

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.А. БУНИНА»**

**О.Н. Масина, А.А. Петров,  
О.В. Дружинина, Л.Б. Рапопорт**

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ**

**Учебное пособие**

Елец – 2020

УДК 51  
ББК 32.97  
**М 74**

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина  
от 28.01.2020, протокол №1

Рецензенты:

З.Л. Шулиманова, доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры «Высшая математика и естественные науки»  
(Российский университет транспорта (МИИТ));

В.Е. Щербатых, кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры математики и методики ее преподавания  
(Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина)

**Масина О.Н., Петров А.А., Дружинина О.В., Рапопорт Л.Б.**

**М 74** Моделирование и стабилизация нелинейных управляемых систем: учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2020. – 117 с.  
**ISBN 978-5-00151-136-6**

Пособие посвящено вопросам моделирования и стабилизации нелинейных управляемых систем. Приведен обзор основных понятий и фактов теории оптимального управления. Представлены интеллектуальные методы программного управления. Охарактеризованы особенности синтеза моделей технических систем оптимального управления с учетом переключений. Рассмотрены вопросы моделирования и оптимизации управляемых систем на основе методов глобальной параметрической оптимизации и нейросетевых алгоритмов, а также вопросы оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем. Изложены теоретические основы и ряд приложений метода стабилизации, который базируется на использовании линеаризации обратной связью для синтеза стабилизирующих управлений. Рассмотрены приложения в областях системного анализа, управления и стабилизации динамических систем механики и техники. Содержатся задачи и упражнения, связанные с темами параграфов.

Пособие предназначено для обучающихся в высших учебных заведениях студентов физико-математических и технических направлений подготовки, а также для самостоятельной работы студентов-заочников различных специальностей. Пособие может быть использовано аспирантами соответствующих направлений обучения.

УДК 51  
ББК 32.97

**ISBN 978-5-00151-136-6**

© Елецкий государственный  
университет им. И.А. Бунина, 2020

## Содержание

Введение .....	5
§ 1. Необходимые сведения из теории управления .....	7
1.1. Управляемые системы .....	7
1.2. Понятие оптимального управления. Критерий качества управления .	11
1.3. Основные вопросы теории оптимального управления .....	13
1.4. Системы с переключениями .....	16
1.5. Интеллектуальные методы программного управления .....	22
§ 2. Синтез моделей технических систем оптимального управления с учетом переключений .....	29
2.1. Синтез модели динамики летательного аппарата .....	29
2.2. Трехмерная модель с увеличивающейся частотой переключений ...	34
2.3. Модель с аэродинамическим сопротивлением .....	42
2.4. Обобщенная модель .....	45
§ 3. Моделирование и оптимизация управляемых систем на основе методов глобальной параметрической оптимизации и нейросетевых алгоритмов .....	50
3.1. Численные алгоритмы оптимизации в задачах моделирования технических систем .....	50
3.2. Построение и анализ линейной модели с переключениями при наличии нестационарных режимов .....	59
§ 4. Оптимальная стабилизация многосвязных управляемых систем .....	69
4.1. Задачи оптимальной стабилизации .....	69
4.2. Оптимальная стабилизация многосвязной системы на основе применения двухуровневой схемы и свойств векторных функций Ляпунова .....	73
4.3. Оптимальная стабилизация с учетом однородных функций в правых частях многосвязных систем .....	77
§ 5. Использование линеаризации обратной связью для синтеза стабилизирующих управлений .....	81
5.1. Идея метода на примере управления колесным роботом .....	81
5.2. Формальное изложение метода .....	83
5.3. Стабилизация верхнего положения перевернутого маятника на тележке .....	90
5.4. Приведение модели движения колесного робота к нормальному виду .....	95

5.5. Стабилизация ориентации квадрокоптера .....	97
§ 6. Задачи и упражнения .....	105
Список литературы .....	109

## **ВВЕДЕНИЕ**

Настоящее пособие посвящено вопросам моделирования и стабилизации нелинейных управляемых систем. Пособие состоит из 6 параграфов.

В §1 «Необходимые сведения из теории управления» рассмотрен ряд основных понятий и фактов теории оптимального управления. Охарактеризованы модели систем с переключениями. Представлены интеллектуальные методы программного управления.

В §2 «Синтез моделей технических систем оптимального управления с учетом переключений» рассмотрены вопросы построения моделей с переключениями, в частности, модели движения летательного аппарата. Изучены трехмерная модель с увеличивающейся частотой переключений, модель с аэродинамическим сопротивлением, а также обобщенная модель.

В §3 «Моделирование и оптимизация управляемых систем на основе методов глобальной параметрической оптимизации и нейросетевых алгоритмов» рассмотрено построение нейросетевого аппроксиматора. Приведены разработанные алгоритмы оптимизации в задачах моделирования технических систем. Рассмотрены вопросы построения и анализа модели управляемой системы с переключениями при наличии линейных нестационарных режимов.

В §4 «Оптимальная стабилизация многосвязных управляемых систем» приведен ряд постановок задач оптимальной стабилизации. Изучены условия оптимальной стабилизации многосвязной системы на основе применения двухуровневой схемы и свойств векторных функций Ляпунова, а также оптимальной стабилизации с учетом однородных функций в правых частях многосвязных систем.

В §5 «Использование линеаризации обратной связью для синтеза стабилизирующих управлений» изложена идея метода на примере управления колесным роботом. Приведено формальное изложение метода. Рассмотрена стабилизация верхнего положения перевернутого маятника на тележке. Кроме

того, рассмотрено приведение модели движения колесного робота к нормальному виду. Изучена стабилизация ориентации квадрокоптера.

В §6 «Задачи и упражнения» содержатся задачи и упражнения, связанные с темами параграфов.

После текста параграфов в пособии приведен список литературы. В тексте пособия содержатся ссылки на использованные источники.

Параграфы 1–3 подготовлены А.А. Петровым, О.Н. Масиной и О.В. Дружининой совместно, §4 – О.В. Дружининой, §5 – Л.Б. Рапопортом, §6 – авторами совместно.

Пособие предназначено для обучающихся в высших учебных заведениях студентов физико-математических и технических направлений подготовки, а также для самостоятельной работы студентов-заочников различных специальностей. Пособие может быть использовано аспирантами соответствующих направлений обучения.

## § 1. Необходимые сведения из теории управления

**1.1. Управляемые системы.** Одной из важнейших задач моделирования является описание динамики некоторых объектов и процессов на основе данных о начальном состоянии. Указанная задача заключается в нахождении закономерностей, на основе которых из знания начальных данных об объекте можно получать информацию о его характеристиках в любой момент времени  $t > t_0$ . Модель динамической системы можно записать в виде

$$x(t) = E_t x(t_0), \quad (1.1)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $t_0$  – начальный момент времени,  $E_i$  – оператор эволюции, применение которого к начальному состоянию дает состояние объекта или процесса в любой момент времени  $t$ .

В теории оптимального управления зависимость (1) часто сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad \frac{dx}{dt} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T, \\ f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t), \dots, f_n(x, t))^T, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $f(x, t)$  – непрерывная вектор-функция на области  $G \subset R^{n+1}$ . Решением векторного дифференциального уравнения (2) называют такую дифференцируемую функцию  $x(t)$ ,  $t \in T \subset R$ , которая при подстановке в уравнение (2) обращает его в тождество на  $T$ . График функции  $x(t)$  называется интегральной кривой.

Задачу поиска решения  $x = x(t)$  уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям  $x(t_0) = x_0$ ,  $(x_0, t_0) \in G$ , называют задачей Коши. Геометрически задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой уравнения (2), проходящей через заданную точку  $K$ . При этом возможны следующие три случая: 1) через точку  $K$  проходит единственная интегральная кривая; 2) через точку  $K$  проходит по крайней мере две интегральные кривые; 3) через точку  $K$  не проходит ни одной интегральной кривой.

Решение задачи Коши подразумевает, что необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение (2). Возможность и способ интегрирования зависят от конкретного вида правой части уравнения (2), т.е. от функции  $f(t, x)$ . В стандартном курсе дифференциальных уравнений изучаются способы интегрирования следующих классов дифференциальных уравнений: уравнения с разделяющимися переменными, линейные автономные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, однородные уравнения.

Однако многие типы дифференциальных уравнений, используемых в практике математического моделирования различных процессов и систем, аналитически не интегрируются. В этих случаях решение задачи Коши и других задач, связанных с построением интегральных кривых, может потребовать использования численных методов интегрирования. Во многих случаях удастся выполнить качественное исследование систем, без явного вида решения дифференциального уравнения, на основе понятий и фактов теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений [1, 2, 18, 22, 47, 76].

Кроме того, задачи оптимального управления связаны с понятием функционала. Рассмотрим все возможные функции аргумента  $x$ , определенные на некотором промежутке. Как известно, функции можно складывать и умножать на числа. Суммой двух функций  $f$  и  $g$  называется такая функция  $h$ , заданная на том же самом промежутке, значения которой вычисляются по правилу  $h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$  для всех  $x$  из данного промежутка. Для того чтобы функцию  $f$  умножить на число  $\lambda$ , следует все ее значения умножить на это число, т.е.  $(h\lambda)(x) = \lambda f(x)$  для всех  $x$ . Множество функций с указанными операциями сложения и умножения на число образует так называемое линейное пространство функций (или функциональное пространство).

Рассмотрим все возможные непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции. Сумма двух непрерывных функций является непрерывной функцией и при умножении непрерывной функции на число результатом вновь оказывается непрерывная функция. Следовательно, множество непрерывных функций также образует



линейное пространство. Его называют пространством непрерывных функций и обозначают  $C_{[a,b]}$ .

Аналогично можно говорить о пространстве дифференцируемых, непрерывно дифференцируемых (т.е. таких функций, которые непрерывны вместе со своими производными), бесконечно дифференцируемых и т.п. функций. На функциональных пространствах, как на множествах, можно задавать отображения. Такие отображения играют существенную роль в функциональном анализе и смежных областях.

**Определение 1.1.** Пусть в некотором функциональном пространстве  $\mathfrak{R}$  зафиксировано подмножество  $X \subset \mathfrak{R}$ . Отображение  $I : X \rightarrow R$ , ставящее в соответствие каждой функции  $f \in X$  определенное число  $I(f)$ , называют *функционалом*.

Нетрудно заметить, что в качестве простейшего примера функционала можно привести определенный интеграл от некоторой функции  $f(x)$ .

Решение задач оптимального управления связано с нахождением экстремальных значений функционалов, которые задают критерии качества управления и определяются условиями задачи.

Далее приведем определение управляемой системы.

**Определение 1.2** [21]. Система  $S$  называется управляемой на отрезке  $[t_0, t_1]$ , если ее поведение при  $t > t_0$  зависит только от начального состояния ( $t = t_0$ ,  $x_0 = x(t_0)$ ), будущего поведения некоторого переменного вектора  $u$  (входа системы)

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T, m \geq 1,$$

называемого управляющим вектором (или просто управлением)  $u$ , и постоянно-го вектора  $p$ :

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_r)^T, r \geq 0,$$

называемого вектором проектных параметров.

Вектор  $u$  принимает значение из некоторого множества  $U^m$   $m$ -мерного пространства  $R^m$  с координатами  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . Это множество может быть всем

пространством  $R^m$  или его частью  $U^m \subset R^m$ . Отметим, что  $U^m$  чаще всего является компактным множеством пространства  $R^m$ .

Множество  $U^m$  называется множеством допустимых значений управления. Вектор  $p$  проектных параметров обычно принадлежит некоторому замкнутому множеству  $P^r \subset R^r$ .

Изменение состояния (эволюция) системы  $S$  на временном интервале  $T = \{t, t_0 \leq t \leq t_1\}$  часто может быть задано системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, p). \quad (1.3)$$

Можно заметить, что по сравнению с уравнением (2) в уравнении (3) фигурируют управляющие вектор-функции  $u, p$ .

В математической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений, формальным признаком переменной состояния  $x$  является наличие ее производной  $\frac{dx}{dt}$  в левой части системы (3). Управляющая переменная  $u$  входит только в правую часть системы (3) и не встречается под знаком производной (это формальный признак управляющей переменной).

Предполагается, что вектор-функция  $f(t, x, u, p)$  определена для любых значений  $x \in X^n$ ,  $u \in U^m$ ,  $p \in P^r$ ,  $t \in T$ , непрерывна по совокупности переменных  $t, x, u, p$  и непрерывно дифференцируема по  $x, p$ . Отметим, что гладкость является достаточно жестким требованием и в ряде случаев может быть заменена требованием измеримости и ограниченности. Так как поведение вектора  $u$  может быть произвольным (за исключением условия  $u \in U^m$ ) и, кроме того, можно произвольно выбрать постоянный вектор  $p \in P^r$ , то система уравнений (3) определяет управляемый процесс. Ход управляемого процесса будет определен на некотором интервале  $t_0 \leq t \leq t_1$ , если на этом интервале вектор  $u$  задан в одной из двух форм:

$$u = u(t), \quad (1.4)$$

$$u = v(x, t). \quad (1.5)$$

Вектор-функцию  $u(t)$  в (4) называют программным управлением, а вектор-функцию  $v(x, t)$  в (5) – координатным управлением. Закон управления (5) физически выражает принцип обратной связи, согласно которому величина управляющего воздействия определяется на основании измерения текущего состояния системы  $x$  и, быть может, момента времени  $t$ .

Каждому выбору векторов управляющих параметров  $p$  и управления  $u$  (вида (4), (5)) и каждому начальному состоянию  $(t_0, x_0)$  соответствует по (3) временная последовательность состояний  $x(t, x_0, t_0)$ , которая называется фазовой траекторией (поведением, эволюцией, движением) системы  $S$ . Пара вектор-функций  $\{u(t), x(t)\}$  или  $\{v(x, t), x(t)\}$  называется процессом управления или режимом.

## **1.2. Понятие оптимального управления. Критерий качества управления.**

Предположим, что для (3) задан начальный момент времени  $t_0$  и множество  $M_0$  допустимых начальных состояний объекта.

Будем считать, что желательно управлять объектом так, чтобы в какой-то конечный момент времени  $t_1$  объект перешел на некоторое множество  $M_1$  допустимых конечных состояний. Будем считать, что допустимое управление  $u(t)$  переводит объект из множества начальных состояний  $M_0$  на множество конечных состояний  $M_1$  на отрезке времени  $[t_0, t_1]$ , если соответствующее этому управлению  $u(t)$  фазовое состояние объекта  $x(t)$  удовлетворяет условиям

$$x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1. \quad (1.6)$$

Заметим, что конечный момент времени  $t_1$  может быть не фиксированным, а определяться из условия попадания вектора  $x(t)$  на конечное множество  $M_1$ . Итак, предположим, что допустимые множества  $M_0$  и  $M_1$  заданы.

Возможна ситуация, состоящая в том, что управляемый объект можно перевести из множества  $M_0$  на множество  $M_1$  многими способами. На рис. 1.1 представлено множество возможных траекторий управляемой системы с вектором состояния  $(x_0, x_1)$ .

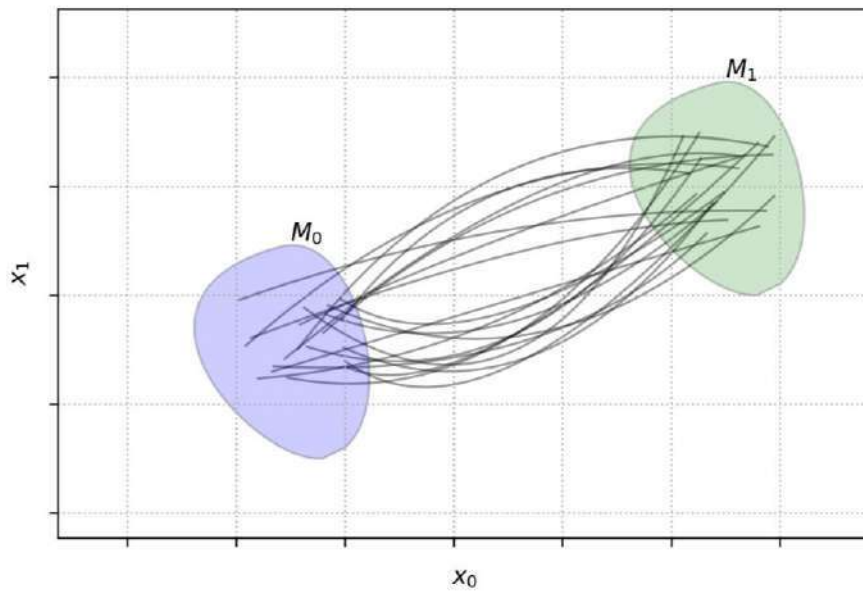


Рис. 1.1. Множество возможных траекторий управляемой системы для  $x=(x_0, x_1)^T$

С практической точки зрения желательно среди всех таких переходов выбрать наилучший в каком-либо смысле переход. Обычно предполагается, что каждому допустимому управлению  $u(t)$ , заданному на отрезке  $[t_0, t_1]$ , и соответствующей ему траектории объекта  $x(t)$  сопоставлено некоторое число  $J$ , оценивающее качество пары  $u(t), x(t)$ , т.е. задан функционал, или критерий, качества  $J(u(t), x(t))$ . Например, этот функционал может иметь вид

$$J(u(t), x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(p, x(t), u(t)) dt. \quad (1.7)$$

В частности, если рассматривается техническая система, критерий качества управления может определять, сколько энергии тратится на управление, или время, затраченное на перемещение изображающей точки из множества  $M_0$  в  $M_1$ .

Теперь можно сформулировать задачу оптимального управления. Эта задача заключается в нахождении такого допустимого управления  $u^*(t)$  и соответствующей ему траектории объекта  $x^*(t)$ , переводящей объект из множества начальных состояний  $M_0$  на множество конечных состояний  $M_1$ , что при этом функционал качества  $J(u^*(t), x^*(t))$  принимает минимальное значение, т.е.

$$J(u^*(t), x^*(t)) = \min J(u(t), x(t)). \quad (1.8)$$

В (1.8) минимум рассматривается по всевозможным допустимым управлениям  $u(t)$  и соответствующим траекториям  $x(t)$ , переводящим объект из множества начальных состояний  $M_0$  на множество конечных состояний  $M_1$ .

### 1.3. Основные вопросы теории оптимального управления.

Выше мы определили основные элементы постановки задачи оптимального управления. Прежде чем перейти к математическому исследованию задач оптимального управления, рассмотрим, какие вопросы включает в себя математическая теория оптимального управления.

*Управляемость.* Возникает вопрос, существует ли хотя бы одно допустимое управление  $u(t)$ , которое переводит динамический объект из множества начальных состояний  $M_0$  на множество конечных состояний  $M_1$ , т.е. существует ли такое допустимое управление  $u(t)$ , при котором соответствующий вектор фазового состояния  $x(t)$  удовлетворяет условиям (6). Если существует, то говорят, что объект является управляемым из множества  $M_0$  на множество  $M_1$ . В противном случае сама постановка задачи оптимального управления теряет смысл.

*Существование оптимального управления.* Если вопрос об управляемости решается положительно, т.е. существует некоторое управление  $u(t)$ , переводящее объект из множества  $M_0$  на множество  $M_1$ , то необходимо выяснить, существует ли оптимальное управление. Инженеры, как правило, при решении конкретных задач не ставят такого вопроса, а просто пытаются найти наилучшее управление доступными им средствами. С математической точки зрения этот вопрос является одним из основных, и если показано, что оптимального управления не существует, то дальнейшие поиски его становятся бессмысленными.

*Необходимые условия оптимальности.* Если оптимальное управление в задаче существует, то далее нужно применять методы нахождения этого оптимального управления. Даже в простых задачах может оказаться бесконечно много допустимых управлений, переводящих объект из множества началь-

ных состояний  $M_0$  на множество конечных состояний  $M_1$ . Поэтому простым перебором всех допустимых управлений обойтись не удастся. Возникает вопрос, как сузить класс управлений, которые могут быть кандидатами на оптимальность. Решить его позволяют необходимые условия оптимальности. Оптимальное управление нужно искать лишь среди множества допустимых управлений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности.

Таким необходимым условием оптимальности является принцип максимума Понтрягина [12, 54, 62]. Первоначально он был высказан в качестве гипотезы академиком Л.С. Понтрягиным в 1953 г. для управляемых систем, динамика которых описывается уравнением вида (3), а затем доказан его учениками. По существу, с принципа максимума началось развитие математической теории оптимального управления. В некоторых задачах оказывается даже, что принципу максимума удовлетворяет лишь конечное число управлений, среди которых уже нетрудно выбрать оптимальное.

*Достаточные условия оптимальности.* Во многих задачах, несмотря на то, что необходимые условия оптимальности и позволяют сузить класс управлений, которые являются кандидатами на оптимальность, все же этот класс остается достаточно широким. Отобрать действительно оптимальное управление в этом классе позволяют достаточные условия оптимальности. Если некоторое управление  $u(t)$  из этого класса удовлетворяет достаточным условиям оптимальности, то тем самым гарантируется его оптимальность. Может возникнуть ситуация, состоящая в том, что достаточным условиям оптимальности удовлетворяет не одно, а несколько управлений. Тем самым гарантируется, что все они оптимальны, т.е. функционал качества принимает на всех этих управлениях одинаковое и притом минимальное значение.

*Единственность оптимального управления.* В инженерных исследованиях часто важно знать, является ли оптимальное управление единственным. Если оно единственно, то в конкретных управляемых объектах реализация единственного оптимального управления может оказаться существенно проще. По-

этому вопрос о единственности оптимального управления также входит в число основных вопросов математической теории оптимального управления.

Кроме перечисленных основных вопросов (управляемость, существование и единственность оптимального управления, необходимые и достаточные условия оптимальности), могут возникнуть и другие вопросы при решении задачи оптимального управления. Вопросы могут исследоваться для конкретного управляемого объекта не обязательно в той последовательности, в какой они приведены. Например, если сначала установлено, что оптимальное управление существует, и мы нашли единственное допустимое управление  $u(t)$ , переводящее объект из множества начальных состояний  $M_0$  на множество конечных состояний  $M_1$  и удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности, то тем самым гарантируется, что это управление  $u(t)$  оптимально.

Общие вопросы теории оптимального управления изучены в [3, 4, 5, 12, 13, 21, 30, 49, 51, 54, 72]. Прикладные вопросы теории оптимального управления рассматривались многими авторами [8, 14, 27, 45, 47, 53, 55–58, 78, 80, 85]. Развитие современных математических методов теории управления для различных типов систем представлено в [7, 9, 16, 17, 61] и в других работах.

Строгое изложение принципа максимума Понтрягина содержится в [12, 54, 62]. В рамках настоящего пособия ограничимся пояснением сущности принципа максимума Понтрягина на примере задачи о максимальном быстродействии. Пусть требуется за минимальное время перевести изображающую точку из начального положения  $M_0$  фазового пространства в конечное положение  $M_2$ . Для каждой точки фазового пространства около точки  $M_0$  существуют оптимальная фазовая траектория и соответствующее минимальное время перехода в точку  $M_2$ . Вокруг точки  $M_2$  можно построить изохроны – поверхности, являющиеся геометрическим местом точек с одинаковым минимальным временем перехода  $t_i$  в эту точку. Оптимальная по быстродействию траектория из точки  $M_0$  в точку  $M_2$  в идеальном случае должна совпадать с нормальными к изохронам (на движение вдоль изохрон затрачивается время без уменьшения отрезка времени до момента достижения конечной точки). На практике ограниче-

ния, налагаемые на координаты объекта, не всегда позволяют реализовать идеальную, оптимальную по быстродействию, траекторию. Поэтому оптимальной траекторией будет та, которая максимально, насколько это позволяют ограничения, близка к нормальным к изохронам. Это условие математически означает, что на протяжении всей траектории скалярное произведение  $H$  вектора скорости  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  движения изображающей точки на вектор  $\psi$ , обратный (по направлению) градиенту времени перехода в конечную точку, должно быть максимально:

$$H = \psi \dot{x} = \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i = \max, \quad (1.9)$$

где  $\psi = -\text{grad}(t_n)$  является вектором, обратным градиенту времени перехода; координаты векторов,  $\dot{x}_i$  – координаты векторов  $\psi(\psi_1, \dots, \psi_n)$ ,  $\dot{x}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ . Поскольку как скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей на косинус между ними, то условием оптимальности является максимум проекции вектора скорости  $\dot{x}$  на направление  $\psi$ . В приведенном условии оптимальности и состоит принцип максимума.

Следует отметить, что в рассматриваемом примере критерием оптимальности является время. Принцип оптимальности, предложенный Л.С. Понтрягиным, справедлив и для общего случая, когда вектор  $\psi$  представляет собой антиградиент принятого критерия оптимальности. В таком случае в (9) присутствует уравнение Гамильтона.

#### 1.4. Системы с переключениями.

Для моделирования процессов при наличии многорежимности часто используются дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями. Разрывы в правых частях уравнений, моделирующих динамику технических систем, возникают вследствие действия неконсервативных сил, скачкообразно меняющих направление. В частности, к таким силам можно отнести сухое тре-



ние, которое оказывает значительное влияние на работу многих устройств, приборов и систем.

При рассмотрении реальных динамических процессов с учетом поиска оптимальных параметров оператор эволюции лежит в многомерном пространстве, образуемом допустимыми параметрами. Тогда от (2) можно перейти к включению вида

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (1.10)$$

где  $F(t, x)$  – некоторое многозначное отображение, ставящее каждой фазовой точке  $x$  в любой момент времени множество всех значений  $F(t, x)$  из рассматриваемого пространства.

С помощью дифференциальных включений можно описывать системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае, когда правая часть уравнений описана приблизительно, с отклонением, не превышающим  $\mu$ . Тогда имеет место неравенство:

$$|\dot{x} - f(t, x)| \leq \mu,$$

которому удовлетворяют все решения дифференциальных уравнений. К дифференциальным включениям можно свести и более широкий класс дифференциальных неравенств вида:

$$F(t, x, \dot{x}) \leq 0.$$

Решением включения (10) называется некоторая функция  $g(x)$ , непрерывная и почти везде удовлетворяющая (9), правильным решением включения (10) называется решение, производная которого не имеет разрывов второго рода. Классическим решением называется функция  $\varphi(x)$ , имеющая непрерывную производную и строго удовлетворяющая включению (10).

Нахождение решений включения (10) и разрешение краевой задачи может быть невозможным даже в случае полных и непротиворечивых данных об исследуемом процессе, если он описывается нелинейными компонентами и дифференциалами высоких степеней. Более того, эта задача может быть неразрешима с точки зрения классических методов исследования даже для однозначных случаев, описываемых обыкновенными дифференциальными уравне-

ниями, в том числе и для численных методов, например, метода Адамса и метода Рунге–Кутты. В случае, когда рассматриваемый процесс или объект слишком сложен для получения его точного математического описания, что может быть обусловлено дефицитом априорной информации, неконтролируемыми внешними возмущениями, диссипативной и нестационарной природой рассматриваемого явления, эта задача усложняется еще больше. В связи с этим в последние годы развивались различные методы построения логико-динамических моделей с разрывными правыми частями, которые позволяют аппроксимировать сложные нелинейные законы движения путем замены нелинейных функций в правых частях кусочно линейными функциями.

Модели систем с переключениями находят широкое применение в описании различных технических процессов. Это объясняется тем, что большинство реальных явлений наиболее полно описываются сложными нелинейными зависимостями и не могут быть описаны единственным законом движения.

В последние десятилетия большое внимание уделяется системам с переключениями, законы движения которых изменяются в результате возникновения внешних событий. Такие системы возникают в случае, когда существуют резкие изменения в структуре, а также в случае, когда присутствует переключающий регулятор. Начиная с 60-х годов прошлого века, в работах С.В. Емельянова и его учеников изучались стационарные линейные системы второго порядка, переключение в которых происходит согласно сигналу ошибки [32]. В дальнейшем результаты этих работ были обобщены для систем произвольного порядка с нестационарными правыми частями. Указанные системы получили название систем с переменной структурой. Дальнейшее изучение данной проблематики привело к тому, что на сегодняшний день системы с переменной структурой обычно рассматриваются согласно принципу преднамеренного введения в скользящие режимы, в результате использования которых достигается полная независимость (инвариантность) уравнений движения от факторов неопределенности (возмущений параметров и внешних сил).

