?
3. Найдите источники, в которых изучались труды и биография С.А. Рачинского.

Задание «1001 задача»

1. Изучите способы умножения на 15,25,50,75. Решите задачи про вершки.
2. Изучите способ умножения на число, записанное одними девятками. Найдите задачи из книги «1001 задача». Решите задачи про аршин.
3. В чем заключается способ чисел, «раздвигаемых при умножении»? Найдите такие задачи из книги. Решите задачи на части.

Задание «Последовательности Рачинского»

1. Что собой представляет закономерность для вычисления последовательностей итальянского математика XVI века Николо Тарталья? Приведите примеры.
2. Изучите быстрый способ возведения в квадрат любого двузначного числа. Что такое число Шахерезады?
3. Ознакомьтесь с картиной Н.П Богданова-Бельского «Устный счет» и решите задачу на картине, предложенную ученикам.

3 блок «Вычислить нельзя оставить»:

Роли: любители парадоксов, любители софизмов, фокусники.

Задания для любителей парадоксов:

1. Изучите историю возникновения и определите понятие «математический парадокс».
2. Приведите 5 примеров математических парадоксов с математическим объяснением.
3. Найдите или составьте пример математического парадокса современного мира.

Задания для любителей софизмов:

1. Изучите историю возникновения и определите понятие «математический софизм».
2. Приведите 5 примеров арифметических софизмов с объяснением.
3. Найдите или составьте пример математического софизма из современного мира.

Задания для фокусников:

1. Изучите историю возникновения и определите понятие «математический фокус».
2. Приведите 5 примеров математических фокусов с математическим объяснением.
3. Найдите или составьте пример математического фокуса с применением современных технологий.

Таблица 1

Критерии оценивания

Критерии	Отлично (5 баллов)	Хорошо (4 балла)	Удовлетворительно (3 балла)
Содержание	Максимально полно отражает тему веб-квеста	Довольно полно отражает тему веб-квеста	Недостаточно полно отражает тему веб-квеста
Оформление	Оформление сценария оригинальное, доступное изложение и занимательно	Есть небольшие трудности в оригинальности. В целом с доступным изложением и занимательно	Есть существенные трудности в оригинальности, незанимательно
Грамотность	Математические ошибки и ошибки в изложении материала практически отсутствуют как, собственно, в выполненном задании, так и в его устной презентации	Имеются некоторые математические ошибки и ошибки в изложении материала (но не более 2 в общей сложности)	Имеются математические ошибки и ошибки в изложении материала

Приложение 3

Элективный курс «Числа и вычисления»

Пособие содержит материалы для элективного курса по обобщению и систематизации приемов вычисления и применения свойств чисел при решении различных задач. Представлено тематическое планирование, по каждой теме приведены теоретические материалы для повторения, примеры с решениями и задачи для самостоятельных работ. Предназначено для учителей математики и учащихся основной школы общеобразовательного и углубленного изучения математики.

Согласно программе обучения математики, у школьников старших классов должны быть сформированы вычислительные умения и навыки, когда учащиеся с достаточной беглостью умеют выполнять математические действия, производить тождественные преобразования различных числовых выражений на разных числовых множествах, применять законы математических действий и свойства чисел при вычислениях. Уже в 7-8 классе наряду с навыками выполнения устных и письменных вычислений рассматриваются приёмы работы с таблицами, графиками. Это значит, что учащиеся 7-8 классов должны овладеть определённым уровнем вычислительной культуры, дальнейшее развитие которой будет вестись в направлении формирования более сложных умений, расширению и углублению теоретико-числовых представлений

Однако практика показывает, что даже у учащихся с достаточным уровнем математической подготовки выявляются проблемы, связанные с вычислительной культурой. Чаще всего эта проблема заключается в способности выбирать и осуществлять рациональный путь выполнения упражнений и решения задачи, также рационально записывать то или иное решение. Одной из главных причин такой проблемы можно назвать разрозненные, фрагментарные, не связанные общими идеями знания.

Предлагаем на основе обобщенных приемов учебной деятельности, обобщающий элективный курс «Числа и вычисления». Курс построен на основных принципах отбора задач, ориентированных на усвоение содержания элективного курса: принцип преемственности, принцип связи теории с практикой, принцип полноты, принцип контрастности, обучение эвристическим приемам, принцип формирования исследовательских умений (таблица 2).

В содержании элективного курса можно выделить системообразующую стержень, которым является комплексный подход к вычислительным действиям в отличие от учебников, в которых закрепление знаний относится к конкретной одной теме.

Цели курса:

- Совершенствование целостного представления о числах, вычислительных действиях, о тесной связи различных разделов математики.
- Формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности.
- Углубление знаний и расширение мировоззренческих представлений учащихся о числах и вычислениях.
- Обобщение и систематизация знаний о числах, необходимых для дальнейшего обучения.

При изучении курса перед учащимися ставятся следующие **задачи:**

- ✓ Обобщение знаний об основных вычислительных приемах и применениях свойств чисел в решении задач;
- ✓ Овладение навыками числовых преобразований и нахождения рациональных способов решения задач;
- ✓ Освоение методов решения и исследования вычислительных и логических задач;
- ✓ Получение конкретного представления о взаимосвязях арифметики и алгебры.

Предметные результаты:

- ✓ Умение проводить математически грамотные числовые преобразования.
- ✓ Умение использовать основные приемы вычисления при решении задач на различных числовых множествах.
- ✓ Умение понимать и правильно интерпретировать сложные задачи и их методы решения.

Метапредметные результаты:

- ✓ Умение анализировать различные ситуации, выделять главное.
- ✓ Владение математическим стилем мышления.
- ✓ Умение планировать и проектировать свою деятельность, оценивать результаты.
- ✓ Понимание роли математики как фундаментальной науки, являющейся неотъемлемой составляющей науки, общечеловеческой культуры.

Методы и формы организации занятий:

Предполагаемая форма проведения занятий-лекционно-семинарская с применением дистанционных технологий и ИКТ-средств. Большую часть материала можно преподнести в проблемном стиле. Необходимо четко фиксировать основные моменты в решении задач.

Оценка уровня достижений:

Исходя из того, что данный элективный курс направлен на повышение математической культуры и подготовку к дальнейшему обучению математики на более высоком уровне, форму оценки уровня достижений целесообразно приблизить к практике экзаменационных и конкурсных задач. В разделе «Дидактическое приложение» приведены примеры зачетных работ соответствующего типа и технологической карты урока обобщения и систематизации знаний. В приводимых материалах не предусмотрена проверка теоретического материала, предусмотрена проверка знания приемов вычисления и их применение в решении задач.

1. *Множества чисел*

Теоретический материал

Числовые множества

N – множество натуральных чисел {1, 2, 3, ..., n, …};

Z – множество целых чисел {0, ±1, ±2, ±3,...};

Q – множество рациональных чисел: кроме целых чисел имеются ещё и дроби.

Таблица 2

Примерное тематическое планирование курса с формируемыми приемами вычисления

№	Название темы	Всего часов	Виды задания	Формируемый вычислительный прием
1	Множества чисел. Диаграммы Эйлера-Венна	1	Операции над множествами.	Применение диаграммы Эйлера-Венна при решении задач
2	Законы сложения и умножения чисел	1	Нахождение значений числовых выражений, содержащих целые, обыкновенные, десятичные дроби	Применение законов сложения и умножения для рационального вычисления
3	Свойства дроби.	1	Нахождение значений числовых и алгебраических выражений	Применение свойств дроби
4	Формулы сокращенного умножения	1	Нахождение значения числовых выражений	Применение формул сокращенного умножения для рационального вычисления
5	Приемы быстрого вычисления	1	Нахождение значений числовых выражений	Применение приемов быстрого вычисления при нахождении значений выражений
6	Сравнение действительных чисел	1	Решение числовых неравенств, сравнение чисел.	Применение свойств числовых неравенств при сравнении действительных чисел
7	Определение и свойства делимости чисел. Теорема о делении с остатком.	1	Доказательство делимости выражений на числа.	Применение теории делимости к доказательству
8	Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида	1	Нахождение НОД выражений, содержащих переменные и выражений, содержащих степени	Применение Алгоритма Евклида при нахождении НОД
9	Разложение на множители выражений вида $x^a - y^a$ и $x^{2a+1} + y^{2a+1}$	1	Доказательство кратности выражений вида $x^a - y^a$ и $x^{2a+1} + y^{2a+1}$ на числа	Применение формулы разложения на множители при доказательстве
10	Признаки делимости	1	Нахождение неизвестных цифр числа	Применение признаков делимости при нахождении цифр
11	Метод математической индукции	1	Доказательство тождеств или делимости выражений на числа	Применение метода математической индукции при доказательстве тождеств.
12	Действия с корнями.	1	Нахождение значений выражений, содержащих корни	Применение приемов извлечения числа из квадратного корня

13	Степень с рациональным показателем и его свойства	1	Нахождение значений выражений, содержащих степени с рациональным показателем	Применение свойств степени с рациональным показателем при вычислениях
14	Итоговое повторение	2	Комплект заданий, включающих все виды задач	Применение различных приемов вычислений при выполнении заданий

Дробь – это выражение вида $\frac{p}{q}$, где p – целое число, q – натуральное. Десятичные дроби также можно записать в виде $\frac{p}{q}$. Например: $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Целые числа также можно записать в виде $\frac{p}{q}$. Например, в виде дроби со знаменателем «один»: $2 = \frac{2}{1}$. Таким образом, любое рациональное число можно записать десятичной дробью – конечной или бесконечной периодической.

I – множество иррациональных чисел. Иррациональные числа – это бесконечные непериодические дроби. К ним относятся: число π – отношение длины окружности к её диаметру; число *e* – названное в честь Эйлера и др.

R – множество действительных чисел. Вместе два множества (рациональных и иррациональных чисел) – образуют множество действительных (или вещественных) чисел.