На базе теории систем с переменной структурой получили развитие методы решения таких актуальных задач моделирования управляемых систем, как стабилизация сильно неопределенной системы; построение астатической системы слежения произвольного порядка; фильтрация и дифференцирование при неизвестной интенсивности шума; декомпозиция в многосвязных системах; оптимизация при неизвестных градиентах оптимизируемой функции и функций, задающих ограничения; основные задачи теории инвариантности; задачи управления при различного рода ограничениях и задачи идентификации параметров динамических систем. Результаты, полученные в области систем с переменной структурой, находят широкое применение в теории автоматического управления и смежных областях [33].

В настоящее время используются англоязычные термины «switched systems» и «switching systems» для систем с переключениями. В работах D. Liberzon, A.S Morse [84] и других ученых основное внимание уделяется переключениям линейных режимов движения.

В последние десятилетия в результате развития вычислительной техники и интеллектуальных методов исследователи стали уделять внимание системам с нелинейными и/или неавтономными режимами движения. В таких системах стало возможным более продолжительное удержание системы в устойчивых режимах, что эффективнее подавляет переходные процессы по сравнению с линейными системами. Системы с переключениями можно разделить на системы с переключениями по времени и с переключениями по состоянию, а также на автономные и неавтономные системы с переключениями.

Основное свойство автономных систем заключается в отсутствии прямого управления. К автономным системам относятся модели с переключениями по состоянию, разрывы в которых возникают в результате непредвиденных факторов или отказов подсистем. Неавтономные системы обычно подразумевают прямое дискретное управление. Как правило, модели технических систем сочетают различные свойства одного или другого типа переключений.

Системы с переключениями широко применяются при управлении механическими и автомобильными системами, курсом и движением воздушного транспорта, технологическими процессами в переключающихся преобразователях мощности, в интеллектуальных системах управления автомобильным транспортом и роботами.

Примером модели с переключениями является модель, описываемая дифференциальным включением вида

$$M \circ \ddot{x} \in P - M \circ G, \quad (1.11)$$

где  $M$  – вектор инертности системы,  $G$  – вектор потенциального поля,  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $P(x, t)$  – вектор-функция возмущений в системе, символ  $\circ$  обозначает покомпонентное произведение или произведение Адамара. Модели вида (11) возникают в прикладных задачах моделирования движения летательных аппаратов и систем управления наземным транспортом.

Различные типы систем с переключениями рассматривались в [16, 26, 33, 56–58, 68, 80, 84] и в других работах.

Рассмотрим примеры моделей, описывающих системы с переключениями. Задачи моделирования технических систем, приводящие к дифференциальным уравнениям с разрывными правыми частями, возникают при возмущенном движении. В частности, это справедливо для многих систем с неконсервативными силами. Примером таких систем является, в частности, осциллятор с сухим трением, описываемый уравнением:

$$M\dot{x} = -Dx + N\operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad (1.12)$$

где  $M$  – инерция системы,  $D$  характеризует упругие силы,  $N$  – коэффициент сухого трения. Очевидно, что подобные уравнения возникают в различных моделях технических систем, которые содержат упругие элементы. Разрывность в правой части (12) возникает ввиду того, что сила трения направлена в сторону, противоположную движению.

Несмотря на относительно простые аналитические решения, осциллятор с сухим трением является сложной динамической системой, поскольку направ-

ление действующих сил меняется скачкообразно. Более того, сами решения не дают ответа на вопрос о моментах переключения этих сил.

Другим примером технической системы, приводящей к дифференциальным уравнениям с разрывными правыми частями, является двухпозиционное авторулевое судно, модель которой описывается уравнением вида:

$$I\ddot{\varphi} + H\dot{\varphi} = M, \quad (1.13)$$

где  $I$  – момент инерции судна,  $H$  – коэффициент вязкого трения,  $M$  – крутящий момент, создаваемый поворотом руля,  $\varphi$  – угол отклонения от заданного курса. При этом для (13) имеет место равенство  $M = \pm\psi$ , и  $M$  является функцией от  $\varphi, \dot{\varphi}$ .

Рассмотрим простейшую зависимость крутящего момента от угла отклонения. Пусть перекладка руля осуществляется мгновенно после прохождения изображающей точкой оси  $\varphi$ , тогда

$$M = \begin{cases} -\psi, & \varphi \geq 0, \\ \psi, & \varphi < 0. \end{cases}$$

В этом случае траектория движения модели будет всюду лежать в окрестности точки равновесия при  $t \rightarrow \infty$  и иметь осциллирующий характер с частотой автоколебаний, зависящей от шага дискретизации модели.

Такой режим движения системы называется скользящим. Как показано в ряде работ, модели вида (13) инвариантны по отношению к внесению внешних возмущений. Естественно, подобный закон переключений в предельном случае невозможно реализовать на практике, однако подобные модели имеют теоретическую значимость.

Несмотря на сходство рассмотренных выше моделей, модель (13) характерна наличием в своей структуре логического регулятора. Следует отметить, что переключения возникают не только в управляемых системах, но и в системах, где поведение может качественно меняться в зависимости от состояния или времени. В частности, это могут быть модели упругих/неупругих столкновений, модели движения тел на границе разделов сред и другие модели, информация о которых получена путем экспериментальных исследований.

Для моделей с переключениями, например, для моделей вида (13), как правило, требуется решение двух основных задачи которые рассматриваются при построении программного управления: 1) задача определения фазовых повехностей, задающих переключения в системе; 2) задача построения управляющих воздействий. Указанные задачи могут быть решены с помощью методов программного управления.

### **1.5. Интеллектуальные методы программного управления.**

Перейдем к обзору интеллектуальных методов, используемых при построении систем с логическими регуляторами с учетом логики переключений.

Как известно [37, 73], широкий класс динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными включениями вида (3), решения которых существуют, может быть аппроксимирован с помощью искусственных нейронных сетей, а именно, если существует некоторая функция

$$\xi(t, x, \dot{x}) = \begin{cases} 0, & (t, x, \dot{x}) \notin C, \\ 1, & (t, x, \dot{x}) \in C, \end{cases}$$

где  $C$  – подмножества фазового пространства, которые приводят к переключениям модели технической системы, то, согласно теореме об универсальной аппроксимации, возможно построение генератора переключений на основе искусственной нейронной сети.

Одной из ранних работ в области нейросетевых алгоритмов, в которых дана строгая формализация основных терминов, является работа Маккаллока и Питса [86].

Модель искусственного нейрона представлена на рис. 1.2.

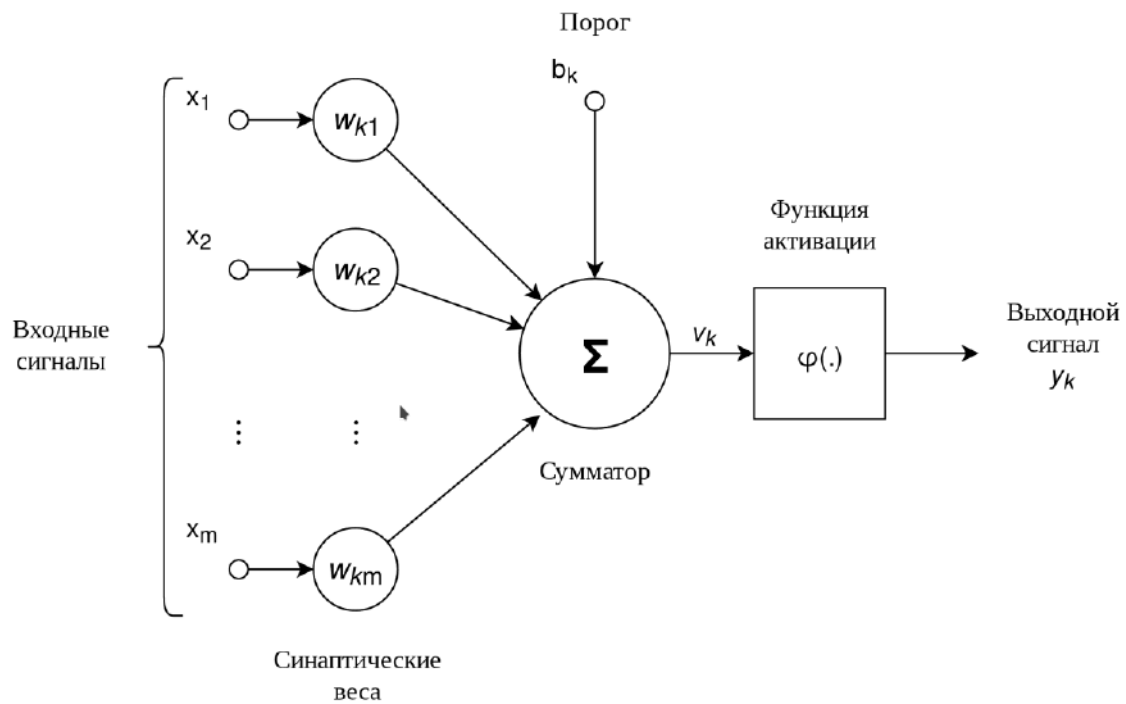


Рис. 1.2. Модель искусственного нейрона

Выходной сигнал нейрона и локальное индуцированное поле нейрона, представленного на рис. 1.2, могут быть представлены в виде:

$$y_k = \varphi\left(\sum_{i=1}^m w_{ki}x_i\right), \quad v_k = \sum_{i=1}^m w_{ki}x_i,$$

где  $w_{ki}$  – весовые коэффициенты,  $m$  – количество входов,  $x_i$  – значение  $i$ -го входа,  $\varphi$  – функция активации.

В теории искусственных нейронных сетей рассматривается несколько видов функций активации, а именно: пороговая, кусочно линейная с насыщением, сигмоидальная (логистическая и тангенциальная) функции активации. Вид функций активации представлен на рис. 1.3, где по оси абсцисс указано значение агрегированного входного сигнала нейрона, по оси ординат – значение выхода.

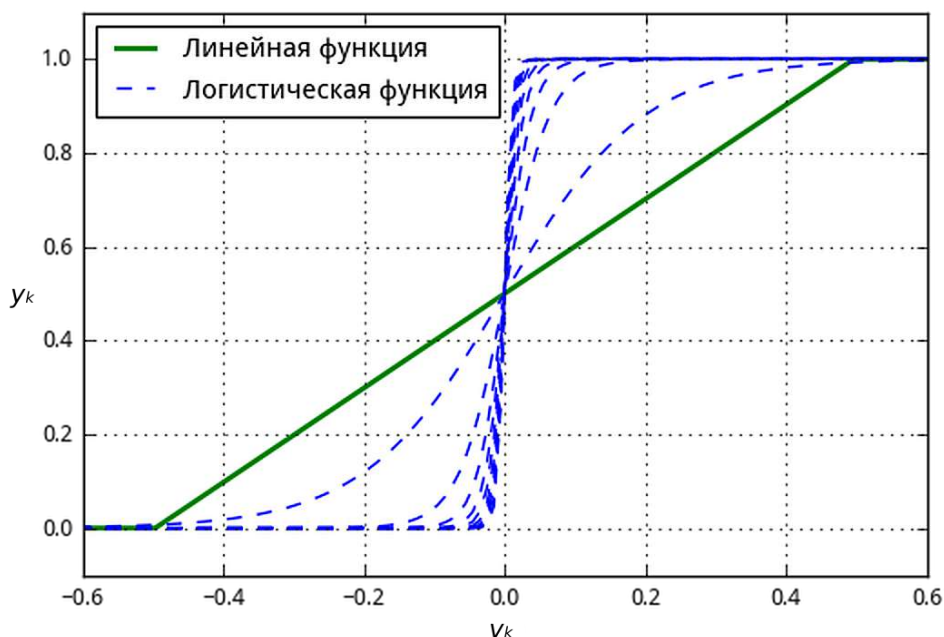


Рис. 1.3. Функции активации искусственного нейрона.

Стохастическая модель нейрона в отличие от детерминированной имеет вероятностную интерпретацию выходного сигнала. Такой нейрон может иметь только два состояния:  $+1$  и  $-1$ . Переключение нейрона происходит в соответствии с некоторой функцией, описывающей вероятность события в зависимости от локального индуцированного поля нейрона. В этом случае переключение описывается сигмоидальной функцией.

Важно отметить, что метод искусственных нейронных сетей находит свое применение не только в аппроксимации неизвестных функций и в задачах классификации образов, но и в задачах непосредственной оптимизации [73].

Нейронная сеть Хопфилда представляет собой слой адаптивных сумматоров с обратными связями, выходные сигналы которых, подвергаясь нелинейной обработке по заданному закону, поступают с некоторой временной задержкой на входы нейронов, в результате чего выходной сигнал нейронной сети формируется лишь после того, как сеть достигнет динамического равновесия.

Задачи, решаемые дискретной сетью Хопфилда с бинарными или биполярными нейронами в качестве ассоциативной памяти, формулируются следующим образом: известен набор эталонных двоичных образов или сигналов.



Сеть должна уметь по частичной информации неидеальных образов, подаваемых на ее вход, выделять эталонные образы или давать информацию о том, что входной вектор не соответствует ни одному из хранимых в ее памяти.

Одним из наиболее эффективных подходов к построению моделей систем с переключениями является построение регуляторов на основе нечеткой логики. Указанный подход возник еще на рубеже 60-х годов 20 века и актуален в различных областях математического моделирования и в настоящее время. Основы теории нечеткой логики впервые изложены в работе Л. Заде [34]. В последние десятилетия активно развивается направление, связанное с сочетанием методов нечеткой логики, теории динамических систем и методов оптимизации, в частности. Весомый вклад в это направление внесли Т. Такаги и М. Сугено [88].

Логические регуляторы на основе алгоритмов нечеткой логики представлены следующими компонентами: база правил, фаззификация, процедура обработки решения, дефаззификация [20]. Процедуру перевода текущих (числовых) значений входных переменных логического регулятора в лингвистические величины называют фаззификацией. Получаемое экспертное знание об объекте выражается как совокупность лингвистических правил вида если  $(x = A)$  – исходная ситуация, то  $(y = B)$  – ответная реакция, где  $y$  – управляемый сигнал,  $x$  – набор сигналов, воспринимаемых экспертом, буквы  $A$  и  $B$  – лингвистические оценки (термы). Часть если (предпосылки или условия) означает сопряжение логических операций, а часть то (решение, вывод, заключение) представляет собой указание лингвистической величины для выходного воздействия логического регулятора. Процесс построения правила носит название логического вывода и подразделяется на два этапа: обобщение и заключение. После вычисления всех правил получается значение выходной переменной в виде степеней принадлежности ее термов. Переход от степеней принадлежности к значению выходной физической величины называется дефаззификацией, в результате которой логический вывод преобразуется в четкое число [20].

Во многих задачах математического моделирования нелинейные процессы описываются с помощью моделей Такаги–Сугено (ТС-модель). Указанные модели базируются на правилах логического вывода и логических регуляторах. Как известно [20], ТС-модель описывается правилами типа если...то, которые представляют собой локальные линейные отношения вход-выход нелинейной системы. Применяемые правила являются нечеткими только в части «если», тогда как в части «то» содержатся функциональные зависимости. Указанные правила имеют вид:

Правило  $i$ : если  $x_1(t)$  есть  $F$  и ... и  $x_n(t)$  есть  $F$ , то  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i p(t)$ ,

где  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния,  $p(t) \in R^m$  – функции входных параметров,  $F_{ji}$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  –  $j$ -е нечеткое множество  $i$ -го правила,  $A_i$  и  $B_i$  – соответствующие матрицы коэффициентов. Наряду с искусственными нейронными сетями ТС-модели являются универсальными аппроксиматорами и находят широкое применение в промышленности, робототехнике и инженерной практике. Представление входящих параметров в виде ТС-модели является удобным для моделирования технических систем с переключениями [24].

Рассмотрим модель динамической системы с переключением

$$\dot{x} = p(t, x) p_x G(x), \quad (1.14)$$

где  $p$  – неизвестная нелинейная функция, заданная в виде базы нечетких правил

если  $x$  есть  $term_i$  и  $t$  есть  $term_j$ , то  $\dot{p} = f_1$ ,

если  $x$  есть  $term_{i+1}$  и  $t$  есть  $term_{j+1}$ , то  $\dot{p} = f_1$ ,

...

если  $x$  есть  $term_m$  и  $t$  есть  $term_n$ , то  $\dot{p} = f_1$ ,

где  $term$  – лингвистические термы,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  – множество линейных функций таких, что аналитическое решение  $p$  известно,  $G(x)$  – внешние возмущения,  $p_x$  – вектор проектных параметров.

Основным преимуществом задания функции параметров в виде базы нечетких правил является возможность задания свойств динамической системы (14) на основе известных данных об изучаемом процессе на языке, близком к

естественному. В таком случае обучение нейросети с учителем имеет нечеткий критерий для классификации функции  $p$ .

Теория управления и ее методы демонстрируют четкие тенденции к дальнейшей конвергенции (сближению) с технологиями искусственного интеллекта [15, 52, 89]. Одно из популярных направлений в современной теории – применение достижений искусственного интеллекта для управления техническими системами [16, 24]. В [24, 36, 76] рассмотрены вопросы моделирования и анализа устойчивости динамических систем интеллектуального управления, в частности, дано развитие методов Ляпунова исследования устойчивоподобных свойств систем с логическими регуляторами, предложены условия стабилизации ТС-моделей, а также рассмотрены приложения к исследованию динамики систем транспорта в условиях неопределенности.

Следует отметить перспективы применения современных отечественных аппаратно-программных средств для решения задач моделирования и стабилизации управляемых систем. В [68] выполнен анализ технических возможностей отечественного программно-аппаратной платформы «Эльбрус 801-РС» для решения ряда научно-исследовательских задач. Разработано алгоритмическое обеспечение на основе искусственных нейронных сетей с обучением. Представлены результаты адаптации программных модулей программного комплекса моделирования нелинейных динамических систем с переключениями режимов работы к элементам платформы, рассмотрены вопросы построения математических моделей с управлением на основе искусственных нейронных сетей и численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработано программное обеспечение, с использованием которого решены следующие задачи: задача обучения нейросети для нахождения логических операций XOR, задача обучения нейросети для поиска параметров динамической модели и задача высокопараллельного обучения нейросети. Созданы нейросетевые библиотеки и библиотеки численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием возможностей микроархитектуры e2k. Обсуждены возможности визуализации результатов компьютерных

экспериментов, а также возможности интерактивного взаимодействия и документирования сопровождения получаемых результатов средствами отечественного программно-аппаратного обеспечения. В [25] предложены высокопараллельные алгоритмы обучения для нейросетевых моделей технических систем. Полученные в [25, 68] результаты могут найти применение в задачах исследования моделей управляемых технических систем с переключениями режимов работы.

## § 2. Синтез моделей технических систем оптимального управления с учетом переключений

### 2.1. Синтез модели динамики летательного аппарата.

Необходимость в построении моделей технических систем с переключениями, как правило, возникает в случае сложных ограничений в задаче. В частности, это может быть связано с фазовыми ограничениями в процессе движения. Пример траекторий системы для двумерной модели с ограничениями такого типа представлен на рис. 2.1, где  $x_0$ ,  $x_1$  – фазовые переменные,  $M_0$  – множество возможных начальных условий,  $M_2$  – множество возможных граничных условий.

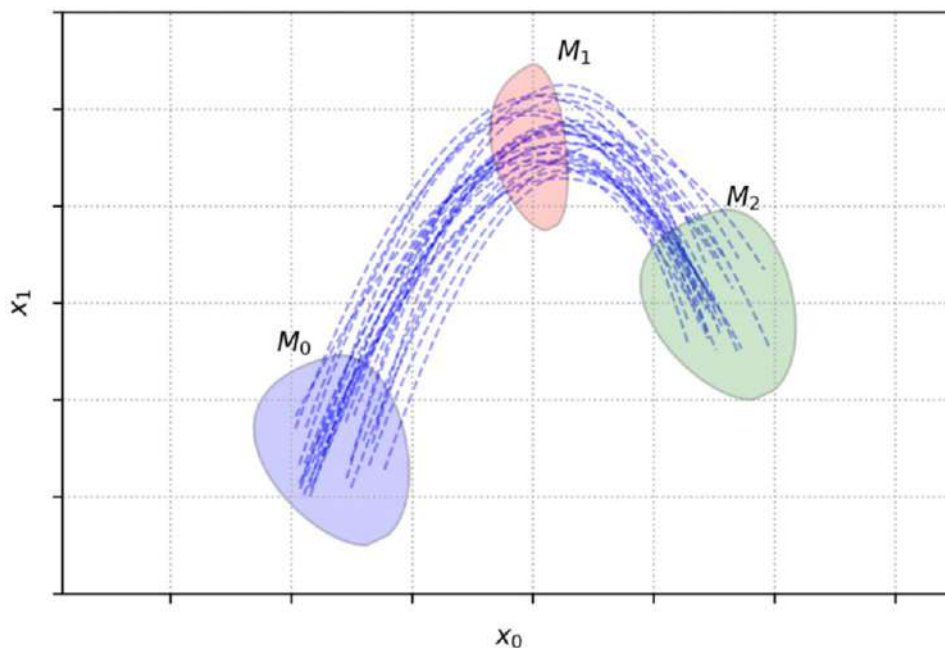


Рис. 2.1. Возможные траектории для системы с промежуточными фазовыми ограничениями  $M_1$

Для рассмотренного случая целесообразно разбить сложную задачу управления на несколько более простых задач. Данный принцип можно проиллюстрировать на примере модели динамики летательного аппарата.

Пусть движение осуществляется с привязкой к декартовым координатам  $x, y$  с начальной точкой  $(0,0)$  с учетом двух этапов. На первом этапе, соответствующем интервалу  $(0, t_1)$ , движение в динамической модели летательного аппарата осуществляется на плоскости  $xoy$  под воздействием постоянной векторной тяги  $(p, q)$  до достижения высоты  $h$ . На втором этапе, соответствующем интервалу  $(t_1, t_2)$ , движение в динамической модели летательного аппарата осуществляется с постоянной векторной тягой  $(-b, s)$ , достигая конечной точки  $L(l, 0)$ . На летательный аппарат действует сила тяготения. Движение считается допустимым, если значение  $x(t)$  является постоянно возрастающим от 0 до  $l$ ,  $y(t)$  возрастает на первом этапе до высоты  $h$  и убывает до нуля на втором этапе, то есть

$$\forall x(t), t \in (0, t_2): \dot{x} > 0, \quad \forall x(t), t \in (0, t_1]: \dot{y} \geq 0, \quad \forall y(t) \in (t_1, t_2]: \dot{y} < 0.$$

При этом в момент приземления  $t_2$ , то есть когда  $y(t_2) = 0$ , получаем  $x(t_2) = l$ .

Выбор значений векторной тяги производится из строго положительных интервалов

$$p \in \hat{p}, q \in \hat{q}, b \in \hat{b}, s \in \hat{s}. \quad (2.1)$$

В таком случае критерий оптимальности можно записать в интегральном виде:

$$\int_0^{t_1} (p + q) dt + \int_{t_1}^{t_2} (b + s) dt \rightarrow \min. \quad (2.2)$$

Физический смысл критерия заключается в минимизации затрат на создание векторной тяги и уменьшении времени достижения конечной точки. Задача состоит в нахождении  $p, q, b, s, t_1, t_2$ , удовлетворяющих критерию (2).

Предлагается следующий алгоритм решения задачи. Сначала согласно подходу, предложенному в [46], выбирается однозначная реализация, состоящая из единственных значений этих параметров. Тогда дифференциальные включения

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &\in \hat{p}, \\ m\ddot{y} &\in \hat{q} - mg, \end{aligned} \quad 0 \leq t < t_1, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &\in -\hat{b}, \\ m\ddot{y} &\in \hat{s} - mg, \end{aligned} \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

описывающие движение летательного аппарата, сводятся к системам дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= p, \\ m\ddot{y} &= q - mg, \end{aligned} \quad 0 \leq t < t_1, \\ \begin{aligned} m\ddot{x} &= -b, \\ m\ddot{y} &= s - mg, \end{aligned} \quad t_1 \leq t \leq t_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Следует отметить, что в случае дифференциальных включений (3) операции вычитания и отрицания не являются арифметическими операциями, а представляют собой биективные отображения множеств.

Модели, описываемые уравнениями вида (4), и рассматриваемые далее обобщения могут найти применение в задачах транспортной динамики, системах доставки и логистики, робототехнике и моделировании движения тел под воздействием постоянных возмущений.

С помощью замены

$$P_1 = p / m, \quad Q_1 = (q - mg) / m, \quad R_1 = b / m, \quad S_1 = (s - mg) / m,$$

на первом этапе система уравнений движения примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= P_1, \\ \ddot{y} &= Q_1, \end{aligned}$$

с начальными условиями  $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ ,  $y(t_1) = h$ . Решение системы имеет вид:

$$x = \frac{P_1 t^2}{2}, \quad y = \frac{Q_1 t^2}{2}. \quad (2.5)$$

На втором этапе движение описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R_1, \quad x(t_1) = \frac{P_1 t_1^2}{2}, \quad \dot{x}(t_1) = P_1 t_1, \\ \ddot{y} &= -S_1, \quad y(t_1) = \frac{Q_1 t_1^2}{2} = h, \quad \dot{y}(t_1) = Q_1 t_1, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-R_1 t^2}{2} + (P_1 + R_1)t_1 t - \frac{(P_1 + R_1)t_1^2}{2}, \\ y(t) &= \frac{-S_1 t^2}{2} + (Q_1 + S_1)t_1 t - \frac{(Q_1 + S_1)t_1^2}{2}, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При условиях  $x(t_2) = l$ ,  $x'(t_2) = 0$ ,  $y(t_2) = 0$ ,  $y(t_1) = h$ ,  $y'(t_2) = 0$  система (6) не имеет аналитического решения. Полагая  $\tau = t_2 / t_1$ , с учетом (5), (6) получим:

$$P_1 = \frac{2l}{t_1^2} \tau, \quad R_1 = \frac{2l}{t_1^2 \tau(\tau - 1)}, \quad S_1 = \frac{2(2\tau - 1)h}{t_1^2 (\tau - 1)^2}, \quad Q_1 = \frac{2h}{t_1^2}.$$

Далее найдем  $\tau$  и  $t_1$ . Воспользуемся условием оптимальности (2), которое запишем в виде

$$F = \int_0^{t_1} (p + q) dt + \int_{t_1}^{t_2} (b + s) dt \rightarrow \min,$$

где

$$F(t_1, \tau) = m t_1 (P_1 + Q_1 + g) + (R_1 + S_1 + q)(t_2 - t_1).$$

Для нахождения критических точек продифференцируем  $F$  по  $t_1$  и по  $\tau$ , полученную систему приравняем к нулю:

$$\begin{aligned} 4 \frac{l}{\tau} + 6h + t_1^2 \tau g + 2 \frac{h}{\tau - 1} &= 0, \\ 4 \frac{l}{\tau} - t_1^2 \tau g + 2h \frac{\tau}{(\tau - 1)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду  $\tau > 1$  имеем

$$\tau = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$t_1 = \sqrt{\frac{4l(\tau - 1)^2 + 2h\tau^2}{\tau^2(\tau - 1)^2 g}}$$

и

$$t_2 = \tau \sqrt{\frac{4l(\tau - 1)^2 + 2h\tau^2}{\tau^2(\tau - 1)^2 g}}.$$

Исходя из (2), (6), получим



$$p = \frac{2l\tau(\tau-1)^2 gm}{4l(\tau-1)^2 + 2h\tau^2}, \quad q = \frac{2h\tau^2(\tau-1)^2 gm}{4l(\tau-1)^2 + 2h\tau^2} + mg,$$

$$b = \frac{2l\tau(\tau-1)gm}{4l(\tau-1) + 2h\tau^2}, \quad s = \frac{2h\tau^2(2\tau-1)gm}{4l(\tau-1)^2 + 2h\tau^2} + mg.$$

Таким образом, в результате преобразований получены зависимости силы тяги  $p$ ,  $q$ ,  $b$ ,  $s$  от  $h$ ,  $l$  и массы летательного аппарата.

На основе полученных выражений разработана тестовая программа построения траекторий движения изучаемой системы на встроенном языке системы Octave. Для моделирования рассматривается пространство изменяющихся параметров допустимого движения. Фазовые траектории двумерной системы с учетом изменения значений  $h$  и  $m$  представлены на рис. 2.2.