Пусть *N* – множество натуральных чисел, *Z* – множество целых чисел, *Q* – множество рациональных чисел, *R* – множество действительных чисел (рисунок 1). Тогда $N \subset Z \subset Q \subset R$.

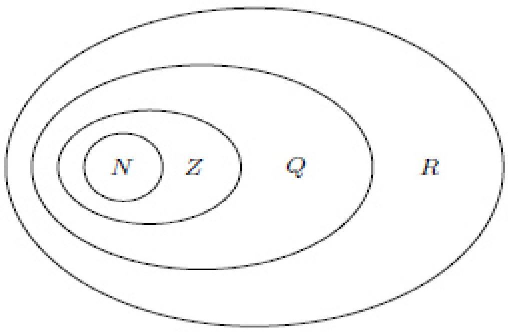
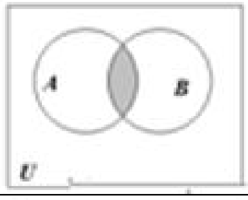
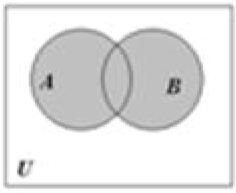
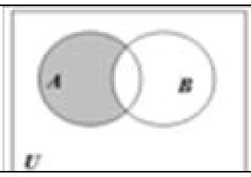
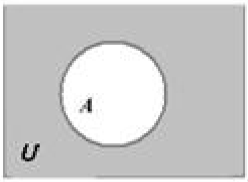
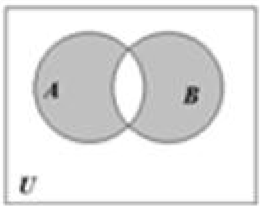


Рисунок 1

<u>Диаграмма Эйлера-Венна</u>

В таблице 3 приведены иллюстрации операций объединения, пересечения, разности, дополнения и симметрической разности двух множеств А и В, входящих в универсальное множество U.

Таблица 3

Название множеств	Обозначение	Изображение	Определение	Символическая запись
Пересечение множеств	$A \cap B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одновременно А и В	$A \cap B = \{x \mid x \in A$ и x
Объединение множеств	$A \cup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В	$A \cup B = \{x \mid x \in A$ и x
Разность множеств	$A \backslash B$		Те и только те элементы, которые не принадлежат В	$A \backslash B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin$
Дополнение к множеству А	$\bar{A} = U \backslash B$		Те и только те элементы, которые не принадлежат А (т.е. дополняют его до универсального U)	$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \backslash A$
Симметрическая разность	$A \Delta B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: А либо В, но не являются общими элементами	$A \Delta B = (a \backslash B) \cup (B \backslash A$

Диаграммы Эйлера-Венна могут использоваться для решения задач, связанных с пересеченными множествами.

Пример 1. Указать, какому наименьшему множеству чисел принадлежат следующие числа: $a = \sqrt{5}$; $b = -6$; $c = \frac{2}{5}$; $d = \sqrt{16}$; $e = 0{,}12$; $f = -\frac{36}{9}$.

Решение. $a \in R$; $b \in Z$; $c \in Q$; $d \in N$; $e \in Q$; $f \in Z$.

Пример 2. Из 100 студентов английский язык изучают 28, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, немецкий, английский и французский – 3:

а) сколько студентов не изучают ни одного языка?

б) сколько студентов изучают один английский?

в) один французский?

г) один немецкий?

д) менее двух языков?

Решение. Обозначим: E – множество всех студентов, A – множество студентов, изучающих английский язык, B – немецкий, C – французский. Имеем рисунок 2:

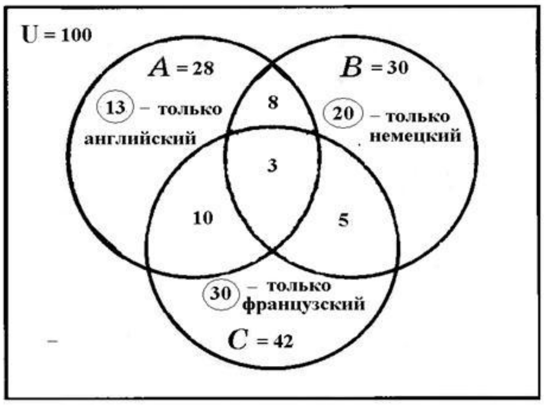


Рисунок 2

$|A| = 28, \quad |B| = 30, \quad |C| = 42, \quad |A \cap B| = 8, \quad |A \cap C| = 10, \quad |B \cap C| = 5,$

$|A \cap B \cap C| = 3.$

а) 20

б) один английский изучают:

$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 28 - 8 - 10 + 3 = 13.$

в) один французский:

$|C| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 42 - 5 - 10 + 3 = 30.$

г) один немецкий: $|B| - |B \cap C| - |A \cap B| + |A \cap B \cap C| = 30 - 5 - 8 + 3 = 20.$

ни одного языка не изучают:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| =$
$= 100 – 8 – 10 – 5 + 3 = 80.$

Тогда $100 – 80 = 20$.

д)

$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 2|A \cap B \cap C| = 8 + 10 + 5 - 2 \cdot 3 = 23 – 6 = 17.$

Задачи

1.1 Указать, какому наименьшему множеству чисел принадлежат следующие числа: $a = 5$; $b = -3{,}21$; $c = \frac{8}{2}$; $d = 1 + \sqrt{3}$; $e = \pi - 3{,}14$; $f = 2 - \sqrt{\frac{36}{9}}$.

1.2 Пусть $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2\}$, $C = \{x | -4 \leq x < 5\}$. Запишите следующие множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$, $A \cap \boldsymbol{N}$, $A \cup \boldsymbol{N}$, $B \cup \boldsymbol{Z}$, $(A \cap B) \cap \boldsymbol{N}$.

1.3 Пусть заданы множества A, B и C такие, что $A \cap B = \{2; 3\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 8\}$, $A \cap C = \{1\}$, $C \cup B = \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 8\}$. Найдите множества A, B и C.

1.4 Найдите объединение множеств: а) $A = \{3k + 1 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{3k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$, $C = \{3k + 2 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$; б) $A = \{8k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{8k + 4 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$; в) $A = \{9k + 7 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{9k + 4 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$, $C = \{9k + 1 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$.

1.5 Найдите $A \backslash B$: а) $A = \{3k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{6m \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$; б) $A = \{2k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{4m + 2 \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$.

1.6 Даны множества: A – множество целых чисел; B – множество четных чисел; C – множество нечетных чисел; D – множество чисел, кратных 3; E – множество чисел, кратных 6; P – множество чисел, кратных 2 и 3 одновременно; T – множество чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других множеств, имеются ли среди множеств равные множества? Ответы запишите с помощью символов.

1.7 Группа ребят отправилась в поход. Семеро из них взяли с собой бутерброды, шестеро – фрукты, пятеро – печенье. Четверо ребят взяли с собой бутерброды и фрукты, трое – бутерброды и печенье, двое – фрукты и печенье, а один – и бутерброды, и фрукты, и печенье. Сколько ребят пошли в поход?

1.8 Староста класса, в котором 40 человек, подводил итоги по успеваемости группы за I полугодие. Получилась следующая картина: из 40 учащихся не имеют троек по русскому языку 25 человек, по математике – 28 человек, по русскому языку и математике – 16 человек, по физике – 31 человек, по физике и математике – 22 человека, по физике и русскому языку 16 человек. Кроме того, 12 человек учатся без троек по всем трем предметам. Классный руководитель, просмотрев результаты, сказал: «В твоих расчетах есть ошибка». Составьте диаграмму Эйлера–Венна и объясните, почему это так.

1.9 В лаборатории института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 7 человек знают английский, 7 – немецкий, 8 – французский, 5 знают английский и немецкий, 4 – немецкий и французский, 3 – французский и английский, 2 человека знают все три языка. Сколько человек работает в лаборатории? Сколько из них знает только французский язык? Сколько человек знает ровно 1 язык?

1.10 Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 5, ни на 7, ни на 11?

Ответы:

1.1.	$a \in N$; $b \in Q$; $c \in N$; $d \in R$; $e \in R$; $f \in Z$.
1.2.	$A \cup B = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ $A \cap B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ $A \cup C = \{x \mid -4 \le x < 5\}$ $A \cap C = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ $B \cup C = \{x \mid -4 \le x < 5\}$ $A \cap \boldsymbol{N} = \{1; 2\}$ $A \cup \boldsymbol{N} = \{-4; -3; -2; -1;\ 0;\ x \mid x \in \boldsymbol{N}\}$ $B \cup \boldsymbol{Z} = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}\}$, $(A \cap B) \cap \boldsymbol{N} = \{1; 2\}$

1.3.	Например, $A = \{1;2;3\}$; $B = \{2;3;5;7;8\}$; $C = \{1;6;7;8\}$.
1.4.	а) $A \cup B \cup C = \boldsymbol{Z}$; б) $A \cup B = \{4k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$; в) $A \cup B \cup C = \{3k + 1 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$.
1.5.	а) $A \backslash B = \{6k + 3 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$; б) $A \backslash B = \{4k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$.
1.6.	Все множества являются подмножествами множества A; E⊂D, E⊂B, P=E (следовательно, P⊂D, P⊂B), T⊂C.
1.7.	10.
1.8.	Если на диаграмме Эйлера-Венна отметить данные в непересекающихся множествах класса, то общее число учащихся класса получится равным 42, а не 40, как сказано в условии.
1.9.	12; 3; 4.
1.10.	376

2. Законы сложения и вычитания, умножения и деления на множестве действительных чисел

Теоретический материал

Свойства сложения и вычитания:

Для любых действительных чисел a, b и c

- $a + b = b + a$ (переместительное свойство сложения);
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательное свойство сложения);
- $a + 0 = a$;
- $a + (-a) = 0$;
- $a - b = a + (-b)$.
- Если $a < b$, то $a + c < b + c$

Свойства умножения и деления:

- $a \cdot b = b \cdot a$ (переместительное свойство умножения);
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (сочетательное свойство умножения);

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (распределительное свойство);
- $a \cdot 1 = a$;
- $a \cdot 0 = 0$;
- $a \cdot \frac{1}{a} = 1, (a \neq 0)$.
- $a - (b + c) = (a - b) - c$.
- Никакое действительное число нельзя делить на нуль.
- $0 : a = 0$.
- $a : a = 1$, где a – любое действительное число, отличное от нуля.
- $a : 1 = a$.
- $a : b \neq b : a$.
- $(a + b) : c = a : c + b : c$ и $(a - b) : c = a : c - b : c$;
- $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$,
- $a : (b \cdot c) = (a : b) \cdot c = (a : c) \cdot b$.

Задачи

Вычислите наиболее рациональным способом:

2.1. а) $146 + 37 + 14$;   б) $412 - 43 + 31$.

2.2. а) $37 + (363 - 180)$;   б) $41 \cdot 145 - 144 \cdot 41$.

2.3. а) $22 \cdot 34 + 34 \cdot 78 + 78 \cdot 66 + 22 \cdot 66$; б) $53 \cdot 39 + 47 \cdot 39 - 53 \cdot 21 - 47 \cdot 21$.

2.4. а) $26{,}7 + 35{,}63 + 23{,}3 + 17{,}37$; б) $15{,}6 \cdot 17 - 15{,}6 \cdot 15 + 14{,}4 \cdot 17 - 14{,}4 \cdot 15$.

2.5. $(0{,}8 \cdot 7 + 0{,}64) \cdot (1{,}25 \cdot 7 - -\frac{4}{5} \cdot 1{,}25) + 31{,}64$.

2.6. $\frac{(1{,}09-0{,}29)\cdot 1\frac{1}{4}}{\left(18{,}9-16\frac{13}{20}\right)\cdot\frac{8}{9}}$.

2.7. $9900\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{21}{9900}-\frac{1}{495}\right)$.

2.8. $\left(\left(\frac{2}{193}-\frac{3}{386}\right)\cdot\frac{193}{17}+\frac{33}{34}\right):\left(\left(\frac{7}{1931}+\frac{11}{3862}\right)\cdot\frac{1931}{25}+\frac{9}{2}\right)$.

2.9. $78\cdot\frac{\left(4\frac{3}{5}-1\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(11-1.25):2.5}$.

2.10. $\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230\frac{1}{25}-41\frac{1}{4}+2001:3$.

Ответы:

2.1.	а) $146+14+37=197$; б) $412+31-43=400$.
2.2.	а) $(363+37)-180=220$; б) $41\cdot(145-144)=41$
2.3.	Можно группировать так а) $34\cdot(22+78)+66\cdot(78+22)=(78+22)\cdot(34+66)=10000$; б) $53(39-21)+47\cdot(39-21)=(39-21)\cdot 53+47)=18\cdot 100$
2.4.	а) 103; б) 60.
2.5.	80.
2.6.	0,5.
2.7.	2476
2.8.	0,2
2.9.	395.
2.10.	679.

3. *Свойства дроби*

Теоретический материал

Сложение и вычитание дробей. Чтобы сложить (вычесть) две дроби с одинаковыми знаменателями нужно сложить (вычесть) их числители:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

Чтобы сложить (вычесть) две дроби с разными знаменателями нужно привести их общему знаменателю, а потом сложить числители (вычесть из первого числителя второй):

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Умножение и деление дробей. Чтобы умножить две обыкновенные дроби нужно умножить их числители и знаменатели:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Чтобы умножить дробь на число нужно умножить числитель дроби на это число:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Чтобы разделить одну дробь на другую нужно первую дробь умножить на дробь, обратную ко второй:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Сравнение дробей. Чтобы сравнить две дроби, нужно привести их одному знаменателю и сравнить числители. У какой дроби числитель больше та дробь и больше.

Основное свойство дроби. Числитель и знаменатель дроби можно умножать и делить на одно и то же число, при этом величина дроби не изменится:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}.$$

Пример 1. Представить в виде разности дробь $\frac{1}{2 \cdot 3}$.

Решение: Пользуясь правилом сложения дробей, представим дробь в виде $\frac{1}{2\cdot3}=\frac{a}{2}-\frac{b}{3}=\frac{3a-2b}{2\cdot3}$, где a и b целые числа и $3a-2b=1$, нетрудно установить что в частности $a=1$, $b=1$. Значит $\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$.

Пример 2. Найти значение выражения $\frac{a+b}{c}$ при $a=8{,}4;\ b=-1{,}2; c=-4{,}5$.

Решение: подставим значения переменных в выражение: $\frac{8{,}4+(-1{,}2)}{-4{,}5}=\frac{8{,}4-1{,}2}{-4{,}5}=\frac{7{,}2}{-4{,}5}=\frac{7{,}2\cdot10}{-4{,}5\cdot10}=-\frac{72}{45}=-\frac{8}{5}=-1{,}6$.

Пример 3. Вычислить сумму $S=\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{97\cdot98}+\frac{1}{99\cdot101}$

Решение: ключевой момент задачи-представление дроби в виде разности двух дробей, т.е. использование равенства $\frac{1}{(2к+1)(2к+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2к+1}-\frac{1}{2к+3}\right)$. Применяя это равенство, получаем

S=

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\frac{1}{97}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{101}\right)=\frac{98}{2\cdot3\cdot101}=\frac{49}{303}$.

Задачи

3.1 Вычислите: а) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$.

3.2 Представьте в виде разности дроби $\frac{2}{5\cdot7}$; $\frac{5}{6\cdot11}$.

3.3 Найдите значение выражения $\frac{a}{b+c}$ при a=3.6; $b=\ 2{,}1\ c=0{,}3$.

3.4 Найдите значение выражения $\frac{a^8+a^5}{a^5+a^2}$ при $a=-\frac{1}{2}$.

3.5 Найдите значение выражения $\frac{\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{9}}{\frac{a}{12}+\frac{b}{18}}$ при $a=\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{2}$.

3.6 Вычислите а) $\frac{92 \cdot 93 \cdot 94 - 91 \cdot 92 \cdot 93}{93 \cdot 94 \cdot 95 - 92 \cdot 93 \cdot 94}$; б) $\frac{0{,}3 \cdot 450 \cdot 0{,}56 \cdot 250}{0{,}125 \cdot 63}$.

3.7 Вычислите $\left(1\frac{3}{4} : 1{,}125 - 1{,}75 : \frac{2}{3}\right) \cdot 1\frac{5}{7}$.

3.8 Найдите значение выражения а) $\frac{20!}{18!}$; б) $\frac{12!}{9! \cdot 3!}$.

3.9 Вычислите: $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 17}$.

3.10 Вычислите: $\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 23}$.

Ответы:

3.1.	а) 0,3; б) $\frac{3}{40}$.
3.2.	а) $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$; б) $\frac{1}{6} - \frac{1}{11}$.
3.3.	1,5
3.4.	$-\frac{1}{8}$.
3.5.	3
3.6.	а) $\frac{46}{47}$; б) 2400
3.7.	$-1\frac{5}{6}$
3.8.	а) 380; б) 220.
3.9.	$\frac{5}{34}$.
3.10.	$\frac{5}{69}$.

4. Формулы сокращенного умножения

Теоретический материал

Разность квадратов:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (1)

Квадрат суммы и квадрат разности:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (2)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (3)$$

Сумма и разность кубов:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \qquad (4)$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \qquad (5)$$

Куб суммы и куб разности:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (6)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (7)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + c^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + c^2 + b^2 + 2(ab + ac + bc)$$

Пример 1. Вычислить $63 \cdot 57$.

Решение: $63 \cdot 57 = (60+3)(60-3) = 602 - 32 = 3591$.

Пример 2. Вычислите: $92^2 - 82^2$.

Решение: $92^2 - 82^2 = (92-82)(92+82) = 10 \cdot 174 = 1740$.

Пример 3. Вычислите: 47^2.

Решение: $47^2 = (50-3)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 3 + 3^2 = 2500 - 300 + 9 = 2209$.

Пример 4. Вычислите: $39^2 + 78 \cdot 41 + 41^2$.

Решение:

$$39^2 + 78 \cdot 41 + 41^2 = 39^2 + 2 \cdot 39 \cdot 41 + 41^2 = (39+41)^2 = 80^2 = 6400.$$

Пример 5. Вычислить рациональным способом:

$$\frac{65^2 - 32^2 - 97 \cdot 8}{61^2 - 36^2} + \frac{56^2 - 26^2}{66^2 - 16^2}$$

Решение:

$$\frac{65^2-32^2-97\cdot 11}{61^2-36^2}+\frac{56^2-26^2}{66^2-16^2}=$$

$$=\frac{(65-32)(65+\_32)-97\cdot 8}{(61-36)(61+36)}+\frac{(56-26)(56+26)}{(66-16)(66+16)}=$$

$$=\frac{33\cdot 97-97\cdot 8}{25\cdot 97}+\frac{30\cdot 82}{50\cdot 82}=\frac{97(33-8)}{97\cdot 25}+\frac{30}{50}=\frac{25}{25}+\frac{3}{5}=1\frac{3}{5}$$

Пример 6: Вычислить $(1+2)(1^2+2^2)(1^4+2^4)$.

Решение: Воспользуемся свойством дроби

$(1+2)(1^2+2^2)(1^4+2^4)=\frac{(2-1)(1+2)(1^2+2^2)(1^4+2^4)}{2-1}=\frac{(2^2-1^2)(1^2+2^2)(1^4+2^4)}{2-1}=$
$\frac{(2^4-1^4)(1^4+2^4)}{2-1}=2^8-1^8=255.$

Задачи

Вычислить рациональным способом:

4.1. $44\cdot 36$; $84\cdot 76$; $68\cdot 72$.

4.2. 54^2-44^2; 67^2-33^2; $50{,}6^2-50{,}5^2$.

4.3. 49^2; 51^2; 121^2.

4.4. $83^2-2\cdot 83\cdot 33+33^2$; $47^2-47\cdot 6+3^2$.