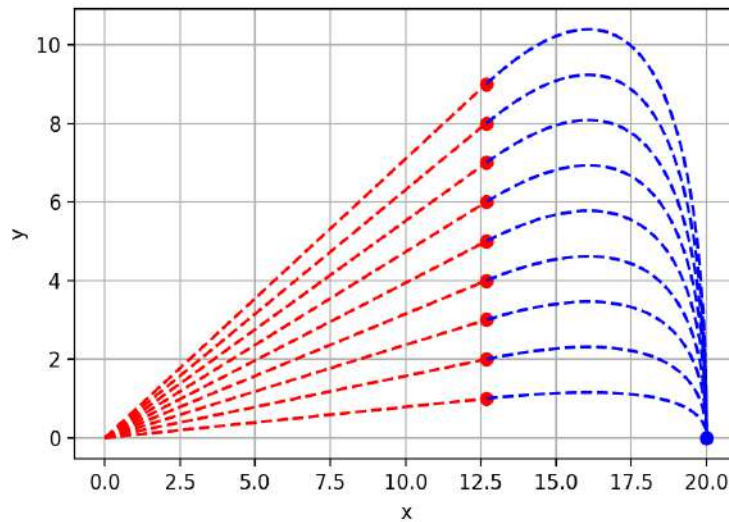


Рис. 2.2. Фазовые траектории с учетом точек переключения  
для двумерной системы (4)

Отмечается согласованность численных методов интегрирования и аналитических траекторий в том смысле, что траектории, полученные с использованием численных методов при заданных начальных условиях совпадают с кривыми аналитических решений.

Следует отметить, что рассмотренная модель является максимально упрощенной моделью движения летательного аппарата при наличии единственного переключения. При этом не учитываются воздействие сопротивления

среды и внешние возмущения других типов. Кроме того, приняты определенные допущения при переходе от дифференциальных включений (3) к уравнениям (4). В частности, векторы тяги рассматриваются для модели как проектные параметры.

## 2.2. Трехмерная модель с увеличивающейся частотой переключений.

Рассмотрим модификацию модели (4) для случая, когда конечная точка траектории (точка назначения) может перемещаться внутри круга, лежащего в дополнительной плоскости  $xoz$ . К формальному построению трехмерной модели с увеличивающейся частотой переключений подойдем с помощью алгоритма поиска оптимальных переключений, состоящего из следующих шагов.

*Шаг 1.* На первом этапе движение в модели динамики летательного аппарата происходит из точки  $O(0,0,0)$  с постоянным ускорением вверх и вперед до точки  $H(x(t_1), h, 0)$ , как и в первой задаче. За время движения  $t_1$  конечная точка достигает круга положений, указанного на рис. 2.3.

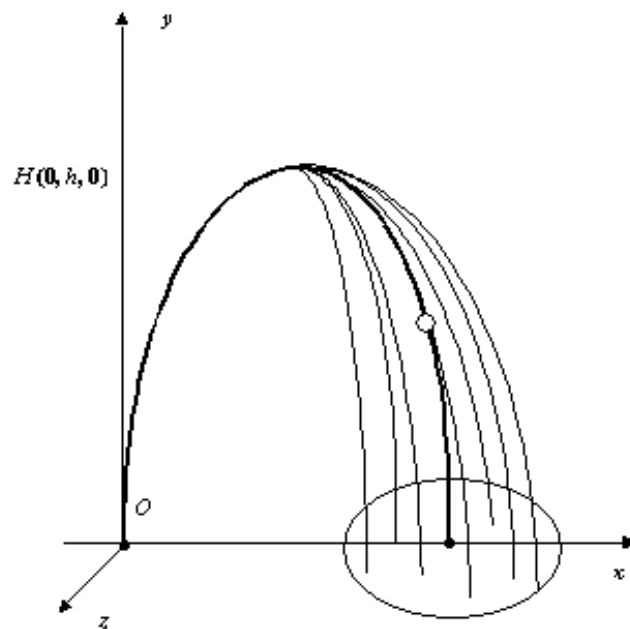


Рис. 2.3. Графическое изображение возможных траекторий движения летательного аппарата на первом шаге

*Шаг 2.* Из всех возможных траекторий движения летательного аппарата выбираем ту, которая ведет в промежуточную точку назначения. За оставшееся время  $t = t_2 - t_1$ , как и в первой задаче, летательный аппарат достигнет плоскости  $xOz$ , направляясь в центр круга положений. Движение по траектории будем проводить за время  $t/2$ , при этом устанавливаем новый круг положений, представленный на рис. 2.4, в котором окажется конечна. Выбираем ту траекторию, которая ведет в центр круга положений. Если радиус этого круга не больше радиуса соответствия  $\sigma$ , то оставшееся время  $t/2$  тратим на движение в центр этого круга с достижением конечной точки.

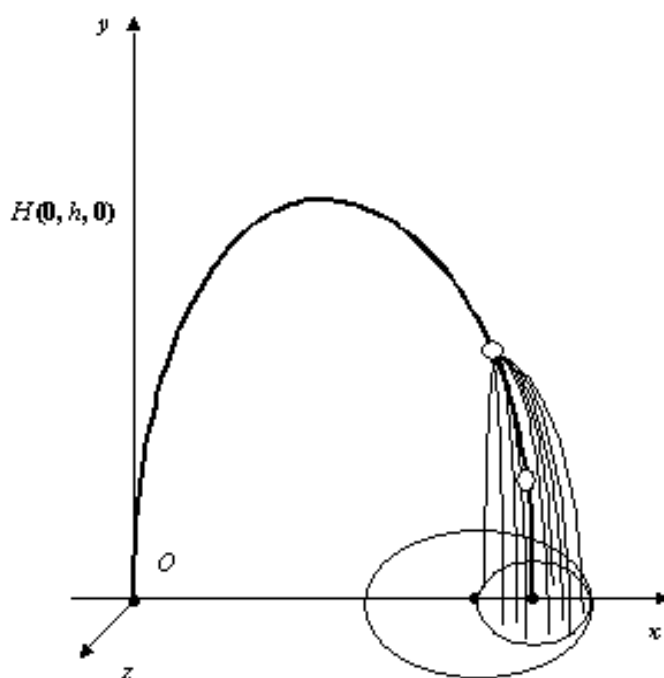


Рис. 2.4. Графическое изображение возможных траекторий движения летательного аппарата на втором шаге

*Шаг 3.* Если радиус круга положений больше радиуса соответствия, то повторяем шаг 2, где время движения, за которое летательный аппарат проходит половину маршрута в центр круга положений, уменьшается вдвое. Если радиус круга положений не больше радиуса соответствия, то оставшееся время  $t/4$  тратим на движение в центр этого круга с достижением конечной точки. Ес-

ли это не так, то повторяем второй шаг с уменьшенным вдвое временем и так далее. Так как время движения уменьшается вдвое на каждом шаге, то и круг положений каждый раз уменьшается в два раза, и поэтому через несколько повторений шага 2 получим круг положений с радиусом меньше  $\sigma$ , что позволяет далее двигаться в центр круга положений с гарантированным попаданием в конечную точку. Далее приведем краткое описание модифицированного алгоритма для решения обобщенной задачи поиска оптимальных переключений, когда учитывается принадлежность конечной точки плоскости  $xoz$ . С технической точки это означает точность позиционирования. Задача в такой постановке будет удовлетворять условиям вариативности конечного движения с учетом круга положений в плоскости  $xoz$  и вырождением в точку пересечения этого круга с плоскостью  $xoy$  для исходной постановки задачи, рассмотренной в [46].

Пусть выбирается некоторый радиус перемещения проекции конечной точки  $r$  и радиус соответствия  $\sigma$ . На первом этапе движение системы описывается линейной параметрической функцией (3) при  $z = 0$ , до достижения максимальной высоты  $H$ . На втором этапе происходит последовательное решение системы уравнений (7) при условии движения проекции конечной точки  $t_2$  на ось  $Ox$ . Траектория движения в двумерном случае представлена на рис. 2.5.

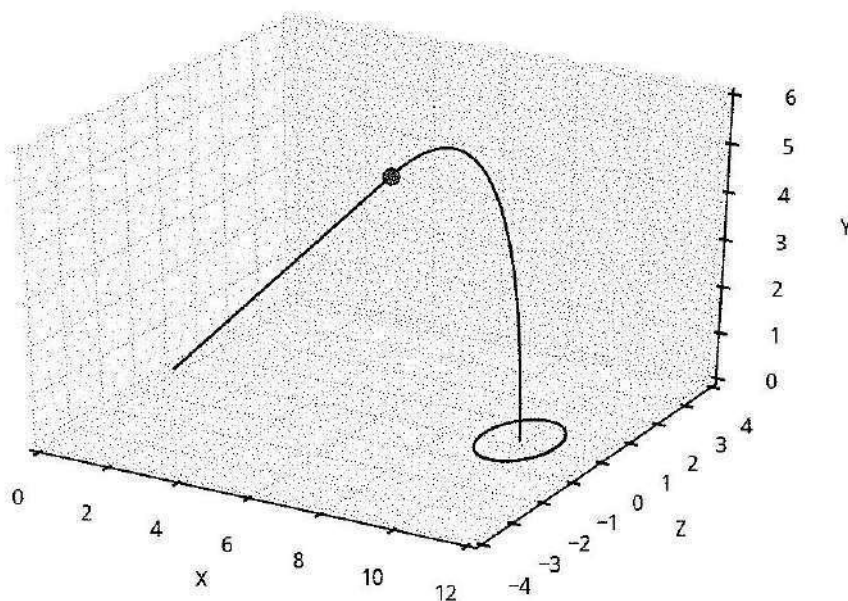


Рис. 2.5. Начальная траектория движения

От системы (4) перейдем к обобщенной системе вида [26]:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -R_1, & x(t_1) &= a_1, & \dot{x}(t_1) &= b_1, \\ m\ddot{y} &= -R_2 - g, & y(t_1) &= a_2, & \dot{y}(t_1) &= b_2, \\ m\ddot{z} &= R_3, & z(t_1) &= a_2, & \dot{z}(t_1) &= b_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $R_1, R_2, R_3$  – компоненты ускорения, действующие по осям  $x, y, z$ ;  $a_1, a_2, a_3$  – начальные значения.

Величины  $b_1, b_2, b_3$  в (7) можно вычислить по формулам:

$$b_i = \frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}, \quad (2.8)$$

где  $k$  – номер итерации алгоритма,  $i = 1, 2, 3$ .

Проинтегрировав систему (7), приведем ее к виду

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 - b_1 t_1 - \frac{R_1 t^2}{2} - \frac{R_1 t_1^2}{2} + t(b_1 + R_1 t_1), \\ y(t) &= a_2 - b_2 t_1 - \frac{S_1 t^2}{2} - \frac{S_1 t_1^2}{2} + t(b_2 + S_1 t_1), \\ z(t) &= a_3 - b_3 t_1 + \frac{Z_1 t^2}{2} + \frac{Z_1 t_1^2}{2} + t(b_3 - Z_1 t_1). \end{aligned} \quad (2.9)$$

С учетом условий  $\dot{x}(t_2) = 0, \dot{y}(t_2) = 0, \dot{z}(t_2) = k, a_1 = \frac{h}{2}, t_2 = \tau t_1$ , система (9) примет вид:

$$\begin{aligned} b_1 + R_1 t_1 (1 - \tau) &= 0, \\ b_2 + S_1 t_1 (1 - \tau) &= 0, \\ b_3 + Z_1 t_1 (\tau - 1) &= k. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Согласно (10), получим:

$$R_1 = -\frac{b_1}{t_1(1 - \tau)}, S_1 = -\frac{b_2}{t_1(1 - \tau)}, Z_1 = -\frac{b_3}{t_1(\tau - 1)} + k.$$

Перейдем к описанию программного обеспечения для численного анализа системы (7). Разработанный на встроенном языке системы Octave 4.0 программный подмодуль состоит из следующих функций и сценариев.

Основной сценарий *calc* реализует главный алгоритм модуля, где строятся графики движения, дополнительные траектории, а также выводятся промежуточные графики в формате PNG в рабочую директорию.

В программе используются несколько вспомогательных файлов-функций. Файл-функция *SetCondition* реализует функцию, вычисляющую константы в зависимости от значения переменной *flag* для первой или второй части движения. Для хранения значений констант используется структура *Cd*, которая описывается в начале модуля *calc* и затем передается для обработки функции *SetCondition*. Файл-функция *movement* представляет собой функцию, описывающую дифференциальные уравнения на втором этапе движения системы. Файл-функция *SetCanv* задает параметры построения графика с помощью функции *plot3*, а именно, размеры осей и их подписи. Файл-функция *InitY* задает начальные условия уравнений на втором этапе движения. Файл-функция *Circle* задает функцию, изображающую окружность на оси  $OxOz$ , которая представляет радиус перемещения конечной точки.

Блок-схема алгоритма решения представлена на рис. 2.6.

С первого по третий блок алгоритма в программе реализуется построение начальных траекторий в соответствии с аналитическими выражениями, полученными в [46], в цикле «пока» происходит численное интегрирование расширенной системы для нахождения траекторий обобщенной задачи поиска оптимальных параметров на случай локализации конечной точки маршрута в плоскости  $xOz$ .

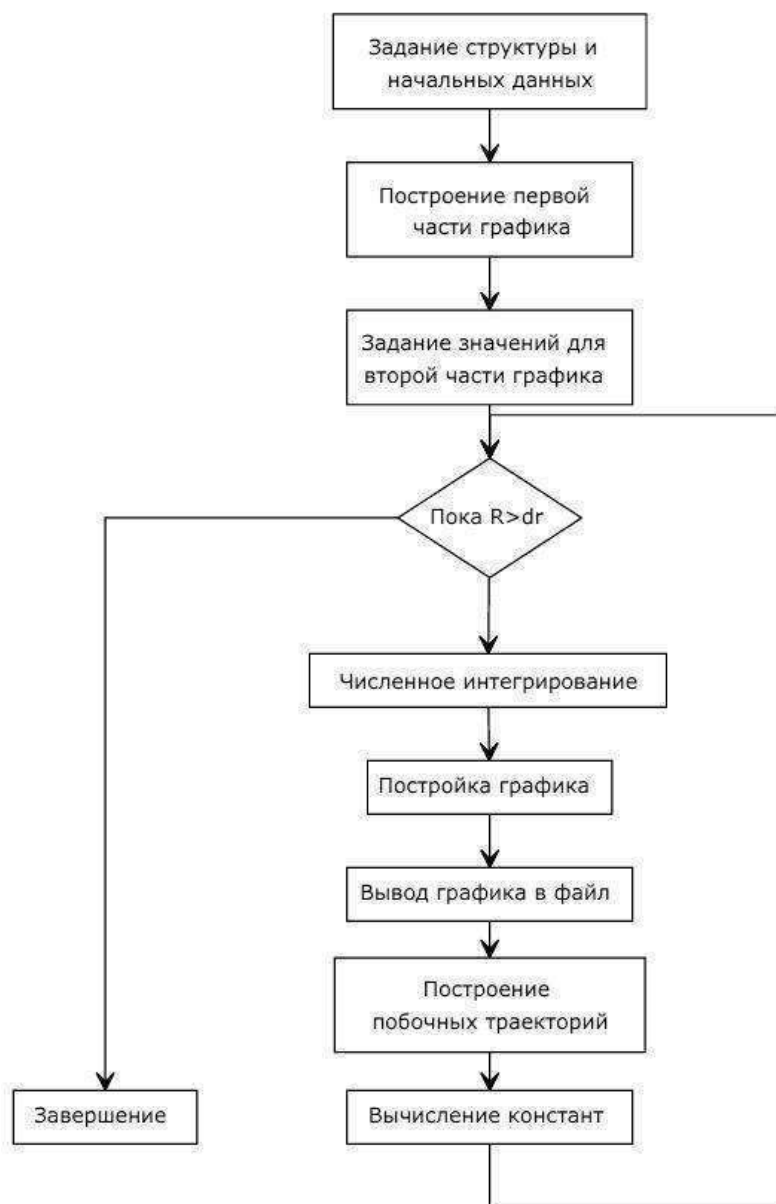


Рис. 2.6. Блок-схема алгоритма решения

При изменении положения для системы (7) рассматриваются соответственно другие начальные условия, затем строится часть траектории, лежащая за пределами предыдущей траектории, до тех пор, пока не будет достигнута конечная точка. Для этого необходимо задать вектор перемещения в виде скорости изменения параметров  $l$  и  $k$ . На рис. 2.7 представлена начальная траектория одного из решений, где  $l = k = 1$ , радиус соответствия равен 0.05.

На рис. 2.8 и 2.9 представлены промежуточные траектории движения, а на рис. 2.10 показана конечная траектория движения, которая отличается от

начальной траектории и следует в точку, находящуюся на границе круга положений, с заданной точностью  $\sigma$ . В случае перемещения конечной точки происходит плавное отклонение траектории движения транспорта вслед за изменением координат точки назначения.

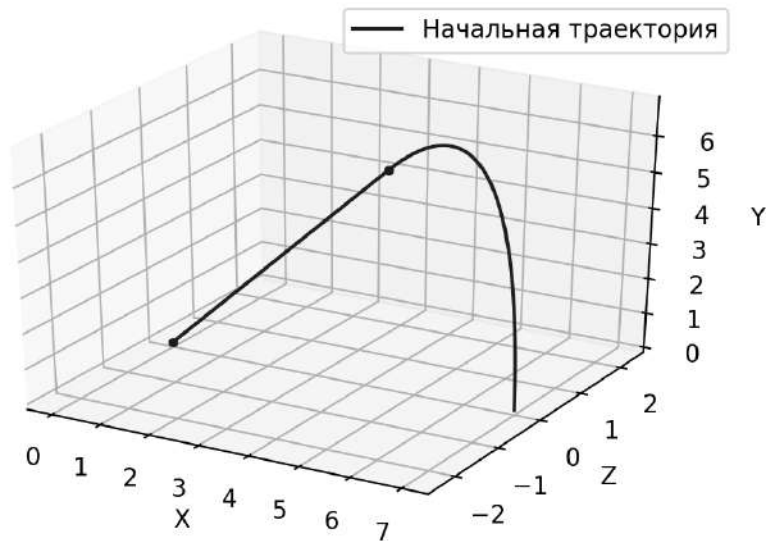


Рис. 2.7. Начальная траектория

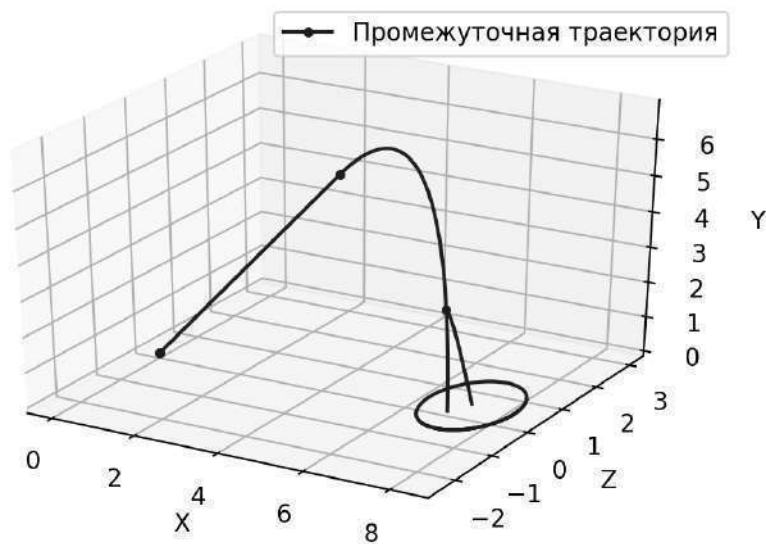


Рис. 2.8. Промежуточная траектория



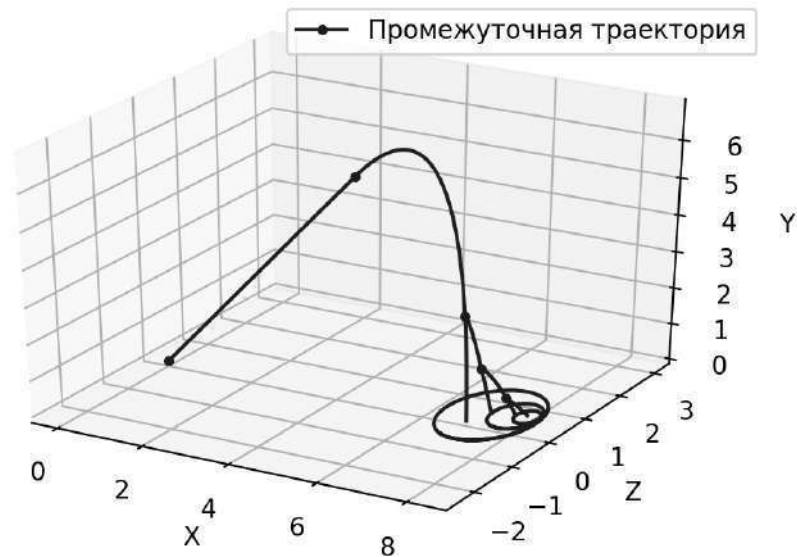


Рис. 2.9. Промежуточная траектория

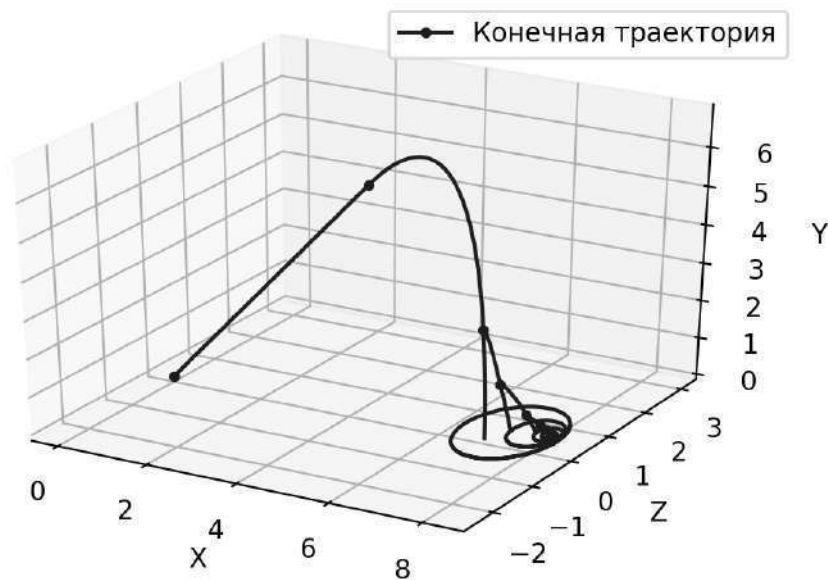


Рис. 2.10. Конечная траектория

С целью верификации модели в процессе создания и применения программы осуществлена проверка согласованности аналитических и численных результатов. В частности, использование формулы (10) позволило найти параметры, оптимальность которых подтвердилась расчетами.

Разработанный модуль входит в состав разработанного программного комплекса Switched System Modeling Complex (SSMC). Модуль позволяет провести численное исследование построенной модели трехмерной технической системы

с переключениями, а также расширить диапазон применения на другие модели технических систем.

### 2.3. Модель с аэродинамическим сопротивлением.

Следует отметить, что рассмотренные в предыдущих разделах параграфа модели допускают возможность аналитического решения задачи Коши на любом из интервалов движения. Однако на практике данное условие обычно не выполняется, и необходимо использование численных методов интегрирования.

Рассмотрим далее трехмерную модель с учетом аэродинамического сопротивления. Для простоты предположим, что движение проекции летательного аппарата имеет линейный характер, а сам летательный аппарат имеет форму шара, индуктивным сопротивлением среды для которого можно пренебречь. Также предполагается, что воздух неподвижен.

Проекцию силы сопротивления воздуха в таком случае можно представить в виде

$$\Phi = \frac{C\rho V^2 S}{2}, \quad (2.11)$$

где  $C$  – коэффициент сопротивления,  $\rho$  – плотность среды,  $V$  – скорость движения,  $S$  – характерная площадь лобового сечения или мидель, для шара равная площади сечения, проходящего через центр. Абсолютный коэффициент воздействия среды  $\frac{C\rho S}{2\sqrt{3}m}$  в скалярной форме по каждой оси движения с учетом (11)

можно записать в виде:

$$\phi = \frac{\Phi}{\sqrt{3}mV^2}.$$

Рассмотрим критерий оптимальности движения, который состоит в минимизации действующих на летательный аппарат сил. Указанный критерий можно записать в виде

$$\int_{t_0}^{\Delta t} \|A\| dt \rightarrow \min, \quad (2.12)$$

где  $\|A\|$  - евклидова норма вектора действующих в системе сил. В соответствии с алгоритмом, представленным в разделе 2.2, представим временной интервал  $T$  в виде суммы интервалов вида

$$T = \sum_{i=0}^n \frac{t_i - t_{\Delta}}{2}. \quad (2.13)$$

Уравнение системы имеет вид:

$$\ddot{x} = A - G - \operatorname{sgn}(\dot{x})\varphi\dot{x}^2, \quad x(t_i) = k, \quad \dot{x}(t_i) = v, \quad (2.14)$$

где  $G = (0, g, 0)^T$ ,  $k, v$  - начальная скорость и начальное положение на рассматриваемом отрезке.

Кроме того, для некоторых значений  $x$ , таких, что  $x$  находится в некоторой шарообразной окрестности радиусом  $\theta$  нулевой точки уравнение (14) может быть сведено к системе

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= A - G, \quad \dot{x} \in [-\theta, \theta], \\ \ddot{x} &= A - G - \operatorname{sgn}(\dot{x})\varphi\dot{x}^2, \quad \dot{x} \notin [-\theta, \theta]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для системы (15), в частности, можно отметить наличие нескольких поверхностей разрыва. В указанном случае основной эффект от введения переключений такого типа заключается в упрощении расчетов, однако в других случаях это может быть обусловлено изменением качественных особенностей динамики системы.

Для непрерывной системы (14) можно построить фазовые траектории в двух плоскостях методом вариации параметров  $\varphi$ ,  $A_{x_0}, A_{x_1}$  аналогично построению решений дифференциального включения, которое является обобщением (14). Фазовые кривые для модели (14) относительно изменения коэффициента сопротивления среды представлено на рис. 2.11.

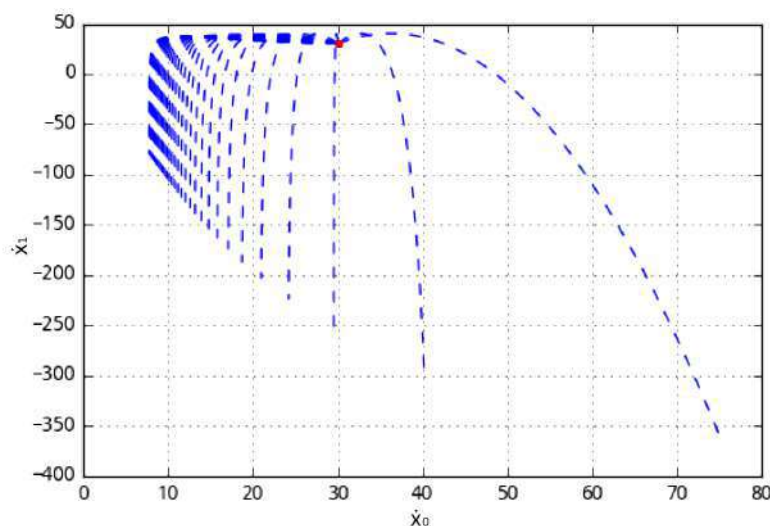


Рис. 2.11. Фазовые кривые для модели (14) относительно изменения коэффициента сопротивления среды

В качестве начальных условий взяты значения  $k = (0, 30)^T$ ,  $v = (30, 10)^T$ ,  $\varphi \in [0, 0.05]$ . Интервал изменения  $\varphi$  выбран таким образом, чтобы продемонстрировать качественное изменение динамики системы. Значению  $\varphi=0$  соответствует крайняя правая ветвь фазового портрета. При  $\varphi \rightarrow 0$  система (14) сводится к системе (7), которая не является разрывной и не имеет нелинейных компонент.

Фазовые траектории при изменении  $\varphi \in [0, 0.2]$  для значений  $x, y$  представлены на рис. 2.12.