4.5. $27^3-21\cdot 27^2+3\cdot 27\cdot 49-7^3$.

4.6. $18^3+36\cdot 18^2+3\cdot 18\cdot 144+12^3$.

4.7. $\frac{49^2-98\cdot 29+29^2}{49^2-29^2}$.

4.8. $\frac{13^8-13^6\cdot 144}{13^7}$.

4.9. $5(2^2+3^2)(3^4+2^4)$.

4.10. $\frac{4\cdot 65^2-40\cdot 65\cdot +100}{4\cdot 65^2-100}$.

Ответы:

4.1.	1584; 6384; 4896.
4.2.	980; 3400; 10,11.
4.3.	2401; 2601; 14641.
4.4.	2500; 2304.
4.5.	8000.
4.6.	27000.
4.7.	$\frac{10}{39}$.
4.8.	$\frac{25}{13}$.
4.9.	6305.
4.10.	$\frac{6}{7}$.

5. *Приемы быстрого вычисления*

Теоретический материал

Умножение двузначного числа на 11:

Чтобы двузначное число умножить на 11, сложите его первую и последнюю цифру. Если результат будет однозначным, впишите его между двумя цифрами первоначального числа, а если двузначным – прибавьте первую цифру результата к первой цифре первоначального числа, а вторую – впишите между цифрами.

Пример 1: А) Чтобы умножить 45х11, складываем 4+5=9. Поэтому результатом будет 495. Б) чтобы умножить 76х11, складываем 7+6=13. Единицу прибавляем к семёрке, а тройку пишем в середину и получаем 836.

Математическое обоснование. Пусть нужно двузначное число $10a + b$. Умножить на 11. Результатом будет $110a + 11b = 100a + 10\ (a + b) + b$.

Умножение и деление на 5 и 25

Чтобы число умножить число на 5, его нужно разделить на 2 и умножить на 10. Чтобы число разделить на 5, его нужно умножить на 2 и разделить на 10.

Аналогично, умножение/деление на 25 заменяется делением/умножением на 4 и умножением/делением на 100.

Пример 2: А) чтобы умножить 36х5, делим 36 на 2, получаем 18. Умножаем 18 на 10 и получаем 180. Б) выполним деление 3/5. Умножаем 3 на 2 и получаем 6. Делим 6 на 10 и получаем 0,6. В) разделим 45/25. Для этого умножаем 45 на 4, получаем 180. Делим 180 на 100, получаем 1,8. Г) умножим 84х25. Для этого делим 84 на 4, получаем 21. Умножаем 21 на 100 и получаем 2100.

Математическое обоснование. Поскольку 5=10/2, умножение/деление на 2 можно свести к более простым умножениям/делениям на 2 и 10.

Возведение в квадрат числа, оканчивающегося на 5

Чтобы возвести в квадрат число, оканчивающееся пятёркой, нужно умножить число, полученное отбрасыванием последней пятёрки на следующее в натуральном ряду, и к результату приписать 25.

Пример 3: А) Вычислим 65^2: Умножаем 6 на 7, получаем 42. Приписываем 25, получаем 4225. Б) 115^2: Умножаем 11 на 12, получаем 132. Приписываем 25, получаем 13225.

Математическое обоснование. Возведём в квадрат число $10n + 5$: $(10n + 5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n + 1) + 25$, откуда и следует данное правило.

Возведение в квадрат числа, близкого к круглому.

Целесообразно воспользоваться формулами квадрата суммы или разности.

Пример 4: А) $19^2 = (20 - 1)^2 = 400 - 40 + 1 = 361$,

Б) $42^2 = (40 + 2)^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$.

Математическое обоснование. Формула квадрата суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Формула квадрата разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Вычитание из степени десятки

Для вычитания числа из степени десятки, нужно последнюю его цифру заменить дополнением до десяти, а остальные (включая первые виртуальные нули) – дополнениями до девяти.

Пример 5: А) $1000 - 725 = \overline{(9-7)(9-2)(10-5)} = 275$.

Б) $100000 – 1237 = 100000 – 01237 = \overline{(9-0)(9-1)(9-2)(9-3)(10-7)} = 98763$

Математическое обоснование. Правило следует из алгоритма вычитания столбиком.

Прибавление числа, близкого к степени десятки.

Вместо прибавления числа, состоящего из девяток и оканчивающегося на 9 (8, 7, 6 и т.д.), прибавьте следующую большую степень десятки и вычтите 1 (2, 3, 4 и т.д.)

Пример 6: А) $125 + 999 = 1125 - 1 = 1124$.

Б) $6258 + 996 = 7258 - 4 = 7254$.

Математическое обоснование. Для k-значного числа $99\ldots9 = 100..00 – 1$.

Задачи

Вычислите, используя приемы быстрого вычисления:

5.1 $54 \cdot 11$; $67 \cdot 11$

5.2 $63 \cdot 5$; $846 \cdot 5$; $790:5$; $675:5$

5.3 $404 \cdot 25$; $6416 \cdot 25$; $5150:25$; $44800:25$.

5.4 75^2; 135^2

5.5 $1000 - 783$; $10000 - 4537$

5.6 $346 + 998$; $6547 + 9999$

5.7 99^2; 999^2; 9999^2

5.8 $\underbrace{999\ldots9}_{100\text{ раз}} + 22$;

5.9 $\underbrace{999\ldots9}_{100\text{ раз}} + \underbrace{222\ldots2}_{100\text{ раз}}$

5.10 $\underbrace{333\ldots3}_{100\text{ троек}} \cdot 11$; $\underbrace{333\ldots3}_{100\text{ троек}} \cdot 4$

Ответы:

5.1	594; 737.
5.2	315; 4230; 158; 135
5.3	10100; 160400; 206; 1792
5.4	5625; 18225.
5.5	217; 5463.
5.6	1344; 16546.
5.7	9801; 998001; 99980001
5.8	$1\underbrace{000\ldots0}_{98\text{ раз}}21$;
5.9	$1\underbrace{222\ldots2}_{99\text{ раз}}1$.
5.10	$3\underbrace{666\ldots6}_{99}3$; $1\underbrace{333\ldots3}_{99\text{ троек}}2$.

6. *Сравнение действительных чисел*

Теоретический материал

Сравнить два действительных числа означает определить, какое из них больше(меньше). По определению:

$a < b \Leftrightarrow a - b < 0,\ a > b \Leftrightarrow a - b > 0,\ a \le b \Leftrightarrow a - b \le 0,\ a \ge b \Leftrightarrow a - b \ge 0.$

Для любых заданных чисел a и b справедливо одно и только одно из соотношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$. С геометрической точки зрения неравенство $a < b$ ($a > b$) означает, что точка a находится на координатной прямой слева (справа) от точки b.

Знаки «<», «>» называют знаками строгих неравенств. Используют также знаки «≥», «≤» – знаки нестрогих неравенств. Запись $a \le b$ означает, что справедливо одно из двух: либо число a меньше числа b, или число a равно числу b. Если числа a, b и c такие, что $a < b$ и $b < c$, то вместо двух неравенств используется запись $a < b < c$. Такое неравенство называется двойной.

<u>Основные свойства неравенств:</u>

- Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
- Если $a > b$, то $a + c > b + c$ при любом c.
- Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$, а если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.
- Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
- Если a, b, c, d – положительные числа, причем $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$.
- Если $a > b \ge 0$, то для любого $n \in N$ $a^n > b^n$
- Если $a > b \ge 0$, то для любого $n \in N$ $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$
- Если $a > b$, то для любого $n \in N$ $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ и $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$.

Если сравнение рациональных чисел, как правило, не вызывает трудностей, то сравнение чисел, среди которых есть иррациональные числа, уже требует приложения некоторых усилий.

Пример 1. Сравнить числа: $a = \sqrt{5} + 2$ и $b = \sqrt{17}$.

Решение: Так как $a > 0$ и $b > 0$, то $a + b > 0$. Поэтому знак числа $a - b$ совпадает со знаком числа $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, т.е. $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ и $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$. Это означает, что можно сравнивать квадраты заданных чисел. Имеем: $a^2 = \left(\sqrt{5} + 2\right)^2 = 5 + 4 + 4\sqrt{5} = 9 + 4\sqrt{5}$, $b^2 = 17$. Далее: $a^2 - b^2 = 4\sqrt{5} - 8$; сравним числа $4\sqrt{5}$ и 8: $\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 80 > 64 = 8^2$. Получили: $a^2 - b^2 > 0$, следовательно: $a > b$.

Пример 2. Сравнить числа: $a = \sqrt[3]{3}$ и $b = \sqrt{2}$.

Решение: $a > 0$ и $b > 0$; Сравним шестые степени этих чисел:$a^6 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 3^2 = 9$; $\mathrm{b}^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$ Так как $a^6 > b^6$, то $a > b$.

Пример 3. Сравнить числа: $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}$ и $b = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}}$.

Решение: рассмотрим разность чисел $a - b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{27} - \sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[4]{3}}$. Сравним числа $\sqrt[4]{27}$ и $\sqrt[3]{10}$. Для этого рассмотрим

$a^{12} = \left(\sqrt[4]{27}\right)^{12} = 27^3 > 700 \cdot 27 > 18900$, $\mathrm{b}^{12} = \left(\sqrt[3]{10}\right)^{12} = 10^4 = 10000$. Откуда $a > b$.

Пример 4. Упростив выражение, сравнить с нулем: $a = \left(2\sqrt{6} - 5\right)^2 - 10\sqrt{49 - 20\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Решение: Так как

$49 - 20\sqrt{6} = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^2$, где $5 > 2\sqrt{6}$, то $\sqrt{49 - 20\sqrt{6}} =$

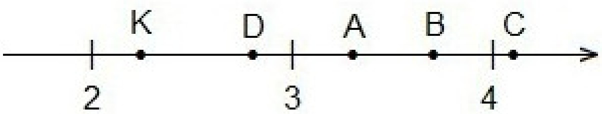
$\left|5 - 2\sqrt{6}\right| = 5 - 2\sqrt{6}$ и поэтому $\mathrm{a} = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^2 - 10\left(5 - 2\sqrt{6}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} -$

$\left(5 - 2\sqrt{6}\right)\left(5 + 2\sqrt{6}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} - (25 - 24) = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 > 0$. Итак, $\mathrm{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 > 0$.