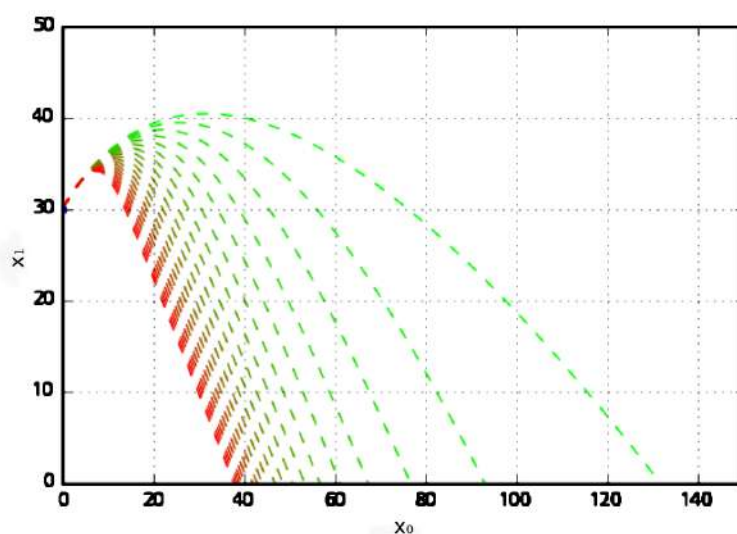


Рис. 2.12. Траектории для модели (14) относительно изменения коэффициента сопротивления среды

Траектории, представленные на рисунке светлыми линиями, получены при значениях  $\varphi$ , стремящихся к нулю, траектории, представленные темными линиями, получены при  $\varphi \rightarrow 0.2$ . Можно отметить, что при больших значениях  $\varphi$  траектория движения после достижения экстремума стремится к прямолинейной.

Следует отметить, что аналитическое решение задачи Коши для (14) невозможно по нескольким причинам – из-за разрывной правой части и нелинейной зависимости от скорости. В связи с этим возникает необходимость сформулировать дополненный критерий качества управления исходя из определения, приведенного в разделе 1.3.

#### 2.4. Обобщенная модель.

Далее рассматривается обобщение модели (4) на случай нестационарных возмущений. Введем дополнительное ограничение  $\|\dot{x}(t_2)\| = 0$  в конечной точке. Пусть выполнены те же условия, что и для модели (4). Векторная тяга определяется функционалами от времени, что позволяет перейти от движения в два интервала к единственному интервалу  $t \in (0, t_2)$ .

Модель задается многомерным дифференциальным уравнением вида

$$m\ddot{x} = PT + mG, \quad (2.16)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния системы,  $G$  – вектор потенциального поля, а матрица  $P$  и вектор  $T$ , задающие параметрические возмущения, имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nk} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Критерий оптимальности для модели (16) имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_2} \|PT\| dt \rightarrow \min.$$

Модель (16) является обобщением моделей (4) и (7) для инерциальной системы отсчета в прямоугольных координатах и может с заданной точностью

и на заданной области аппроксимировать движения динамической системы второго порядка. Важным отличием модели (16) от моделей (4) и (7) является то, что она позволяет реализовать программное управление с более строгими условиями, когда функция управления является кусочно линейной или кусочно гладкой.

Далее рассмотрим конкретизацию модели (16) на случай, когда  $n=k$  и максимальная степень полиномов в правой части равна двум. Матрицу  $P$  для этой конкретизации обозначим через  $P_l$ . Тогда модель, являющаяся конкретизацией модели (16), примет вид

$$m\ddot{x} = P_l T + mG, \quad (2.18)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния системы,  $G$  – вектор потенциального поля, матрица  $P_l$  имеет вид:

$$P_l = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & 0 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}.$$

Анализ модели (18) с учетом оптимальности сводится к нахождению матриц  $P$ , соответствующих поставленной задаче. Пусть

$$\begin{aligned} P_1(t) &= p_0 + p_1 t, \\ P_2(t) &= p_2 + p_3 t + p_4 t^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Для достижения высоты  $h$  требуется выполнение условий:

$$P_1(0) > 0, \quad P_2(0) > g.$$

Для достижения нулевой скорости в конечной точке требуется выполнение условий:

$$P_1(t_2) < 0, \quad P_2(t_2) > g, \quad \dot{P}_2(0) < 0, \quad \dot{P}_2(t_2) > 0.$$

С учетом (19) получим систему неравенств

$$\begin{aligned} p_0 &> 0, \quad p_0 + p_1 t_2^2 < 0, \\ p_2 &> g, \quad p_2 + p_3 t_2 + p_4 t_2^2 > g, \\ p_3 &< 0, \quad p_3 + 2p_4 t_2 > 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

откуда следует, что  $p_0 > 0, p_1 < 0, p_2 > g, p_3 < 0, p_4 > 0$ .

При условии, что  $t_2$  – правый конец интервала, определяющего время движения, получим

$$\begin{aligned}x(t_2) &= \frac{t_2^2(3p_0 + p_1 t_2)}{6m} = l, \\ \dot{x}(t_2) &= \frac{p_1 t_2^2}{6m} + \frac{t_2(3p_0 + p_1 t_2)}{3m} = 0,\end{aligned}$$

откуда следует

$$p_0 = \frac{6lm}{t_2^2}, \quad p_1 = -\frac{12lm}{t_2^3}. \quad (2.21)$$

Далее, пусть  $t_1 = \frac{t_2}{\tau}$ ,  $\tau > 1$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned}y(t_2) &= \frac{t_2}{12m}(6p_2 - 6gm + 2p_3 t_2 + p_4 t_2^2) = 0, \\ \dot{y}(t_2) &= \frac{t_2}{6m}(6p_2 - 6gm + 3p_3 t_2 + 2p_4 t_2^2) = 0, \\ y(t_1) &= \frac{t_2^2}{12m\tau^4}(2p_3 t_2 \tau + p_4 t_2^2 + 6\tau^2(p_2 - gm)) = h, \\ \dot{y}(t_1) &= \frac{t_2}{6m\tau^3}(3p_3 t_2 \tau + 2p_4 t_2^2 - 6\tau^2(gm - p_2)) = 0.\end{aligned}$$

Из соотношений (21) получим

$$p_2 = \frac{m(gt_2^2 + 32h)}{t_2^2}, \quad p_3 = -\frac{192hm}{t_2^3}, \quad p_4 = \frac{192hm}{t_2^4}, \quad \tau = 2. \quad (2.22)$$

Нетрудно заметить, что для модели (18) матрица  $P_l$  может быть записана в виде

$$P_l = \begin{pmatrix} \frac{6lm}{t_2^2} & -\frac{12lm}{t_2^3} & 0 \\ \frac{m(gt_2^2 + 32h)}{t_2^2} & -\frac{192hm}{t_2^3} & \frac{192hm}{t_2^4} \end{pmatrix},$$

где  $t_2$  – время достижения конечной точки.

Из (21), (22) следует единственность траекторий, удовлетворяющих постановке задачи для каждого значения  $t_2$ . В таком случае выполнение критерия оптимальности сводится к выбору оптимального значения  $t_2$  в зависимости от  $h$ ,

$l, m$ . Если представить критерий оптимальности как функцию  $\varphi(t_2)$ , то аналитический вид экстремумов оказывается слишком громоздким. В связи с этим, целесообразно провести численную оценку с помощью критерия оптимальности, приведя его к виду

$$\begin{aligned} & \frac{p_3 p_4}{2} t_2^4 + \frac{p_4^2 t_2^5}{5} + \frac{t_2^3}{3} (p_1^2 + 2p_2 p_4 + p_3^2) + \\ & + t_2^2 (p_0 p_1 + p_2 p_3) + t_2 (p_0^2 + p_2^2) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Очевидно, что задача одномерной безусловной оптимизации с учетом критерия (23) не представляет трудностей в реализации программы для ЭВМ. Написана программа на языке Python. На основе разработанной программы найдено оптимальное значение  $t_2$ . На рис. 2.13 представлена оптимальная кривая с учетом значений  $h = 5, l = 5, m = 1$ . По оси абсцисс представлено время движения, по оси ординат – значения критерия оптимальности.

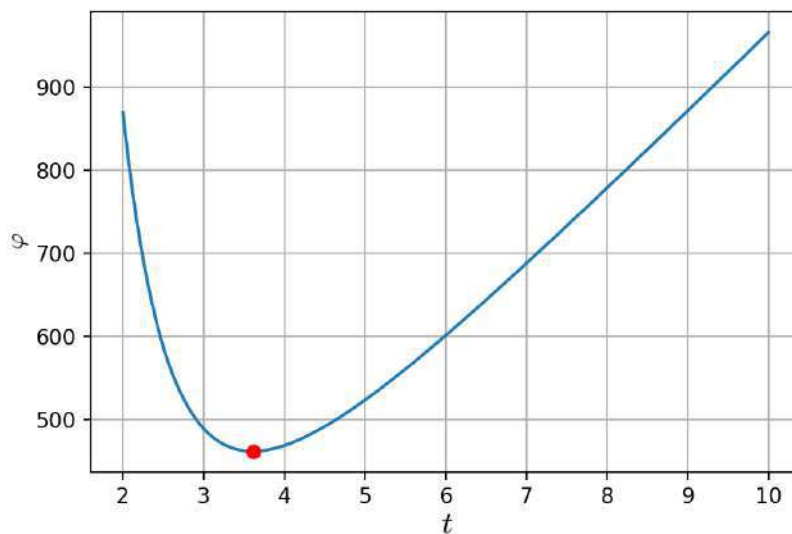


Рис. 2.13. График функции, задающей критерий оптимальности  
при  $h = 5, l = 5, m = 1$

При выборе шага дифференцирования 0.01 оптимальное время составляет 3.616 с.

На основе модели (16) можно сформулировать расширенную задачу оптимального управления. Существенным отличием от задачи, сформулирован-



ной в разделе 1.3, является комплексный критерий качества управления, который имеет вид:

$$\bar{J}(u(t)) \rightarrow \min, \quad \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \rightarrow \min, \quad (2.24)$$

где  $\bar{J}$  – критерий оптимальности управления,  $\varepsilon_i$  – отклонение траектории от заданных фазовых ограничений на  $i$ -м отрезке. Необходимо отметить, что вопросы скалярного ранжирования критериев (24) решаются исходя из условий постановки задачи. Решение рассмотренной задачи возможно с применением численных методов и алгоритмов искусственного интеллекта.

### § 3. Моделирование и оптимизация управляемых систем на основе методов глобальной параметрической оптимизации и нейросетевых алгоритмов

#### 3.1. Численные алгоритмы оптимизации в задачах моделирования технических систем.

В разделе 2.3 рассмотрен простой случай – оптимизация унимодальной функции одной переменной для модели (2.18), что не представляет трудностей. Задача численной параметрической оптимизации для числа параметров  $n > 3$  многомодовых целевых функций является достаточно сложной.

В обобщенных случаях модели (2.18) с учетом размерности матрицы  $P_{n \times k}$ , при  $n > 2$ ,  $k > 2$  поиск оптимальных параметров может приводить к функции, сколь угодно близкой к глобально оптимальной. При этом в задачу нахождения оптимальных параметров модели входит не только нахождение минимума критерия оптимальности, но и нахождение матрицы коэффициентов на интервале  $T(0, t_2)$ . Для решения указанной задачи необходимо использование численных методов оптимизации. Тем не менее, большинство прямых методов оптимизации не дает удовлетворительных решений даже при  $n=k$  и максимальной степени полинома, равной двум. Для решения проблем такого типа существует достаточно большое количество эвристических алгоритмов оптимизации, в частности:

- эволюционные алгоритмы (генетический алгоритм, эволюционные стратегии, дифференциальная эволюция);
- бионические алгоритмы (рой частиц, колония муравьев);
- алгоритмы, инспирированные неживой природой (гравитационный поиск и др.);
- алгоритмы, инспирированные человеческим обществом (алгоритм эволюции разума и др.);
- другие алгоритмы (миграционный алгоритм, рассеянный поиск).

Алгоритмы глобальной поисковой оптимизации рассматривались многими авторами (см., например, [31, 38, 63, 66, 67]). Рассмотрим более подробно метод дифференциальной эволюции, который является глобальным методом

оптимизации, использующим основные идеи генетических алгоритмов. Отличия указанного метода от генетических алгоритмов заключаются в том, что данные в алгоритме не представляются в виде бинарных последовательностей, а для осуществления мутаций используется не внешний источник шума, а разница между случайными элементами популяции. Это дает достаточно быструю сходимость при движении вдоль «оврагов» многомерных функций.

Реализация данного алгоритма входит в состав распространенной библиотеки математических вычислений Scipy. Для инициализации начальной популяции и ускорения сходимости требуется предварительная оценка области, в которой могут лежать искомые значения.

С использованием (2.21) и (2.22) проведена предварительная оценка параметров для системы (2.18). Результат представлен в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Коэффициенты матрицы  $P_i$ , полученные аналитическим и численным методами

Метод/Значения	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$
Дифференциальная эволюция	3.224939	-2.114714	27.008843	-33.853466	11.099497
Аналитические значения	3.333333	-2.222222	27.577777	-35.555555	11.851851

На первом этапе для модели (2.18) был разработан алгоритм адаптивного поиска (алгоритм 1 «Адаптивный поиск»), базирующийся на отслеживании движения вдоль направления наибольшего убывания целевой функции.

Основная идея алгоритма адаптивного поиска основывается на том, что на каждом шаге алгоритма происходит некоторое количество «испытаний» вектора, среди которых выбирается тот, в направлении которого оптимизируемая функция возрастает или убывает быстрее всего. Затем происходит сложение вектора состояния системы и найденного вектора. Такой алгоритм, помимо возможности оптимизации неаналитических функций, имеет некоторые преимущества по сравнению с детерминированными градиентными алгоритмами.

В частности, на основе информации, полученных от множества «испытаний», можно судить о характере оптимизируемой в точке приближения решения (линейность/нелинейность, крутизна в различных направлениях), а затем использовать эту информацию для более точной подстройки алгоритма. Кроме того, варьирование нормы вектора броска может служить достаточно эффективным способом выхода из локальных минимумов.

Векторное поле градиента и векторное поле направлений движения алгоритма 1 «Адаптивный поиск» для функции  $f(x) = \sin(x)\sin(y)$  представлены на рисунках 3.1 и 3.2 соответственно.

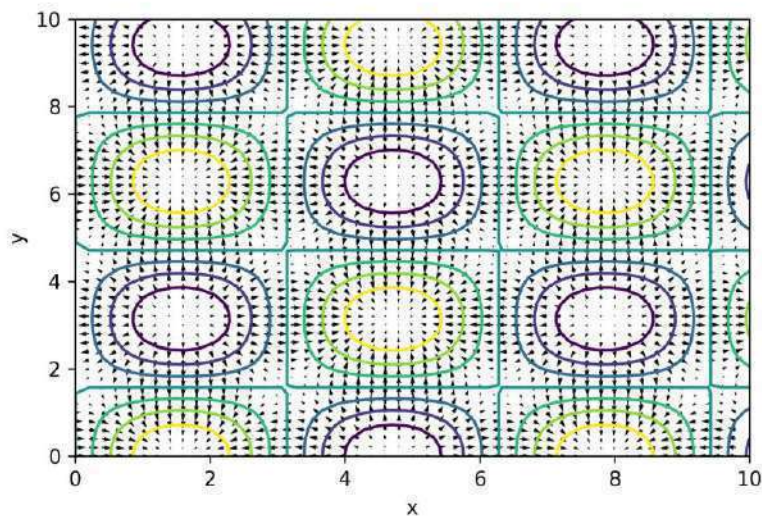


Рис. 3.1. Векторное поле градиента функции  $f(x) = \sin(x)\sin(y)$

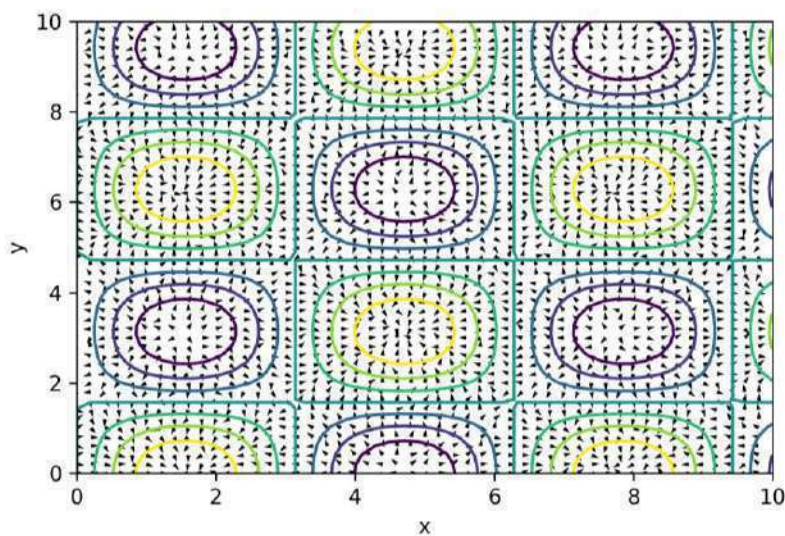


Рис. 3.2. Векторное поле направлений движения с учетом алгоритма «Адаптивный поиск»

Алгоритм 1 «Адаптивный поиск» состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Оценка области допустимых решений и выбор первого приближения решения.

*Шаг 2.* Численный расчет направления градиента и его значения. Для этого в окрестности точки выбранных параметров выбирается гиперсфера радиуса  $\zeta$ , вдвое превышающего шаг дискретизации алгоритма. Задача нахождения градиента в таком случае сводится к нахождению такого радиус-вектора  $\vec{K}$ , следование вдоль которого удовлетворяет условию

$$|f(x_i) - f(x_{i+1})| \rightarrow \max, \quad (3.1)$$

где  $f(x_i)$  – значение критерия оптимальности на  $i$ -й итерации. Предполагается, что критерий оптимальности выполнен, если выполняются следующие условия:

1) существует вектор  $\vec{G}$ , являющийся радиус-вектором гиперсферы, однозначно задающий направление наибольшего возрастания или убывания функции;

2) вектор  $\vec{K}$  находится в окрестности вектора  $\vec{G}$ , ограниченной сектором  $O$ , который характеризуется углом точности решения  $u$ . Для этого согласно равномерному распределению находятся значения критерия (1) для некоторого количества случайных радиус-векторов, из них выбирается один, наиболее удовлетворяющий (1). Количество проверок выбирается в зависимости от размерности задачи и математического ожидания попаданий в сектор  $O$ .

*Шаг 3.* Перемещение точки приближенных параметров в сторону выбранного радиус-вектора. Уменьшение нормы шага либо в соответствии с дроблением шага, либо в соответствии с тангенциальной функцией от найденной нормы градиента.

*Шаг 4.* Проверка критерия оптимальности исследуемой системы и условий останова. Если они достигнуты, алгоритм завершается, в противном случае переходим к шагу 2.

Предложенный алгоритм получил реализацию в виде программы на языке Python. Для тестирования сходимости указанного алгоритма использована функция Розенброка. Графическая интерпретация работы алгоритма представ-

лена на рис. 3.3, где по оси абсцисс представлено количество произведенных алгоритмом шагов, по оси ординат – абсолютное отклонение от глобального минимума.

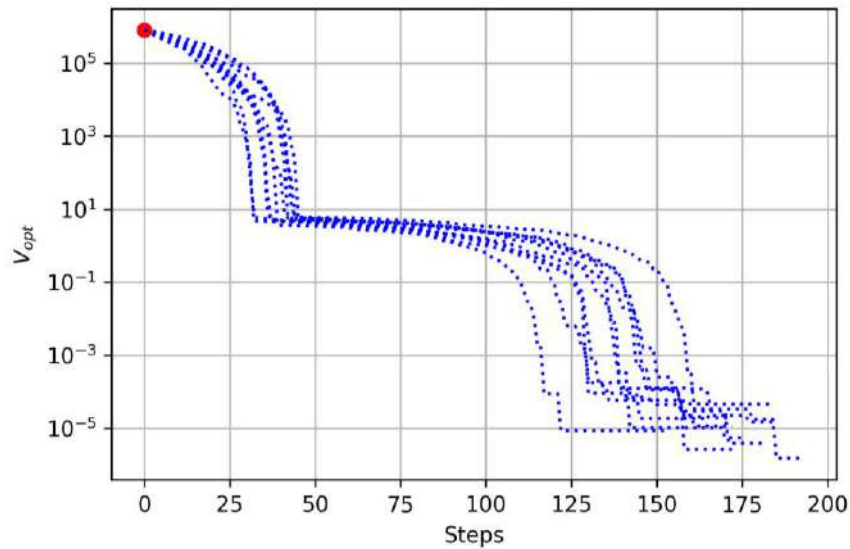


Рис. 3.3. Графическая интерпретация работы алгоритма «Адаптивный поиск» с применением функции Розенброка

Важно отметить, что представляет интерес случай, когда функции параметров  $P_{ij}$  являются многозначными отображениями. При этом модель (2.18) можно интерпретировать как однозначную реализацию соответствующего дифференциального включения.

Далее рассматривается построение алгоритма на основе роевой оптимизации. К алгоритмам типа роевой оптимизации относятся, в частности, алгоритмы муравьиных колоний, алгоритмы стаи птиц, алгоритмы гравитационного и электромагнитного поиска. Построенный алгоритм является модификацией и развитием алгоритма гравитационного поиска, рассмотренного в [87] и в других работах.

Основная идея алгоритма гравитационного поиска заключается в имитационном моделировании гравитационного взаимодействия частиц, представляющих собой векторы значений оптимизируемой функции. Для каждой частицы

определяется масса, зависящая от соответствующего значения целевой функции. Взаимодействие происходит согласно закону всемирного тяготения

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где  $m$  – массы взаимодействующих частиц,  $r$  – радиус-вектор,  $G$  – значение гравитационной постоянной. Для ускорения сходимости, как правило, рассматривают выражение вида

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

С каждой эпохой алгоритма значение  $G$  убывает согласно определенному закону, в результате чего алгоритм останавливается.

Достоинством алгоритма гравитационного поиска является одна из лучших скоростей сходимости среди алгоритмов прямой оптимизации [87]. Основным недостатком данного алгоритма является то, что на каждом шаге требуется численное решение задачи движения многих тел, что представляет значительную вычислительную сложность.

Разработанный для применения к моделям вида (2.18) алгоритм 2 «Потенциальный поиск», относящийся к алгоритмам роевой оптимизации, состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Инициализация роя частиц в виде равномерного распределения. Предварительная оценка области, в которой лежит решение, значительно ускоряет сходимость.

*Шаг 2.* Оценка масс всех частиц.

*Шаг 3.* Поиск частицы с наибольшей массой.

*Шаг 4.* Расчет векторов движения для каждой частицы. Пусть  $\omega_c$  – радиус-вектор рассматриваемой частицы,  $\omega_{\max}$  – радиус-вектор частицы с наибольшей массой. Тогда вектор движения для  $v_c$  рассчитывается по следующей формуле:

$$\omega = G \frac{(\omega_c - \omega_{\max})(m_c m_{\max})}{\|\omega_c - \omega_{\max}\|},$$

где  $m$  – масса соответствующих частиц.

*Шаг 5.* Подсчет новых положений частиц и уменьшение значения  $G$  согласно заданному закону.

*Шаг 6.* Проверка критерия останова. В качестве критерия останова можно принимать как минимальное значение  $G$ , минимальное значение среднеквадратического отклонения частиц роя от частицы с наибольшей массой (разброс), скорость сходимости алгоритма, либо комбинацию этих показателей. Если критерий останова не выполняется, следует перейти к шагу 2.

*Шаг 7.* Завершение работы алгоритма, вывод последнего наилучшего значения.

На рис. 3.4 приведена графическая интерпретация работы алгоритма алгоритма 2 «Потенциальный поиск», показывающая скорость сходимости алгоритма для функции Розенброка, где по оси абсцисс представлено количество произведенных алгоритмом шагов, по оси ординат – абсолютное отклонение от глобального минимума.

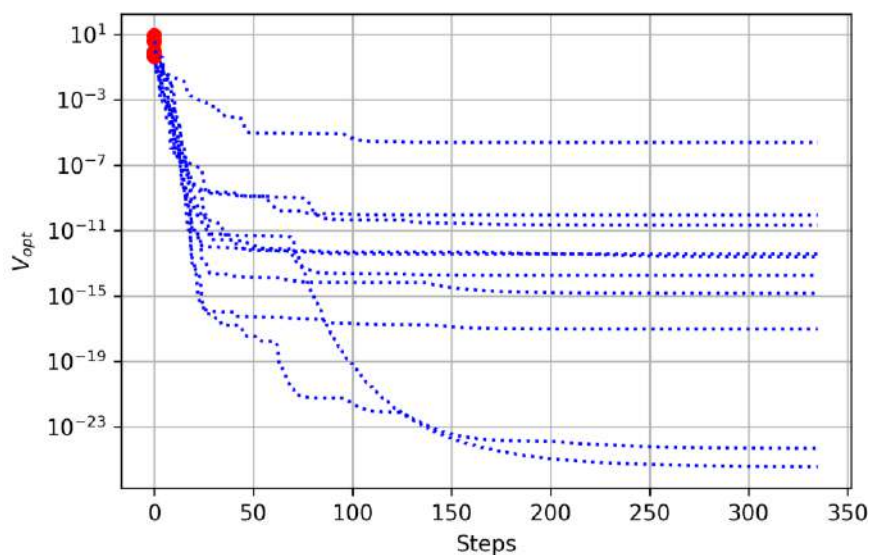


Рис. 3.4. Графическая интерпретация работы алгоритма «Потенциальный поиск» с применением функции Розенброка



Рассмотренный алгоритм показывает устойчивую сходимость к минимуму, однако имеет достаточно большой разброс в области малых значений, в результате чего формулирование критерия останова является достаточно сложной задачей.

Проведен сравнительный анализ разработанных алгоритма 1 «Адаптивный поиск» и алгоритма 2 «Потенциальный поиск» с алгоритмом дифференциальной эволюции, входящей в состав математической библиотеки Scipy языка Python [59]. На рис. 3.5 приведена графическая интерпретация алгоритма дифференциальной эволюции, показывающая скорость сходимости с учетом применения функции Розенброка.

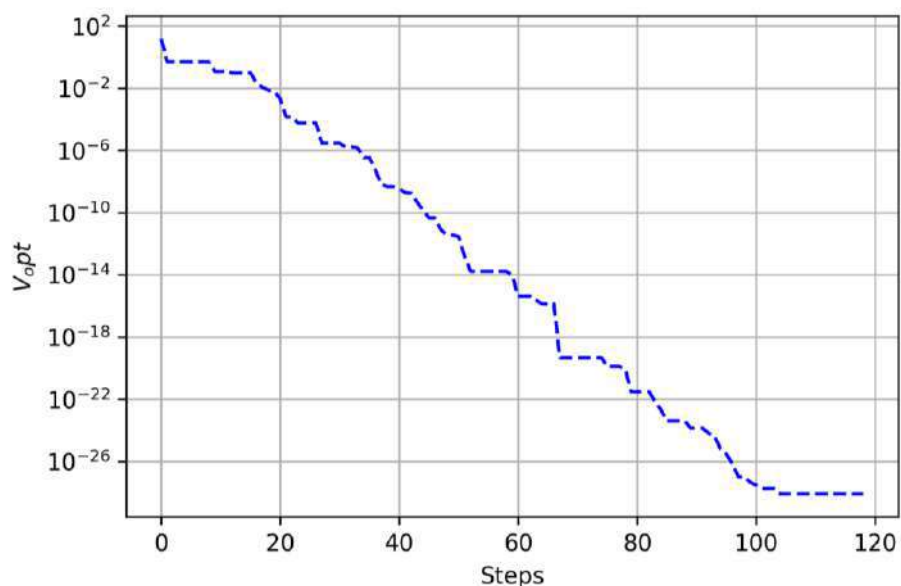


Рис. 3.5. Дифференциальная эволюция для функции Розенброка

При реализации рассмотренных алгоритмов оптимизации возникает ряд ограничений, которые необходимо учитывать при разработке компьютерной программы. Одним из указанных ограничений является сходимость к локальным экстремумам.

Для алгоритма 1 «Адаптивный поиск» указанное ограничение компенсируется путем детектирования нахождения приближения в локальном минимуме, затем последующее расширение зоны поиска. Тем не менее, нахождение

параметров данного алгоритма, универсальных по отношению к различным целевым функциям, является сложной задачей.

Для алгоритма 2 «Потенциальный поиск» ограничение на сходимость к локальным экстремумам можно ослабить, варьируя параметры алгоритма, такие как количество частиц, скорость убывания коэффициента притяжения, размерность стохастических параметров алгоритма.

Другим ограничением является чувствительность численных алгоритмов к критериям останова, которые необходимо задавать пропорционально шагу дискретизации используемого численного алгоритма решения уравнений.

Модельные эксперименты показали, что точность и производительность алгоритма 2 «Потенциальный поиск» являются более высокими по сравнению с алгоритмом 2 «Адаптивный поиск» и сравнимы с алгоритмом дифференциальной эволюции.