Задачи

6.1 Расположите числа на координатной прямой: $3{,}7;\ -4\frac{1}{2};\sqrt{2};\ 0{,}5; 6{,}43;\ -0{,}3;\ -\frac{1}{9}$.

6.2 Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{5}$. Какая это точка?



6.3 Между какими последовательными целыми числами расположено число а) $\sqrt{51}$; б) $\sqrt[4]{51}$?

6.4 Сравните числа $\frac{9}{25}$ и $0{,}33$;

6.5 Сравните числа 74^2-27^2 и 73^2-26^2

6.6 Сравните числа: a $=\sqrt{7}+3$ и b $=\sqrt{31}$.

6.7 Что больше: $\sqrt[3]{40}$ или $\sqrt[2]{12}$?

6.8 Сравнить числа $\sqrt{23}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{22}-\sqrt{10}$;

6.9 Сравнить числа: a$=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[3]{25}}$ и $b=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{12}}$.

6.10 Упростив выражение, сравнить с нулем:

$$a=\left(4-3\sqrt{2}\right)^2+8\sqrt{34-24\sqrt{2}}-\sqrt{5}.$$

Ответы:

6.1.	Расположите числа на координатной прямой: $3{,}7;\ -4\frac{1}{2};\sqrt{2};\ 0{,}5; 6{,}43;\ -0{,}3;\ -\frac{1}{9}$.
6.2.	Точка K
6.3.	а) $7<\sqrt{51}<8$; б) $2<\sqrt[4]{51}<3$.

6.4.	$\frac{9}{25} = \frac{36}{100} > 0{,}33 = \frac{33}{100}$.
6.5.	$74^2 - 27^2 = (74-27)(74+27) = 47 \cdot 101$, $73^2 - 26^2 = (73-26)(73+26) = 47 \cdot 99$, значит $74^2 - 27^2 > 73^2 - 26^2$.
6.6.	$\sqrt{7} + 3 > \sqrt{31}$.
6.7.	$\sqrt[3]{40} < \sqrt[2]{12}$.
6.8.	$\sqrt{23} - \sqrt{11} < \sqrt{22} - \sqrt{10}$.
6.9.	$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[3]{25}} < \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{12}}$.
6.10.	$a = 2 - \sqrt{5} < 0$.

7. Определение и свойства делимости чисел. Теорема о делении с остатком

Теоретический материал

Определение. Пусть a и b – целые числа. Говорят, что число a делится на b, если a можно представить в виде a=nb, где n – целое число. Иначе: n – делитель. Обозначение: $a \vdots b$.

Свойства делимости

Пусть a,b,c,d – целые числа, число p – простое.

1. Если в равенстве a+b=c два числа делятся на d, то и третье число делится на d.
2. Если $a \vdots b$, то $ac \vdots bc$.
3. Если и $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
4. Если $ab \vdots$, то либо $a \vdots p$, либо $b \vdots p$.

Теорема. Всякое целое а представляется единственным способом с помощью целого $b \neq 0$ равенством вида a=bq+r , где q,r – целые, $0 \leq r < |b|$. Число q называется частным, r – остатком от деления а на b.

Пример 1. Может ли число делиться на 8, а при делении на 12 давать остаток 10?

Решение: Числа, делящиеся на 8, имеют вид 8k ,$k \in Z$, а при делении на 12 дающие в остатке 10, – вид $12l + 10,\ l \in Z$. Рассмотрим все остатки при делении на НОК(12,8)=24. Делятся на 8 числа вида 24m,24m+8 и 24m+16, ни одно из них при делении на 12 не дает в остатке 10 .

Пример 2: делится ли число вида $\overline{ababab}$ на 13?

Решение: число вида $\overline{ababab}$ очевидно делится на число $\overline{ab}$. после деления получаем $\overline{ababab} = ab \cdot 10101$, а число 10101 делится на 13.

Пример 3. Даны два трехзначных числа, сумма которых делится на 37. Эти числа записаны друг за другом. Верно ли, что полученное шестизначное число обязательно делится на 37?

Решение: обозначим данные трехзначные числа через a и b, тогда их сумма a+b делится на 37. Шестизначное число принимает вид 1000a+ b. Преобразуем его, выделяя слагаемое a+b: 1000a+b=999a+(a+b). У полученной суммы не только второе, но и первое слагаемое делится на 37, так как 999a делится на 111, а 111 делится на 37. Поэтому и вся сумма делится на 37.

Пример 4. Докажите, что при любом нечетном «а» разность a^2-1 делится на 8

Решение: так как a^2-1=(a+1)(a-1) и число a+1 и a-1 при нечетном «а» четны, то разность a^2-1 делится на 4. Положим, a=2k+1, где k-целое число и преобразуем разность: a^2-1=$(2k+1)^2$-1=4 k^2+4 k=4 k(k+1). Из двух последовательных чисел k и k+1 одно является четным, поэтому полученное произведение делится на 8.

Пример 5. Найдите остаток от деления 2^{100} на 9.

Решение: С помощью перебора устанавливаем, что остатки от деления числа 2^n (n>3) на 9 равны 7,5,1,2,4,8,7,5,1,2,4,8,7,5,1, 2, …: наметившаяся закономерность сохраняется и дальше. Остатки периодически повторяются через каждые 6 чисел разделим 100 на 6 с остатком: 100=6*16+4. Следовательно, число 2^{100} при делении на 9 дает остаток 7.

Задачи

7.1 Докажите, что десятизначное число, все цифры которого одинаковы, делится на 41.

7.2 Найдите натуральное число n, если n-1 делится на 47, а 1001 делится на n+1. Укажите все решения.

7.3 Трехзначное число $\overline{abc}$ делится на 37. Докажите, что их сумма $\overline{bca} + \overline{cab}$ делится на 37.

7.4 Число $a + \frac{1}{a}$ – целое. Докажите, что и числа $a^2 + \frac{1}{a^2}$; $a^3 + \frac{1}{a^3}$ также являются целыми.

7.5 В классе 27 учащихся. Может ли каждый из них дружить ровно с девятью одноклассниками?

7.6 Верно ли, что число $9a^5$-$5a^3$-4a при любом целом a делится на 120?

7.7 Найдите все целые n , при которых дробь $\frac{n-2}{n+1}$ принимает целые значения.

7.8 Число a-четное. Может ли остаток от деления числа a на 6 быть равным 1? 3?

7.9 Найдите остаток от деления числа 5^{1000} на 11.

7.10 Натуральное число n при делении на 6 дает остаток 4, а при делении на 15-остаток 7. Найдите остаток от деления n на 30.

Ответы:

7.1.	Это число делится на 11111.
7.2.	142. Надо перебрать все делители числа 1001.
7.3.	Составьте сумму $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ и преобразуйте ее.

7.4.	Число $a+\frac{1}{a}=k$, то $a^2+\frac{1}{a^2}=k^2-2, a^3+\frac{1}{a^3}=k^3-3k$.
7.5.	Нет. Пусть каждый из 27 учащихся дружит ровно с 9 одноклассниками, тогда количество дружащих пар равно $\frac{27\cdot 9}{2}$- не целое число.
7.6.	Верно.
7.7.	Выделим целую часть $\frac{n-2}{n+1}=\frac{(n+1)-3}{n+1}=1-\frac{3}{n+1}$. Переберем случаи так, чтобы дробь $\frac{3}{n+1}$ была целой. Это числа 2;0;-2;-4.
7.8.	нет.
7.9.	1.
7.10.	22.

8. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида

Теоретический материал

Алгоритм Евклида для нахождения НОД

Алгоритм Евклида является универсальным способом, позволяющим вычислять наибольший общий делитель двух положительных целых чисел. Для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел a и b (a и b – целые положительные числа, причем a ≥b) последовательно выполняется деление с остатком, которое дает ряд равенств вида

$$a=b\cdot q_1+r_1,\ 0<r_1<b$$

$$b=r_1\cdot q_2+r_2,\ 0<r_2<r_1$$

$$r_1=r_2\cdot q_3+r_3,\ 0<r_3<r_2$$

$$r_2=r_3\cdot q_4+r_4,\ 0<r_4<r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{k-2}=r_{k-1}\cdot q_k+r_k,\ 0<r_k<r_{k-1}$$

$$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_{4,} \ \ 0 < r_4 < r_3$$

$$r_{k-1} = r_k \cdot q_{k+1} 0 < r_4 < r_3$$

Деление заканчивается, когда $r_{k+1}=0$, при этом r_k=НОД(a, b).

Нахождение НОД с помощью разложения чисел на простые множители.

Наибольший общий делитель может быть найден по разложениям чисел на простые множители. Сформулируем правило: НОД двух целых положительных чисел a и b равен произведению всех общих простых множителей, находящихся в разложениях чисел a и b на простые множители.

Нахождение НОД трех и большего количества чисел

Наибольший общий делитель нескольких чисел a_1, a_2, …, a_k равен числу d_k, которое находится при последовательном вычислении НОД(a_1,a_2)=d_2, НОД(d_2, a_3)=d_3, НОД(d_3, a_4)=d_4, …, НОД(d_{k-1}, a_k)=d_k.

Нахождение наименьшего общего кратного.

1: Если составить произведение из всех простых множителей данных чисел, после чего из этого произведения исключить все общие простые множители, присутствующие в разложениях данных чисел, то полученное произведение будет равно наименьшему общему кратному данных чисел.

2: Существующая связь между НОК и НОД позволяет вычислять наименьшее общее кратное двух целых положительных чисел через известный наибольший общий делитель. Соответствующая формула имеет вид НОК(a, b)=a·b:НОД(a, b).