Использование нейросетевых алгоритмов позволяет проводить аппроксимацию представленных моделей, а также допускает использование экспериментальных данных [73]. При стационарном подходе возможно достижение высокой точности при небольшом времени обучения, нестационарный подход требует дальнейшего развития для получения результатов, ценных для практического применения. Нейросетевые алгоритмы будут использованы для генерации переключений в разделе 3.2.

К преимуществам рассмотренных в параграфах 2 и 3 моделей и алгоритмов можно отнести следующее: 1) модель (2.18) обобщает ряд классов моделей технических систем, к которым относятся, в частности, модели, предложенные в разделах 1 и 2, а также допускает аппроксимацию с использованием искусственных нейронных сетей; 2) возможность использования для обучения нейронных сетей; 3) возможность модификации алгоритмов для параллельных вычислений.

### 3.2. Построение и анализ линейной модели с переключениями при наличии нестационарных режимов.

Рассмотрим модель, являющуюся модификацией модели (2.18). Пусть  $I(a_1; b_1; a_2; b_2)$  – произвольный вектор начальных условий. Тогда модель (2.18) примет вид

$$m\ddot{x} = PT + mG + D, \quad P \in \Gamma, \quad (3.2)$$

где  $\Gamma$  – дискретное отображение, ставящее в соответствие определенным моментам времени соответствующую матрицу коэффициентов,  $D$  – вектор внешних возмущений, который задается вектор-функцией  $D(t, x)$ . Для указанной функции справедливо неравенство:  $\forall t, x: \|D(t, x)\| < \lambda$ , где  $\lambda$  – ограничение на максимальное возмущение.

Нахождение матрицы коэффициентов рассмотрим в двумерном случае. С учетом постановки задачи будем использовать матрицу коэффициентов вида

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим более подробно вектор-функцию  $D(t, x)$ . Для постановки задачи поиска оптимальных переключений для модели (2) в общем случае не существует гарантированного решения. Абсолютное отклонение от невозмущенной траектории характеризуется выражением

$$\int_0^{t_2} \|D(t, x)\| dt.$$

Можно предположить, что оптимальными являются переключения на поздних этапах движения, поскольку значение интеграла убывает при уменьшении пределов интегрирования. Кроме того, если изучить данный интеграл, можно прийти к выводу, что его значение стремится к нулю при увеличении количества переключений для системы (6).

Если в первом приближении пренебречь вектором  $D$ , то уравнения (2) примут вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= p_{11} + p_{12}t, \\ m\ddot{x}_2 &= p_{21} + p_{22}t - mg. \end{aligned}$$

Решение указанных линейных уравнений в аналитическом виде с учетом начальных и граничных условий является простой задачей.

Пусть  $B(l, 0, 0, 0)$  – вектор состояния в момент времени  $t_2$ . Тогда матрица  $P$  примет вид

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2m(-2t_2b_1 + 3l - 3a_1)}{t_2^2} & \frac{6m(t_2b_1 - 2l + 2a_1)}{t_2^3} \\ mg - \frac{4b_2m}{t_2} - \frac{6ma_2}{t_2^2} & \frac{6m(t_2b_2 + 2a_2)}{t_2^3} \end{pmatrix}.$$

Далее опишем алгоритм 3 «Генерация переключений с возрастающей частотой», являющийся модификацией разработанного в разделе 2.2 алгоритма поиска оптимальных переключений. Алгоритм 3 состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Задать начальные условия  $I$  для модели (6).

*Шаг 2.* Совершить одну итерацию численного алгоритма интегрирования.

*Шаг 3.* Проверка условия останова. Если оно выполняется, алгоритм закончен. В противном случае нужно перейти к следующему шагу.

*Шаг 4.* Если  $t = \frac{t_2}{2}$ , то перейти к следующему шагу. В противном случае вернуться к шагу 2.

*Шаг 5.*  $t_2 := t_2 - t$ ;  $t = 0$ .

*Шаг 6.* Расчет новых значений  $P$ . Переход к шагу 2.

*Шаг 7.* Оценка новых вероятностей выпадения единицы для стохастической функции. Переход к шагу 2.

Блок-схема алгоритма 3 представлена на рис. 3.6. Генератор переключений, основанный на алгоритме 3, был реализован в виде программы на языке Python 3. Далее приведем пример использования указанного генератора для изучаемой модели с переключениями.

Пусть при заданных значениях  $I(0,5,5,5)$ ,  $t_2 = 3$ ,  $B(5,0,0,0)$  происходит перемещение конечной точки вдоль оси  $Ox_1$ , которое оценивается в момент переключения. Рассмотрим возмущения комбинированного типа, задаваемые вектор-функцией вида

$$D = \begin{pmatrix} \rho \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) \dot{x}_1^2 \\ \rho \operatorname{sgn}(\dot{x}_2) \dot{x}_2^2 \end{pmatrix} + \Omega, \quad \Omega = \begin{cases} 0, \\ (-s, s)^T, & 1 < t < 3. \end{cases} \quad (3.3)$$

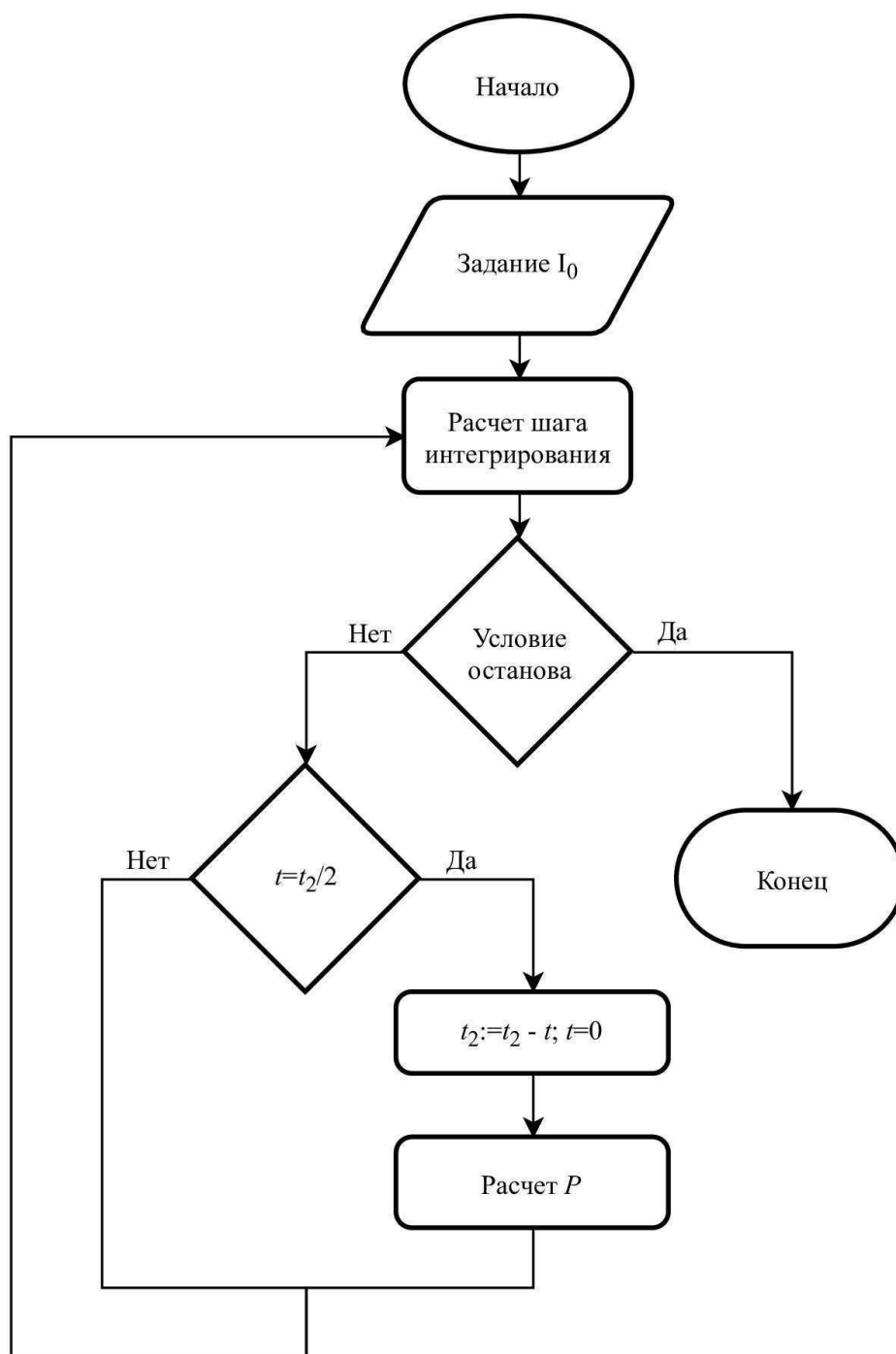


Рис. 3.6. Блок-схема алгоритма «Генерация переключений с возрастающей частотой»

Траектории движения точки для конкретизации модели (2) с учетом возмущений представлены на рис. 3.7.

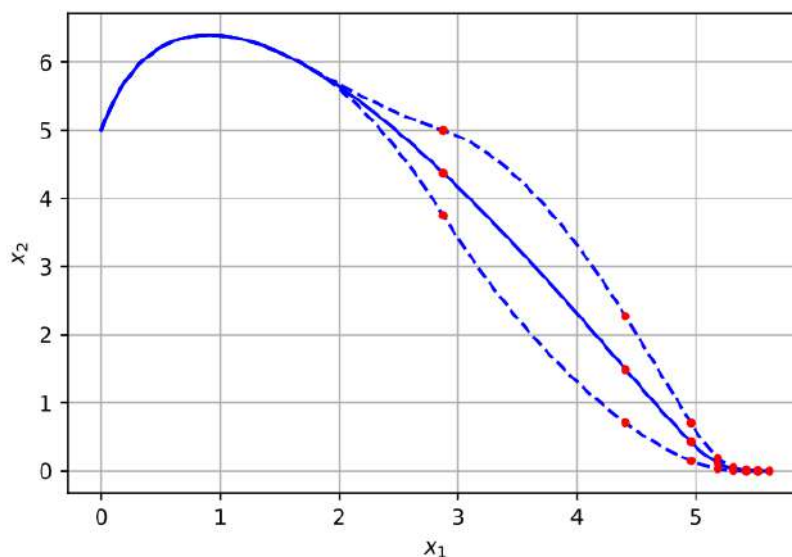


Рис. 3.7. Траектории движения точки для модели с учетом возмущений

На рис. 3.10 сплошной линией представлена траектория с учетом аэродинамического сопротивления, пунктирной линией обозначены отклонения, вызванные вариацией различных ненулевых значений  $s$ .

Далее приведем алгоритм 4 «Стохастический алгоритм генерации переключений». Основная идея алгоритма заключается в том, что момент переключения выбирается случайно с вероятностью, зависящей от условий движения. Алгоритм 4 состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Задать начальные условия  $I$  для модели (2).

*Шаг 2.* Совершить одну итерацию численного алгоритма интегрирования.

*Шаг 3.* Проверка условия останова. Если оно выполняется, алгоритм закончен. В противном случае нужно перейти к следующему шагу.

*Шаг 4.* Проверка значения стохастической функции  $\chi(t)$ . Если значение равно единице, нужно перейти к следующему шагу. В противном случае следует перейти к шагу 2.

*Шаг 5.* Расчет новых значений для  $P$ .

*Шаг 6.* Оценка новых вероятностей выпадения единицы для стохастической функции. Переход к шагу 2.

Блок-схема алгоритма 4 представлена на рис. 3.8.

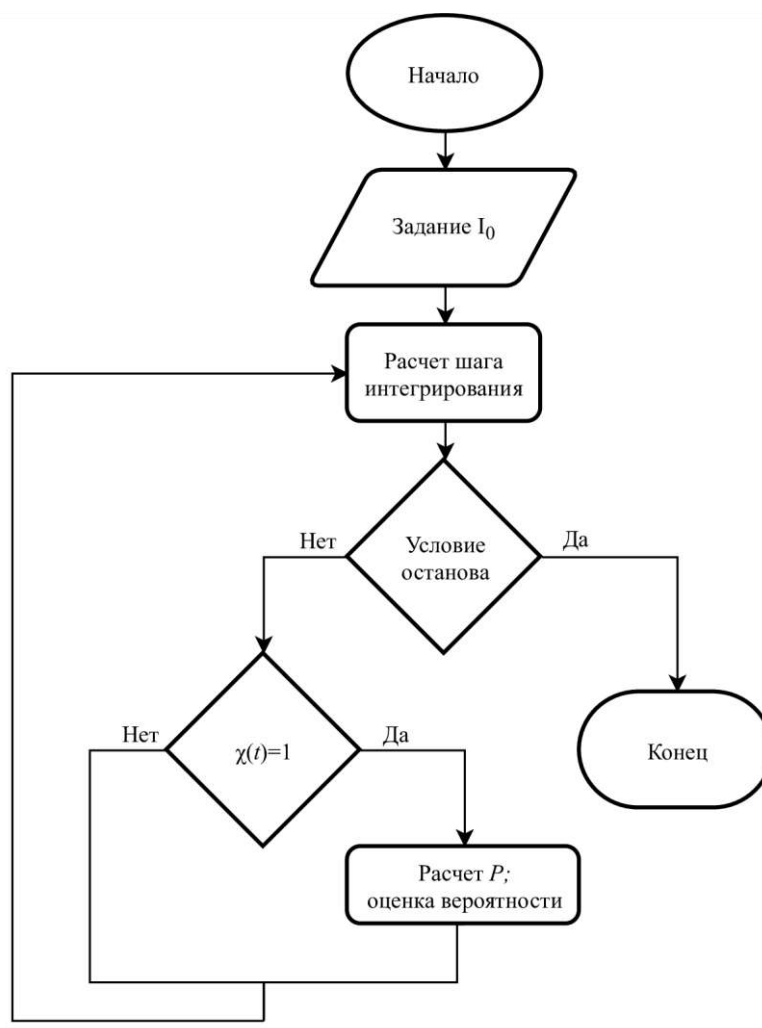


Рис. 3.8. Блок-схема алгоритма «Стохастический алгоритм генерации переключений»

Далее опишем алгоритм 5 «Нейросетевой алгоритм генерации переключений». В указанном алгоритме используется нейросеть с топологией, представленной на рис. 3.9.

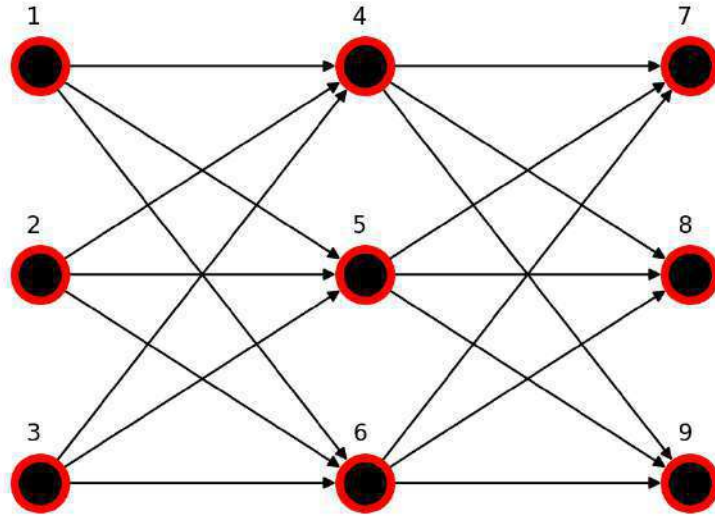


Рис. 3.9. Топология нейросети для алгоритма 5

Введем следующие обозначения:  $\hat{t} = t_2 - t$  – остаточное время движения точки,  $v_r = v_e - v$  – вектор соответствия граничным условиям, где  $v = (x, \dot{x})$ ,  $v_e$  – фазовый вектор в конечной точке.

Пусть на вход 2 нейросети подается значение  $\|v_r\|$ , на вход 3 подается значение  $\hat{t} = t_2 - t$ . Вход 1 связан с выходом 9 через оператор единичной задержки. Возможные значения  $s$  выходов 7, 8 образуют пространство  $R^2$ . Определим непустое множество  $S \in R^2$ , такое, что при  $s \in S$  переключение модели осуществляется. Тогда нейросеть можно представить функционалом вида

$$f(c_{i-1}, \hat{t}, \|v_r\|) = (c_i, s), \quad (3.4)$$

где  $s$  – память сети.

Алгоритм 5 «Нейросетевой алгоритм генерации переключений» состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Настроить нейросетевой регулятор.

*Шаг 2.* Совершить одну итерацию численного алгоритма интегрирования.

*Шаг 3.* Проверка условия останова. Если оно выполняется, алгоритм закончен. В противном случае нужно перейти к следующему шагу.



*Шаг 4.* Расчет выводов нейросетевого генератора переключений. В случае, если полученный вектор попадает в область переключений, перейти к следующему шагу. В противном случае следует перейти к шагу 2.

*Шаг 5.* Расчет новых значений  $P$ .

*Шаг 6.* Переход к шагу 2.

В отличие от алгоритмов 3 и 4, представленный выше алгоритм 5 включает в себя разработанный алгоритм обучения, получивший название «Алгоритм обучения нейросети» (алгоритм 6). Указанный алгоритм состоит из следующих шагов:

*Шаг 1.* Создать нейросеть с произвольными весовыми коэффициентами.

*Шаг 2.* Выполнить алгоритм переключений и получить траекторию.

*Шаг 3.* Подсчитать критерии эффективности переключений.

*Шаг 4.* Если критерий останова выполняется, работа алгоритма завершается. В противном случае переход к шагу 5.

*Шаг 5.* Оптимизировать весовые коэффициенты.

*Шаг 6.* Перейти к шагу 2.

Алгоритм 6 «Обучение нейросети» реализует обучение без учителя, при котором в результате работы алгоритма 5 рассчитываются весовые коэффициенты, позволяющие нейросети быть инвариантной по отношению к внешним возмущениям, которые явно не учитываются [73].

На рис. 3.10 представлен пример области пространства выходов, в которой осуществляются переключения. Размер данной области выбирается таким образом, чтобы обеспечить достаточно высокую скорость обучения.

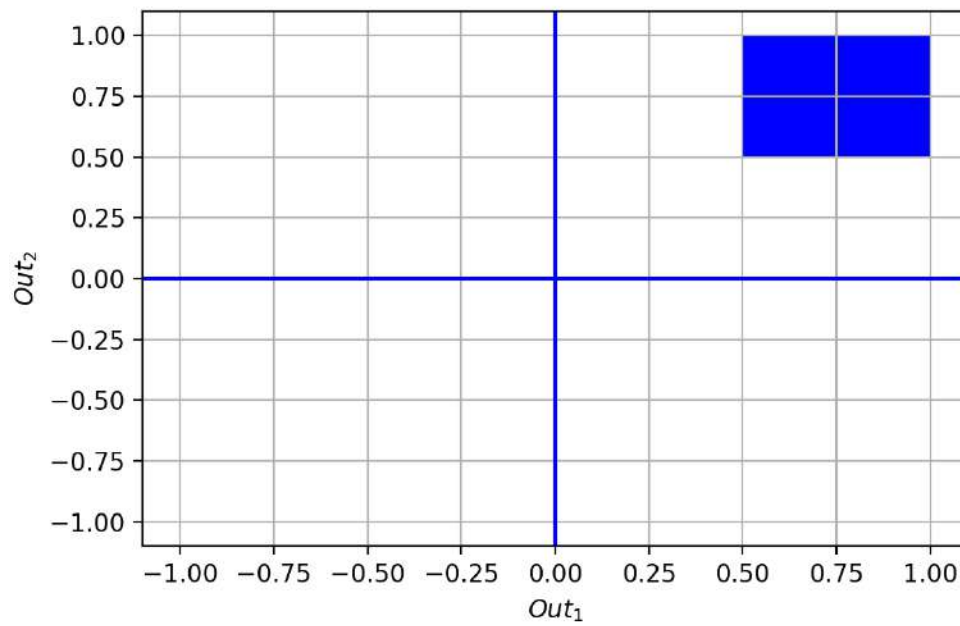


Рис. 3.10. Область активации переключений

На рис. 3.11 представлен графический вид траектории движения точки с применением обученной с помощью алгоритма 6 нейросети.

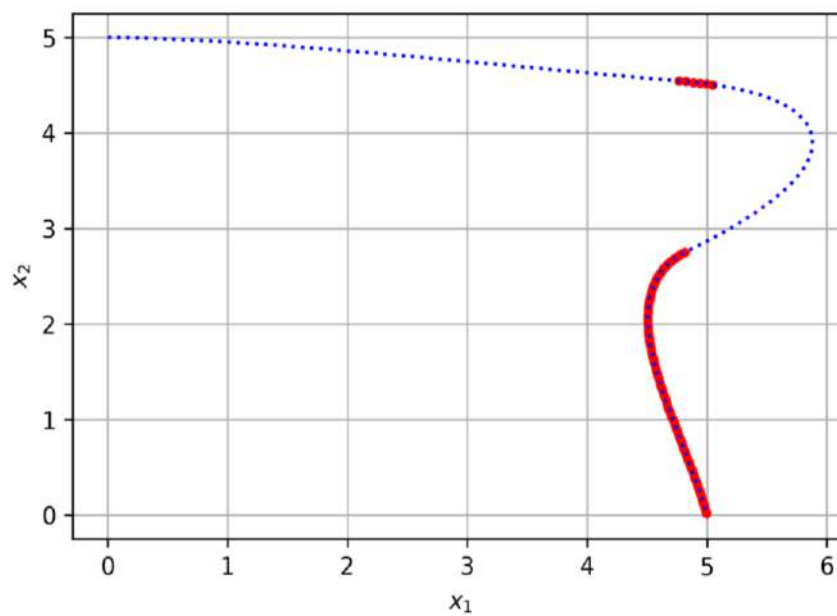


Рис. 3.11. Графическая интерпретация траектории движения точки с учетом обученной нейросети

На рис. 3.12 представлен графическая интерпретация изменения значений  $\|v_r\|$  на каждом шаге интегрирования. Траектория движения точки удовлетворяет постановке задачи при выполнении условия:  $\|v_r\| = 0$  при  $t = t_2$ .

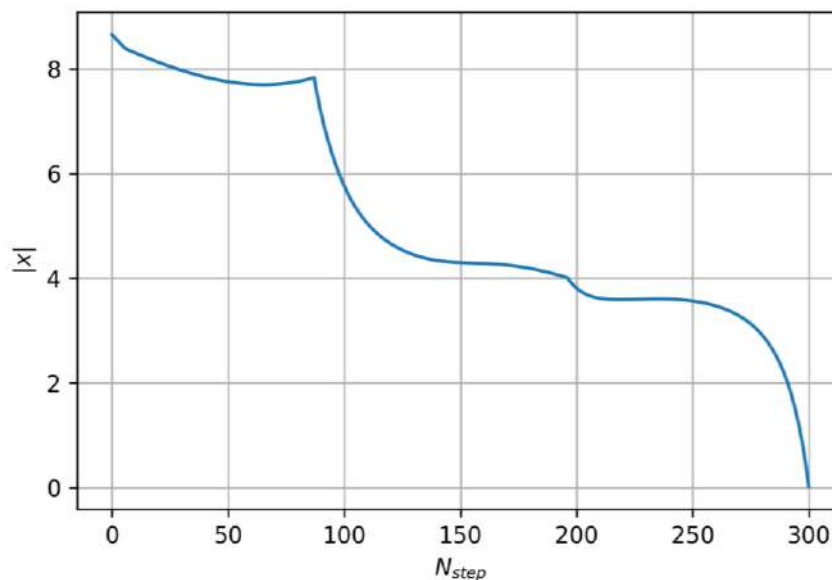


Рис. 3.12. Графическая интерпретация изменения значений  $\|v_r\|$  в зависимости от шага интегрирования

Важно отметить, что для моделей с различными генераторами переключений, рассмотренными в настоящем параграфе пособия, можно разработать обобщенные алгоритмы поиска оптимальных параметров на основе алгоритмов 1 и 2.

Отметим также, что в связи с тем, модель (2) имеет ряд ограничений, поэтому имеет смысл рассматривать и постановку задачи оптимального управления вида (2.24) и при ослаблении требований к модели. Кроме того, требуется изучение вопросов, связанных с существованием переходных режимов и с рассмотрением кусочно гладких функций. Кусочно гладкие функции (с учетом равенства первых и вторых производных в точке переключения) могут быть получены применением матриц коэффициентов с размерностью  $n > 4$ . Вид кусочно гладкой функции в таком случае представлен на рис. 3.13.

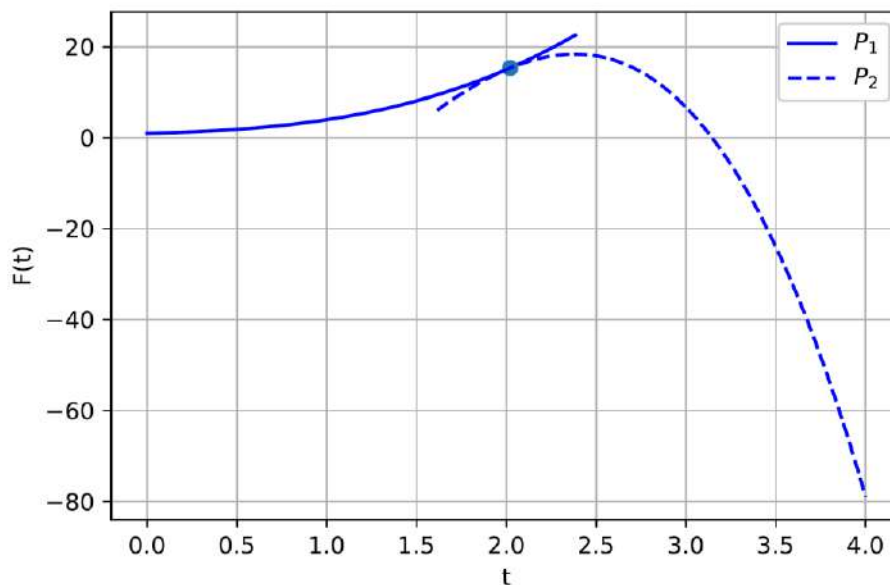


Рис. 3.13. Кусочно гладкая функция управления для модели (2)

На рис. 3.13 сплошной и пунктирной линиями отмечены переключающиеся режимы управления. Матрицы коэффициентов  $P_i$  для  $n=4$  имеют аналитические выражения лишь для сравнительно простых условий постановки задачи оптимального управления.

Рассмотренное в разделе полиномиальное управление является достаточно эффективным для ряда прикладных задач, однако существует множество других способов задавать функции управления. В частности, полиномиальное управление может быть преобразовано в управление с использованием дробно-рациональных функций. Также большую прикладную значимость имеет управление с использованием разложения сигналов на гармонические составляющие (преобразование Фурье, вейвлет-преобразование). На основе указанных методов возможно построение гибридных моделей.

## **§ 4. Оптимальная стабилизация многосвязных управляемых систем**

### **4.1. Задачи оптимальной стабилизации.**

Известно, что системы управления динамическими процессами в технических системах должны обеспечивать устойчивость различных режимов движения объектов управления. В связи с этим представляет значительный интерес задача стабилизации движения системы дополнительными силами при условии минимизации соответствующего функционала, характеризующего качество управления. При этом возникает проблема определения вида подынтегральной функции в критерии качества управления и оптимальных управлений. Очевидно, что отыскание указанных подынтегральной функции и управления следует находить с учетом того, что функция Ляпунова известна для соответствующей системы без управления с тем, чтобы эта функция Ляпунова была оптимальной функцией Ляпунова для исходной системы с учетом действия на нее дополнительных управляющих сил. При выборе функционала качества управления следует учитывать не только технические потребности, но и возможности решения задачи оптимальной стабилизации в замкнутом и достаточно простом виде.

Известно, что применительно к нелинейным управляемым системам в соответствии с математической теорией устойчивости разработаны способы стабилизации по первому приближению установившихся и неуставившихся движений. Выделены критические случаи стабилизации и разработаны способы нахождения стабилизирующих управлений в критических случаях [6, 19, 75].

В [64, 65] получены фундаментальные результаты об оптимальной стабилизации устойчивой системы дифференциальных уравнений возмущенного движения с использованием дополнительных сил при условии минимизации некоторого функционала, характеризующего критерий качества управления. Функционал задается в виде определенного интеграла с верхним бесконечным пределом, а подынтегральная функция функционала определяется в процессе решения. При этом оптимальной функцией Ляпунова для системы при дей-

ствии на указанную систему дополнительных сил является функция Ляпунова, известная для системы без управления.

Теоретический и прикладной интерес представляют задачи распространения идеи В.В. Румянцева на случай многосвязных управляемых систем, задаваемых в виде нелинейных многосвязных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью многосвязных динамических систем моделируется поведение различных классов сложных технических систем, таких как роботы-манипуляторы, энергетические системы, летательные аппараты. При исследовании многосвязных систем существенным моментом является использование двухуровневой схемы стабилизации [77, 82] и векторных функций Ляпунова [48]. С учетом применения двухуровневой схемы решение указанной задачи сводится к решению задачи оптимальной стабилизации по В.В. Румянцеву [18, 64, 65]. Способ решения задачи об оптимальной стабилизации распространяется и на многосвязные системы с однородными порядка  $\mu = p/q > 1$  главными частями, что позволяет исследовать и критические случаи. Задачи и алгоритмы оптимальной стабилизации многосвязных систем различных типов рассматривались в [23, 28, 29, 79, 81].

Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой задано системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad (4.1)$$

где  $x \in R^n$  – вектор фазовых переменных,  $R^n$  – линейное вещественное пространство с нормой  $\|x\| = \left( \sum_{s=1}^n x_s^2 \right)^{1/2}$ ,  $u = (u_1, \dots, u_r)^T$  – вектор управляющих воздействий из  $R^r$ , т.е.  $u \in R^r$ . Для вектор-функции в правой части системы (1) предполагается, что  $f(t, x, u) \in C(J^+ \times G \times R^r)$ , где

$$G = \{x : \|x\| < l, 0 < l \leq \infty\}. \quad (4.2)$$

Кроме того, предполагается, что для непрерывных управляющих воздействий  $u: J^+ \times R^n \rightarrow R^r$ ,  $u(t,0) \equiv 0$ , выполняются условия существования и единственности решения задач Коши для системы (1) в области  $J^+ = \{t: t \geq t_0 \geq 0\}$ .

Известно [43], что управляющее воздействие  $u \in U$  называется стабилизирующим если оно доставляет асимптотическую устойчивость положения равновесия  $x=0$  системы (1) при  $G_0 \subset G$ ,  $G_0$  – область притяжения. Решение задачи оптимальной стабилизации состоит в нахождении управления  $u^0(t, x)$ , которое обеспечивает асимптотическую устойчивость и наилучшее качество переходного процесса. Указанное наилучшее качество состоит в достижении минимального значения функционала

$$J[V; x, u, t] = \int_{t_0}^{\infty} w(t, x, u) dt, \quad w(t, 0, 0) \equiv 0. \quad (4.3)$$

В (3) скалярная функция  $w(t, x, u)$ , заданная на множестве  $J^+ \times G \times R^r$ , является непрерывной неотрицательной функцией. Далее через  $x[t]$  будем обозначать движения системы (1), порождающиеся управлением  $u[t] = u(t, x[t])$ .

Приведем формулировку задачи оптимальной стабилизации: требуется найти управление  $u = u^0(t, x)$ , которое доставляет асимптотическую устойчивость  $x=0$  и такое, что функционал качества управления принимает

$$J(u^0) = \int_{t_0}^{\infty} w(t, x^0[t], u^0[t]) dt \leq J(u) = \int_{t_0}^{\infty} w(t, x[t], u[t]) dt$$

при условиях  $x^0[t_0] = x_0$  минимальное значение. Задача стабилизации решается при всех  $(t_0, x_0) \in J^+ \times \bar{G}_0$ ,  $G_0 = \{x \in R^n : \|x\| \leq l_0 \leq l\}$ .

В процессе решения задачи оптимальной стабилизации с использованием функций Ляпунова  $V(t, x) \in C^1(J^+ \times G \rightarrow J^+)$ ,  $V(t, 0) \equiv 0$  рассматривается функция следующего вида [64]:

$$B[V, t, x, u] = \frac{\partial V}{\partial t} + (\text{grad}_x V, f(t, x, u)) + w(t, x, u). \quad (4.4)$$

В [44] показано, что если для системы (1) существуют определенно-положительная функция  $V(t, x)$ , допускающая бесконечно малый высший предел, и векторная функция  $u = u^0(t, x)$ , удовлетворяющая в области (2) условиям:

1) функция

$$w(t, x, u) = w(t, x, u^0(t, x)) \quad (4.5)$$

является определенно-положительной; 2) справедливо равенство  $B(t, x, u^0(t, x)) \equiv 0$ ; 3) каковы бы ни были функции  $u(t, x)$ , справедливо неравенство  $B(t, x, u(t, x)) \geq 0$ , то векторная функция  $u^0(t, x)$  является решением задачи оптимальной стабилизации и, кроме того, имеет место

$$V(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{\infty} w(t, x(t; u^0(\cdot)), u^0[t]) dt = \min_u \int_{t_0}^{\infty} w(t, x(t; u(\cdot)), u[t]) dt.$$

В [64] рассмотрена система вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad (4.6)$$

правая часть которой задана в области

$$\Omega_1 = \{t, x : t \in J^+, \|x\| < \lambda_1, \lambda_1 > 0\}, \quad (4.7)$$

$x = (x_1, \dots, x_n)^T$ . Предполагается, что правая часть системы (6) непрерывна и удовлетворяет некоторым условиям существования и единственности решения задачи Коши в области (4.7),  $X(t, 0) \equiv 0$ . Кроме того, предполагается, что для системы (6) существует определенно-положительная функция  $V(t, x)$ ,  $V(t, 0) \equiv 0$ , допускающая бесконечно малый высший предел, производная по вдоль решений системы (6) является знакопостоянной отрицательной или определенно-отрицательной.

Наряду с системой (6) рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + Y(t, x, u). \quad (4.8)$$

В (8)  $u = (u_1^T, \dots, u_r^T)^T$  является вектором управляющих воздействий,  $Y(t, 0, 0) \equiv 0$ . Будем считать, что  $Y(t, x, u)$  в области



$$\Omega_2 = \{t, x, u : t \in J^+, \|x\| \leq \lambda_1, \|u\| < \infty\} \quad (4.9)$$

удовлетворяет некоторым условиям существования и единственности решений задачи Коши в области (9). Рассматривается случай, когда

$$Y(t, x, u) = M(t, x)u. \quad (4.10)$$

В [64] показано, что если для устойчивости системы (6) известна допускающая бесконечно малый высший предел, определенно-положительная функция  $V(t, x)$ , то она будет оптимальной функцией Ляпунова для системы (8) с учетом (10), оптимизируемой управляющим воздействием  $u = u^0(t, x)$  относительно функционала

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left( -W(t, x[t]) + (u^0)^T \beta u^0 + u^T \beta u \right) dt,$$

где  $W(t, x) = \frac{dV(t, x)}{dt} \Big|_{(6)}$  является определенно-отрицательной,  $\beta$  – определенно-положительная симметричная матрица размерности  $r \times r$ ,  $u = u^0(t, x)$  – оптимальное управление.

#### 4.2. Оптимальная стабилизация многосвязной системы на основе применения двухуровневой схемы и свойств векторных функций Ляпунова.

Рассмотрим нелинейную многосвязную управляемую динамическую систему

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_s) + F_s(t, x) + B_s(t, x_s)u_s \equiv \Phi_s(t, x, u), \quad s = \overline{1, q}, \quad (4.11)$$

где  $x_s \in R^{n_s}$ ,  $u_s \in R^{r_s}$  – управляющие воздействия, векторные функции  $f_s(t, x_s)$ ,  $F_s(t, x)$  и матрицы  $B_s(t, x_s)$  размерности  $n_s \times r_s$  заданы в области

$$\Omega = \{t, x : t \geq t_0, \|x\| < h, 0 < h = \text{const}\}. \quad (4.12)$$

В (11)  $x = (x_1^T, \dots, x_q^T)^T$ ,  $R^{n_1} \oplus \dots \oplus R^{n_q} = R^n$ ,  $\Phi_s(t, 0, 0) \equiv 0$ ,  $R^{r_1} \oplus \dots \oplus R^{r_q} = R^r$ ,  $s = \overline{1, q}$ . В качестве нормы вектора принята евклидова норма, верхний индекс означает транспонирование.

Будем предполагать, что для системы

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_s), \quad s = \overline{1, q}, \quad (4.13)$$

в области (12) существуют непрерывно дифференцируемые функции Ляпунова  $v_s(t, x_s)$ ,  $s = \overline{1, q}$ , удовлетворяющие теореме Ляпунова о равномерной асимптотической устойчивости. Управляющее воздействие, по аналогии со стабилизацией в критических случаях, можно представить в виде

$$u_s(t, x) = u_s^\Lambda(t, x_s) + u_s^\Gamma(t, x),$$

где  $u_s^\Lambda(t, x_s)$  – управляющее воздействие на уровне подсистем, а  $u_s^\Gamma(t, x)$  – управляющее воздействие на уровне исходной системы. Различные способы стабилизации подсистем рассматривались в [35, 39, 40, 42, 50, 70, 71, 83] и в других работах. Для системы первого приближения (13) по отношению к системе (11) существует функция Ляпунова  $v(t, x) = \sum_{s=1}^q v_s(t, x_s)$ , где  $v_s(t, x_s)$  – определенно-положительные функции Ляпунова для отдельных подсистем, допускающие бесконечно малый высший предел, полные производные по времени которых вдоль решений соответствующих подсистем являются определенно-отрицательными функциями. При указанных предположениях для решения задачи оптимальной стабилизации системы (11) можно использовать модификацию и обобщение метода решения аналогичной задачи для односвязной системы.

Задачу оптимальной стабилизации многосвязной управляемой системы будем решать на основе функции Ляпунова  $v(t, x) = \sum_{s=1}^q v_s(t, x_s)$ . Введем в рассмотрение также функцию вида

$$B[v; t, x, u] = \sum_{s=1}^q \left[ \frac{\partial v_s(t, x_s)}{\partial t} + (\nabla v_s(t, x_s))^T (f_s(t, x_s) + F_s(t, x) + B_s(t, x_s)u_s + u_s^T \beta_s(x_s)u) \right] + \Psi(t, x) \quad (4.14)$$

В (14)  $\nabla v_s(t, x_s) = \text{col} \left( \frac{\partial v_s}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v_s}{\partial x_{q_s}} \right)$ , а матрицы  $\beta_s(x_s)$  являются определенно-положительными и симметричными. Согласно теоретическим основам оптимальной стабилизации односвязных систем (раздел 4.1 пособия) при оптимальном управлении и оптимальной функции Ляпунова верно равенство

$$B[v^0; t, x, u^0] = 0,$$

а при всех других управлениях

$$B[v^0; t, x, u] \geq 0.$$

Следовательно, для оптимального управления справедливо условие

$$u_s^0(t, x_s) = -\beta_s^{-1}(x_s) \nabla v_s(t, x_s)^T B_s(t, x_s), \quad s = \overline{1, q}. \quad (4.15)$$

Члены, зависящие от  $u_s(t, x_s)$ , в (14) можно представить в виде

$$\sum_{s=1}^q ((\nabla v_s(t, x_s))^T B_s(t, x_s) u_s + u_s^T \beta_s(t, x_s) u_s) = \sum_{s=1}^q (u_s - u_s^0).$$

Следовательно, подставляя  $u_s^0(t, x_s)$  в (14) получим алгебраическое уравнение вида

$$B[v^0; t, x, u^0] = 0,$$

из которого можно определить функцию

$$\Psi(t, x) = \sum_{s=1}^q (w_s(t, x_s) + u_s^{0T} \beta_s(t, x_s) u_s^0 - (\nabla v_s(t, x_s))^T F_s(t, x)). \quad (4.16)$$

В (16) функции  $w_s(t, x_s) = \frac{dv_s}{dt} \Big|_{(13)}$  являются определенно-отрицательными. При

условии, что функция  $\Psi(t, x)$  будет определенно-положительная, функционал качества управления можно записать в виде

$$J(u^0) = \int_{t_0}^{\infty} \left( \sum_{s=1}^q (-w_s(t, x_s) + u_s^{0T} \beta_s(t, x_s) u_s^0 - (\text{grad}_{x_s} v_s(t, x_s), F_s(t, x)) + u_s^T \beta_s(t, x_s) u_s) \right) dt. \quad (4.17)$$

Таким образом, показано, что если для системы (13) известны непрерывные определенно-положительные функции Ляпунова  $v_s(t, x_s)$ ,  $s = \overline{1, q}$ , допускающие бесконечно малый предел, полные производные которых по времени  $t$  соответственно на решениях подсистем системы (13) – определенно-отрицательные функции, и если при этом функция (2.6) оказывается определенно-положительной, то функция  $v(t, x) = \sum_{s=1}^q v_s(t, x_s)$  будет оптимальной функцией Ляпунова для системы (11), оптимизируемой управлением (15) относительно функционала (17). Оптимальную функцию Ляпунова для системы (11) будем обозначать  $v^0(t, x)$ .

Важно отметить, что функция  $\Psi(t, x)$  будет определенно-положительной, если положение равновесия  $x = 0$  системы

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x) + F_s(t, x)$$

является асимптотически устойчивым по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость при этом будет иметь локальный характер.

На основе изложенного выше подхода к стабилизации читателю предлагается рассмотреть простой пример, а именно рассмотреть вопрос о стабилизации системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)x_1 + x_1^3 + 2x_1u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\left(1 + \frac{1}{t^3}\right)x_2 + x_2^2. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Для (18) в качестве подсистем следует рассмотреть дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = -\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)x_1$$

и

$$\frac{dx_2}{dt} = -\left(1 + \frac{1}{t^3}\right)x_2,$$

а в качестве функций Ляпунова для подсистем можно выбрать функции:

$$v_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2, \quad v_2(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2,$$

причем для исходной системы функция Ляпунова будет иметь вид

$$v(x) = v_1(x_1) + v_2(x_2).$$

Можно показать, что в данном случае функция  $\Psi(t, x_1, x_2)$  при произвольных  $t \geq t_0 \geq 1$ ,  $x_1$  и  $x_2$  является знакопеременной, но при подходящем выборе соответствующей области функция  $\Psi(t, x_1, x_2)$  будет определено-положительной. Предположение об определено-положительности функции в теоретическом обосновании метода является существенным.

#### **4.3. Оптимальная стабилизация с учетом однородных функций в правых частях многосвязных систем.**

Известно [10, 11, 35, 43], что для нелинейных систем дифференциальных уравнений общего вида условия теорем об асимптотической устойчивости по первому нелинейному приближению труднопроверяемы. При этом в некоторых частных случаях представляется возможным поиск достаточно легко проверяемых условий, при выполнении которых имеет место асимптотическая устойчивость состояния равновесия по первому нелинейному приближению. В [1, 2, 41, 60] для нелинейных систем, в правых частях которых присутствуют однородные (обобщенно-однородные) векторные функции порядка  $\mu > 1$  разработаны методы анализа асимптотической устойчивости по первому нелинейному приближению и предложены эффективные условия устойчивости. Рассмотрим случай многосвязных систем с однородными функциями в правых частях. А именно, рассмотрим задачу оптимальной стабилизации многосвязных нелинейных управляемых динамических систем вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu_s)}(x_s) + \sum_{j=1}^q R_{sj}(t, x) + B_s(x_s)u_s = \Phi_s(t, x, u). \quad (4.19)$$

В (19)  $x_s \in R^{n_s}$ ,  $x = (x_1^T, \dots, x_q^T)^T$ ,  $X_s^{(\mu_s)}(x_s)$  – положительно однородные порядка  $\mu_s > 1$  непрерывно дифференцируемые векторные функции. Функции  $R_{sj}(t, x)$  – непрерывные векторные функции в области

$$\Omega = \{t, x : t \geq t_0, \|x\| < H, 0 < H = \text{const}\}, \quad (4.20)$$

которые удовлетворяют условиям

$$\|R_{sj}(t, x)\| \leq c_{sj} \|x_1\|^{\alpha_{sj}^{(1)}} \dots \|x_q\|^{\alpha_{sj}^{(q)}}, \quad c_{sj} \geq 0, \alpha_{sj}^{(i)} \geq 0. \quad (4.21)$$

Если в (21) какой то из коэффициентов  $c_{sj}$  равен нулю, то соответствующие ему величины  $\alpha_{sj}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, q}$  можно считать сколь угодно большими. Будем предполагать, что  $\Phi_s(t, 0, 0) \equiv 0$ ;  $s = \overline{1, q}$ . Предположим, что состояния равновесия систем

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_s), \quad s = \overline{1, q} \quad (4.22)$$

асимптотически устойчивы.

Вопрос об асимптотической устойчивости положения равновесия системы (19) редуцируется к вопросу о существовании положительных постоянных, удовлетворяющих неравенствам [1]

$$-\mu_s h_s + \sum_{i=1}^q \alpha_{sj}^{(i)} h_i > 0, \quad s = \overline{1, q}. \quad (4.23)$$

В качестве функции Ляпунова для системы (19) можно рассмотреть функцию

$$v_s(x) = \sum_{s=1}^q v_s(x_s),$$

где  $v_s(x_s)$  – функции Ляпунова для систем (22), удовлетворяющих условиям:

(A1)  $v_s(x_s)$  и  $w_s(x_s)$  – определено-положительные функции;

(A2)  $v_s(x_s)$  и  $w_s(x_s)$  – однородные положительные функции соответственно порядка  $m_s + 1 - \mu_s$  и  $m_s$  (постоянные  $m_s$  являются достаточно большими рациональными числами с нечетным знаменателем и четным числителем);

(A3) функции  $v_s(x_s)$  непрерывно дифференцируемы и

$$(\nabla v_s)^T f_s(x_s) = -w_s(x_s).$$

Для многосвязной системы (19) задача оптимальной стабилизации имеет единственное решение в достаточно простой форме. В самом деле, для системы (19) функция  $B[v; t, x, u]$  задается в виде

$$B[v; t, x, u] = \sum_{s=1}^q [-w_s(x_s) - ((\nabla v_s(x_s))^T (\sum_j R_{sj}(t, x) + B_s(x_s)u_s)) + \frac{1}{2}u_s^T \beta_s(x_s)u_s] + \Psi_1(t, x). \quad (4.24)$$

В правой части выражения (24) при выполнении условий (23), сумма первых двух слагаемых является определенно-положительной [41].

Оптимальное управление  $u^0 = (u_1^{T0}, \dots, u_s^{T0})^T$  можно найти из системы

$$\frac{\partial B}{\partial u_s} = B_s(x_s) + \beta_s(x_s)u_s^0 = 0, \quad s = \overline{1, q},$$

и получаем, что  $u_s^0 = -\beta_s^{-1}(x_s)(\nabla v_s)^T B_s(x_s) = -\beta_s^{-1}(x_s)B_s^T(x_s)\nabla v_s$ .

Подстановка  $u_s^0$  ( $s = \overline{1, q}$ ) в функцию  $B[v; t, x, u]$  приводит к алгебраическому уравнению относительно  $\Psi_1(t, x)$ , т.е.

$$B[v^0; t, x, u^0] = 0.$$

Функционал качества управления будет иметь вид

$$J(u_0) = \int_{t_0}^{\infty} \sum_{s=1}^q [-w_s(x_s) - (\nabla v_s(x_s))^T (\sum_{j=1}^q R_{sj}(t, x)) + u_s^{0T} \beta_s(x_s)u_s^0 + u_s^T \beta_s(x_s)u_s] dt. \quad (4.25)$$

Таким образом, описан подход к решению задачи оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем с учетом свойства однородности функций в правых частях. При решении задачи оптимальной стабилизации в данном случае используются конкретизации теоретических положений, содержащихся в разделах 4.1 и 4.2 настоящего параграфа, а также свойства однородных функций.

Следует отметить, что перспективными направлениями в области оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем являются следующие направления: 1) решение задач оптимальной стабилизации для непрерыв-

но-дискретных многосвязных управляемых систем; 2) решение задач оптимальной стабилизации непрерывных и непрерывно-дискретных многосвязных систем по отношению к части фазовых переменных; 3) разработка алгоритмов оптимальной стабилизации; 4) применение алгоритмов оптимальной стабилизации к исследованию моделей робототехнических; 5) применение алгоритмов оптимальной стабилизации к исследованию моделей энергетических систем.



## § 5. Использование линеаризации обратной связью для синтеза стабилизирующих управлений

Сложность и разнообразие нелинейных динамических управляемых систем делает чрезвычайно сложной попытку построения универсальных методов синтеза управлений, которые стабилизировали бы состояния или режимы работы систем. С другой стороны, разработан ряд методов [74], применяемых инженерами для решения прикладных задач. Рассмотрим далее один из таких методов.

### 5.1. Идея метода на примере управления колесным роботом.

Рассмотрение метода синтеза управления нелинейными системами с помощью линеаризации обратной связью начнем с примера управления движением колесного робота, схематически изображенного на рис. 5.1. Он состоит из платформы и трех колес.

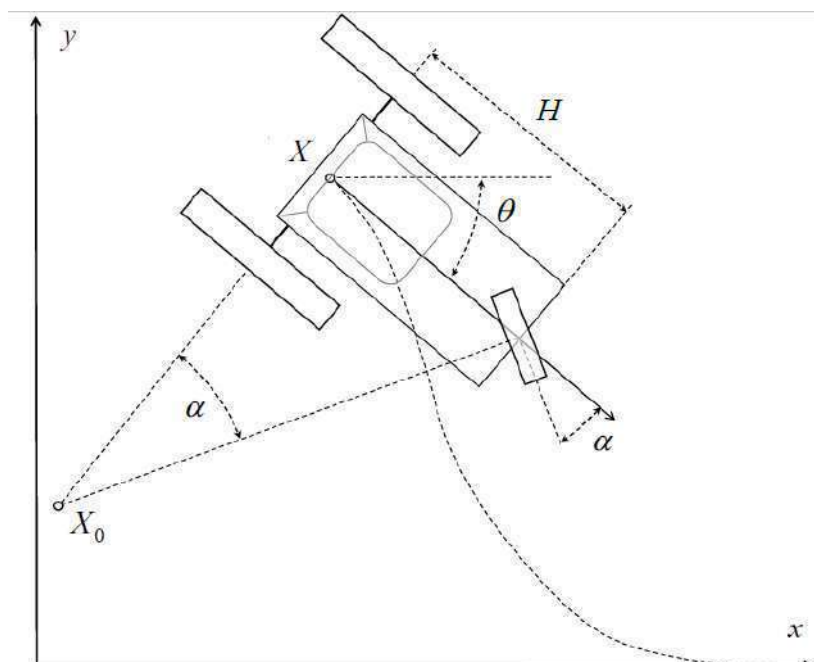


Рис. 5.1. Кинематическая схема колесного робота

Два задних колеса являются ведущими, а переднее отвечает за поворот платформы. Движение предполагается плоским. Уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta, \\ \dot{y} &= v \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= v u.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Целевая точка находится в середине задней оси платформы робота и имеет координаты  $X = (x, y)^T$ ,  $\theta$  – угол ориентации платформы робота относительно оси  $x$ . В каждый момент времени платформа имеет текущую угловую скорость вращения  $\dot{\theta}$ . Мгновенную кривизну траектории, которую описывает целевая точка, обозначим через  $u$ . Точка  $X_0$ , изображенная на рисунке как точка пересечения нормалей к плоскости колес, представляет собой мгновенный центр кривизны траектории целевой точки. Ее положение зависит от времени. При движении по прямой, когда плоскости колес коллинеарны,  $X_0$  находится в бесконечно удаленной точке.

Величина  $u$ , обратная радиусу кривизны, зависит от угла  $\alpha$  поворота переднего колеса и, как видно из рисунка, равна  $u = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{H}$ , где  $H$  – расстояние между осями колес. Пусть  $v$  – мгновенная скорость целевой точки. Задача состоит в стабилизации движения целевой точки вдоль оси  $x$ , т.е. в синтезе такого управления  $u$ , которое обеспечивает асимптотическое стремление  $y$  к нулю (точнее, асимптотическую устойчивость по переменной  $y$ ). Явной зависимости  $y$  от  $u$  нет, и возможность найти управление посредством решения алгебраического уравнения отсутствует. Посмотрим далее, зависит ли производная  $\dot{y}$  от  $u$ . Имеем  $\dot{y} = v \sin \theta$ , и снова нет явной зависимости от  $u$ . Возьмем вторую производную  $\ddot{y} = v \cos \theta \dot{\theta} + \dot{v} \sin \theta = v^2 \cos \theta u + \dot{v} \sin \theta$ . Видим, что вторая производная  $y$  зависит от управления. Теперь можем записать желаемое дифференциальное уравнение, которому мы хотим подчинить изменение  $y$ :

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \mu^2 y = 0, \quad (5.2)$$

где  $\beta$  – показатель экспоненциального убывания  $y$ . Если подставить известные теперь выражения для  $\ddot{y}$  и  $\dot{y}$  в выражение (2), то можно решить полученное алгебраическое уравнение относительно  $u$ :

$$u = -\frac{\dot{v}\sin\theta + 2\mu v\sin\theta + \mu^2 y}{v^2 \cos\theta}. \quad (5.3)$$

Величина  $\dot{v}$  представляет собой ускорение целевой точки. Оно может быть измерено акселерометром, установленным на платформе робота. Величина скорости  $v$  измеряется теми же спутниковым навигатором, которым измеряется позиция рабочей точки. Угол ориентации  $\theta$  можно измерить магнитным компасом. Таким образом, можно замкнуть систему управления в реальном времени, опираясь на модель (1) и показания датчиков о состоянии реальной системы, вычислив  $\alpha = \arctg(uH)$  и отправив вычисленное значение на привод поворота рулевого колеса.

Приходим к важному выводу: если замкнуть нелинейную систему (1) нелинейным законом управления (3), то получим линейную систему (2) с предсказанными желаемыми динамическими свойствами: экспоненциальным убыванием  $y$  с показателем убывания  $-\mu$ . Такой подход называется линеаризацией обратной связью. Число дифференцирований, которые пришлось сделать, прежде чем получить явное выражение для  $u$ , называется относительной степенью управляемой системы.

## 5.2. Формальное изложение метода.

Теперь перейдем к формальному изложению метода и введем необходимые понятия. Пусть  $f(x)$  –  $n$ -мерная вектор-функция  $n$ -мерного аргумента  $x$ , определенная в некоторой открытой окрестности нуля в  $R^n$ , и  $V(x)$  – скалярная функция. Напомним, что производной функции  $V(x)$  по направлению  $y \in R^n$  называется скалярная функция, определенная равенством

$\frac{d}{dy}V(x) = \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T y$ . Определяя производную функции Ляпунова в силу автономной системы

$$\dot{x} = f(x),$$

используют производную  $V(x)$  по направлению вектор-функции (говорят также «векторного поля»)  $f(x)$ ,  $\dot{V}(x) = \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T f(x)$ . Будем называть эту величину производной Ли от  $V(x)$  по направлению  $f(x)$  и использовать обозначение  $L_f V(x)$ . При последовательном применении производной Ли выполняются следующие правила:

$$L_f L_g V(x) = \left( \frac{\partial L_g(x)}{\partial x} \right)^T f(x),$$

$$L_f^2 V(x) = L_f L_f V(x),$$

$$L_f^k V(x) = L_f^{k-1} L_f V(x).$$

Рассмотрим частный случай автономных управляемых систем с одним управлением вида

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in R^n, \quad u \in R. \quad (5.4)$$

Такие системы называются аффинными, поскольку управление входит в правую часть аффинным образом. Здесь  $f(x)$  и  $g(x)$  – вектор-функции достаточно гладкие для того, чтобы все необходимые в дальнейших выкладках производные были определены и непрерывны; также предполагается, что  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ . Уравнение (4) определяет эволюцию состояния системы. Когда мы имеем дело с реальными физическими системами, состояние не всегда доступно для наблюдения. Поэтому наряду с состоянием в описание модели включают выход, который определяется скалярной функцией  $h(x)$ :

$$y = h(x), \quad y \in R. \quad (5.5)$$

Часто ставится задача синтеза управления, зависящего только от выхода системы и стабилизирующего нулевое положение равновесия.

Иногда выражение (5) используется не для описания модели измерений, а для формулировки цели управления в виде  $y=0$ . Другими словами, целью управления является приведение системы в такое состояние или к такому движению, в котором  $y=0$  или  $y \rightarrow 0$ . При этом целевое многообразие, выход на которое составляет цель управления, определяется уравнением  $h(x)=0$ . В примере управления колесным роботом цель управления задавалась уравнением  $y=0$ .