Наименьшее общее кратное трех и большего количества чисел: Пусть даны целые положительные числа a_1, a_2, …, a_k, наименьшее общее кратное m_k этих чисел находится при последовательном вычислении m_2=НОК(a_1, a_2), m_3=НОК(m_2, a_3), …, m_k=НОК(m_{k-1}, a_k).

Пример 1. Пусть нам известны разложения чисел 220 и 600 на простые множители, они имеют вид 220=2·2·5·11 и 600=2·2·2·3·5·5. Общими простыми множителями, участвующими в разложении чисел 220 и 600, являются 2, 2 и 5. Следовательно, НОД(220, 600)=2·2·5=20.

Пример 2. Чему равен НОД чисел 111 и 432?

Решение: Воспользуемся алгоритмом Евклида для нахождения НОД(432, 111). Разделив 432 на 111, получаем равенство $432=111\cdot3+99$. На следующем шаге делим 111 на 99, имеем $111=99\cdot1+12$. Деление 99 на 12 дает равенство $99=12\cdot8+3$. А 12 на 3 делится без остатка и $12=3\cdot4$. Поэтому это последний шаг алгоритма Евклида, и НОД(432, 111)=3, следовательно, и искомый наибольший общий делитель чисел 111 и 432 равен 3.

Пример 3. Найдите наибольший общий делитель четырех чисел 78, 294, 570 и 36.

Решение: $a_1=78$, $a_2=294$, $a_3=570$, $a_4=36$. Сначала по алгоритму Евклида определим наибольший общий делитель d_2 двух первых чисел 78 и 294. При делении получаем равенства $294=78\cdot3+60$; $78=60\cdot1+18$; $60=18\cdot3+6$ и $18=6\cdot3$. Таким образом, d_2=НОД(78, 294)=6. Теперь вычислим d_3=НОД(d_2, a_3)=НОД(6, 570). $570=6\cdot95$, следовательно, d_3=НОД(6, 570)=6.

Осталось вычислить d_4=НОД(d_3, a_4)=НОД(6, 36). Так как 36 делится на 6, то d_4=НОД(6, 36)=6. Таким образом, наибольший общий делитель четырех данных чисел равен $d_4=6$, то есть, НОД(78, 294, 570, 36)=6.

Пример 4. Разложив числа 441 и 700 на простые множители, найдите наименьшее общее кратное этих чисел.

Решение: Разложим числа 441 и 700 на простые множители. Получаем $441=3\cdot3\cdot7\cdot7$ и $700=2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7$. Теперь составим произведение из всех множителей, участвующих в разложениях данных чисел: $2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot7$. Исключим из этого произведения все множители, одновременно присутствующие в обоих разложениях (такой множитель только один – это число 7): $2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7$. Таким образом, НОК(441, 700)$=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7=44\,100$.

Пример 5: найдите все пары натуральных чисел, если их сумма равна 60, а наименьшее общее кратное – 72.

Решение: обозначим искомые числа через a и b. Число 72 делится на каждое из них. Поскольку $72=8\cdot9=2^3\cdot3^2$, то разложение чисел a и b на простые множители содержит только двойки и тройки. При этом разложение одного из чисел a и b число 2 входит в третьей степени, а в разложение другого – только во второй, так как сумма a+ b=60 делится на 4, но не делится на 8. По аналогичной причине число 3 в разложение одного из чисел a и b входит во второй степени, а другого – только в первой. Переберем все случаи.

1) Пусть a $=2^3 \cdot 3^2=72$, $b=2^2 \cdot 3=12$. Этот вариант не подходит, так как не выполняется равенство a+b=60.

2) Пусть a $=2^2 \cdot 3=12$, $b=2^3 \cdot 3^2=72$. Этот вариант тоже не подходит.

3) Пусть a $=2^3 \cdot 3=24$, $b=2^2 \cdot 3^2=36$. Условие a+b=60 выполняется.

4) Пусть a $=2^2 \cdot 3^2=36$, $b=2^3 \cdot 3=24$. Условие a+b=60 выполняется.

Ответ: 24 и 36.

Пример 6. Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{14}{25}$; $\frac{21}{40}$ получаются натуральные числа.

Решение: обозначим искомую дробь $\frac{a}{b}$, где a и -взаимно простые натуральные числа. Разделим ее на данные дроби: $\frac{a}{b}:\frac{14}{25}=\frac{25a}{14b}$, $\frac{a}{b}:\frac{21}{40}=\frac{40a}{21b}$. По условию полученные дроби равны натуральным числам, поэтому 25a делится на 14 b, а 40a делится на 21 b. Учитывая, что числа a и b взаимно просты ,получаем: a⋮ 14; 25⋮b; a⋮21; 40⋮ b. Отсюда число a является общим кратным чисел 14 и 21, а число b – общим делителем чисел 25 и 40. Поскольку искомая дробь должна быть наименьшей из всех возможных, ее числитель должен быть наименьшим, а знаменатель – наибольшим из всех возможных. Следовательно, a=НОК(14,21)=42; b =НОД(25,40)=5.

Задачи

8.1 Найти наибольший общий делитель чисел 121212 и 121212121212.

8.2 Найдите наименьшее общее кратное чисел 140; 9; 54; 250.

8.3 На гранях кубиков нужно написать буквы русского алфавита по одной на каждой грани. Какое наименьшее число кубиков нужно взять для того, чтобы все 33 буквы алфавита были написаны одинаковое количество раз и все грани кубиков были заполнены?

8.4 Найти все пары натуральных чисел, произведение которых равно 8400, а наибольший общий делитель – 20.

8.5 Найдите все пары натуральных чисел, разность которых равна 66, а НОК равно 360.

8.6 Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 54, а наименьшее общее кратное – 324.

8.7 Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{35}{66}$; $\frac{28}{165}$; $\frac{25}{231}$ получаются натуральные числа.

8.8 Докажите, что дробь $\frac{12a+1}{30a+2}$ несократима ни при каких натуральных а.

8.9 Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите НОД чисел: а) 248501 и 37961; б) 936504 и 59976.

8.10 Пользуясь алгоритмом Евклида, выясните, на какое число и при каких натуральных, а сократима дробь: $\frac{4a^3+7a^2+4a+3}{4a^2+7a}$.

Ответы:

8.1.	121212.
8.2.	94500.
8.3.	11.
8.4.	(420,20); (140,60).
8.5.	(15,4); (90,24).
8.6.	(54,324); (108,162).
8.7.	$\frac{700}{33}$.
8.8.	Положим НОД (12a+1, 30a+2)=d. Тогда $12a+1 \vdots d$, $30a+2 \vdots d$. умножим

	первое число на 5, второе на 2, получим 60a+5⋮ d, 60a+4⋮ d. Найдем разность чисел: 1⋮ d. d = 1. Следовательно, НОД(12a+1, 30a+2)=1.
8.9.	а) 319; б) 2142.
8.10.	на 3, при a=3k (k∈ N).

9. Разложение на множители выражений вида $x^a - y^a$ и $x^{2a+1} + y^{2a+1}$

Теоретический материал

Справедливы следующие тождества:

$x^a - y^a = (x - y)(x^{a-1} + x^{a-2}y + \cdots xy^{a-2} + y^{a-1})$; (1)

$x^{2a+1} + y^{2a+1} = (x + y)(x^{2a} - x^{2a-1}y + \cdots - xy^{2a-1} + y^{2a})$, где a∈ N. (2)

Пример 1. Докажите, что разность $26^n - 7^n$ при любом натуральном n делится на 19.

Решение: На основании тождества 1 получаем $26^n - 7^n = (26 - 7)A$, где A – выражение второго множителя, т.е. $26^n - 7^n = 19A$.

Пример 2. Делится ли разность $17^{15} - 3^{15}$ на 4?

Решение: разложим на множители: $17^{15} - 3^{15} = 14 \cdot (17^{14} + 17^{13} \cdot 3 + 17^{12} \cdot 33 + \cdots + 3^{14})$. В скобках стоят только нечетные слагаемые, количество которых равно 15. Следовательно, сумма нечетна. Ответ: не делится на 4.

Пример 3. Докажите, что сумма $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ при любом натуральном n делится на 25.

Решение: Преобразуем сумму: $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4 = 4 \cdot 2^n \cdot 3^n - 4 + 5n = 4(6^n - 1) + 5n = 5($

$\cdot (6^{n-1}+6^{n-2}+\dots+6+1)+n) = 5(4\cdot(6^{n-1}+6^{n-2}+\dots+6+1)+n) =$
$5(4\cdot 6^{n-1}+4\cdot 6^{n-2}+\dots+4\cdot 6+4-4n+5n) = 5(4(6^{n-1}-1)+4(6^{n-2}-1)+$
$\dots+4(6-1)+5n).$

Получилось, что каждое из слагаемых последней суммы делится на 5. Следовательно, все произведение делится на 5.

Задачи

9.1 Докажите, что разность 146^{15}-61^{15} делится на 17.

9.2 Докажите, что сумма 13^{49}+5^{49} делится на 18.

9.3 Докажите, что разность 5^{22}-18^{11} делится на 7.

9.4 Докажите, что при любом натуральном n 7^n -1 делится на 6.

9.5 Докажите, что при четном натуральном n 7^n-5^n делится на 24.

9.6 Докажите, что число 21^n+4^{n+2} при любом натуральном n делится на 17.

9.7 Докажите, что число $5^n+7\cdot 9^n$ при любом натуральном n делится на 4.

9.8 Найдите все натуральные n, при которых сумма 25^n+5^n+6 делится на 12.

9.9 Докажите, что число 7$\cdot$ $5^{2n}+12\cdot 6^n$ при любом натуральном n делится на 19.

9.10 Докажите, что число $5^{2n}+48^n-2^{n+1}$ при любом натуральном n делится на 23.

Ответы:

	После разложения на множители замечаем, что один из множителей 85 делится на 17.
	Аналогично, по тождеству (2) одним из множителей является число 18.
	Разность 5^{22}-18^{11}=$(5^2)^{11}$-18^{11}=25^{11}-18^{11}, далее рассуждаем как в 9.1.
	по формуле (1) разложим на множители.
	по формуле (1) разложим на множители, при n=2k.
	$21^n+4^{n+2} = (21^n+4^n)-17\cdot 4^n$.
	$5^n+7\cdot 9^n = 8\cdot 9^n-(9^n-5^n)$.

	все нечетные n.
	$7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^{n} = 7(25^{n} - 6^{n}) + 19 \cdot 6^{n}$.
9	$5^{2n} + 48^{n} - 2^{n+1} = 25^{n} + 48^{n} - 2 \cdot 2^{n} = 25^{n} + 48^{n} - 2^{n} - 2^{n} = 25^{n} - 2^{n} + 48^{n} - 2^{n}$. далее разложить по формуле 1.

10. Признаки делимости

Теоретический материал

Признак делимости на 2.

Число, делящееся на 2, называется четным, не делящееся – нечетным. Число делится на два, если его последняя цифра четная или нуль. В остальных случаях – не делится.

Признак делимости на 4.

Число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 4. В остальных случаях – не делится.

Признак делимости на 8

Признак делимости на 8 подобен предыдущему. Число делится на 8, если три последние цифры его нули или образуют число, делящееся на 8. В остальных случаях – не делится.

Признаки делимости на 3 и на 9.

На 3 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 3; на 9 – только те, у которых сумма цифр делится на 9.

Признак делимости на 6.

Число делится на 6, если оно делится одновременно на 2 и на 3. В противном случае - не делится.

На 5 делятся числа, последняя цифра которых 0 или 5. Другие – не делятся.

Признак делимости на 25.

На 25 делятся числа, две последние цифры которых нули или образуют число, делящееся на 25 (т. е. числа, оканчивающиеся на 00, 25, 50 или 75). Другие не делятся.

<u>Признаки делимости на 10, 100 и 1000.</u>

На 10 делятся только те числа, последняя цифра которых нуль, на 100 - только те числа, у которых две последние цифры нули, на 1000 - только те, у которых три последние цифры нули.

<u>Признак делимости на 11.</u>

На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо разнится от нее на число, делящееся на 11.

Пример 1. Найдите все значения цифры а, если число $\overline{875a}$ делится на 6.

Решение: так как это число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3 и обратно. Применяя признак делимости на 3, найдем сумму цифр числа: 20+а и найдем возможные значения а: 1, 4 или 7. По признаку делимости на 2 подходит а=4.

Пример 2: найдите все значения цифр а и b, при которых число $\overline{53ab213}$ делится на 99.

Решение: по условию это число делится на 9 и на 11. Применим признак делимости на 9: (14+a+ b)$\vdots\, 9$, 9+ (5+a+ b)$\vdots\, 9$, (5+a+ b)$\vdots\, 9$. Отсюда a+ b=4, или a+ b=13. Используем признак делимости на 11: (5-3+a- b+2-1+3)$\vdots\, 11$, (6+a- b)$\vdots\, 11$. Отсюда a-b=5 или a-b=-6. Зная, что сумма и разность двух целых чисел имеют одинаковую четность, рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=-6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a+b=13 \\ a-b=5. \end{cases}$ Решая эти системы получаем a-9, b=4.

Пример 3. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на 18.

Решение: обозначим искомое число через $\overline{aaa\ldots a}$(n цифр). Так как оно делится на 18, а следовательно, и на 2, и на 9, то сумма цифр na⁝ 9 и четна. 1) пусть na=18. Минимально возможное значение n=3, откуда a=6. 2) пусть na=36, или 54, или 72 и т.д. если n=3, то a соответственно равно 12, 24 и т.д., а это невозможно. Значит, a=6. Искомое число 666.

Задачи

9.1 В числе 4758967* напишите последнюю цифру так, чтобы число делилось на 2;5;3;9;4;25;11.

9.2 Найдите цифру, обозначенную звездочкой в числе 41875*, если это число делится на 18.

9.3 К числу 41 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 36. Найти все решения.

9.4 Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается только цифрами 0 и 1 и делится на 225.

9.5 Найдите цифру a ,если число $\overline{49a68}$ делится на 8. Укажите все решения.

9.6 Докажите, что число 49^{100}-14^{50} кратно 5.

9.7 Найдите все значения цифр x и y, при которых число $\overline{84x5y}$ делится на 198.

9.8 Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на 693.

9.9 Использовав цифры от 1 до 9 по одному разу, составьте наименьшее девятизначное число, делящееся на 11.

9.10 Может ли сумма цифр квадрата целого числа равняться 1991?

Ответы:

10.1.	по признакам делимости.
10.2.	2.
10.3.	2412 или 7416.
10.4.	11111111100.
10.5.	1,3,5,7 или 9.

10.6.	49^{100} оканчивается на1, 14^{50} оканчивается на 5.
10.7.	x=1, y=0.
10.8.	333333.
10.9.	123475869.
10.10.	Нет. Пусть существует такое а, что a^2=1991. Тогда a^2 не кратно 3, значит не кратно 3, то есть а=3к±1. Тогда $a^2=9к^2±6к+1=3р+1$, т.е. число a^2, следовательно, и сумма цифр числа a^2 при делении на 3 дает остаток 1.пришли к противоречию, так как 1991 при делении на 3 дает остаток 2.

11. Метод математической индукции

Теоретический материал

Математическая индукция – метод доказательства некоторого утверждения для любого натурального n, основанный на принципе математической индукции: «Если утверждение верно для n=1 и из справедливости его для n=k вытекает справедливость этого утверждения для n=k+1, то оно верно для всех n». Способ доказательства методом математической индукции заключается в следующем:

1) база индукции: доказывают или непосредственно проверяют справедливость утверждения для n=1 (иногда n=0 или $n=n_0$);

2) индукционный шаг (переход): предполагают справедливость утверждения для некоторого натурального n=k и, исходя из этого предположения, доказывают справедливость утверждения для n=k+1.

Пример 1: Доказать , что для любого $n \in N$ число $3^{2n+1}+2^{n+2}$ делится на 7.

Решение: Проведём доказательство методом математической индукции.

Обозначим $A(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$.

База индукции. Если n=1, то $A(1)=3^3+2^3=35$ и, очевидно, делится на 7.

Предположение индукции. Пусть A(k) делится на 7.

Индукционный переход. Докажем, что A(k+1) делится на 7, то есть справедливость утверждения задачи при n=k.

$A(k+1)=3^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+2}=3^{2k+1}\cdot 3^2+2^{k+2}\cdot 2^1=3^{2k+1}\cdot 9+2^{k+2}\cdot 2=$
$3^{2k+1}\cdot 9+2^{k+2}(9–7)=(3^{2k+1}+2^{k+2})\cdot 9–7\cdot 2^{k+2}=9\cdot A(k)–7\cdot 2^{k+2}$.

Последнее число делится на 7, так как представляет собой разность двух целых чисел, делящихся на 7. Следовательно, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ делится на 7 при любом натуральном n.

Пример 2. Доказать, что для любого $n \in N$ $n(2n^2 - 3n + 1)$ делится на 6.

Решение. P(1) – истинное утверждение (0 делится на 6). Пусть P(n) справедливо, то есть $n(2n^2 - 3n + 1) = n(n - 1)(2n - 1)$ делится на 6. Покажем, что тогда имеет место P(n + 1), то есть, $(n + 1)n(2n + 1)$ делится на 6. Действительно, поскольку $n(n + 1)(2n + 1) = n(n - 1 + 2)(2n - 1 + 2) = (n(n - 1) + 2n)(2n - 1 + 2) = n(n - 1)(2n - 1) + 2n(n - 1) + 2n(2n + 1) = n(n - 1)(2n - 1) + 2n\cdot 3n = = n(n - 1)(2n - 1) + 6n^2$ и, как $n(n - 1)(2n - 1)$, так и $6n^2$ делятся на 6, тогда и их сумма $n(n + 1)(2n + 1)$ делится 6.

Таким образом, P(n + 1) - справедливое утверждение, и, следовательно, $n(2n^2 - 3n + 1)$ делится на 6 для любого $n \in N$.

Задачи

11.1. Докажите, что для любого $n \in N$ 13^n+5 делится на 6.

11.2. Докажите, что для любого $n \in N$ $n^3+9n^2+26n+24$ делится на 6.

11.3. Докажите, что для любого $n \in N$ $7^{2n}-1$ делится на 24.

11.4. Докажите, что для любого $n \in N$ 7^n+9 делится на 8, если n-нечетное.

11.5. Докажите, что для любого $n \in N$ $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11.

11.6. Докажите, что сумма первых n чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

11.7. Докажите, что сумма квадратов n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

11.8. Докажите, что сумма кубов n первых натуральных чисел равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

11.9. Докажите, что для любого n ∈ N выполняется равенство $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \cdots + n(2n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$.

11.10. Докажите, что для любого n ∈ N выполняется равенство $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$.

Ответы:

11.1 Проверим P(1): 60 + 32 + 30 = 11, следовательно, P(1) - справедливое утверждение. Следует доказать, что если $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11 (P(n)), тогда и $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^{n}$ также делится на 11 (P(n + 1)). Действительно, поскольку $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^{n} = 6^{2n-2+2} + 3^{n+1+1} + 3^{n-1+1} = 6^{2}\cdot 6^{2n-2} + 3\cdot 3^{n+1} + 3\cdot 3^{n-1} = 3\cdot(6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) + 33\cdot 6^{2n-2}$ и, как $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$, так и $33\cdot 6^{2n-2}$ делятся на 11, тогда и их сумма $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^{n}$ делится на 11. Утверждение доказано.