Итак, цель управления сформулирована в виде  $y=h(x)=0$ . Поскольку  $h(x)=0$  не зависит явно от управления, а зависит от  $x$ , и связь между  $x$  и  $u$  задается дифференциальным уравнением (4), то нельзя прямо распорядиться  $u$  для достижения цели. Вычислим производную  $\dot{y}$  в силу системы. Получим

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x)u.$$

Если  $L_g h(x) \neq 0$ , то можно составить дифференциальное уравнение  $\dot{y} + k_0 y = 0$  и, подставив выражения для  $y$  и  $\dot{y}$ , выразить управление как функцию  $x$ . Здесь  $k_0 > 0$  – некоторая константа. Если же  $L_g h(x) \equiv 0$ , то продолжим дифференцирование выражения  $\dot{y} = L_f h(x)$ . Получим

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u.$$

Снова возможны два варианта. Если  $L_g L_f h(x) \neq 0$ , то можно составить дифференциальное уравнение  $\ddot{y} + k_1 \dot{y} + k_0 y = 0$  и, подставив выражения для  $y$ ,  $\dot{y}$  и  $\ddot{y}$ , выразить управление как функцию  $x$ . Константы  $k_0, k_1 > 0$  выбираются таким образом, чтобы корни характеристического уравнения  $s^2 + k_1 s + k_0 = 0$  имели отрицательные вещественные части. Если же  $L_g L_f h(x) \equiv 0$ , то продолжим дифференцирование. Продолжая, мы в конце концов придем к ситуации, когда в первый раз получим  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ , а все предыдущие производные Ли тождественно нулевые. Тогда, обозначив  $i$ -ю производную  $y$  через  $y^{(i)}$ , составим выражение

$$y^{(r)} + k_{r-1}y^{(r-1)} + \dots + k_0y = 0 \quad (5.6)$$

и, подставив в него выражения для всех производных, получим алгебраическое уравнение

$$L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u + k_{r-1} L_f^{r-1} h(x) + \dots + k_0 h(x) = 0.$$

Решив это уравнение относительно  $u$ , получим явное выражение

$$u(x) = - \frac{L_f^r h(x) + k_{r-1} L_f^{r-1} h(x) + \dots + k_0 h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}. \quad (5.7)$$

Применив это управление к системе (4), мы подчиним изменение величины  $y(t)$  дифференциальному уравнению (6). Выбором коэффициентов  $k_0, \dots, k_{r-1}$  можно добиться требуемых динамических свойств величины  $y$ , определив таким образом динамику достижения цели. В частности, потребуется устойчивость нулевого решения  $y=0$  и, следовательно, отрицательность вещественных частей корней характеристического полинома  $s^r + k_{r-1}s^{r-1} + \dots + k_0 = 0$ . Далее, количество дифференцирований, которое пришлось сделать, зависит от свойств системы (4) и выхода (или функции, задающей целевое многообразие) (5).

**Определение 5.1.** Система, заданная уравнениями (4) и (5), имеет *относительную степень*  $r$  в некоторой области пространства  $R^n$ , если в этой области выполняются условия

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0, \quad L_g L_f^i h(x) \equiv 0, \quad i = 0, \dots, r-2.$$

В примере управления колесным роботом, разобранным в начале раздела, относительная степень равна 2. Необходимо сделать следующие замечания.

**Замечание 5.1.** Может оказаться так, что управление не влияет на выход системы. Это может случиться, например, если система распадается на независимые подсистемы и при этом управление влияет на первую подсистему, в то время как выход зависит от состояния другой. При этом относительная степень не определена.

**Замечание 5.2.** От выбора коэффициентов  $k_0, \dots, k_{r-1}$ , обеспечивающих устойчивость нулевого решения  $y=0, \dots, y^{(r-1)}=0$  дифференциального

уравнения (6), зависит “агрессивность” управления, навязанного системе (4). Если корни характеристического уравнения слишком далеко от мнимой оси в левой полуплоскости, то желаемое экспоненциальное затухание величин  $y^{(i)}(t), i = 1, \dots, r-1$  будет слишком быстрым. Это может привести к тому, что в реальной системе проявятся такие нежелательные динамические свойства, неучтенные в ее модели, как внутренние задержки и инерционность исполнительных механизмов. Это, в свою очередь, может привести к высокочастотным колебаниям выхода системы вокруг целевого многообразия. Это явление называется *чаттеринг* и встречается в теории управления. Чаттеринг (или “болтанка”) возникает в системах с релейным управлением и регулятором, построенным с помощью метода скользящих режимов.

**Замечание 5.3.** Управление (7) может принимать как угодно большие значения, не удовлетворяющие разумным ограничениям. Кроме того, это управление определено не для всех значений  $x$ , поскольку числитель в этом выражении может принимать нулевые значения. Следовательно, при практической реализации этого метода необходимо следить за тем, чтобы траектория замкнутой системы не покидала некоторого инвариантного множества, в котором управление определено и принимает ограниченные значения. В приложениях часто возникает необходимость оценки инвариантного множества для системы управления, замкнутой синтезированным законом управления. Внутри инвариантного множества гарантируется выполнение предположений, сделанных при синтезе закона управления. Обычно инвариантные множества строятся с помощью одной или нескольких функций Ляпунова, невозрастающих на траекториях замкнутой системы. При этом оценка инвариантного множества получается в виде  $\{x: V(x) \leq c\}$  при некоторой константе  $c$  или в виде пересечения таких множеств.

Описанный выше метод гарантирует стабилизацию переменной  $y(t)$  вместе с ее производными  $\dot{y}(t), \dots, y^{(r-1)}(t)$  в нуле и называется линеаризацией

обратной связью по выходу. Выбор управления (7) дает возможность распорядиться динамикой  $r$  переменных. Это, однако, ничего не говорит о поведении всей  $n$ -мерной системы в целом. В примере о стабилизации бокового отклонения целевой точки колесного робота было гарантировано асимптотическое стремление к нулю величин  $y(t)$  и  $\dot{y}(t)$  в силу уравнений (6). При этом из второго уравнения (1) следует  $\sin \theta(t) \rightarrow 0$ , или  $\theta(t) \rightarrow i\pi, i = 0, \pm 1, \dots$ , и величина  $\cos \theta(t) \rightarrow \pm 1$ . Поэтому переменная  $x(t)$  в установившемся режиме будет неограниченно увеличиваться со скоростью  $v$  или уменьшаться со скоростью  $-v$ . Это соответствует движению целевой точки вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$  в положительном или отрицательном направлении. Управление (3) (или (7) в общем случае) управляет напрямую поведением переменной  $y(t)$  и ее производной ( $r-1$  производными в силу (6)). При этом поведение переменной  $x(t)$  зависит от управления опосредованно, через переменную  $\theta(t)$ . В данном примере на (целевом) многообразии  $y = 0$  фазового пространства  $x, y, \theta$  переменная  $x(t)$  асимптотическим приближается к  $vt$  или  $-vt$ , а не стремится к нулю или другому состоянию покоя.

Чтобы достичь большего понимания поведения всей управляемой системы в целом, продолжим анализ в следующем направлении. Попробуем выбрать такую обратимую замену переменных  $z = T(x)$ , что первые  $r$  переменных обратятся в  $\xi(t) = (\dot{y}(t), \dots, y^{(r-1)}(t))^T$ , а оставшиеся  $n-r$  переменных  $\eta(t)$  таковы, что

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi). \quad (5.8)$$

В новых переменных управление действует только на первые  $r$  переменных, для которых работает метод линеаризации по выходу. На динамику переменных  $\eta$  управление непосредственно не влияет, как видно из (8). Выбор управления гарантирует  $\xi(t) \rightarrow 0$ . Подставим в правую часть (8)  $\xi = 0$ . Будем говорить, что дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$



описывает нулевую динамику системы. Система нулевой динамики будет или не будет иметь асимптотически устойчивое состояния равновесия  $\eta = 0$ .

Системы с асимптотически устойчивой нулевой динамикой называются минимально-фазовыми. В уравнении (8) переменная  $\xi$  присутствует подобно управлению в нелинейной управляемой автономной системе. Если система минимально-фазовая, то можно ожидать, что система нулевой динамики окажется устойчивой по входу.

Итак,

$$z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T'(x) \\ T''(x) \end{pmatrix},$$

где  $T'(x)$  –  $r$ -мерная вектор-функция  $n$ -мерного аргумента  $x$ , а  $T''(x)$  –  $(n - r)$ -мерная вектор-функция. Определим эти функции следующими условиями:

$$T'(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \end{pmatrix}, \quad T''(x) = \begin{pmatrix} T_1''(x) \\ T_2''(x) \\ \vdots \\ T_{n-r}''(x) \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

где функции  $T_i''(x)$  выбраны такими, что выполняются условия

$$\left( \frac{\partial T_i''(x)}{\partial x} \right)^T g(x) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n - r, \quad (5.10)$$

для всех  $x$  из некоторой окрестности точки  $0$ . Это означает, что каждая из функций  $T_i''(x)$  является первым интегралом векторного поля  $g(x)$ . Если относительная степень системы равна  $n$ , то переменные  $\eta$  и условия (10) отсутствуют.

### 5.3. Стабилизация верхнего положения перевернутого маятника на тележке.

Рассмотрим еще один пример системы с относительной степенью меньшей размерности системы  $r < n$  и, следовательно, имеющей нетривиальную нулевую динамику [69]. Перевернутый маятник шарнирно закреплен на тележке, перемещающейся без трения по оси  $s$ , см. рис. 5.2. К тележке прилагается сила  $u$ , действующая в горизонтальном направлении вдоль оси  $s$ , управляя которой нужно асимптотически стабилизировать вертикальное положение маятника. Угол  $\alpha$  – угловое отклонение от вертикального положения. Масса маятника равна  $m$ , длина невесомого стержня равна  $l$ , тележка имеет массу  $M$ . Кроме этого, на тележку может действовать упругая сила  $-ks$  со стороны пружины и сила вязкого трения  $\phi\dot{s}$ , как показано на правой части рисунка.

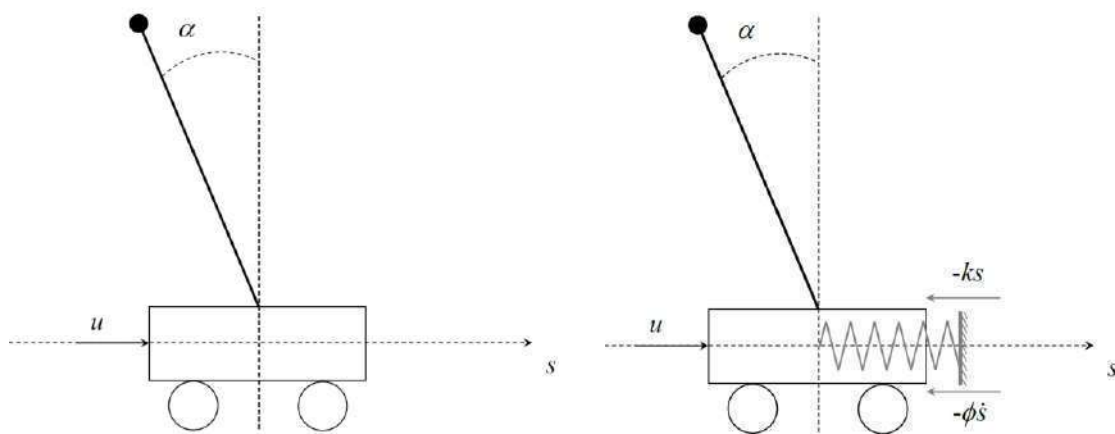


Рис. 5.2. Перевернутый маятник на тележке

На левой части рис. 5.2 единственной силой, действующей на тележку, является управление  $u$ . На правой части рисунка на тележку действует также упругая сила со стороны пружины  $ks$  и сила трения  $\phi\dot{s}$ .

Сначала рассмотрим первый случай, изображенный слева. Воспользуемся лагранжевым формализмом для получения уравнений движения. Мгновенная скорость движения груза маятника массы  $m$  равна  $l\dot{\alpha}$  и направлена по касательной к направлению вращения. Проекция скорости на ось  $s$  равна

$l\dot{\alpha}\cos\alpha + \dot{s}$ . Проекция скорости на вертикальную ось равна  $l\dot{\alpha}\sin\alpha$ . Полная кинетическая энергия маятника и тележки

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}[(l\dot{\alpha}\cos\alpha + \dot{s})^2 + (l\dot{\alpha}\sin\alpha)^2] + \frac{M}{2}\dot{s}^2 = \\ &= \frac{m}{2}(l^2\dot{\alpha}^2 + 2l\dot{\alpha}\dot{s}\cos\alpha) + \frac{M+m}{2}\dot{s}^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Потенциальная энергия равна  $\Pi = mlg\cos\alpha$ . Уравнения Лагранжа имеют вид

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$  и  $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = u$ , где  $L = T - \Pi$  – функция Лагранжа. Заметим, что  $L$  не зависит от переменной  $s$ , которая, следовательно, является циклической. Выполнив операции дифференцирования, получим уравнения

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\alpha} + ml\ddot{s}\cos\alpha - mgl\sin\alpha &= 0, \\ ml\ddot{\alpha}\cos\alpha + (m+M)\ddot{s} - ml\dot{\alpha}^2\sin\alpha &= u. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений относительно старших производных  $\ddot{\alpha}$  и  $\ddot{s}$ , получим

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{s} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} m+M & -ml\cos\alpha \\ -ml\cos\alpha & ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mgl\sin\alpha \\ ml\dot{\alpha}^2\sin\alpha + u \end{pmatrix},$$

где  $D = ml^2(m+M) - m^2l^2\cos^2\alpha = ml^2M + m^2l^2\sin^2\alpha \geq ml^2M > 0$ . Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{(M+m\sin^2\alpha)l} [(m+M)g\sin\alpha - ml\omega^2\cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha u], \\ \dot{s} &= v, \\ \dot{v} &= \frac{1}{M+m\sin^2\alpha} [-mg\sin\alpha\cos\alpha + ml\omega^2\sin\alpha + u]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Эта запись имеет вид аффинной системы, где  $x = (\alpha, \omega, s, v)^T \in R^4$  и

$$f(x) = \begin{pmatrix} \omega \\ \frac{(m+M)g \sin \alpha - ml\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha}{(M+m \sin^2 \alpha)l} \\ v \\ \frac{-mg \sin \alpha \cos \alpha + ml\omega^2 \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \end{pmatrix}.$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\cos \alpha}{(M+m \sin^2 \alpha)l} \\ 0 \\ \frac{1}{M+m \sin^2 \alpha} \end{pmatrix}.$$

Пусть цель состоит в стабилизации углового отклонения в нуле. Выберем в качестве выхода  $y = \alpha$  ( $h(x) = \alpha = 0$  – в качестве целевого многообразия). Действуя согласно описанному выше подходу, вычислим последовательно производные  $h(x)$  в силу системы (12) до тех пор, пока не получим  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$  при вычислении  $\alpha^{(r)}$ . Непосредственно из вида системы получим, что  $r = 2$  и  $L_g L_f^{-1} h(x) = -\frac{\cos \alpha}{(M+m \sin^2 \alpha)l}$ . Выберем новые переменные

$(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)^T = T(x)$  согласно (9) так, чтобы выполнялось (10) и замена переменных  $T(x)$  была обратимой. Используем замену переменных

$$\xi_1 = \alpha, \quad \xi_2 = \omega, \quad \eta_1 = T_1'(x) = s, \quad \eta_2 = T_2''(x) = l\omega + v \cos \alpha. \quad (5.13)$$

Эта замена переменных обратима в области  $|\xi_1| < \pi/2$ . Обратная замена имеет вид

$$\alpha = \xi_1, \quad \omega = \xi_2, \quad s = \eta_1, \quad v = \frac{\eta_2 - l\xi_2}{\cos \xi_1}.$$

Также легко проверить выполнение условий (10). После выполнения дифференцирования переменных  $\xi, \eta$  и алгебраических преобразований (проверка которых предоставляется читателю) имеем

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= \frac{1}{(M + m \sin^2 \xi_1)l} [(m + M)g \sin \xi_1 - ml\xi_2^2 \cos(\xi_1) \sin \xi_1 - \cos \xi_1 u], \\
\dot{\eta}_1 &= \frac{\eta_2 - l\xi_2}{\cos \xi_1}, \\
\dot{\eta}_2 &= g \sin \xi_1 - \frac{\eta_2 - l\xi_2}{\cos \xi_1} \xi_2 \sin \xi_1.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Управление (7) примет вид

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\frac{L_f^2 h(x) + k_1 L_f^1 h(x) + k_0 h(x)}{L_g L_f^{-1} h(x)} = \\
&= \frac{(m + M)g \sin \alpha - ml\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha + l(M + m \sin^2 \alpha)(k_1 \omega + k_0 \alpha)}{\cos \alpha},
\end{aligned} \tag{5.15}$$

где коэффициенты  $k_0$  и  $k_1$  таковы, что нулевое решение системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{\xi}_1 + k_1 \dot{\xi}_1 + k_0 \xi_1 = 0$$

асимптотически устойчиво. Например, можно взять  $k_0 = \mu^2$ ,  $k_1 = 2\mu$  для некоторого  $\mu > 0$ . Положение  $\xi_1 = \alpha = 0$ ,  $\xi_2 = \omega = 0$  будет асимптотически устойчиво. Подставив  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  в (14), получим уравнения нулевой динамики  $\dot{\eta}_1 = \eta_2$ ,  $\dot{\eta}_2 = 0$ . Получаем, что при данном выборе целевого многообразия ( $\alpha = 0$ ) и данной замене переменных уравнения нулевой динамики не являются асимптотически устойчивыми. При этом из  $\xi_1 \rightarrow 0$ ,  $\xi_2 \rightarrow 0$  получим, что  $\eta_2$  будет стремиться к константе. Из замены переменных следует, что это будет постоянная скорость движения тележки вдоль оси  $s$ .

Таким образом, под действием управления (15) угловое отклонение маятника стабилизируется в нуле вместе с угловой скоростью, но тележка продолжит двигаться с постоянной скоростью, зависящей от начальных условий всех переменных. Так проявляется отсутствие асимптотической устойчивости нулевой динамики при линеаризации обратной связи по данному выходу  $\alpha$ . Если цель управления будет выбрана другой, то нулевая динамика может оказаться устойчивой.

Теперь немного изменим постановку задачи и рассмотрим случай, когда в модель движения добавлена упругая сила и сила трения, как показано на правой части рисунка. Это сделано для того, чтобы нулевая динамика стала устойчивой. Действительно, применив ту же замену переменных (13), получим уравнения движения (их вывод оставляем читателю в качестве упражнения)

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= \frac{1}{(M + m \sin^2 \xi_1)l} [(m + M)g \sin \xi_1 - ml\xi_2^2 \cos(\xi_1) \sin \xi_1 - \cos \xi_1 u], \\
\dot{\eta}_1 &= \frac{\eta_2 - l\xi_2}{\cos \xi_1}, \\
\dot{\eta}_2 &= g \sin \xi_1 - \frac{\eta_2 - l\xi_2}{\cos \xi_1} \xi_2 \sin \xi_1 - \frac{1}{M + m \sin^2 \xi_1} [k\eta_1 + \varphi\eta_2].
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Выражение для линеаризующего управления останется без изменения. Подставив в последние два уравнения (16)  $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ , получим уравнения нулевой динамики

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\
\dot{\eta}_2 &= -\frac{1}{M}(k\eta_1 + \varphi\eta_2).
\end{aligned}$$

Теперь нулевая динамика асимптотически устойчива.

Будем говорить, что замена переменных  $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T(x)$ ,  $\xi \in R^r$ ,  $\eta \in R^{n-r}$ ,

$r < n$ , приводит систему аффинную (4) к нормальному виду, если в новых переменных дифференциальные уравнения (4) примут вид

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_r &= \varphi(z) + u\psi(z), \\
\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Тогда управление, приводящее замкнутую систему к линейному дифференциальному уравнению, примет вид

$$u(z) = -\frac{\varphi(z) + k_0\xi_1 + \dots + k_{r-1}\xi_r}{\psi(z)}, \quad (5.18)$$

и выбором коэффициентов  $k_1, \dots, k_r$  обеспечивается желаемая динамика, которая «навязывается» замкнутой системе. Подставив в выражение (18)  $z = T(x)$ , получим выражение для закона управления  $u(x)$ .

Прежде чем продолжить, вернемся к примеру (1) и сделаем новую замену переменных. Теперь замене подвергаются не только переменные состояния, но и независимая переменная  $t$ . Поскольку время  $t$  участвует в определении асимптотической устойчивости, то необходимо убедиться, что стабилизация системы в новых переменных, зависящих от новой независимой переменной, приводит к стабилизации в исходных переменных.

#### **5.4. Приведение модели движения колесного робота к нормальному виду.**

Перейдем от независимой переменной  $t$  к независимой переменной  $x$ . Производную по  $x$  будем обозначать символом  $'$ . Кроме этого введем переменные  $\eta = x$ ,  $\xi_1 = y$ ,  $\xi_2 = \operatorname{tg} \theta$ . Переменная  $\eta$  отвечает проекции целевой точки на заданную траекторию, которая в нашем случае просто совпадает с осью  $x$ . Переменная  $z_1$  есть боковое отклонение целевой точки от заданной траектории, совпадающая в нашем частном случае с величиной  $y$ . Предположим, что величина линейной скорости  $v$  положительна и на траекториях системы выполняется условие  $\cos \theta > 0$ , т.е. колесный робот не может быть ориентирован перпендикулярно заданной траектории, если он начал движение из начальной ориентации, соответствующей  $|\theta(0)| < \pi/2$ , и условие  $|\theta(t)| < \pi/2$  выполняется в начальный момент времени. Далее будет показано, что это предположение гарантируется синтезированным законом управления. Используя теперь замену переменных в (1) с учетом сделанных предположений, получим

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \xi_2, \\
\xi_2' &= \frac{u}{\cos^3 \theta} = u(1 + \xi_2^2)^{3/2}, \\
\eta' &= 1.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Выбор управления в виде

$$u(z) = -\frac{k_0 \xi_1 + k_1 \xi_2}{(1 + \xi_2^2)^{3/2}} \tag{5.20}$$

дает

$$\xi_1'' + k_1 \xi_1' + k_0 \xi_1 = 0. \tag{5.21}$$

Если коэффициенты выбраны так, что корни характеристического уравнения  $s^2 + k_1 s + k_0 = 0$  имеют отрицательные вещественные части, то из дифференциального уравнения (21) следует экспоненциальное убывание величин  $\xi_1 = y$  и  $\xi_2 = \operatorname{tg} \theta$ . Следовательно, если движение начато из начальной ориентации, в которой  $|\theta(0)| < \pi/2$ , то и на всем решении замкнутой управлением (20) системы (19) величина  $|\theta(x)|$  не примет значение  $\pm\pi/2$ .

Теперь попробуем обобщить этот прием и распространить его на случай систем общего вида.

Пусть удалось найти такую замену переменных  $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T(x)$ ,  $\xi \in R^r$ ,

$\eta \in R^{n-r}$ ,  $r < n$ ,  $T(0) = 0$ , что дифференциальные уравнения (4) принимают вид (17) и при этом первая (для определенности) компонента вектор-функции  $f_0(\eta, \xi)$  положительна в некоторой окрестности начала координат:  $f_{\eta, \xi} > 0$  в окрестности  $D$ ,  $0 \in D$ . После замены независимой переменной  $t$  на  $\eta_1$  дифференциальные уравнения (17) примут вид

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \xi_2, \\
\xi_2' &= \xi_3, \\
&\vdots \\
\xi_r' &= \bar{\varphi}(z) + u \bar{\psi}(z), \\
\eta' &= \bar{f}_0(\eta, \xi),
\end{aligned}$$



где символ ' означает дифференцирование по переменной  $\eta_1$ . Очевидно, что  $\bar{f}_{0,1}(\eta, \xi) \equiv 1$ . В рассмотренном выше примере (19) имеем  $n=3$ ,  $r=2$ ,  $\varphi(z)=0$ ,  $\psi(z)=(1+\xi_2^2)^{3/2}$ .

Управления синтезируется по той же формуле (18). Уравнения нулевой динамики  $\eta' = f_0(\eta, 0)$  могут быть устойчивы или неустойчивы. В случае системы (19) уравнения нулевой динамики, очевидно, неустойчивы.

### 5.5. Стабилизация ориентации квадрокоптера.

Рассмотрим еще один пример применения метода линеаризации обратной связью для стабилизации состояния системы. Схема метода будет применяться к исходным уравнениям движения. Мы не будем пытаться найти удобную замену переменных. Вместо этого мы запишем цель управления ( $y=0$ , см. (5)) в виде, удобном для применения метода.

Фюзеляж квадрокоптера представляет собой твердое тело, с которым связана система координат, называемая связанной. Выделено направление на «нос», ортогональное ему направление «направо», лежащее в горизонтальной плоскости платформы квадрокоптера. Направление «вниз» дополняет первые два до правой тройки.

Ориентация твердого тела измеряется относительно системы координат локального горизонта. Локальный горизонт определен осями «север», «восток», «вниз». Первая ось параллельна меридиану и направлена на север. Вторая ось направлена на восток вдоль параллели. Третья ось направлена вниз и дополняет первые две до правой тройки.

Ориентация связанной системы относительно локального горизонта определяется ортогональной матрицей  $Q$ . Любой трехмерный вектор может быть выражен в координатах связанной системы как  $x \in R^3$  и в координатах локального горизонта как  $X \in R^3$ . Тогда имеем  $X = Qx$ . Матрица  $Q$  может быть параметризована тремя углами поворота. Параметризация через углы «крен», «тангаж», «рысканье» выглядит следующим образом

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \sin(\phi) \sin(\theta) - \cos(\phi) \sin(\psi) & \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) - \cos(\psi) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

где  $\psi, \theta, \phi$  – углы рысканья, тангажа и крена соответственно.

Пусть желаемая ориентация, в которой нужно стабилизировать квадрокоптер (стабилизация положения в пространстве не рассматривается) задается матрицей  $Q^*$ . Наиболее часто встречающаяся желаемая ориентация задается желаемыми углами  $\psi^*, \theta^* = 0, \phi^* = 0$ , что означает плоское положение (плоскость «нос – направо» совпадает с плоскостью «север – восток») а угол  $\psi^*$  – некоторый заданный угол ориентации оси носа относительно севера. Цель управления состоит в обеспечении условия

$$Q = Q^*. \quad (5.23)$$

Другой способ задания условия (23) может быть записан в виде

$$P = Q^{*T} Q = I, \quad (5.24)$$

где  $I$  – единичная матрица. Действительно, с учетом ортогональности матриц  $Q$  и  $Q^*$  условия (23) и (24) эквивалентны. Матрица  $P$  также ортогональна. Более того, цель управления будет достигнута, если получится  $P = I$ . Наконец, введем в рассмотрение матрицу отклонения

$$\Delta = P - P^T, \quad (5.25)$$

которую можно рассматривать как меру отклонения матрицы  $P$  от  $I$  или, другими словами, текущей матрицы ориентации  $Q$  от требуемой матрицы  $Q^*$ . Эта матрица кососимметрична,  $\Delta^T = -\Delta$  и, следовательно,

$$\Delta = \delta^\times,$$

где  $\delta$  – трехмерный вектор  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$ ,  $\delta^\times$  означает операцию построения из вектора  $\delta$  кососимметричной матрицы

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_3 & \delta_2 \\ \delta_3 & 0 & -\delta_1 \\ -\delta_2 & \delta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом  $\Delta x = \delta \times x$  это векторное произведение векторов  $\delta$  и  $x$ .

Будем использовать условие

$$\Delta = 0 \quad (5.26)$$

как критерий достижения цели (23) или, что эквивалентно, (24). Действительно, умножив обе части равенства  $P - P^T = 0$  на  $P$  имеем с учетом ортогональности  $P$  условие  $P^2 = I$ . Последнее означает, что

$$P = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Если предположить, что угловое отклонение ориентации от желаемой лежат в пределах  $[-\pi/2, \pi/2]$  по всем углам, то единственным возможным случаем будет  $P = I$ . Итак, нужно управлять ориентацией (прикладывать моменты сил по осям связанной системы), чтобы удовлетворить условию (26).

Имеют место кинематические уравнения Эйлера, связывающие скорость изменения матрицы ориентации с вектором угловой скорости вращения твердого тела

$$\dot{Q} = Q\Omega, \quad \Omega = \omega^\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

где  $\omega$  – это вектор угловой скорости вращения твердого тела в проекциях на оси связанной системы. На теле закреплен датчик угловых скоростей, чувствительные оси которого совпадают с осями связанной системы. Таким образом, величины  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  измеряются.