11.6. Обозначим искомую сумму S_n, т.е. $S_n=1+2+3+\ldots+n$. При n=1 утверждение справедливо. Пусть $S_k = 1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$. Покажем, что $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. В самом деле

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

12. Действия с корнями

Теоретический материал

<u>Арифметическим значением корня или арифметическим корнем степени n</u> ($n \geq 2$; $n \in N$) из положительного числа a называется положительное значение корня. Корень из нуля, равный нулю, также будет называться арифметическим корнем, т. е. $\sqrt[n]{a} = b$ есть арифметический корень, где $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $b^n = a$.

Множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно извлечения арифметического корня, а результат этого действия однозначен. Это значит, что для любого неотрицательного числа a и натурального числа n (n > 1) всегда найдется, и притом только одно, такое неотрицательное число b, что $b^n = a$.

1. Свойства арифметического корня ($n \in N, m \in N, n \geq 2, m \geq 2$).

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b \geq 0;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},\ a \geq 0;$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \qquad a \geq 0.$$

1. Для любого $a \in R$ справедливо равенство $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$ и в частности, $\sqrt{a^2} = |a|$.
2. Если $a < 0$, то $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$.
3. Формула «сложного радикала». Если $a \geq 0, a^2 - b \geq 0$, то

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

4. Сопряженные дроби.

$$\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{A(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}, \text{где } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b.$$

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{A\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt{ab} + \sqrt[3]{b}\right)}{a \pm b}, \text{где } a \in R, b \in R, a \neq b, a + b \neq 0.$$

Пример 1. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$. обозначим $\sqrt[3]{2} = a$. тогда получим $\frac{1}{1+a+a^2} = \frac{1}{a^2+(1+a+a^2)}$. умножая числитель и знаменатель на $a - 1$ и применяя формулу разности кубов, получим $\frac{a-1}{a^2(a-1)+a^3-1} = \frac{a-1}{3-a^2} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{3-\sqrt[3]{4}}$.

Снова применим формулу разности кубов: $\frac{(\sqrt[3]{2}-1)(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{23} = \frac{7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-3}{23}$.

Пример 2.: Вычислите: $\left(2-\sqrt{5}\right)\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

Решение: Представим выражение в виде

$$(2-\sqrt{5})\sqrt{9+4\sqrt{5}}=(2-\sqrt{5})\sqrt{(2+\sqrt{5}.)^2}=(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=-1$$

Пример 3. Упростите выражение: $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Решение: умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}$. Получим $\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$. Так как $4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$,

$4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$, то имеем $\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}+\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}==$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)+(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{2}$$

Задачи

12.1. Вычислите: а) $\sqrt{1\frac{7}{18}\cdot 4{,}5}$; б) $\frac{\sqrt{27\cdot 5}}{\sqrt{3}}$;

12.2. Расположите в порядке возрастания: $\sqrt[16]{64}$; $\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}$; $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$.

12.3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: а) $\frac{15}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$ в) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$..

12.4. Вычислите: а) $\sqrt{77\cdot 24\cdot 33\cdot 14}$; б) $\sqrt{10\cdot 20\cdot 48\cdot 36\cdot 75\cdot 98}$.

12.5. Выполните действие: а) $(8\sqrt{18}+6\sqrt{24}-\sqrt{72}):2\sqrt{6}$;

б) $(2\sqrt{3{,}5})^2-\sqrt{3}\cdot\sqrt{0{,}27}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$.

12.6. Выполните действия: а) $\sqrt{32-10\sqrt{7}}\cdot(\sqrt{7}+5)$;

б) $(9-\sqrt{83})\cdot\sqrt{18\sqrt{83}+164}$.

12.7. Вычислите:

а) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt{12\sqrt{3}-21}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}$

12.8. Упростите: а) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; б) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$

12.9. Вычислите: $\frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1}-\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$

12.10. Вычислите: $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Ответы:

12.1.	а) 2,5; б) 15.
12.2.	$\sqrt[4]{2\sqrt{1,25}}$; $\sqrt[16]{64}$; $\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}$.
12.3.	$5\sqrt{3}$; б) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\left(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4\right)$.
12.4.	а) 924; б) 50400.
12.5.	а) $3\sqrt{3}+6$; б) 13,6.
12.6.	а) 18; б) -2.
12.7.	а) $-2\sqrt{2}$; б) -6.
12.8.	а) $\sqrt{5}-2$; б) 6.
12.9.	0
12.10.	3.

13. Степень с рациональным показателем и его свойства

Теоретический материал

<u>Степень с рациональным показателем</u> определяется равенством $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, где $a>0, n\in N, m\in Z$.

Свойства степени с рациональным показателем p,q - рациональные числа, $a > 0, b > 0$).

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$a^p : a^q = a^{p-q}$

$(a^p)^q = a^{pq}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Пример 1. Вычислите: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

Решение: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^2 \cdot 5^3)^{\frac{1}{5}} = 5$

Пример 2. Вычислите: $(0{,}5)^{-4} + 16^{0{,}5} - (0{,}0625)^{-0{,}75} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-0{,}5}$.

Решение:

$(0{,}5)^{-4} + 16^{0{,}5} - (0{,}0625)^{-0{,}75} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-0{,}5} =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + (2^4)^{0{,}5} - (2^{-4})^{-0{,}75} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-0{,}5} = 2^4 + 2^2 - 2^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = 16 + 4 - 8 \cdot \frac{3}{2} =$
8

Пример 3. Вычислите: $\frac{15^4 \cdot 25^2}{9^2 \cdot 5^7}$.

Решение: $\frac{15^4 \cdot 25^2}{9^2 \cdot 5^7} = \frac{(3 \cdot 5)^4 \cdot 5^4}{3^4 \cdot 5^7} = \frac{3^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4}{3^4 \cdot 5^7} = \frac{5^8}{5^7} = 5$.

Задачи

13.1. Вычислите: а) $(0{,}2)^9 \cdot 5^9$; б) $(-0{,}25)^{13} \cdot 4^{13}$..

13.2. Вычислите: а) $\frac{(7^2)^3 \cdot (3^3)^2}{21^5}$; б) $\frac{7^2 \cdot 49 \cdot 8}{7^3 \cdot 2^2}$.

13.3. Запишите в виде степени числа 0,027; 0,0001; 0,008; 0,25; $\frac{1}{144}$; $\frac{125}{27}$.

13.4. Вычислите: а) $\frac{(-5^3)^{-2}\cdot(3^2)^{-3}}{(-15)^{-5}}$; б) $\frac{-28^{-7}}{(-7^2)^{-3}\cdot(-4^{-2})^4}$.

13.5. Вычислите: $81^{0,75}\cdot 32^{-0.4}-8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}+256^{0,5}$.

13.6. Вычислите: $(0{,}008)^{-\frac{1}{3}}\cdot 125^{\frac{2}{3}}-\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0{,}25)^{-1}\cdot(0{,}75)^{-2}$.

13.7. Докажите, что число $\left(4^{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)$ рациональное.

13.8. Выясните, является ли рациональным число $\frac{\sqrt[4]{27\cdot\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[6]{9\cdot 3^3\cdot\sqrt{3}}}$.

13.9. Определите знак числа $\frac{(2{,}2016)^{0,2}-1}{1-(2{,}2016)^{-0,2}}$.

13.10. Докажите, что число $a=2015^{2016}-2015^{2014}$ делится на число $b=\frac{(-3)^{-3}}{(19)^{-1}}+(0{,}5)^{-4}-625^{0,25}-(2{,}25)^{-1,5}$.

Ответы:

13.1.	а) 1; б) -1.
13.2.	а) 21; б) 14.
13.3.	$(0{,}3)^3$; 10^{-4}; $(0{,}2)^3$; $(0{,}5)^2$; $\left(\frac{1}{12}\right)^2$; $\left(\frac{5}{3}\right)^3$.
13.4.	а) $-\frac{1}{15}$; б) $\frac{4}{7}$.
13.5.	22.
13.6.	121.
13.7.	$\frac{31}{16}$.
13.8.	1
13.9.	отрицательное
13.10.	b=10. Число a оканчивается на 0.

Приложение 4

Технологическая карта урока обобщения и систематизации знаний по теме

Таблица 4

Преобразование иррациональных выражений

Этапы обобщения	Цель обучения	Этапы урока (решение образца + самостоятельная работа в малых группах)	Учебные действия
Первичное	Готовность к самостоятельному поиску новых знаний	*Образец:* Упростить выражение $\sqrt{15+\sqrt{11}+\sqrt{20-6\sqrt{11}}}$	Определяют трудность задачи. Делают вывод: Нужно искать способы решения данной задачи
Понятийное	Формирование исследовательской деятельности, установление связей между изученными материалами. Исследовательская деятельность.	Постановка вопроса: вспомним формулы сокращенного умножения (Устный опрос) разминка: вычислить $31^2=(30+1)^2=30^2+2\cdot30\cdot1+1^2\ =900+60+1=961$.	Исследование задачи. Разные пути вычисления
Межпонятийное	Обеспечение закрепления в памяти детей знаний и способов действий, которые им необходимы для углубления материала	Предложение решить задачу: Представить в виде квадрата суммы двух чисел выражение: $20-6\sqrt{11}$. Решение: $20-6\sqrt{11}=3^2-2*3*\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2=\left(\sqrt{11}-3\right)^2$	В парах, группах, индивидуально обсуждают и разбирают варианты решения

Тематическое	Обеспечение переноса обобщенных знаний в видоизмененное условие	А теперь вернемся к первоначальной задаче упростить выражение $\sqrt{15+\sqrt{11}+\sqrt{20-6\sqrt{11}}}$. Решение: $\sqrt{15+\sqrt{11}+\sqrt{20-6\sqrt{11}}}=\sqrt{15+\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}-3\right)^2}=\sqrt{15+\sqrt{1}}$ $=\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2+2\sqrt{11}+1}=\sqrt{11}+1$	В парах, группах, индивидуально обсуждают и разбирают способы решения. Демонстрируют решения на доске
Итоговое	Проверка овладения основными теориями, коррекция	Составьте математическую модель числового выражения, которую можно упростить аналогичным способом. Решение: $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$ При $a \geq 3$.	Составление математической модели решения задачи