Отклик угловой скорости вращения на момент внешних сил определяется динамическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 &= \tau_1, \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_3 - J_1) \omega_1 \omega_3 &= \tau_2, \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 &= \tau_3, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где  $J_1, J_2, J_3$  – моменты инерции твердого тела относительно осей связанной системы,  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  – проекции момента внешних сил, вращающих тело на оси связанной системы. Эти величины выступают в качестве управлений, которыми мы должны распорядиться для достижения цели (26).

Переходим к построению закона управления. Цель управления, записанная в виде алгебраического уравнения (26), не зависит явным образом от управлений  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ . Продифференцируем  $\Delta$  один раз по времени и проверим, зависит ли первая производная от управлений. Имеем

$$\dot{\Delta} = \dot{P} - \dot{P}^T = Q^{*T} \dot{Q} - \dot{Q}^T Q^*.$$

В последнем выражении предполагается, что  $Q^*$  от времени не зависит. С учетом (26) и (27) получаем

$$\dot{\Delta} = Q^{*T} Q \Omega - \Omega^T Q^T Q^* = P \Omega + \Omega P^T. \quad (5.29)$$

Здесь учтено, что  $\Omega^T = -\Omega$ . Выражение для  $\dot{\Delta}$  также не зависит явно от управлений. Продолжим дифференцировать  $\Delta$  и вычислим ее вторую производную от времени:

$$\ddot{\Delta} = Q^{*T} Q \Omega^2 + Q^{*T} Q \dot{\Omega} - \Omega^2 Q^T Q^* + \dot{\Omega} Q^T Q^* = P \Omega^2 + P \dot{\Omega} - \Omega^2 P^T + \dot{\Omega} P^T. \quad (5.30)$$

Матрица  $\Omega^2$  является симметричной (читателю предлагается в этом убедиться). Теперь видно, что выражение для второй производной цели зависит от управлений, поскольку в силу (28) имеем

$$\dot{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega}_3 & \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 & 0 & -\dot{\omega}_1 \\ -\dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 \omega_1 \omega_2 - \frac{1}{J_3} \tau_3 & \alpha_2 \omega_1 \omega_3 + \frac{1}{J_2} \tau_2 \\ \alpha_3 \omega_1 \omega_2 + \frac{1}{J_3} \tau_3 & 0 & -\alpha_1 \omega_2 \omega_3 - \frac{1}{J_1} \tau_1 \\ -\alpha_2 \omega_1 \omega_3 - \frac{1}{J_2} \tau_2 & \alpha_1 \omega_2 \omega_3 + \frac{1}{J_1} \tau_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \Xi + \bar{T} = \theta^\times + \bar{\tau}^\times, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\tau} = \begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_2 \\ \bar{\tau}_3 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

В последнем выражении использованы обозначения

$$\alpha_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1}, \quad \alpha_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2}, \quad \alpha_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}, \quad \bar{\tau}_i = \frac{\tau_i}{J_i},$$

$$\theta_1 = \alpha_1 \omega_2 \omega_3, \quad \theta_2 = \alpha_2 \omega_1 \omega_3, \quad \theta_3 = \alpha_3 \omega_1 \omega_2.$$

Теперь запишем дифференциальное уравнение, которому подчиним желаемую скорость убывания  $\Delta$ :

$$\ddot{\Delta} + 2\mu\dot{\Delta} + \mu^2\Delta = 0, \quad (5.32)$$

где  $\mu > 0$  заданная положительная константа. Корни характеристического уравнения

$$s^2 + 2\mu s + \mu^2 = 0$$

кратные и равны  $-\mu$ . Таким образом, величина  $\Delta(t)$  убывает экспоненциально.

Подставим в (32) выражения (25) и (29)–(31). Получим

$$P\Omega^2 + P(\Xi + \bar{T}) - \Omega^2 P^T + (\Xi + \bar{T})P^T + 2\lambda(P\Omega + \Omega P^T) + \lambda^2(P - P^T) = 0. \quad (5.33)$$

Это уравнение является линейным алгебраическим уравнением относительно трех внедиагональных элементов матрицы  $\bar{T}$ :  $\bar{\tau}_i$ ,  $i=1,2,3$ . Для произвольной квадратной  $3 \times 3$  матрицы  $M$  обозначим через  $u(M)$  вектор

$$u(M) = \begin{pmatrix} -M_{23} \\ M_{13} \\ -M_{12} \end{pmatrix},$$

т.е. операцию, обратную  $\times$ . Тогда, раскрывая скобки в выражении (33), получим линейное уравнение

$$\begin{pmatrix} P_{22} + P_{33} & -P_{21} & -P_{31} \\ -P_{12} & P_{11} + P_{33} & -P_{32} \\ -P_{13} & -P_{23} & P_{11} + P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_2 \\ \bar{\tau}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= u \left( -P\Omega^2 - P\Xi + \Omega^2 P^T - \Xi P^T - 2\lambda(P\Omega + \Omega P^T) - \lambda^2(P - P^T) \right) \quad (5.34)$$

относительно  $\bar{\tau}_i$ ,  $i=1,2,3$ , решив которое получаем управляющие моменты

$$\tau_i = J_i \bar{\tau}_i. \quad (5.35)$$

Выясним, каким образом управляющие моменты, полученные по формулам (34), (35), реализуются с помощью управления скоростью вращения пропеллеров.

На рис. 5.3 показана схема квадрокоптера. Лопасты пропеллеров развивают вертикальную подъемную силу и горизонтальную силу реакции. При угловой скорости  $\Omega_i$  вращения  $i$ -го пропеллера вертикальная подъемная сила равна

$$F_v = b\Omega_i^2,$$

а горизонтальная сила реакции равна

$$F_h = c\Omega_i^2,$$

где  $b$  и  $c$  – аэродинамические коэффициенты, зависящие от угла наклона лопастей пропеллеров.

Показанная на рис. 5.3 схема расположения винтов называется «X». Очевидно, что винты можно расположить и согласно схеме «+».

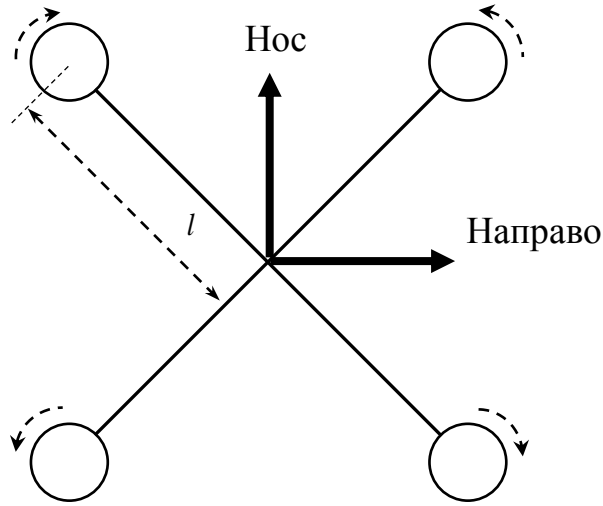


Рис. 5.3. Кинематическая схема квадрокоптера типа X

На рис. 5.3 стрелками показано направление вращения пропеллеров. Указаны две горизонтальные оси связанной системы координат. Длина каждого плеча равна  $l$ . Тогда с учетом показанного на рис. 5.3 положительного направления вращения вокруг каждой из осей связанной системы, получим

$$\begin{aligned}\tau_1 &= b \frac{\sqrt{2}}{2} l (\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2), \\ \tau_2 &= b \frac{\sqrt{2}}{2} l (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_4^2), \\ \tau_3 &= cl (\Omega_1^2 + \Omega_4^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2).\end{aligned}\tag{5.36}$$

Кроме того, в предположении, что суммарная подъемная  $F$  сила задана (в режиме «висения» она равна  $F = mg$  где  $m$  – это масса квадрокоптера, а  $g$  – это гравитационная постоянная), имеем

$$F = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2).\tag{5.37}$$

После определения моментов  $\tau_i$  по формулам (34), (35) решение уравнений (36), (37) дает угловые скорости вращения пропеллеров. Обозначим

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}\tau_1}{bl}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{2}\tau_2}{bl}, \quad r_3 = \frac{\tau_3}{cl}, \quad r_4 = \frac{F}{b}$$

и перепишем уравнения (36), (37) в виде

$$\begin{aligned}
\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2 &= r_1, \\
\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_4^2 &= r_2, \\
\Omega_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2 &= r_3, \\
\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2 &= r_4.
\end{aligned}$$

Просуммировав первое и второе уравнения, а также третье и четвертое, получим

$$\Omega_1^2 - \Omega_4^2 = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Omega_1^2 + \Omega_4^2 = \frac{r_3 + r_4}{2}.$$

Вычитая первое уравнение из второго, а третье из четвертого, получим

$$\Omega_2^2 - \Omega_3^2 = \frac{r_2 - r_1}{2}, \quad \Omega_2^2 + \Omega_3^2 = \frac{r_4 - r_3}{2}.$$

Решение полученной системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
\Omega_1^2 &= \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{4}, \quad \Omega_4^2 = \frac{-r_1 - r_2 + r_3 + r_4}{4}, \\
\Omega_2^2 &= \frac{-r_1 + r_2 - r_3 + r_4}{4}, \quad \Omega_3^2 = \frac{r_1 - r_2 - r_3 + r_4}{4}.
\end{aligned}$$

Если скорости вращения пропеллеров может принимать произвольные значения, то на этом решение задачи синтеза стабилизирующего управления заканчивается.

В данном разделе была рассмотрен и иллюстрирован примерами метод линеаризации обратной связью по выходу. Выход системы можно также интерпретировать как цель управления. Были рассмотрены системы с одним управлением и скалярным выходом. Читателю предлагается ознакомиться с применением метода линеаризации обратной связью к стабилизации систем со многими управлениями, примеры которых могут быть найдены в [61, 69, 74].



## § 6. Задачи и упражнения

### 6.1. Задача об автоматическом управлении скоростью автомобиля.

Рассмотрим упрощенную модель управления скоростью автомобиля. Пусть автомобиль движется с высокой скоростью по шоссе с непредсказуемым уклоном дороги. В таком случае необходимо учесть механические потери, аэродинамическое сопротивление и сопротивление, возникающее из-за уклона дороги. Необходимо поддерживать наименьшую среднюю мощность  $P$  с целью экономии топлива, оставаясь в рамках заданного диапазона скоростей. Уравнения модели имеют вид:

$$m\dot{x} = k_1 \frac{P}{x} - \gamma k_2 x^2 - \gamma k_3 x - \theta,$$

где  $x$  – скорость автомобиля,  $P$  – мощность,  $k_1, k_2, k_3$  – коэффициенты приведения размерности величин,  $m$  – масса автомобиля,  $\gamma = \text{sgn}(x)$ ,  $\theta$  – сопротивление, возникающее из-за уклона дороги.

**Задание.** Сформулировать задачу оптимального управления, изучить модель.

### 6.2. Задача о скорейшей остановке поезда на станции.

Рассмотрим задачу о поезде, движущемся по железной дороге. Задача состоит в том, чтобы привести поезд на станцию и остановить его там за кратчайшее время.

Положение поезда описывается действительной координатой начало отсчета соответствует станции. Будем считать, что поезд движется без трения, а мы управляем ускорением поезда, прикладывая ограниченную по модулю силу. Подберем единицы измерения так, чтобы максимальное по модулю ускорение было единичным. Получаем управляемую систему

$$\ddot{x}_1 = u, \quad x_1 \in R, \quad u = \pm 1,$$

Для этой системы имеем задачу быстродействия

$$x(0) = \bar{x}, \quad x(t_1) = 0, \quad t_1 \rightarrow \min.$$

**Задание.** Изучить модель, построить фазовый портрет с учетом оптимального управления.

### 6.3. Задача об экономной остановке поезда.

Рассмотрим поезд, движущийся по железной дороге. Задача состоит в том, чтобы остановить поезд в заданный момент времени с минимальным расходом энергии, которая предполагается пропорциональной интегралу от квадрата ускорения.

Получаем задачу оптимального управления:

$$\ddot{x}_1 = u, \quad x_1 \in R,$$

где

$$x(0) = \bar{x}, \quad x(t_1) = 0, \quad t_1 = \text{const},$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min.$$

**Задание.** Изучить модель, построить фазовый портрет с учетом оптимального управления.

### 6.4. Задача об оптимальном управлении для модели, описывающей функционирование системы отопления.

Рассмотрим упрощенную модель управления домашней климатической системой. Пусть имеется 4 режима работы установки, которые задаются таблицей 6.1.

Таблица 6.1. Режимы работы климатической системы

Режим работы	Потребляемая мощность, КВт	Выделяемая мощность $P$ , КВт
Нагрев 1	2	2
Нагрев 2	4	4
Охлаждение 1	2	-2
Охлаждение 2	4	-4

Примем внутренний объем  $V$  дома равным 250 кубических метров. В первом приближении уравнение имеет вид:

$$\dot{x} = \frac{P}{k_1 V},$$

где  $P$  – мощность нагрева/охлаждения,  $x$  – температура в помещении,  $k_1$  – объемный коэффициент теплоемкости воздуха, равный 1.3 КДж/м<sup>3</sup>. Учитывается, что, что тепловая энергия рассеивается через стены. Рассеиваемая мощность зависит от перепада температур в доме и на улице. Уравнение примет вид:

$$\dot{x} = \frac{P}{k_1 V} - k_2(x - \Delta x),$$

где  $k_2$  – заданный коэффициент теплопроводности стен,  $\Delta x$  – температура на улице.

**Задание:** сформулировать задачу оптимального управления для данной модели в условиях непредсказуемого изменения температуры на улице и изучить ее.

### 6.5. Задача об оптимальном управлении для модели (2.16).

Рассмотреть конкретизацию модели (2.16) раздела 2.3 для неоднородного поля тяготения  $mG$ . Пусть

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

**Задание 1.** Изучить модель оптимального управления для  $g=2x_1x_2$ .

**Задание 2.** Изучить модель оптимального управления для  $g=\sin(x_1)\cos(x_2)$ .

**Задание 3.** Изучить модель оптимального управления для  $g = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

### 6.6. Задача об оптимальной стабилизации нелинейной управляемой системы.

Рассмотреть задачу оптимальной стабилизации для системы вида

$$\frac{dx_1}{dt} = -\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)x_1 + x_1^3 + 2x_1u,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\left(1 + \frac{1}{t^3}\right)x_2 + x_2^2.$$

В качестве функций Ляпунова для подсистем выбрать функции:

$v_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$ ,  $v_2(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$ , а в качестве функции Ляпунова для исходной системы – функцию  $v(x) = v_1(x_1) + v_2(x_2)$ .

**Задание 1.** Найти для данной системы функцию  $B[v; t, x_1, x_2, u]$ .

**Задание 2.** Найти оптимальное управление и функцию  $\Psi(t, x_1, x_2)$ .

**Задание 3.** Найти условия, при которых функция  $\Psi(t, x_1, x_2)$  будет определено-положительной.

### **6.7. Упражнение на применение метода линеаризации обратной связи в задаче стабилизации верхнего положения перевернутого маятника на тележке без учета упругой силы и силы трения.**

Для модели перевернутого маятника на тележке, описанной в разделе 5.3, 1) проверить выполнение условий (5.10) наличия первых интегралов векторного поля; 2) выполнить дифференцирование переменных в соответствии с заменой (5.13) и алгебраические преобразования для получения уравнений (5.14).

### **6.8. Упражнение на вывод уравнений движения перевернутого маятника на тележке с учетом упругой силы и силы трения.**

В задаче стабилизации верхнего положения перевернутого маятника на тележке (раздел 5.3 пособия) учесть действие упругой силы и силы трения, с использованием замены переменных (5.13) и вывести соответствующие уравнения движения (5.16).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А.Ю.* Устойчивость движений неавтономных динамических систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. Ун-та, 2004.
2. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Устойчивость движений сложных систем. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002.
3. *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М.* Оптимизация динамики управляемых систем. М.: МГУ, 2000.
4. *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М.* Оптимальное управление движением. М.: Физматлит, 2005.
5. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
6. *Андреев А.С., Румянцев В.В.* О стабилизации движения нестационарной управляемой системы // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 18–31.
7. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. школа, 1998.
8. *Афанасьев В.Н., Преснова А.П.* Формирование алгоритмов оптимизации нестационарных систем управления на основе необходимых условий оптимальности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19. № 3. С. 153–159.
9. *Афанасьев В.Н., Фурасов В.Д.* Теория стабилизации и расчет систем с обратной связью. Учеб. пособие. Под общ. ред. проф. К.А. Пупкова. М.: Моск. ин-т электронного машиностроения, 1975.
10. *Барбашин Е.А.* О двух схемах доказательства теории от устойчивости по первому приближению // ДАН СССР. 1951. Т. 111. №1. С. 9–11.
11. *Барбашин Е.А., Скалкина М.А.* К вопросу об устойчивости по первому приближению // Прикладная математика и механика. 1955. Т. XIX. Вып 5. С. 623–624.
12. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление (линейная теория): Учебник. Под ред. В.А. Садовниченко. М.: Высш. шк., 2001.

13. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
14. *Братусь А.С., Волосов К.А.* Точные решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана для задач оптимальной коррекции с ограниченным суммарным ресурсом управления // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 68. Вып. 5. С. 819–832.
15. *Васильев С.Н.* К интеллектуальному управлению // Нелинейная теория управления и ее приложения. М.: Физматлит, 2000. С. 57–126.
16. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем// Сборник статей «Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН». Казань: Фолиант, 2011. Т.1. С. 23–81.
17. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных систем. М.: Наука, 1985.
18. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.
19. *Гальперин Е.А., Красовский Н.Н.* О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1963. Т.27. Вып. 6. С. 988–1007.
20. *Гостев В.И.* Нечеткие регуляторы в системах автоматического управления. Киев: Радіоматор, 2008.
21. *Громов Ю.Ю., Земской Н.А., Лагутин А.В., Иванова О.Г., Тютюнник В.М.* Специальные разделы теории управления. Оптимальное управление динамическими системами. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2007.
22. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
23. *Дружинина О.В., Масина О.Н., Щенникова Е.В.* Оптимальная стабилизация программного движения манипуляционных динамических систем // Динамика сложных систем. 2011. Т. 5. №3. С. 58–64.

24. Дружинина О.В., Масина О.Н. Методы анализа устойчивости динамических систем интеллектуального управления. М.: Изд. группа URSS, 2016.
25. Дружинина О.В., Масина О.Н., Петров А.А. Высокопараллельные алгоритмы обучения для нейросетевых моделей технических систем // Материалы V Международной научно-практической конференции «Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования», посвященной 70-летию со дня рождения профессора Ю.Н. Меренкова (Елец, 24 апреля 2019 г.). Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2019. С. 37–41.
26. Дружинина О.В., Масина О.Н., Петров А.А. Модель управления движением транспортной системы с учетом условий оптимальности, многозначности и вариативности // Транспорт: наука, техника, управление. 2017. № 4. С. 3–9.
27. Дружинина О.В., Масина О.Н., Тарова Е.Д. Анализ и синтез нелинейных динамических моделей с учетом миграционных потоков и управляющих воздействий // Нелинейный мир. 2019. Т. 17. № 5. С. 24–37.
28. Дружинина О.В., Щенников В.Н., Щенникова Е.В. Алгоритмы оптимальной стабилизации программного движения манипуляционной динамической системы // Нелинейный мир. 2012. Т.13. № 12. С. 932–937.
29. Дружинина О.В., Щенников В.Н., Щенникова Е.В. Условия и алгоритмы оптимальной стабилизации относительно части переменных многосвязных нелинейных управляемых систем // Динамика сложных систем. 2012. Т. 6. №3. С.154–158.
30. Дыхта В.А. Оптимальное управление. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013.
31. Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А. Применение метода неравномерных покрытий для глобальной оптимизации частично целочисленных нелинейных задач // ЖВМ и ВМ. 2011. Т.51. № 8. С. 1376–1389.
32. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967.

33. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи: управление при неопределенности. М.: Наука. Физматлит, 1997.
34. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.
35. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
36. *Игонина О.В., Дружинина О.В., Масина О.Н.* Анализ устойчивости динамических систем на основе методов интеллектуального управления и свойств линейных матричных неравенств. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2020.
37. *Каллан Р.* Основные концепции нейронных сетей. М.: Вильямс, 2001.
38. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
39. *Киселев Ю.Н.* Аналитическое конструирование регуляторов для нелинейных управляемых систем // Вестник МГУ. Сер. Вычисл. матем. и киберн. 1997. № 2. С. 28 – 31.
40. *Киселев Ю.Н.* Аналитическое конструирование регуляторов для нелинейных управляемых систем // Вестн. Московского ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1997. №2. С. 28–31.
41. *Косов А.А.* Об устойчивости сложных систем по нелинейному приближению // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 14323–1434.
42. *Краснощеченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МТГУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
43. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматиз, 1959.
44. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // В кн. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения; Дополнение 4. М.: Наука, 1966. С. 475–515.
45. *Кузенков О. А., Кузенкова Г.В.* Оптимальное управление системами авторепродукции // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 26–37.



46. *Масина О.Н.* Вопросы управления движением транспортных систем // Транспорт: наука, техника, управление. 2006. № 12. С. 10–12.
47. *Масина О.Н., Дружинина О.В., Рапопорт Л.Б.* Элементы теории устойчивости математических моделей управляемых систем. Учебное пособие. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2019.
48. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
49. *Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во МГУ, 2004.
50. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
51. *Ногин В.Д.* Введение в оптимальное управление. Учебно-методическое пособие. СПб: Изд-во «ЮТАС», 2008.
52. *Осипов Г.С.* Лекции по искусственному интеллекту. М.: Изд. Группа URSS, 2018.
53. *Охорзин В.А.* Численно-аналитическое решение задачи оптимального управления // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени М.Ф. Решетнева. Математика, механика, информатика. 2009. С. 6–8.
54. *Охорзин В.А., Сафонов К.В.* Теория управления: Учебник. Красноярск: Изд-во Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та, 2011.
55. *Петров А.А.* Алгоритмы поиска оптимальных траекторий для моделей управляемых технических систем // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (Москва, 24–28 апреля 2017 г.) Москва: РУДН, 2017. С. 330–332.
56. *Петров А.А.* Моделирование и построение алгоритма поиска оптимальных параметров управляемых динамических систем, описываемых

дифференциальными включениями // Нелинейный мир. 2017. Т. 15. № 4. С. 47–52.

57. *Петров А.А.* Оптимальное управление движением технической системы в условиях многозначности и вариативности // Материалы молодежной секции в рамках Третьей Международной научно-практической конференции «Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования» (Елец, 26 апреля 2017 г.). Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2017. С. 66–69.

58. *Петров А.А., Дружинина О.В., Масина О.Н.* Поиск оптимальных параметров движения для нелинейных динамических систем с многозначностью // Материалы молодежной секции в рамках IV Международной научно-практической конференции «Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования» (Елец, 25 апреля 2018 г.). Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2018. С. 79–85.

59. *Плас Дж. В.* Python для сложных задач. Наука о данных и машинное обучение. Санкт-Петербург: Питер, 2018.

60. *Платонов А.В.* Об устойчивости нелинейных сложных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 4. С. 41–46.

61. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. Учебное пособие. М.: ЛЕНАНД / Изд. группа URSS, 2019.

62. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 119–158.

63. *Посыпкин М.А.* Параллельный эвристический алгоритм глобальной оптимизации // Труды ИСА РАН, 2008. Т.32. С. 166–179.

64. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // Прикл. матем. и мех. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440–453.

65. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.

66. *Сахаров М.К.* Новый адаптивный метод мультимеметической глобальной оптимизации для слабосвязанных вычислительных систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2019. № 5. С. 95–114.
67. *Сахаров М.К., Карпенко А.П.* Меметические алгоритмы для решения задач глобальной нелинейной оптимизации. Обзор // [technomag.edu.ru](http://technomag.edu.ru): Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. Вып. 12. С.119–142.
68. *Синицын И.Н., Дружинина О.В., Белоусов В.В., Масина О.Н., Петров А.А.* Опыт разработки инструментально-методического обеспечения для решения задач моделирования нелинейных управляемых систем с применением технологий машинного обучения и отечественных программно-аппаратных средств// Нелинейный мир. 2019. Т. 17. №4. С. 5–19.
69. *Ткачев С.Б.* Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с использованием линеаризации по части переменных. Наука и образование. изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. № 10. 2011. С. 1–25.
70. *Уланов Б.В.* Об управлении нелинейным динамическим объектом // Автоматика и телемеханика. 1986. №6. С. 75–79.
71. *Уланов Б.В.* Об управлении нелинейными динамическими системами // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. №8. С. 1373–1378.
72. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник МГУ. 1959. № 2. С. 25–32.
73. *Хайкин С.* Нейронные сети. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006.
74. *Халил Х.* Нелинейные системы. Пер. с англ. Москва–Ижевск: ИКИ-РХД, 2009.
75. *Хитров Г.М.* К задаче стабилизации в критических случаях // Теория устойчивости и ее приложения. Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1979. С. 136–142.
76. *Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. 1-е изд. М.: Наука, 1990. 2-е изд., доп. М.: URSS, 2007.

77. Шильяк Д. Децентрализованное управление сложными системами. М.: Мир, 1994.

78. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Jacimovic, M., Masina O.N., Mijajlovic N. Problems of synthesis, analysis and optimization of parameters for multidimensional mathematical models of interconnected populations dynamics // Communications in Computer and Information Science (CCIS). Springer, 2020. V. 1145. P. 56–71.

79. Druzhinina O.V., Kaledina E.A., Masina O.N., Shchennikov V.N., Shchennikova E.V. Modeling of the multiply connected dynamical systems // Proceedings of the Selected Papers of the 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT (Moscow, Russia, November 5–9, 2018). New York: IEEE Xplore Digital Library, 2018. IEEE Catalog Number CFP 1863G-USB. P. 383–387.

80. Druzhinina O.V., Masina O.N., Petrov A.A. The synthesis of the switching systems optimal parameters search algorithms // Communications in Computer and Information Science (CCIS). Springer, 2019. V. 974. P. 306–320.

81. Druzhinina O.V., Shchennikov V.N., Schennikova E.V. Optimal stabilization of multiply connected dynamical systems// Proceedings of the VIII International Conference on Optimization Methods and Applications «Optimization and Applications» (OPTIMA–2017), Petrovac, Montenegro, October 2 – October 7, 2017. Published at <http://CEUR-WS.org> 10.11.2017. V. 1987. P. 181–186.

82. Ikeda M., Siljak D.D. Generalized decomposition of dynamic systems and vector Lyapunov functions // JEEE Trans. Autom. Control. 1981. AC–26. № 5. P. 1118–1125.

83. Isidori A. Nonlinear control systems: 3<sup>rd</sup> ed. London: Springer, 1995.

84. Liberzon D., Morse A.S. Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control systems magazine. 1999. V. 19. № 5. P. 59–70.

85. Masina O.N., Druzhinina O.V., Petrov A.A. Models for the control of technical systems motion taking into account optimality conditions // Proceedings of the VIII International Conference on Optimization Methods and Applications «Optimization and Applications» (OPTIMA–2017), Petrovac, Montenegro, October

2 – October 7, 2017. Published at <http://CEUR-WS.org> 10.11.2017. V. 1987. P. 386–391.

86. *McCulloch W.S., Pitts W.* A logical calculus of the ideas immanent innervous activity // Bulletin of Mathematical Biophysics. 1943. V. 5. P. 115–133.

87. *Plotnikova N.P., Fedosin S.A., Teslya V.V.* Gravitation search training algorithm for asynchronous distributed multilayer perceptron model // Lecture Notes in Electrical Engineering. 2015. V. 312. P. 417–423.

88. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man and Cyber. 1985. V. 15. P. 116–132.

89. *Vasilyev S.N., Novikov D.A., Bakhtadze N.N.* Intelligent control of industrial processes // Preprint of the 2013 IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control, Saint Petersburg State University and Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics, and Optics, Saint Petersburg, Russia, June 19–21, 2013. P. 49–57.

Учебное издание

Масина Ольга Николаевна,  
Петров Алексей Алексеевич,  
Дружинина Ольга Валентиновна,  
Рапопорт Лев Борисович

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

*Техническое исполнение – В.М. Гришин  
Книга печатается в авторской редакции*

Формат 60 x 84 1/16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.  
Печ.л. 7,4. Уч.-изд.л. 7,1.  
Тираж 500 Заказ 54

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии  
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»  
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1